

D. EYDOUX

Contribution à la technique de la houille blanche. Les mouvements de l'eau et les coups de bélier dans les cheminées d'équilibre ; sur divers systèmes hydrauliques à mouvement alternatif

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3^e série, tome 9 (1917), p. 147-285

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1917_3_9__147_0

© Université Paul Sabatier, 1917, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CONTRIBUTION A LA TECHNIQUE DE LA HOUILLE BLANCHE

LES MOUVEMENTS DE L'EAU ET LES COUPS DE BÉLIER

DANS LES CHEMINÉES D'ÉQUILIBRE ;

SUR DIVERS SYSTÈMES HYDRAULIQUES A MOUVEMENT ALTERNATIF

PAR

D. EYDOUX

Ingénieur des Ponts et Chaussées

Ingénieur Principal de la Voie, chargé des usines hydro-électriques aux Chemins de fer du Midi,
Chargé de conférences d'Hydraulique à l'Institut électrotechnique de Toulouse.

PRÉAMBULE

La présente étude se divise en deux parties bien distinctes :

Dans la première, j'étudierai les mouvements de l'eau et les coups de bélier dans les cheminées d'équilibre, travail auquel j'ai été conduit par les questions techniques en face desquelles je me suis trouvé au cours de ma carrière d'ingénieur. Cette question fait directement suite aux études de coups de bélier dans les conduites forcées que M. Camichel, professeur à la Faculté des Sciences et Directeur de l'Institut électrotechnique de Toulouse et moi avons faites en collaboration.

Elle m'a conduit à aborder sommairement l'étude de diverses surpressions que l'on constate dans les canalisations d'eau sous pression pour distribution d'énergie aujourd'hui si employées dans les usines, en particulier pour le forgeage et les diverses industries de guerre. Cet essai fera l'objet d'une deuxième partie.

PREMIÈRE PARTIE

Les mouvements de l'eau et les coups de bélier dans les cheminées d'équilibre.

Au cours des études que j'ai faites pour la construction d'usines hydro-électriques, j'ai été amené à envisager l'emploi fréquent de cheminées d'équilibre ou tubes piézométriques comme organes de protection des canalisations en charge contre les coups de bélier.

J'ai dû, pour les conditions où je me trouvais, en entreprendre l'étude théorique en l'orientant surtout en vue des applications techniques. J'exposerai ci-après les divers points que j'ai été amené à envisager et les résultats que j'ai obtenus.

CHAPITRE PREMIER

But et utilité des cheminées d'équilibre montées sur une canalisation d'eau sous pression.

[1] Des recherches entreprises en collaboration avec M. Camichel, professeur à la Faculté des Sciences et Directeur de l'Institut électrotechnique de Toulouse, nous ont montré que les coups de bélier, c'est-à-dire les variations de pression qui se produisent dans une conduite toutes les fois qu'il y a changement de régime, sont de deux catégories : on peut avoir, soit des ondes se propageant avec une vitesse finie, soit des oscillations en masse; les deux phénomènes peuvent d'ailleurs coexister⁽¹⁾. Je ne reviendrai pas sur ce point, me contentant pour cela de renvoyer à nos publications antérieures⁽²⁾.

(1) La distinction entre ces deux natures de phénomènes a été faite par M. Camichel. (Voir *C. R. de l'Académie des Sciences*, t. 161, 1915, pp. 343 et 412.)

(2) Voir en particulier : *Revue générale des Sciences*, n^{os} des 31 octobre et 15 novembre 1917 : *Les coups de bélier dans les conduites forcées*, par M. Camichel et D. Eydoux. Dans cet article, on trouvera tous les éléments fixant les points principaux de la question.

Les cheminées d'équilibre ou tubes piézométriques sont des tubes ouverts placés en certains points des conduites forcées et qui ont pour but de transformer en oscillations en masse les coups de bélier d'onde qui se produisent dans la conduite lors d'une manœuvre du distributeur.

Or on peut réduire dans de très grandes proportions l'amplitude des oscillations en masse, soit par l'emploi de cheminées déversantes, c'est-à-dire permettant l'évacuation de l'eau lorsqu'elle dépasse un certain niveau, soit, lorsqu'elles ne sont pas déversantes, par le choix judicieux du diamètre; on voit que l'on se trouve ainsi en présence d'un excellent dispositif de réduction des surpressions dues aux coups de bélier.

L'emploi de ces cheminées est d'ailleurs connu depuis longtemps, et il me sem-

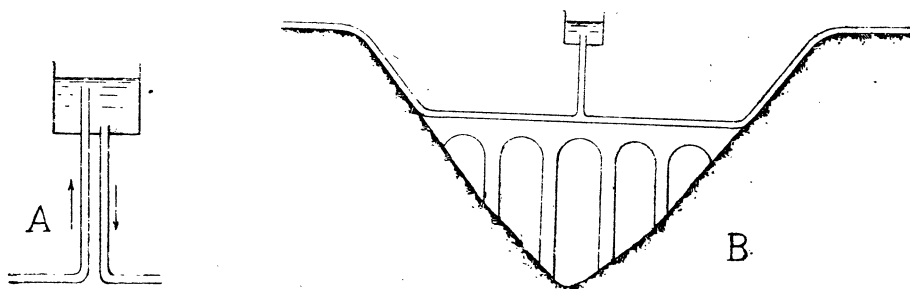


FIG. 1. — Cheminée d'équilibre sur aqueducs employée dans l'antiquité.

ble intéressant à ce propos de reproduire un passage de l'*Histoire de l'Architecture* de M. Choisy (tome I, p. 581), où se trouve mentionné l'usage qui en a été fait dès l'antiquité :

« Les Grecs ne connaissaient en fait d'aqueducs que des rigoles à pente continue :
 « les premiers, les Romains ont osé faire descendre à l'eau les flancs des collines
 « pour la faire remonter ensuite à contre-pente. Ils n'arrivèrent à ce résultat qu'en
 « emprisonnant l'eau dans des conduites de plomb, et le plomb ne résiste pas aux
 « fortes pressions : presque toujours, à la traversée des vallées, ils atténuent le
 « plongement (*fig. 1*) au moyen d'une rangée d'arcades qui rachètent en partie la
 « dépression à franchir; c'est le cas de l'aqueduc de Lyon.

« D'ailleurs, ils avaient observé les désastreux effets des coups de bélier; pour
 « y parer, et en même temps pour donner issue à l'air dissous, ils interrompaient
 « les parties plongeantes par des colonnes A où l'eau monte, prend un instant son
 « niveau naturel, puis redescend. Une avarie pouvait plus aisément se réparer dans des
 « conduites fractionnées, et des prises d'eau partielles se faisaient sans difficulté
 « dans des réservoirs situés en amont des colonnes montantes. Cet artifice, qui

« paraît avoir été pratiqué dès l'époque de Vitruve, se trouve réalisé à Pompei, et
 « aujourd'hui encore il est d'application courante dans tout l'Orient. Près d'Aspen-
 « dus, on voit au fond de la vallée où se développait l'aqueduc des rampes de ma-
 « çonnerie suivies de contre-pentes qui remplissaient l'office des colonnes d'évent
 « du croquis A. »

Il faut remarquer d'ailleurs, que ce système comporte un très haut degré de perfectionnement par un véritable fractionnement de la canalisation, mais qu'il n'est applicable que pour des débits relativement peu variables.

Les cheminées d'équilibre ne sont cependant pas susceptibles d'une application illimitée, et il serait tout à fait irrationnel de vouloir installer une cheminée de très grande hauteur, de 3 à 400 mètres par exemple, au voisinage du distributeur d'une turbine fonctionnant sous une pareille chute, avec une conduite de longueur correspondante (4 à 5 fois plus longue, par exemple, que la cheminée). En dehors des difficultés techniques presque insurmontables que l'on rencontrerait dans l'exécution, les résultats produits seraient insuffisants, comme nous le verrons plus loin. Mais la très grande extension que prennent aujourd'hui les usines hydro-électriques permet d'envisager deux cas très importants où l'installation d'une cheminée présentera une utilité de premier ordre.

[2] **Usines de basse chute.** — Considérons d'abord une usine de basse chute utilisant un débit important avec une canalisation très longue. Les surpressions au distributeur peuvent être très suffisamment déterminées dans la pratique par l'une des deux formules simples données par M. de Sparre, et que nous reproduisons ci-après ⁽¹⁾ :

Soient : L la longueur d'une conduite supposée d'épaisseur et de diamètre variables ;

γ_0 la pression statique à la base ;

l_i la longueur d'un tronçon de conduite de constitution constante ;

D_i le diamètre intérieur de ce tronçon ;

e_i son épaisseur ;

a_i la vitesse de propagation d'une onde dans ce tronçon donnée par la formule de M. Allievi :

(1) Pour les explications complémentaires sur ces formules, je renverrai le lecteur aux divers travaux déjà publiés et dont les plus importants sont, en dehors de celui que j'ai précédemment mentionné, une étude de M. Allievi, parue en 1904 dans la *Revue mécanique*, et les divers travaux de M. de Sparre publiés, au cours de plusieurs années, dans la *Houille blanche*, repris dans un numéro spécial du *Bulletin technique de la Société hydrotechnique de France*, et complétée par le même auteur, pour les conduites hétérogènes, par de nouvelles études publiées soit dans les *C. R. de l'Académie des Sciences*, soit dans le deuxième volume du *Congrès de la Houille blanche de 1914*.

$$a_i = \frac{9.900}{\sqrt{48.3 + K \frac{D_i}{e_i}}}$$

où K est égal à 0,5 pour l'acier et 1 pour la fonte ;

$\theta_i = \frac{l_i}{a_i}$ la durée de propagation d'une onde dans ce tronçon ;

v_0 la vitesse initiale de l'eau à l'extrémité aval de la conduite ;

a_m la vitesse moyenne de propagation d'une onde dans la conduite,

donnée par la formule : $a_m = \frac{L}{\sum \frac{l_i}{a_i}}$;

b_0 la surpression maximum au distributeur ;

T la durée de manœuvre du distributeur, cette manœuvre étant supposée faite suivant une loi linéaire et T étant plus grand que $\frac{2L}{a_m}$.

La surpression à la base, due aux coups de bélier d'onde, est donnée en pratique par les formules suivantes :

a) Si l'on a :

$$\frac{a_m v_0}{2g\gamma_0} \leq 1$$

$$b_0 = \frac{2Lv_0}{gT} \frac{1}{1 + \frac{a_m v_0}{2g\gamma_0} \left(1 - \frac{2L}{a_m T}\right)}$$

b) Si l'on a :

$$\frac{a_m v_0}{2g\gamma_0} \leq 1$$

$$b_0 = \frac{2Lv_0}{gT} \frac{1}{2 \left(1 - \frac{Lv_0}{2gT\gamma_0}\right)}$$

On voit que, pour une même valeur de T, b_0 est d'autant plus grand que L est plus grand et que, pour conserver à b_0 une même valeur relative, on sera obligé d'augmenter T dans des proportions considérables.

Nous allons fixer les idées par quelques chiffres en étudiant deux conduites de longueur analogue alimentant des usines de chutes très différentes.

a) USINE DE SOULOM (COMPAGNIE DU MIDI). — CHUTE DU GAVE DE PAU.

$$L = 335 \text{ m.}$$

$$y_0 = 120 \text{ m.}$$

$$D = 1^{\text{m}}20.$$

$$v_0 = 2^{\text{m}}80.$$

$$a_m = 945 \text{ m.}$$

$$\frac{a_m v_0}{2gy_0} = 1,13$$

$$b_0 = \frac{66}{T} \frac{1}{1 - \frac{0,4}{T}}$$

Si l'on veut que la surpression ne dépasse pas 20 % de la pression statique, soit 24 mètres, on trouve que le distributeur doit fermer en 4''5 environ.

b) USINE DE LA MINE DE PLOMB (1) [VALLÉE DE CAUTERETS].

$$L = 392 \text{ m.}$$

$$y_0 = 19^{\text{m}}50$$

$$D = 1^{\text{m}}15$$

$$v_0 = 2 \text{ m.}$$

Épaisseur moyenne : 4 m/m.

$$a_m = 710 \text{ m/sec.}$$

$$\frac{a_m v_0}{2gy_0} = 3,1$$

$$b_0 = \frac{79,8}{T} \frac{1}{1 - \frac{2,05}{T}}$$

Dans la même hypothèse d'une surpression égale à 20 % de la pression statique, soit 3^m70, on trouve que le distributeur doit fermer en 24''5; la durée de manœuvre doit donc être beaucoup plus grande, et les difficultés de réglage en sont très augmentées.

Ces usines de basse chute fonctionnent en général sur des rivières à courant libre

(1) Ce calcul n'est donné qu'à titre comparatif, car cette dernière usine est munie en réalité d'une cheminée d'équilibre.

sans réserves d'eau, car, pour créer une réserve d'énergie suffisante, il faudrait des réservoirs énormes et d'un prix de revient pratiquement trop élevé.

On aura alors intérêt à les munir de cheminées d'équilibre, placées le plus près possible du distributeur, et dont l'extrémité supérieure sera arasée aussi près que possible du niveau statique de l'eau. S'il y a variation de régime, la cheminée déversera et il y aura perte d'eau, ce qui est sans inconvénient sur une rivière à courant libre.

Le schéma de ces usines se présentera donc comme il est indiqué au croquis ci-après :

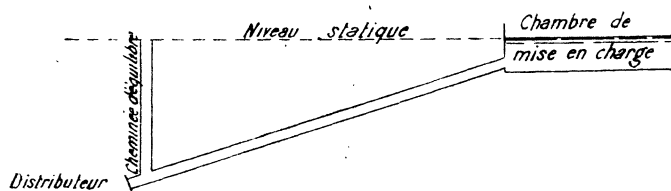


Fig. 2. — Schéma d'usine de basse chute avec cheminée d'équilibre sur le distributeur.

M. de Sparre a donné sur ce type de cheminées, dans la *Houille blanche* (n° de septembre 1904 et mai 1905), une étude complète sur laquelle je reviendrai plus loin. La conclusion à en retenir est que, pour que la surpression soit pratiquement égale à la hauteur de déversement, il faut que le diamètre de la cheminée soit voisin de celui de la conduite ou lui soit supérieur.

[3] **Usines de haute chute faisant un service de pointes.** — Dans les usines faisant un service de pointes, telles que les usines pour traction, force motrice ou éclairage, le débit demandé par les turbines est constamment variable, et l'on est pris dans le dilemme suivant : ou admettre que l'on calculera l'équipement de l'usine de façon que le débit naturel du cours d'eau suffise à assurer le service de pointes, ou créer des réserves de façon que le débit du cours d'eau corresponde au régime moyen, le débit supplémentaire de pointes étant fourni par les réserves et celles-ci se reconstituant lors des époques de faible charge. La création de ces réserves sera d'autant plus avantageuse que la chute est plus haute.

La première solution mène à des gaspillages d'eau considérables; elle est inadmissible dans les conditions économiques actuelles.

Pour réaliser la deuxième, on pourra créer les réserves immédiatement en tête des conduites forcées, en général à flanc de montagne; c'est extrêmement onéreux. Pour me placer dans des conditions normales, je dirai que jusqu'en 1914, le prix de revient variait entre 40 et 70 francs le mètre cube emmagasiné. C'est ce qui

a été fait à l'Usine de Soulom (chute du Gave de Cauterets), où un réservoir de 22.000 mètres cubes a été créé à l'aval du canal d'aménée, à 250 mètres de hauteur au-dessus de l'usine.

On peut aussi établir les réserves dans la vallée, dans des conditions beaucoup plus économiques, près de la prise d'eau en rivière; mais si on les relie à la chambre de mise en charge par un canal à écoulement libre, on est conduit à faire des manœuvres constantes des vannes de départ pour que l'eau arrive à l'aval en quantité égale à ce qu'absorbent les turbines. Ce réglage du débit est très délicat en raison du temps que met l'eau pour aller de la prise à la chambre de mise en charge; les manœuvres doivent être prévues d'avance, et toute erreur entraîne beaucoup de pertes d'eau et risque toujours de fausser complètement la marche du service, sans compter que les pointes peuvent se produire à un moment imprévu.

On peut éviter ces difficultés en faisant partir la canalisation en charge de la prise d'eau; mais une conduite forcée à pente régulière d'une pareille longueur (elle atteindrait en général plusieurs kilomètres) serait inexécutable au point de vue économique, et l'on rencontrerait en outre de grandes difficultés de réglage dues à la lenteur de manœuvre à imposer au distributeur du fait de cette longueur. La solution qui s'impose est alors la suivante: faire une canalisation, mais à faible pente (0,001 à 0,003), depuis la prise d'eau jusqu'à l'emplacement occupé habituellement par la chambre de mise en charge; établir en ce point une cheminée d'équilibre non déversante, ou ne déversant qu'à partir d'un certain niveau pour réduire les pertes d'eau; de là partiront les conduites forcées à forte pente arrivant aux turbines. Le schéma de ces usines sera le suivant:

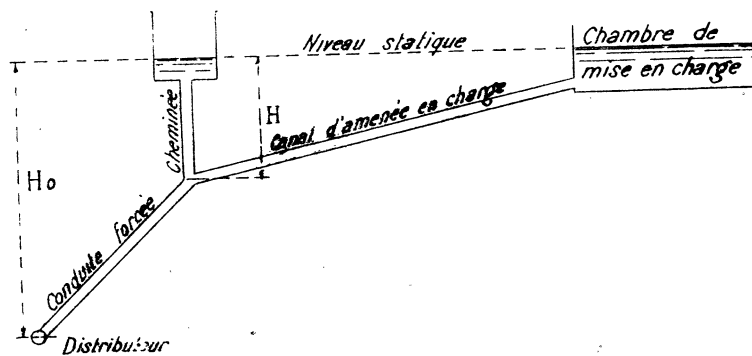


FIG. 3. — Schéma d'usine de haute chute avec cheminée d'équilibre à la jonction du canal d'aménée en charge et de la conduite forcée.

Nous verrons plus loin l'utilité de l'épanouissement.

Dans cette disposition, les variations de régime donneront lieu à des coups de

bélier d'onde dans la conduite forcée. Ceux-ci arrivant dans la cheminée d'équilibre, se transformeront en oscillations en masse dont on pourra en pratique réduire l'amplitude à une valeur assez faible par un choix approprié des dimensions de l'ouvrage: ainsi la partie amont de la canalisation n'aura plus à supporter, en dehors de la charge normale assez faible par suite de la réduction de la pente, que les surpressions dues à l'oscillation en masse et qui se répartissent linéairement le long du canal.

Dans ce système, les turbines demandent directement à la prise d'eau, à plusieurs kilomètres de distance, la quantité d'eau dont elles ont besoin.

C'est surtout ce type de cheminée que j'envisagerai particulièrement dans l'étude qui va suivre.

CHAPITRE II

Théorie simplifiée des cheminées d'équilibre pour les oscillations en masse.

[4] Je commencerai par donner une théorie simplifiée des cheminées d'équilibre en vue de quelques remarques que j'aurai à faire avant d'aborder une analyse plus complète.

Supposons une cheminée d'équilibre montée sur une conduite et le distributeur d'abord ouvert. L'eau, dans la cheminée, est au repos et son niveau supérieur correspond au niveau de l'eau dans le réservoir amont diminué de la perte de charge qui se produit dans la conduite entre ledit réservoir et l'extrémité aval. Dans l'explication approchée qui va suivre, nous négligerons cette perte de charge.

Supposons que l'on ferme assez rapidement le distributeur. L'eau qui est dans la conduite est animée d'une certaine vitesse et par suite possède une certaine force vive qui ne peut être annihilée instantanément. Elle communique donc sa vitesse, dans le sens de bas en haut, à l'eau contenue dans la cheminée d'équilibre. Cette eau monte au-dessus du niveau statique, et ce mouvement ascendant s'arrête quand la force vive a été entièrement utilisée à remonter le niveau de l'eau dans le tube à une certaine hauteur supérieure à celle de l'eau dans le réservoir amont. A ce moment, par suite de la pesanteur, cette eau tend à redescendre et communique à l'eau de la conduite une certaine force vive qui déplace cette eau en sens inverse du mouvement précédent, et ainsi de suite. Il y a donc théoriquement production d'oscillations autour d'une position d'équilibre stable.

C'est donc une oscillation en masse du liquide.

MM. Rateau et de Sparre ont étudié celles-ci; en se bornant au cas où elles ont une faible amplitude, ils ont montré pour les réservoirs d'air et les cheminées d'équilibre que la période de l'oscillation, indépendante de la vitesse de propagation de l'onde dans le liquide, peut se calculer, ainsi que la valeur maximum de la surpression au distributeur, par les lois ordinaires de la mécanique rationnelle.

M. Camichel a donné une solution analytique du même problème dans le cas d'oscillation de grande amplitude, en particulier pour les réservoirs d'air; il a montré que la surpression est répartie à chaque instant tout le long de la conduite suivant une loi linéaire, quelle que soit la rapidité de fermeture du distributeur; il

a en outre étudié le cas d'un nombre quelconque de réservoirs d'air répartis sur la conduite de façon quelconque. Il a vérifié expérimentalement les résultats trouvés par le calcul.

[5] La méthode suivie est celle employée par M. Rateau dans la *Revue mécanique de mai 1900* pour l'étude des surpressions dues aux réservoirs d'air, étude qui a été complétée par M. Camichel dans divers travaux (*).

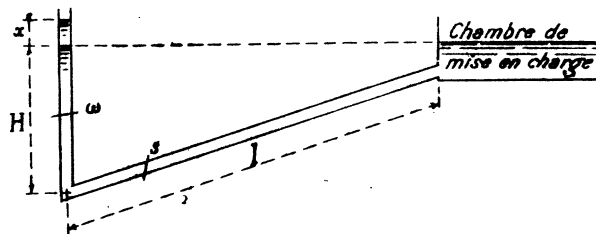


FIG. 4.

Je ferai, pour le moment du moins, les mêmes hypothèses que M. Rateau, en négligeant la compressibilité du liquide et la dilatation de l'enveloppe et en supposant la surélévation du liquide négligeable par rapport à la hauteur statique; mais, pour la commodité des résultats à obtenir, je chercherai la valeur même de la surélévation sans l'exprimer en fraction de la hauteur statique. Je négligerai aussi, dans le premier exposé, la perte de charge. Les notations que j'emploie dès à présent se retrouveront dans la suite.

Soient l la longueur de la conduite;

H la hauteur de l'eau dans la cheminée supposée verticale (*) quand on est en régime permanent;

S la section de la conduite;

ω la section de la cheminée;

v_0 et u_0 les vitesses dans la conduite et la cheminée;

v et u les vitesses à un instant quelconque dans la conduite et la cheminée;

x la surélévation du liquide à cet instant;

ϱ le poids spécifique du liquide.

(*) Voir en particulier : *Calcul des coups de bélier dans les conduites munies d'un réservoir d'air*, par C. Camichel (*Revue générale de l'Électricité*, n° du 12 mai 1917).

(*) Un calcul simple montre facilement le très léger changement à faire subir aux équations quand la cheminée est inclinée.

1° *Fermeture totale et instantanée.*

La demi-variation de force vive est :

$$\frac{\mathcal{C}}{g} \left[l S v dv + (H + x) \omega u du + \frac{\omega u^2}{2} dx \right].$$

En négligeant x devant H et en posant $\frac{l\omega}{S} + H = m$ et tenant compte d'autre part de l'équation de continuité $Sv = \omega u$, on obtient la nouvelle expression :

$$\frac{\mathcal{C}}{g} m \omega u du.$$

Le travail des forces (pression et pesanteur) est le suivant :

Une quantité de liquide $\mathcal{C} S v dt$ descend de H à 0 ;

Une quantité de liquide $\mathcal{C} \omega u dt$ monte de 0 à $H + x$.

Tenant compte de l'équation de continuité, on trouve finalement :

$$- \mathcal{C} \omega u x dt.$$

L'équation du mouvement est donc :

$$m du + g x dt = 0.$$

Or,

$$u = \frac{dx}{dt}.$$

D'où :

$$m \frac{dx}{dt} + g x = 0.$$

Tenant compte des conditions initiales $u = u_0$, $x = 0$, cette équation s'intègre par :

$$x = u_0 \sqrt{\frac{m}{g}} \sin \sqrt{\frac{g}{m}} t.$$

C'est un mouvement périodique avec montées et descentes symétriques autour du niveau statique.

Les oscillations en masse étant des oscillations autour d'une position d'équilibre stable, on peut aussi appliquer les équations de Lagrange; j'indiquerai de suite la façon d'aborder le calcul, car je l'utiliserai ultérieurement.

La force vive de l'ensemble est :

$$2\mathcal{C} = \frac{\mathcal{O}}{g} \left[lSv^2 + \omega(H+x)u^2 \right].$$

Définissons le travail virtuel. La pression due au réservoir amont est : $p_a + \mathcal{O}H$, p_a étant la pression atmosphérique; celle due à la cheminée est : $p_a + \mathcal{O}(H+x)$; le travail virtuel a alors pour expression — $\mathcal{O}\omega x\delta x$.

Négligeant alors x devant H , on retombe sur l'équation déjà donnée.

2° Cheminée déversante.

C'est le cas où on dispose la cheminée pour la faire déverser, c'est-à-dire qu'on arase son bord supérieur à une cote très faible au-dessus du niveau statique. De cette façon, dès que l'eau a atteint cette hauteur, elle déverse, empêchant ainsi, théoriquement du moins, la surpression de dépasser cette hauteur, à condition que le diamètre de la cheminée soit voisin de celui de la conduite.

Si l'on se trouve dans ce cas, le mouvement que je viens de définir commence à se produire; mais il y a un changement dès que survient le déversement. Soit a la hauteur qui y correspond. Le déversement se produira au bout du temps t , défini par l'équation :

$$t_1 = \sqrt{\frac{m}{g}} \arcsin \frac{a}{u_0} \sqrt{\frac{g}{m}}.$$

La vitesse dans la cheminée à ce moment sera :

$$u_1 = u_0 \cos \sqrt{\frac{g}{m}} t_1.$$

A partir de ce moment, c'est toujours la même masse d'eau qui est en mouvement, puisque chaque quantité arrivant du réservoir amont est compensée par une quantité égale déversée et la surpression reste constante jusqu'à ce que le déversement cesse.

Soient v' et u' les vitesses dans la conduite et dans la cheminée à un instant quelconque pendant que le déversement se produit.

La force vive est :

$$\bar{C} = \frac{1}{2} \frac{G}{g} \left[l S v'^2 + (H + a) \omega u'^2 \right], \quad \text{ou : } \frac{1}{2} \frac{G}{g} \left[l S v'^2 + H \omega u'^2 \right],$$

en négligeant a devant H .

Le travail résistant dû à la pesanteur correspondra à la montée d'une quantité d'eau $G \omega u'$ par seconde à la hauteur a .

On aura donc, en appliquant le théorème des forces vives et toutes simplifications faites :

$$\frac{du'}{dt} = - \frac{ga}{m},$$

$$u' = - \frac{gal}{m} + u'.$$

Le déversement cessera au bout d'un temps $t_2 = \frac{mu_1}{ga}$ en prenant l'époque t_1 pour origine des temps.

A partir de ce moment commencera un mouvement sinusoïdal de même période que le précédent, ce point étant un point haut de la sinusoïde, et il n'y aura plus de déversement.

Si l'on compare $\frac{1}{4} \sqrt{\frac{g}{m}}$ à $t_1 + t_2$, on trouve, pourvu que les conditions initiales soient telles qu'on atteigne le niveau a , que :

$$\frac{1}{4} \sqrt{\frac{g}{m}} < t_1 + t_2.$$

La courbe réelle devra donc se présenter comme ci-dessous.

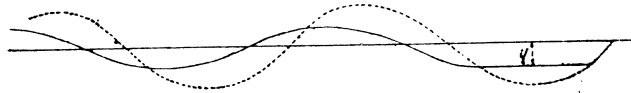


FIG. 5.

A cause des arrondis, on devra voir sur les diagrammes une sinusoïde dont la première boucle paraîtra plus longue que les boucles suivantes, et cette apparence devra s'accuser d'autant plus que v_0 était plus grand.

Il faut remarquer d'ailleurs que l'on obtient ainsi le mouvement de l'eau dans l'ensemble du système, mais non la véritable surpression (ou coup de bélier) à la base de la cheminée. Celle-ci est, en effet, égale à la montée de l'eau dans la cheminée augmentée des forces d'inertie dues à la colonne liquide en mouvement dans la cheminée. Je la désignerai par X , réservant la lettre ξ aux coups de bélier dus aux ondes.

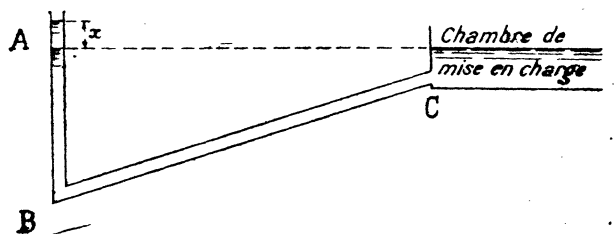


FIG. 6.

Étudions le mouvement de l'eau dans la conduite (partie B C); on a (équation de Rateau) :

$$l \frac{dv}{dt} = - X,$$

ce qui définit bien la répartition linéaire dans la conduite.

Nous avons de même dans la cheminée (partie A B) :

$$(H + x) \frac{du}{dt} = X - x.$$

D'où l'on déduit, avec l'équation de continuité $Sv = \omega u$,

$$X = \frac{l\omega x}{l\omega + (H + x)S}.$$

La surpression est donc toujours inférieure à x en valeur absolue. Elle sera égale à x si l'on néglige $(H + x)S$ devant $l\omega$.

3^e Fermeture lente.

Cette question a été entièrement traitée, toujours suivant les hypothèses de M. Rateau, par M. de Sparre, dans le numéro de septembre 1904 de la *Houille blanche* (1).

La particularité de cette étude réside dans le fait suivant : M. de Sparre tient compte de la perte de charge dans la cheminée; ce phénomène, en effet, constitue une sorte de frottement qui empêche l'eau de prendre de suite, dans la cheminée, la vitesse nécessaire pour pouvoir appliquer l'équation de continuité. On voit alors que le fonctionnement de la cheminée sera d'autant moins efficace que le frottement y sera plus grand, c'est-à-dire que son diamètre sera plus petit; la force vive ne servira donc pas toute à élever l'eau dans la cheminée, mais créera une surpression supplémentaire.

Je me bornerai à donner les formules trouvées par M. de Sparre.

En conservant les mêmes notations que précédemment et en y ajoutant les suivantes :

l_1 , longueur de la cheminée,

τ , durée de la fermeture supposée linéaire,

$$n = \frac{lv_0}{g\tau H} \quad \lambda = \frac{l\omega}{l_1 S}$$

δ , diamètre de la cheminée,

a , différence entre le niveau de la cheminée en charge et le niveau de déversement,

b , le coefficient $0,000507 + \frac{0,00001294}{\delta}$ provenant de la perte de charge dans la cheminée,

(1) Cette étude est d'ailleurs précédée d'une autre, où M. de Sparre étudie le coup de bélier en fermeture lente proportionnelle au temps sans compressibilité de l'eau ni élasticité de la conduite et sans interposition d'aucun système élastique.

On conçoit, en effet, que si la fermeture se fait en un temps appréciable, la force vive de l'eau étant annihilée en un temps fini, donne lieu à une surpression également finie.

M. de Sparre a trouvé, dans ce cas, pour la valeur maximum du coup de bélier :

$$\frac{lv_0}{g\tau} \left(1 + \frac{n}{2} + \frac{n^2}{8} \right),$$

où n est donné par la formule : $\frac{lv_0}{g\tau H}$, τ étant la durée de la manœuvre de la vanne.

Les formules dérivant de la théorie de M. Allievi donnent des résultats plus exacts et sont plus généralement employées.

M. de Sparre admet que la charge à la partie inférieure de la cheminée est $H_1 = H + \mu X$, où μ est une constante qu'il détermine en écrivant qu'à la fin de la fermeture H_1 est égal à $H + a$ augmenté de la perte de charge $\frac{4l}{\delta} bu_1^2$, u_1 étant la valeur de u à ce moment.

Il trouve ainsi que μ est la racine comprise entre 0 et 1 de l'équation :

$$0 = \left[\frac{4l^2 b}{H\delta l_1} v_0^2 + n\lambda + \frac{a}{H} \lambda^2 \right] (1 - \mu)^2 + \left[n \left(1 + \frac{n}{2} \right) - n\lambda + \frac{2a}{H} \lambda \right] (1 - \mu) - n \left(1 + \frac{n}{2} \right) + aH.$$

En posant :

$$p = \frac{n}{1 + \lambda \left(1 + \frac{n}{2} \right)},$$

On trouve, pour la valeur maximum de la surpression :

$$Hp \left(1 + \frac{p}{2} \right).$$

M. de Sparre en déduit que si la cheminée a un diamètre voisin de celui de la conduite, la surpression est réduite à la hauteur a ; sinon, elle conserve une valeur se rapprochant de plus en plus de celle qui existe dans le cas où il n'y a pas de cheminée. (Voir note précédente.)

Par exemple, le coup n'est diminué que de 15 % si le diamètre de la cheminée est le dixième de celui de la conduite.

Il était d'ailleurs également visible que, dans le cas d'une cheminée non déversante, où l'amplitude du mouvement est donnée par : $\frac{T_1}{2\pi} \frac{Sv_0}{\omega}$, qui devient, en prenant pour T_1 l'expression simplifiée :

$$v_0 \sqrt{\frac{HS}{g\omega}},$$

on a intérêt, pour la fermeture instantanée, à avoir le rapport $\frac{S}{\omega}$ aussi petit que possible, par conséquent à agrandir le diamètre de la cheminée.

Je supposerai, implicitement, dans ce qui suit, que le diamètre de la conduite est dans un rapport convenable avec celui de la cheminée, 1/3 au moins.

4° Ouverture ou fermeture partielle par une manœuvre instantanée.

La variation de force vive est la même qu'auparavant, mais l'équation de continuité devient, en désignant par q le débit qui sort par le distributeur :

$$Sv = q + \omega u.$$

Soit H_0 la hauteur du niveau normal de l'eau au-dessus du distributeur que nous ne supposons pas forcément placé au voisinage du point d'insertion de la cheminée sur la conduite, soit σ la section de la conduite à l'aval du point d'insertion et w la vitesse dans cette portion.

On aura également :

$$Sv = \sigma w + \omega u.$$

L'expression de la variation de force vive devient alors :

$$\frac{\mathcal{C}}{g} \left[\frac{L}{S} (q + \omega u) (dq + \omega du) + \omega u du \right],$$

ou, en faisant une nouvelle approximation qui consiste à négliger la variation de force vive dans la cheminée par rapport à celle, beaucoup plus grande, qui a lieu dans la conduite :

$$\frac{\mathcal{C}}{g} \frac{L}{S} (q + \omega u) (dq + \omega du).$$

Le travail des forces se compose des mêmes termes que précédemment, avec un terme additionnel dû au déplacement d'une quantité d'eau σw pendant le temps dt , en sens inverse d'une pression $\mathcal{C}(H + x)$ (*).

On aura donc :

$$\begin{aligned} d\mathcal{C} &= \mathcal{C}SHv dt - \mathcal{C}\omega u(H + x)dt - \mathcal{C}\sigma w(H + x)dt \\ &= -\mathcal{C}(\omega u + q)dt, \end{aligned}$$

et l'équation du mouvement est :

$$\frac{L}{S} (dq + \omega du) + \mathcal{C}x dt = 0.$$

(*) Avec les approximations faites, nous prenons $x = X$.

Soit q_1 la quantité d'eau qui s'écoule sous la charge H_0 par l'ouverture *finale* du distributeur en régime normal, et v_1 la vitesse correspondante dans la conduite.

On a :

$$q_1 = \lambda \sqrt{2gH_0} = Sv_1.$$

Sous la charge $H_0 + x$, on a :

$$q = \lambda \sqrt{2g(H_0 + x)},$$

ou, en développant en série et en ne gardant que les deux premiers termes, x étant très petit vis-à-vis de H_0 :

$$q = Sv_1 \left(1 + \frac{x}{2H_0} \right)$$

$$dq = \frac{Sv_1}{2H_0} dx.$$

Finalement, on obtient, en posant encore, par suite de l'approximation faite, $\frac{I\omega}{S} = m$:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{lv_1}{2H_0} \frac{dx}{dt} + gx = 0,$$

qui s'intègre par :

$$x = Ae^{-\frac{Sv_1}{4mH_0}t} \sin \left(\sqrt{\frac{g}{m} - \frac{S^2v_1^2}{16\omega^2H_0^2}}t - \varphi \right).$$

C'est un mouvement amorti de période un peu plus longue, mais très voisine de $2\pi \sqrt{\frac{m}{g}}$, car le terme $\frac{S^2v_1^2}{16\omega^2H_0^2}$ est très petit par rapport à $\frac{g}{m}$. S'il n'en était pas ainsi, on pourrait n'avoir que des termes en exponentielle, et par suite le mouvement sinusoïdal n'existerait pas, le retour à la position d'équilibre se faisant au bout d'un temps infini. Ce cas ne se rencontre pas en pratique dans la limite des hypothèses faites.

Je ferai ici une remarque : le terme d'amortissement n'existe que parce que l'on a supposé g variable avec la charge; si ce fait n'existait pas, le terme amortisseur disparaîtrait. Il en résulte que plus x est faible par rapport à H_0 , plus l'amortissement est faible, et il sera, par suite, beaucoup moins sensible pour les cheminées placées à l'origine amont de conduites forcées où la quantité H_0 qui commande l'écoulement est très grande.

Nous allons chercher maintenant à fixer les constantes d'après les données initiales.

Si c'est une manœuvre de fermeture, nous avons, au moment même de cette manœuvre : $q = q_1$, $v = v_0$, $x_0 = 0$.

On en tire sans ambiguïté :

$$Sv_0 = q_1 + \omega u_0;$$

d'où :

$$z = 0.$$

$$\Lambda = u \frac{1}{\sqrt{\frac{g}{m} \frac{S^2 v_1^2}{16\omega^2 H_0^2}}}.$$

Si c'est une ouverture, on aura bien $q = q_1$; mais quelles seront alors les valeurs initiales de v_0 et de u_0 ? Si l'on suppose $v_0 = 0$ (ou constant si l'on fait une simple augmentation d'ouverture), c'est admettre que le débit supplémentaire est fourni tout entier au début par la cheminée. On ne peut admettre $u_0 = 0$: ce serait dire qu'il n'y a aucun mouvement dans la cheminée, et les essais que nous avons faits montrent qu'il n'en est pas ainsi. Il y a là une difficulté que nous laisserons en suspens pour le moment.

Il faut maintenant bien nous rendre compte des circonstances dans lesquelles nous nous sommes placés. J'ai indiqué, au fur et à mesure des calculs, les approximations faites et les hypothèses admises. Il en est cependant une qui est implicite et dont je n'ai pas encore parlé; j'ai supposé que l'eau primitivement au repos dans la cheminée se mettait brusquement en mouvement. Que se passe-t-il en réalité?

[6] Il nous reste donc deux points à élucider. Comment se répartit le débit entre la cheminée et la conduite au moment d'une ouverture? Comment se produit la mise en mouvement de l'eau dans la cheminée?

Il résulte des diagrammes relevés (voir ci-après) que l'oscillation en masse existe bien; mais, si l'on regarde le début du phénomène, on constate sur les premières sinusoïdes des surpressions greffées qui, comme nous le verrons plus loin dans une analyse plus serrée, sont dues aux coups de bélier d'onde. Si la théorie des ondes est exacte, et toutes les expériences faites jusqu'à ce jour et confirmées par les travaux récents que MM. Camichel, Gariel et moi avons faits sur la question montrent qu'il en est bien ainsi, le phénomène doit commencer par la production d'ondes. Je chercherai à montrer, au moins d'une façon approchée, dans ce qui va suivre, comment ces ondes se transforment en un mouvement de masse.

Auparavant, j'indiquerai les vérifications numériques faites des formules précédentes, au moins quant à la durée de la période.

Essais d'oscillations en masse faits sur une conduite industrielle avec cheminée d'équilibre (Usine de la Mine de plomb).

[7] Les expériences faites par M. Camichel à l'Institut électrotechnique de Toulouse lui ont permis de constater l'existence des oscillations en masse dues à des poches d'air, et, quand ces poches sont suffisamment grandes par rapport à la conduite, les formules résultant de la théorie de M. Rateau lui ont donné des résultats concordants entre les périodes calculées et les périodes directement observées (1).

Les diagrammes que nous avons relevés ensemble à l'Usine de la Mine de plomb nous ont permis de vérifier également ces lois dans le cas d'une cheminée d'équilibre.

Les constantes relatives à cette conduite sont les suivantes :

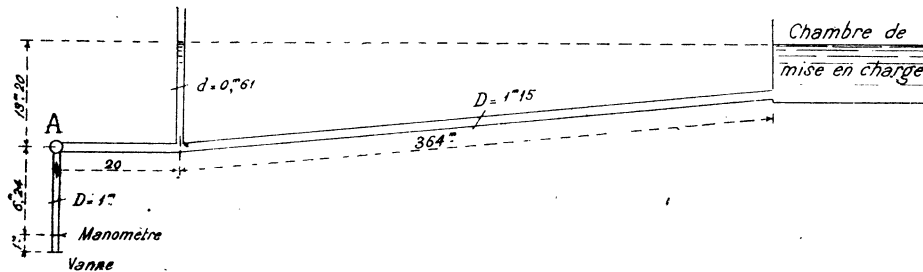


FIG. 7. — Schéma de l'Usine de la Mine de plomb.

Au point A existe un collecteur horizontal de 3 mètres de longueur, perpendiculaire à la conduite qui aboutit en son milieu. D'un côté part une canalisation verticale spéciale à la turbine d'une puissance de 300 chevaux environ; de l'autre côté, existe une tubulure d'attente pour permettre de placer éventuellement une deuxième turbine.

La prise du manomètre est placée à 1 mètre au-dessus de la vanne-distributeur.

On voit que l'on a, d'après le croquis ci-dessus, les données suivantes pour le calcul de l'oscillation en masse :

$$S = \frac{\pi}{4} \times 1,15^2 = 1^m,039 \quad \omega = \frac{\pi}{4} \times 0,61^2 = 0^m,292$$

$$H = 13^m,20$$

$$\frac{l\omega + HS}{gS} = 11^m,773$$

(1) Voir C. R. de l'Académie des Sciences. — C. Camichel. Sur les coups de bélier, Oscillations en masse, t. 161, 1915. p. 343.

d'où :

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{l_0 + S}{gS}} = 21^{\text{''}}.54.$$

J'ai relevé spécialement, pour l'étude des oscillations à longue période due à la cheminée d'équilibre, les figures 8 à 16 qui ont été prises dans des conditions diverses de manœuvre du distributeur et de vitesse d'enregistrement et dont on trouvera plus loin la reproduction.

La hauteur de déversement mesurée sur les diagrammes originaux est de 0 m. 40 et correspond bien à la hauteur mesurée sur place qui était ce jour-là, en raison du niveau de l'eau à la chambre de mise en charge, de 0 m. 43.

Chaque diagramme porte en outre l'enregistrement du temps.

Les manœuvres ont consisté, la turbine ayant été préalablement calée, à provoquer des ouvertures et fermetures par la manœuvre à la main, aussi brutale que possible, du volant commandant la vanne-distributeur.

Avant de passer sur quelques remarques que suggère leur examen, je ferai tout d'abord observer que ces diagrammes ont été pris avec un manomètre ordinaire Bourdon, très sensible, dont les mouvements étaient amplifiés par une longue aiguille en aluminium. Un pareil système ayant une inertie très marquée, il ne faut pas compter sur ces graphiques pour étudier les petites oscillations à courte période que l'on voit inscrites au début de chaque diagramme et qui ne sont autres que des coups d'onde, auxquels se superposent quelques oscillations à courte période dues à des poches d'air renfermées dans la conduite qui avait été vidée la veille pour la pose des robinets d'essai, et qui, par suite, était imparfaitement purgée. Il y a de plus quelques inscriptions parasites dues à l'inertie propre du système enregistreur.

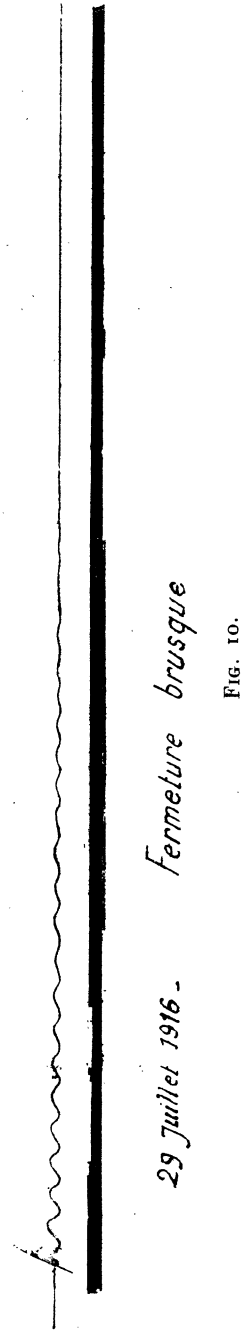
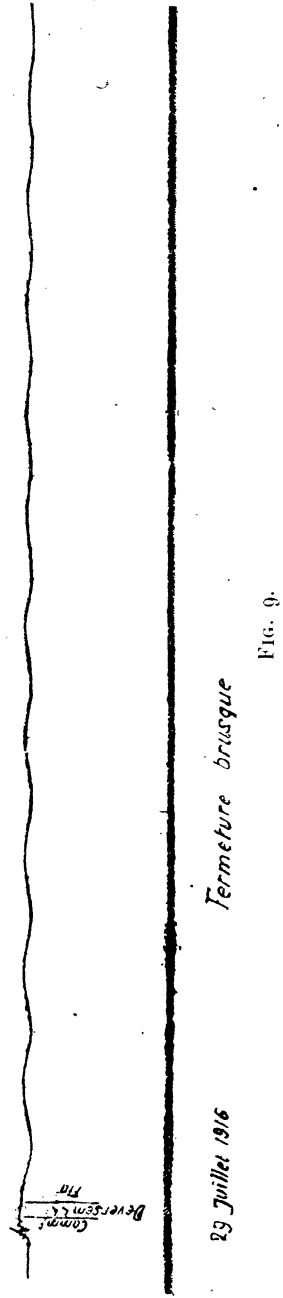
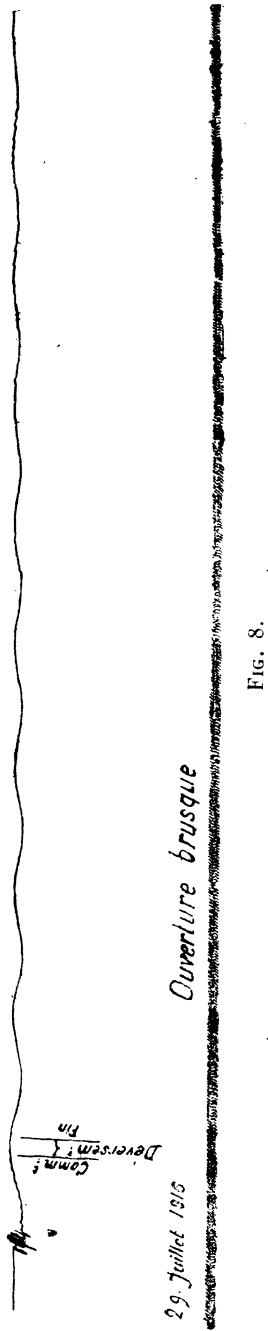
Par contre, un pareil instrument, à grande amplification, convient très bien pour les oscillations faibles et à longue période.

Je reviendrai, au chapitre suivant, sur les coups d'onde, et je me contenterai, sauf sur un point, de considérer les coups d'oscillation dus à la cheminée, qui apparaissent de façon très nette.

a) Les coups d'onde et les oscillations à courte période s'amortissent très vite, dès avant la fin de la première oscillation complète due à la cheminée.

b) Les coups d'oscillation durent au contraire très longtemps. Sur la figure 10, on peut en compter vingt représentant une durée totale approximative de 7 minutes 12".

c) La durée d'oscillation calculée est de 21^{''}.54.



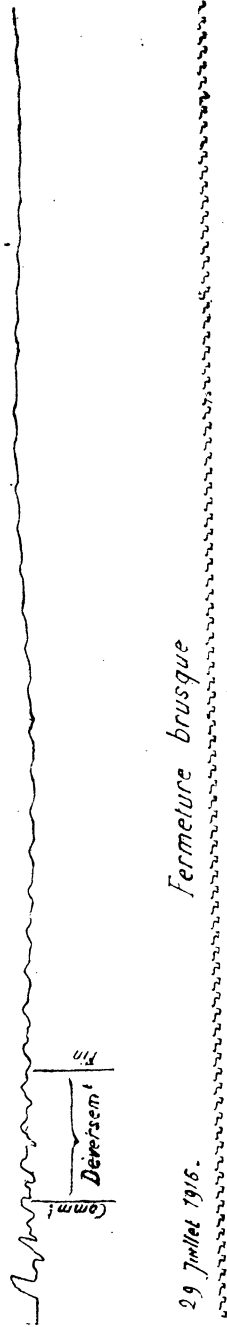


FIG. 11.

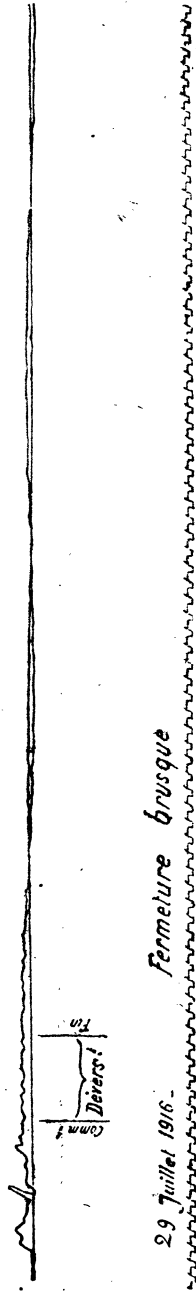


FIG. 12.

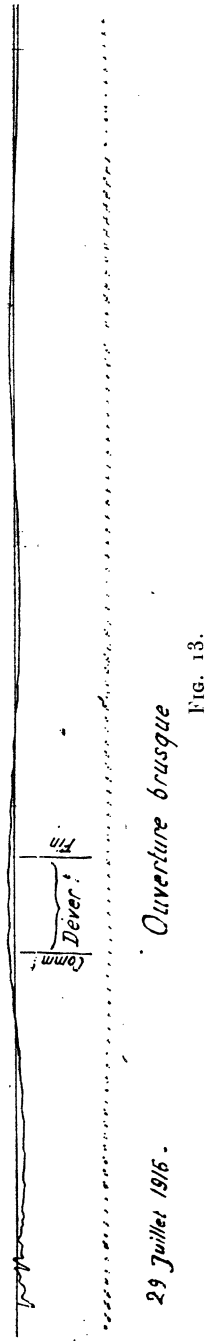


FIG. 13.

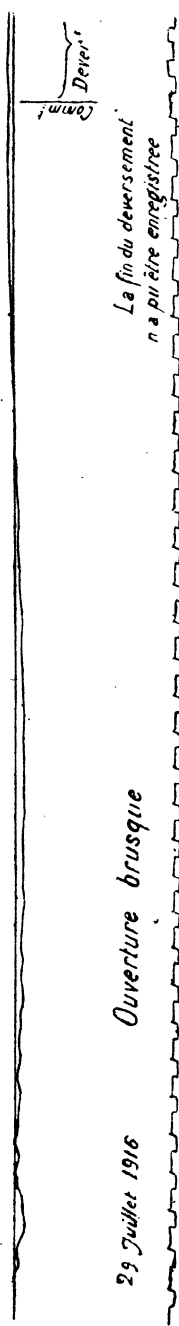


FIG. 14.

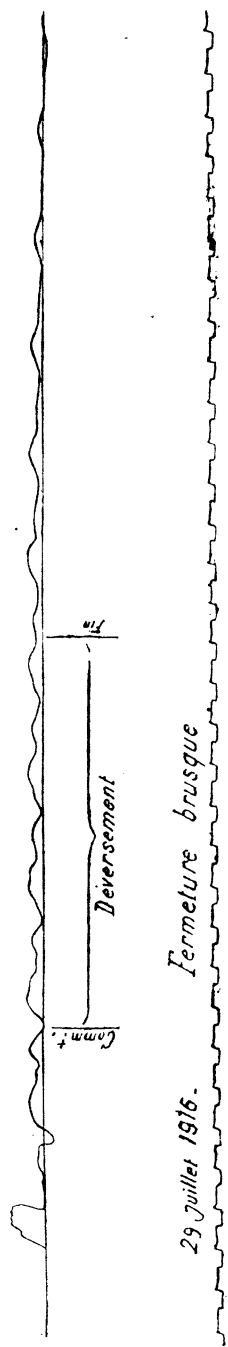


FIG. 15.

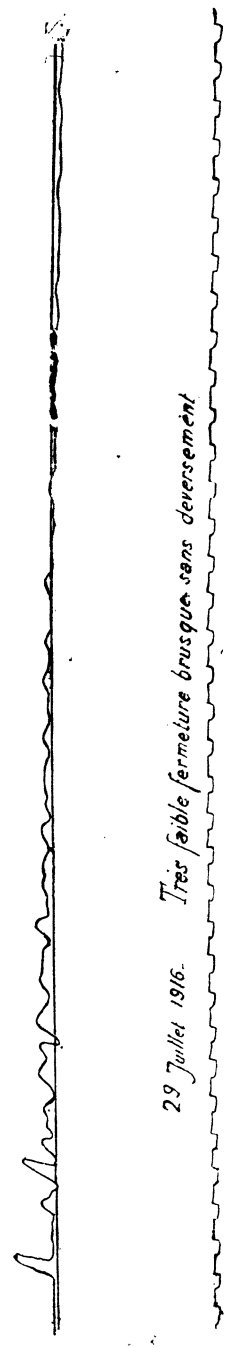


FIG. 16.

Les mesures donnent :

	Diagrammes :	
Fig. 12 : (1 oscillation)	21"50	21"50
Fig. 13 : (1 oscillation)	21"00	21"00
Fig. 14 : (1/2 oscillation)	11"25	22"50
Fig. 15 : (1/2 oscillation)	10"5	21"00
		21"66
	Moyenne	21"66

La concordance avec le calcul est donc satisfaisante.

d) Quand il y a déversement, la demi-oscillation pendant laquelle il se produit est plus longue que les autres.

Sur la figure 12, la demi-oscillation où se produit le déversement dure 12"25; sur le diagramme 13, où le déversement était faible, elle dure 11"75; la première demi-oscillation y est presque du même ordre de grandeur, car si rapide que soit la manœuvre, elle a cependant une durée appréciable.

Le déversement se produit bien au moment prévu, c'est-à-dire dans la première demi-oscillation pour une fermeture; dans la deuxième, pour une ouverture.

e) Les oscillations prennent naissance dès la modification du régime. Ce n'est pas un mouvement d'ensemble se produisant après coup par suite de frottements ou de viscosité du liquide. C'est un phénomène nettement défini suivant les lois de la Mécanique rationnelle.

CHAPITRE III

Coexistence des coups de bélier d'onde et des oscillations en masse.

[8] Les relevés faits à l'Usine de la Mine de Plomb (Vallée de Caunterets), et que nous avons interprétés dans le chapitre précédent, montrent l'existence de l'oscillation en masse pour les cheminées d'équilibre. Ils indiquent aussi des oscillations qui, comme nous le verrons plus loin, sont dues à des coups de bélier d'onde.

Les deux phénomènes coexistent donc. Nous allons chercher à nous rendre compte comment une même cause, la manœuvre du distributeur, donne lieu à deux effets.

M. Allievi a le premier entrevu cette coexistence. Après avoir traité, dans l'étude dont j'ai déjà parlé, de l'influence des réservoirs d'air sur les coups de bélier d'onde, il s'exprime ainsi :

« Les formules définissent très clairement l'influence de la chambre à air sur la loi de charge..... Après avoir atteint le maximum déterminé par les formules (précédentes), la charge prend une allure oscillatoire asymptotique au nouvel état de régime dont la période et l'amplitude sont des fonctions des constantes caractéristiques du tuyau ainsi que la dimension de la chambre à air, mais les difficultés analytiques en rendent l'étude presque inabordable.

« Dans le cas de fermeture complète, on pourrait pourtant en esquisser une théorie approchée, en considérant séparément l'effet de la chambre à air et celui de l'élasticité (complexe) de la colonne liquide, et ce, d'après l'observation que la période d'oscillation de la charge qui dépend de la chambre à air, considérée isolément, est, en général, notablement plus grande que la période $\frac{4l}{a}$ de l'oscillation qui dépend de l'élasticité complexe du liquide.....

« On peut donc présumer que le phénomène se déroulera d'après la loi qui résulte de la superposition d'une série d'oscillations à période $\frac{4l}{a}$ sur une oscillation fondamentale au rythme plus lent..... »

M. Camichel a fait depuis quelques années, et par une voie tout à fait différente de celle que j'emploierai plus loin, des études de cet ordre sur la distinction et la coexistence des deux phénomènes dans le cas des réservoirs d'air. Ces études seront publiées ultérieurement.

[9] Études de M. de Sparre. — M. de Sparre a donné dans la *Houille blanche de*

mai 1915, et en supposant une fermeture instantanée, une étude sur le rôle des cheminées d'équilibre d'après la théorie des coups de bélier d'onde, sans tenir compte de l'oscillation en masse.

Si l'on suppose que le point d'insertion de la cheminée est au voisinage immédiat du distributeur, et si la cheminée et la conduite ont la même vitesse a de propagation pour les ondes, on a, pour la valeur du coup à l'origine :

$$y - H = \frac{a}{g} \frac{v_0}{1 + \frac{\omega}{S}}$$

La valeur de ce coup est diminuée d'autant plus, par rapport au cas où il n'y a pas de cheminée, que $\frac{\omega}{S}$ est plus grand ; elle ne se maintient que pendant un temps $\tau = \frac{2H}{a}$.

A une époque t définie par l'inégalité :

$$2(n-1) \frac{H}{a} < t < \frac{2nH}{a},$$

on a :

$$y - H = \frac{av_0}{g} \frac{1}{1 + \frac{\omega}{S}} \left(\frac{1 - \frac{\omega}{S}}{1 + \frac{\omega}{S}} \right)^{n-1},$$

$$v = v_0 \left[1 - \frac{\left(1 - \frac{\omega}{S}\right)^{n-1}}{\left(1 + \frac{\omega}{S}\right)^n} \right],$$

$$u = u_0 \left[1 - \frac{\left(1 - \frac{\omega}{S}\right)^{n-1}}{\left(1 + \frac{\omega}{S}\right)^n} \right].$$

Il faut remarquer d'ailleurs que cette dernière formule ne s'applique que si u n'est pas trop grand pour pouvoir négliger encore la perte de charge dans la cheminée ; sinon, il faudrait augmenter le coup de bélier de la valeur de cette perte de charge, et encore si elle n'est pas trop forte, car alors u resterait très au-dessous de la valeur indiquée.

Comme dans tous les cas il est utile de diminuer notablement le coup d'onde

à l'origine, je supposerai $\frac{\omega}{S}$ assez grand, au moins $1/5$, de façon que la perte de charge dans la cheminée, qui est de très courte longueur par rapport à la conduite, sera toujours négligeable par rapport à celle qui se produit dans la conduite.

[10] J'ai repris moi-même la question des cheminées d'équilibre en étudiant le passage d'une onde aux points où une conduite change de nature (variation simultanée ou non d'épaisseur et de diamètre) et en examinant également le cas des bifurcations (4).

J'ai montré alors que dans une conduite il se produit, aux points où la caractéristique, c'est-à-dire la quantité $\alpha = \frac{a}{S}$ varie, une réflexion partielle de l'onde.

Si l'onde f_1 arrive sur ce point de changement, il y a une onde qui passe, égale à

$$f_2 = f_1 \left(1 - \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \right)$$

et une onde qui revient en arrière, égale à

$$f'_1 = f_1 \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$$

de sorte que si la pression, immédiatement avant l'arrivée de l'onde au point critique, est, dans le premier tronçon :

$$y = y_0 + f_1;$$

elle devient, dans le deuxième tronçon :

$$(1) \quad y = y_0 + f_1 \left[1 - \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \right];$$

elle est modifiée dans le premier tronçon, à mesure que l'onde réfléchie revient, et elle prend la valeur (1).

C'est tout simplement la conséquence de ce fait qu'au moment précis où le front de l'onde arrive au point critique, l'équation de continuité s'applique, et il n'y a qu'une valeur de la pression en ce point.

(4) Voir *C. R. de l'Académie des Sciences*, D. Eydoux, *Sur les modifications des coups de bélier dans les conduites d'épaisseur et de diamètre variables*, t. 163, 1916, p. 265; *Sur la transmission des coups de bélier dans les conduites présentant des bifurcations. Application aux cheminées d'équilibre*, t. 163, 1916, p. 346.

Passage d'un coup de béher à une bifurcation de conduites.

A) En appliquant ce mode de raisonnement aux bifurcations de trois conduites, il suffit d'écrire, par un procédé semblable :

1° Que la pression a une valeur unique.

Immédiatement avant l'arrivée de l'onde à la bifurcation, on a, dans le premier tronçon :

$$y = y_0 + f_1, \quad v = v_{0,1} - \frac{g}{a_1} f_1.$$

Quand elle est arrivée au point critique, on a, dans le premier tronçon :

$$y_1 = y_0 + f_1 - f'_1, \quad v_1 = v_{0,1} - \frac{g}{a_1} (f_1 + f'_1);$$

dans le deuxième tronçon :

$$y_2 = y_0 + f_2, \quad v_2 = v_{0,2} - \frac{g}{a_2} f_2;$$

dans le troisième tronçon :

$$y_3 = y_0 + f_3, \quad v_3 = v_{0,3} - \frac{g}{a_3} f_3.$$

2° Qu'il y a continuité dans l'écoulement :

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 + S_3 v_3.$$

D'où :

$$f_2 = f_3 = 2f_1 \frac{\alpha_2 \alpha_3}{\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_1}.$$

$$f'_1 = f_1 \frac{\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 - \alpha_2 \alpha_3}{\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_1}.$$

Je vais développer ces différents points, que je n'avais fait qu'esquisser dans mes notes précitées, pour les appliquer aux cheminées d'équilibre.

B) La même méthode s'applique à une bifurcation de n conduites :

Nous écrivons, en introduisant toujours une onde de réflexion φ_1 dans le tronçon

d'où provient le coup et que nous numérotions 1 par exemple, et en désignant par f_1 le coup initial et par f_2, f_3, \dots les coups transmis :

1° Que la pression à la bifurcation a une valeur unique :

$$y - y_0 = f_1 - \varphi_1 = f_2 = f_3 = \dots$$

2° Que l'équation de continuité s'applique à la bifurcation avant et pendant le coup, ou en désignant par v_0 et v les vitesses avant et pendant le coup :

$$\Sigma S v_0 = 0, \quad \Sigma S v = 0.$$

La première équation donne cette conséquence importante *que le coup transmis dans toutes les conduites est le même* (*).

[11] **Cas d'une fermeture brusque.** — Cette méthode permet de se rendre nettement compte de ce qui se passe dans une conduite pourvue d'une cheminée d'équilibre non déversante dans le cas d'une fermeture brusque.

a) *Nous envisagerons d'abord le cas simple où la cheminée et la conduite de même diamètre et d'épaisseur constante ont leur bifurcation située immédiatement contre le distributeur.* Introduisons l'équation complète du coup de bélier pour une conduite inclinée à pente uniforme :

$$y = H - d \sin \alpha + f.$$

Cela revient à remplacer en chaque point H par $H - d \sin \alpha$; moyennant cette convention, Δy reste le même.

(*) Nous indiquerons en passant une conséquence pratique de ces équations.

Appliquons-les au cas d'un coup provenant d'un gros tuyau (collecteur) auquel aboutissent n tuyaux plus petits, de mêmes dimensions, et dans lesquels la vitesse de l'eau est la même :

$$S_1 v_{0,1} = n S_2 v_{0,2}, \quad S_1 \left[v_{0,1} - \frac{g}{a_1} (f_1 + \varphi_1) \right] = n S_2 \left(v_{0,2} - \frac{g}{a_2} f_2 \right).$$

D'où :

$$f_2 = 2f_1 \frac{\alpha_2}{n\alpha_1 + \alpha_2}, \quad \varphi_1 = f_1 \frac{n\alpha_1 - \alpha_2}{n\alpha_1 + \alpha_2}.$$

Si donc l'on a des turbines alimentées par plusieurs conduites et susceptibles de donner des coups de bélier à des instants différents (par exemple des turbines actionnant des générateurs fournissant le courant pour des usages indépendants), on aura intérêt à réunir ces conduites par un collecteur, et dans chaque conduite il ne passera plus qu'une fraction du coup de bélier primitif. Si les turbines, avec générateurs montés sur le même réseau, par exemple, sont susceptibles de donner des coups de bélier simultanés, l'intérêt de ce système ne sera plus le même et la considération des coups de bélier n'interviendra plus dans le choix du mode de montage des conduites.

Posons les équations à la jonction de la conduite et de la cheminée d'équilibre :

$$\begin{aligned} \text{Conduite :} \quad \gamma_1 &= H + f_1, & v_1 &= v_0 - \frac{g}{a} f_1. \\ \text{Cheminée :} \quad \gamma_2 &= H + f_2, & v_2 &= -\frac{g}{a} f_2. \end{aligned}$$

On a immédiatement après la fermeture :

$$\gamma_1 = \gamma_2, \quad v_1 + v_2 = 0.$$

On en tire :

$$f_1 = f_2, \quad v_0 - \frac{g}{a} f_1 = \frac{g}{a} f_1$$

et :

$$f_1 = f_2 = \frac{av_0}{2g}.$$

Il en résulte deux conséquences principales :

A) Le coup de bélier d'onde est la moitié de ce qu'il aurait été dans la conduite sans cheminée d'équilibre.

B) On a une onde de compression remontant d'une part dans la cheminée, d'autre part dans la conduite. Admettons, comme cela se rencontre en pratique, que la cheminée est beaucoup plus courte que la conduite. Considérons le moment où l'onde arrive en haut de la cheminée; nous avons, en négligeant la pression atmosphérique qui s'exerce aussi bien sur le haut de la cheminée que sur le réservoir amont de la conduite :

$$\gamma = f_1 - f'_1 = 0, \quad v = -\frac{g}{a} (f_1 + f'_1) = -v_0.$$

Il y a donc réflexion totale de l'onde en haut de la cheminée. Si H est la longueur de la cheminée supposée verticale et l celle de la conduite, on voit que l'onde dans la conduite aura avancé à ce moment de H . On aura donc trois régions dans l'ensemble formé par la conduite et la cheminée.

A) Une région très courte dans le haut de la cheminée, où l'eau est animée d'une vitesse v_0 de bas en haut et où la pression est retombée à la valeur qu'elle avait avant la fermeture.

B) Une région de longueur $2H$ où l'eau est animée d'une vitesse $\frac{v_0}{2}$ dirigée du réservoir amont vers le haut de la cheminée, c'est-à-dire dans le même sens que la précédente.

C) Une région de longueur $l - H$, contiguë au réservoir amont, où le coup de bélier n'est pas encore parvenu et où la vitesse v_0 est dirigée comme précédemment.

Prenons maintenant une époque postérieure, mais comprise dans la phase de coup direct par rapport à la conduite elle-même.

La zone B se sera déplacée; elle pourra se trouver soit à cheval sur la cheminée et la conduite, soit dans la conduite seule. Sa longueur sera $2H$; dans les zones A et C, on aura toujours une vitesse v_0 dirigée de l'amont vers l'aval.

Prenons la région B), où la vitesse n'est que $\frac{v_0}{2}$. On peut la supposer animée d'une vitesse v_0 égale à celle qui coexiste dans les autres régions, à condition d'y adjoindre une composante de sens contraire, égale à $\frac{v_0}{2}$, destinée à ramener la vitesse à sa valeur primitive.

On voit qu'on aura alors :

A) L'ensemble de la conduite et de la cheminée, où toute l'eau est animée d'une vitesse v_0 qui est la même dans tous les points. C'est alors le mouvement de masse tel que l'a envisagé M. Rateau dans la *Revue de mécanique* de mai 1900, avec toutes ses conséquences, périodicité calculable par les équations de la mécanique, répartition linéaire de la surpression dans la conduite indiquée par M. Camichel, etc. Cette vitesse variera ensuite suivant les lois du mouvement d'oscillation en masse.

B) Une onde occupant la longueur $2H$ et se déplaçant dans la conduite indépendamment du mouvement précédent. Cette onde, dans la longueur de laquelle les particules liquides ont une vitesse relative de $-\frac{v_0}{2}$, donne une surpression $\frac{av_0}{2g}$. En arrivant à l'extrémité de la conduite, au réservoir amont, elle se réfléchit en changeant de signe et revient en dépression. En arrivant en haut de la cheminée d'équilibre elle change encore de signe, revient en compression, etc... de telle façon qu'on devrait, si l'oscillation en masse n'existait pas, obtenir un graphique de la forme suivante :

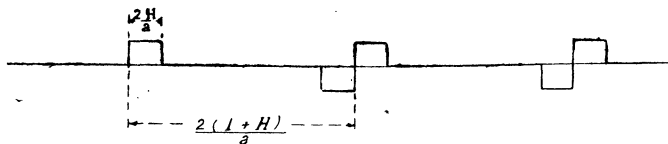


FIG. 17.

Cette onde se produira avec toutes ses conséquences, entre autres la conservation du coup de bélier le long de la conduite, si elle est d'épaisseur et de diamètre constants.

Remarquons que cette façon de concevoir les choses n'a rien d'anormal. Considérons, à titre d'exemple, une conduite sans cheminée d'équilibre dans laquelle on

produit la dépression brusque indiquée par M. Camichel (¹), soit θ le temps très court pendant lequel la conduite est restée ouverte. Cette perturbation donne lieu à une onde de longueur $a\theta$ qui se déplace le long de la conduite. Dans l'ensemble de la conduite l'eau est immobile, sauf une zone de longueur $a\theta$ qui se déplace et où les molécules liquides sont animées d'une vitesse v_0 dirigée de l'amont vers l'aval. C'est une conception semblable à la précédente, où toute l'eau est animée d'une vitesse v_0 avec une zone de longueur $2H$, où l'eau est animée d'une vitesse relative égale à $-\frac{v_0}{2}$.

Le phénomène résultant sera la superposition de ces deux phénomènes.

La période due à l'onde est : $T_1 = 2 \frac{l + H}{a}$.

Celle due à l'oscillation en masse a été déjà calculée. Elle est égale à :

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{l + H}{g}}$$

En comparant ces deux périodes, on trouve :

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\sqrt{(l + H)g}}{\pi a}$$

ou sensiblement :

$$\frac{\sqrt{l + H}}{a}$$

Prenons, ce qui est un nombre courant, $a = 900$ m./sec. et, ce qui est déjà beaucoup, $l + H = 8$ km.

On a :

$$\frac{T_1}{T_2} < \frac{1}{10}$$

Les deux périodes sont donc très dissemblables et, dans les observations, on pourra différencier nettement les deux phénomènes.

On peut alors voir nettement l'amélioration apportée par la cheminée d'équilibre. S'il n'y en avait pas, le coup de bélier aurait été :

$$\Delta y = \frac{av_0}{g} = \frac{900v_0}{g}$$

Par suite de la présence de la cheminée, on a d'abord un coup de bélier d'onde

(¹) Voir *C. R. de l'Académie des Sciences*, G. Camichel, *Sur les coups de bélier. — Conduite entièrement purgée*, t. 161, 1915, p. 412.

qui n'est plus que de $\frac{av_0}{2g}$, puis la surpression due à l'oscillation en masse dont l'amplitude maximum en bas est :

$$A = v_0 \sqrt{\frac{l + H}{g}},$$

mais ne se produit qu'au bout du temps $\frac{T_2}{4}$.

Le maximum de ces deux coups à la base n'est pas simultané au début, et, le serait-il à un moment ultérieur, que le coup de bélier d'onde aurait eu le temps, au cours des réflexions successives, de s'amortir sensiblement. Le coup d'oscillation en masse est d'ailleurs un phénomène qu'il est possible d'atténuer soit par le déversement, soit par l'augmentation de diamètre de la cheminée.

Reprenons les chiffres précédents; nous aurons, avec $H = 10^m$, qui est voisin de la limite inférieure en pratique : coup de bélier d'onde $450 \frac{v_0}{g}$; coup d'oscillation en masse : $290 \frac{v_0}{g}$.

Je ferai alors une *remarque importante* qui servira dans la suite de la discussion :

Pour que, dans un système hydraulique, qui a subi une variation de régime, il y ait mouvement de masse, il faut qu'à un moment quelconque, après la variation de régime, on puisse appliquer l'équation de continuité aux extrémités du système hydraulique.

Pour une cheminée d'équilibre après une fermeture, par exemple, il faudra qu'on puisse écrire : $Sv' = \omega u'$.

Si c'est un ensemble de trois tubes communiquants, on devra avoir : $Sv' = \omega u' - \sigma w'$.

Si c'est une cheminée d'équilibre après ouverture du distributeur, la condition nécessaire sera :

$$Sv' = \omega u' + Sv_1 \sqrt{1 + \frac{l\omega x}{H[l\omega + (H + x)S]}}$$

v_1 étant la vitesse dans la conduite après établissement du régime permanent.

On pourra alors admettre un mouvement d'ensemble se produisant avec ondes superposées.

b) Prenons un cas plus général. Les diamètres et les épaisseurs de la conduite sont constants dans chacune, mais les deux conduites sont différentes l'une de l'autre. La cheminée débouche toujours au voisinage immédiat du distributeur.

Les équations sont :

$$\begin{aligned} y_1 &= H + f_1, & v &= v_0 - \frac{g}{a_1} f_1, \\ y_2 &= H + f_2, & u &= \frac{g}{a_2} f_2, \\ y_1 &= y_2, & Sv - \omega u &= 0. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} f_1 &= f_2, & Sv_0 - \frac{Sg}{a_1} f_1 - \frac{\omega g}{a_2} f_2 &= 0, & Sv_0 - g f_1 \left[\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} \right] &= 0, \\ f_1 &= f_2 = \frac{Sv_0}{g} \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}. \end{aligned}$$

Une onde part vers l'extrémité amont de la conduite, une autre vers le haut de la cheminée d'équilibre. Considérons le moment où cette deuxième onde arrive en haut de la cheminée et s'est réfléchi. La réflexion est totale, puisque, sur la surface libre, la pression ne varie pas. La vitesse dans le haut est alors devenue :

$$2u = \frac{2Sv_0}{a_2} \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{2a_1 v_0}{\omega(\alpha_1 + \alpha_2)}.$$

L'onde revient à la bifurcation, s'y réfléchit partiellement, et la nouvelle onde réfléchi est : $f_1 \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$, à laquelle correspond une nouvelle composante de la vitesse :

$$+ \frac{g}{a_1} f_1 \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_2 + \alpha_1},$$

qui se double en arrivant en haut.

Finalement, après un nombre infini de réflexions, la vitesse sera devenue dans la cheminée d'équilibre :

$$u_0 = \frac{2a_1 v_0}{\omega(\alpha_1 + \alpha_2)} \left[1 + \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_2 + \alpha_1} + \left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_2 + \alpha_1} \right)^2 + \dots \right] = \frac{Sv_0}{\omega},$$

c'est-à-dire celle qui correspond à un écoulement régulier de la conduite dans la cheminée.

Reprenons le raisonnement employé pour le cas où la conduite et la cheminée sont de même diamètre. On voit d'abord que la vitesse dans la cheminée tend vers

une limite u_0 (et s'en rapproche d'autant plus vite que H est en général très petit par rapport à l), telle que $sv_0 = \omega u_0$.

On tend ainsi vers un mouvement d'oscillation en masse superposé à des ondes de période $\frac{2H}{a_2}$ qui se réfléchiront à leur tour sur l'extrémité de la conduite et reviendront pour recommencer la même série de phénomènes.

On devrait donc voir apparaître, par la composition de ces ondes de retour avec les autres, trois périodes différentes :

1° La période de l'oscillation en masse égale à

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{g}}.$$

Le coup de bélier en résultant suit encore les lois indiquées par MM. Rateau et Camichel, et son amplitude maximum près du distributeur est :

$$A = u_0 \sqrt{\frac{m}{g}}.$$

2° La période $T_2 = \frac{2l}{a_1}$ correspondant aux réflexions des ondes dans la conduite elle-même.

3° La période correspondant aux réflexions successives des ondes dans la cheminée et à leur retour dans la conduite. Elle est égale à : $T_3 = \frac{2H}{a_2}$.

Le maximum de ces ondes est :

$$f_1 = f_2 = \frac{sv_0}{g} \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}.$$

En effet, après la première réflexion sur le haut de la conduite, il revient f_1 à la bifurcation; la quantité qui passe alors est, comme nous l'avons démontré,

$$\varphi = f_1 \left[1 - \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_2 + \alpha_1} \right],$$

ce qui vient diminuer f_1 dans la conduite et le ramener à la valeur $f_1 \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\alpha_2 + \alpha_1}$, c'est-à-dire à la quantité même qui remonte dans la cheminée.

Dans la phase de coup direct, on aura donc dans la conduite des diminutions de

la surpression primitive se succédant à intervalles réguliers et égaux à $\frac{2H}{a_2}$ qui lui donneront chaque fois les valeurs successives :

$$f_1, f_1 \frac{a_2 - a_1}{a_2 + a_1}, \dots, f_1 \left(\frac{a_2 - a_1}{a_2 + a_1} \right)^n, \dots$$

et la ramènerait à la limite à 0, la vitesse reprenant la valeur v_0 .

La phase de contrecoup amènera le retour de ces ondes changées de signe.

C'est en somme la généralisation de la formule de M. de Sparre.

Comparons d'abord la période de l'oscillation en masse à la plus grande des deux périodes d'ondes :

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{2l}{a_1} \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{m}} = \text{à peu près } \frac{l}{a_1 \sqrt{m}}$$

Si ω est très petit par rapport à S et l grand, le rapport $\frac{T_2}{T_1}$ peut devenir égal à 1 ou en être voisin et même le dépasser; les deux périodes se composeront et on ne pourra plus distinguer aussi nettement les phénomènes.

Il faut remarquer d'ailleurs que la vitesse u_0 ne s'établira que très lentement dans la cheminée, et que lorsque la première onde reviendra de l'extrémité de la conduite, la vitesse dans la cheminée sera encore très différente de u_0 , la progression géométrique par laquelle on y parvient ne convergeant que très lentement. Si ω diminue encore plus, on arrivera à ne plus discerner l'oscillation en masse qui sera complètement masquée par le coup de bélier d'onde.

A mesure que T_1 diminue, l'amplitude du coup d'oscillation en masse augmentera lentement d'abord, puis plus vite, et le coup de bélier d'onde augmentera jusqu'à atteindre sa valeur limite $\frac{a_1 v_0}{g}$ en même temps que sa durée à la base augmente jusqu'au temps $\frac{2l}{a_1}$.

En supposant a le même pour les deux conduites, quoique leurs diamètres diffèrent (*), on aura, en prenant pour l et H les mêmes valeurs qu'auparavant :

(*) a est en effet donné pour des conduites en acier par la formule :

$$\frac{9.900}{\sqrt{48,3 + 0,5 \frac{D}{e}}}$$

Si l'on admet pour le métal de la conduite et de la cheminée le même effort moléculaire $R = \frac{pD}{2e}$, on voit que $\frac{D}{e}$ est une constante.

$\frac{\omega}{s}$	$\frac{T_2}{T_1}$	f_1	$f_1 : \frac{av_0}{g}$	A
1	0,10	$1/2 \frac{av_0}{g}$	0,50	$29v_0$
1/2	0,15	$2/3 \frac{av_0}{g}$	0,67	$40v_0$
1/4	0,21	$4/5 \frac{av_0}{g}$	0,80	$58v_0$

Si au contraire la cheminée d'équilibre avait un diamètre beaucoup plus grand, le rapport $\frac{T_2}{T_1}$ diminuerait beaucoup plus, la valeur du coup de bélier d'onde diminuerait également, et celle du coup d'oscillation en masse, décroissant lentement, tendrait vers 0; on arrive au cas limite où le distributeur prendrait directement l'eau dans un bassin indéfini qui amortirait à la fois les ondes et les oscillations sans rien transmettre à ses affluents.

La progression géométrique devient alternée; elle converge de moins en moins à mesure que α_2 devient plus petit que α_1 , mais le coup de bélier d'onde s'affaiblit de plus en plus.

Nous reprendrons le tableau précédent pour une cheminée dans laquelle $\frac{\omega}{s} = 1$, puis 2, 4, 6 et 8 :

$\frac{\omega}{s}$	$\frac{T_2}{T_1}$	f_1	$f_1 : \frac{av_0}{g}$	
1	0,10	$1/2 \frac{av_0}{g}$	0,500	$29v_0$
2	0,071	$1/3 \frac{av_0}{g}$	0,333	$21v_0$
4	0,049	$1/5 \frac{av_0}{g}$	0,200	$14,5v_0$
6	0,041	$1/7 \frac{av_0}{g}$	0,143	$11,8v_0$
8	0,035	$1/9 \frac{av_0}{g}$	0,111	$10,2v_0$

c) Prenons enfin un cas que nous pourrions considérer comme assez général pour arrêter là nos recherches en fermeture brusquë. Supposons une conduite de caractéristique constante α_1 , avec une cheminée de caractéristique α_2 , également constante, mais différente de la précédente et s'insérant sur un point quelconque de la conduite conformément au croquis ci-après qui porte également les notations utiles.

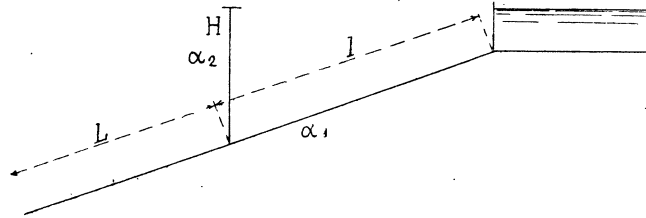


FIG. 18.

Envoyons un coup de bélier brusque :

$$y = y_0 + f_1, \quad v = v_0 - \frac{g}{a_1} f_1.$$

Il n'y a rien de changé au cas de la conduite sans cheminée jusqu'à ce que l'onde arrive au point d'insertion de celle-ci.

A ce moment, en appliquant les formules du paragraphe 10, on a, dans la partie amont de la conduite et dans la cheminée, une onde :

$$f_2 = f_3 = \frac{2f_1 \alpha_2}{\alpha_1 + 2\alpha_2} = \frac{2a_1 v_0}{g} \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + 2\alpha_2};$$

dans la partie aval, une onde réfléchie :

$$f'_1 = f_1 \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + 2\alpha_2} = \frac{a_1 v_0}{g} \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + 2\alpha_2}$$

qui ramène la pression dans cette partie à la valeur qu'elle a dans le tronçon amont.

D'où une première conséquence importante : l'onde transmise est plus grande qu'elle n'était quand la cheminée était immédiatement contiguë au distributeur, et cette surpression ne pourra être réduite dans l'amont de la conduite principale que lorsque les ondes reviendront après s'être réfléchies, soit sur l'extrémité amont de la conduite, soit sur le haut de la cheminée.

Si la cheminée était telle que l'on ait exactement $2x_2 = x_1$, on aurait un phénomène semblable à celui qu'on a avec une cheminée et une conduite de diamètres égaux, la cheminée étant placée tout contre le distributeur.

Si l'on suppose que les vitesses a sont les mêmes (voir note au § 11), on voit que, pour remplir le même rôle, il faudrait que la cheminée ait à présent un diamètre double de celui de la conduite.

On devrait donc, pour les cheminées placées assez loin du distributeur, prévoir un diamètre beaucoup plus grand que si elles étaient placées à son voisinage immédiat, si l'on veut obtenir la même réduction des coups d'onde.

Un raisonnement semblable à celui que nous avons fait précédemment nous montrerait :

1° Qu'il y a encore tendance à la formation dans la cheminée, par suite des réflexions successives de l'onde, d'une vitesse u_0 telle que $\omega u_0 = Sv_0$.

2° Qu'il y a par suite tendance à l'apparition d'une oscillation en masse de période

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l\omega + HS}{gS}}$$

et d'amplitude maximum à la base de la cheminée :

$$A = u_0 \sqrt{\frac{l\omega + HS}{gS}} = u_0 \sqrt{\frac{m}{g}}$$

La surpression maximum qui en résulte à la base de la conduite est la même qu'à la base de la cheminée.

3° Qu'il y a des coups de bélier d'onde dérivant des trois périodes :

$\frac{2H}{a_2}$ ou $\frac{4H}{a_2}$: cheminée fonctionnant comme un tuyau ouvert à un bout et, suivant que sa caractéristique est inférieure ou supérieure à celle de la conduite principale, comme ouvert ou fermé à l'autre bout ⁽¹⁾.

$\frac{4L}{a_1}$: partie inférieure de la conduite fonctionnant comme un tuyau fermé à un bout et ouvert à l'autre.

$\frac{2l}{a_1}$: partie supérieure de la conduite fonctionnant comme un tuyau ouvert aux deux bouts.

Les considérations que nous avons fait valoir au paragraphe 11 b) relativement aux diamètres respectifs de la conduite et de la cheminée subsistent entièrement

⁽¹⁾ Voir à ce point de vue : *Loc. cit.*, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 163, p. 265.

en ce qui concerne l'oscillation en masse. C'est d'ailleurs la conséquence immédiate de la supposition qu'on fait implicitement pour ce mouvement, où l'on néglige la compressibilité de l'eau et l'élasticité de la conduite; la partie inférieure de la conduite doit être considérée comme inexistante. Mais les chiffres relatifs au coup de bélier direct d'onde se modifient; nous en donnons le tableau ci-dessous, où S est la section de la conduite, ω celle de la cheminée, et où nous admettons, comme auparavant, $a_1 = a_2$.

$\frac{\omega}{S}$	COUP	SURPRESSION
	AVANT SON PASSAGE à la cheminée.	DANS LA CONDUITE ET LA CHEMINÉE après le passage.
1/4	$\frac{av_0}{g}$	$8/9 \frac{av_0}{g}$
1/2	—	$4/5 \frac{av_0}{g}$
1	—	$2/3 \frac{av_0}{g}$
2	—	$1/2 \frac{av_0}{g}$
4	—	$1/3 \frac{av_0}{g}$
6	—	$1/4 \frac{av_0}{g}$
8	—	$1/5 \frac{av_0}{g}$

On pourra utilement comparer ces chiffres aux précédents.

En résumé, on voit, d'après ce qui précède, le mécanisme par lequel la cheminée agit sur la conduite. Les coups de bélier d'onde, très importants et se transmettant intégralement le long de la conduite (sauf les modifications résultant des variations d'épaisseur ou de diamètre, comme nous l'avons montré précédemment), sont transformés partiellement en oscillations en masse donnant des surpressions moins fortes et dont, surtout, la répartition est linéaire le long de la conduite. De plus, les coups de bélier d'onde qui subsistent ne se font plus sentir que pendant des moments beaucoup plus courts.

Si l'on s'en tenait là, on n'aurait pas une idée complète de l'action des cheminées; il faut ajouter que l'oscillation en masse crée dans le tuyau des mouvements

généraux dont la vitesse est loin d'être négligeable. Or on sait que, dans la section transversale d'une conduite, la vitesse n'est pas la même dans tous les points et qu'elle est plus faible près des parois. Cette inégale répartition des vitesses, en produisant pour ainsi dire un brassage de l'eau, a pour effet de diffuser les ondes dans toutes les parties de la conduite et de les amortir d'autant plus vite que les vitesses étaient plus grandes, c'est-à-dire que le coup de bélier initial était plus fort.

[12] **Fermeture progressive.** — L'étude que je viens de faire vise le cas exceptionnel d'une fermeture absolument instantanée. Il convient de la reprendre avec une fermeture progressive.

Je supposerai d'ailleurs le temps de fermeture $\tau < \frac{2l}{a_1}$; ce sera le cas le plus défavorable, toute durée de fermeture plus longue diminuant encore le coup de bélier.

Je dois à l'obligeance de M. de Sparre des indications très intéressantes sur la façon d'aborder le calcul, et la méthode que je donne ci-après est basée sur ces indications :

A) Supposons d'abord le point d'insertion de la cheminée au voisinage du distributeur.

Soit $\lambda(t)$ la loi réglant la fermeture du distributeur. On aura par suite $\lambda(0) = 1$, $\lambda(\tau) = 0$. Soient encore a_1 , l et S la vitesse de propagation, la longueur et la section de la conduite; a_2 , H et ω les mêmes quantités pour la cheminée. L'oscillation en masse est à longue période, et nous admettrons que dans le temps τ , H ne varie pas sensiblement de ce chef. Pendant le temps dt , la quantité d'eau débitée sera :

$$Sv_0\lambda(t)\sqrt{1 + \frac{\xi}{H}}$$

ou sensiblement

$$Sv_0\lambda(t)\left(1 + \frac{\xi}{2H}\right),$$

ξ désignant le coup de bélier supposé faible par rapport à H . Au même instant, l'équation de continuité donne :

$$Sv = \omega u + Sv_0\lambda(t)\left(1 + \frac{\xi}{2H}\right).$$

Le mouvement de l'eau dans la conduite est défini par les équations :

$$y = H + \xi, \quad \Lambda) \quad v = v_0 - \frac{g}{a_1}\xi$$

et dans la cheminée par :

$$y - H = \varphi(t) - \varphi\left(t - \frac{2H}{a_2}\right),$$

$$B) \quad u = \frac{g}{a_2} \left[\varphi(t) + \varphi\left(t - \frac{2H}{a_2}\right) \right],$$

$$\text{où : } \varphi\left(t - \frac{2H}{a_2}\right) = 0$$

$$\text{pour } t \leq \frac{2H}{a_2}.$$

On en déduit :

$$\varphi(t) - \varphi\left(t - \frac{2H}{a_2}\right) = \xi$$

$$\text{et : } \frac{\omega n}{S} = v_0 - \frac{g}{a_1} \xi - v_0 \lambda(t) \left(1 + \frac{\xi}{2H} \right).$$

De ces deux dernières équations, on déduit, en mettant l'indice n pour la n° période :

$$2(n-1) \frac{H}{a_2} < t < \frac{2nH}{a_2},$$

$$C) \quad \frac{2\alpha_1}{\alpha_2} \varphi(t) = \frac{a_1 v_0}{g} \left[1 - \lambda_n(t) \right] - \xi_n \left[1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + \frac{v_0 \lambda_n(t) a_1}{2gH} \right],$$

$$D) \quad \frac{2\alpha_1}{\alpha_2} \varphi\left(t - \frac{2H}{a_2}\right) = \frac{a_1 v_0}{g} \left[1 - \lambda_n(t) \right] - \xi_n \left[1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + \frac{v_0 \lambda_n(t) a_1}{2gH} \right].$$

On a, en remontant à la première période pour laquelle $\varphi\left(t - \frac{2H}{a_2}\right) = 0$:

$$\xi_1 = \frac{a_1 v_0}{g} \frac{1 - \lambda_1(t)}{1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + v_0 \frac{\lambda_1(t) a_1}{2gH}}$$

et on obtient, de proche en proche :

$$E) \quad \xi_n = \frac{a_1 v_0}{g} \frac{\lambda_{n-1}(t) - \lambda_n(t)}{1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + \frac{a_1 \lambda_n(t) v_0}{2gH}} + \frac{1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + \frac{v_0 \lambda_n(t) a_1}{2gH}}{1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + \frac{v_0 \lambda_n(t) a_1}{2gH}} \xi_{n-1}.$$

Supposons que la fermeture s'effectue suivant une loi linéaire :

$$\lambda(t) = 1 - \frac{t}{\tau}.$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}\lambda_{n-1} &= 1 - \frac{2(n-1)H}{a_2\tau}, \\ \lambda_n &= 1 - \frac{2nH}{a_2\tau}, \\ \lambda_{n-1} - \lambda_n &= \frac{2H}{a_2\tau}.\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\zeta_n = \frac{2a_1v_0H}{a_2g\tau} \frac{1}{1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + \frac{a_1v_0}{2gH} \left(1 - \frac{2nH}{a_2\tau}\right)} + \frac{1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + \frac{a_1v_0}{2gH} \left(1 - \frac{2nH}{a_2\tau}\right)}{1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + \frac{a_1v_0}{2gH} \left(1 - \frac{2nH}{a_2\tau}\right)} \zeta_{n-1}.$$

Posons :

$$\xi_n = \beta + \zeta_n;$$

d'où :

$$\beta = \frac{Hv_0}{g\tau} \frac{S}{\omega},$$

et :

$$\left[1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + \frac{a_1v_0}{2gH} \left(1 - \frac{2nH}{a_2\tau}\right)\right] \zeta_n = \left[1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + \frac{a_1v_0}{2gH} \left(1 - \frac{2nH}{a_2\tau}\right)\right] \zeta_{n-1}.$$

Le facteur de ζ_n est toujours positif; celui de ζ_{n-1} est positif ou négatif, mais est, en valeur absolue, toujours inférieur à celui de ζ_n .

Donc $\xi_n = \beta$ plus ou moins une quantité qui décroît constamment en valeur absolue quand n croît.

D'autre part, nous avons :

$$\zeta_1 = \frac{2Ha_1v_0}{a_2g\tau} \frac{1}{1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + \frac{a_1v_0}{2gH} \left(1 - \frac{2H}{a_2\tau}\right)}.$$

On a également :

$$\xi_1 = \beta + \zeta_1.$$

En faisant, d'après cette formule, le calcul de ζ_1 , on voit facilement que ζ_1 est positif ou négatif, mais est en tous cas inférieur à β .

Les formules précédentes s'appliquent jusqu'à la fermeture complète. Supposons qu'elle s'effectue à la m^{e} période de façon que :

$$\tau = \frac{2mH}{a_2};$$

on aura à ce moment :

$$\left(1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) \zeta_m = \left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) \zeta_{m-1}$$

et cette relation s'appliquera par la suite pour toutes les valeurs de n supérieures à m .

On voit ainsi que :

$$\zeta_n = \beta(1 + \varepsilon),$$

ε étant une quantité positive ou négative inférieure à 1 et tendant vers 0.

ζ_n tend donc à la limite vers $\frac{Hv_0S}{g\tau\omega}$, mais peut à l'origine être voisin de $\frac{2Hv_0S}{g\tau\omega}$.

C'est le résultat que j'avais eu l'occasion d'énoncer précédemment ⁽¹⁾, d'après une analyse simplifiée, mais avec cette réserve que ζ peut partir d'une valeur supérieure voisine de $\frac{2Hv_0S}{g\tau\omega}$, mais lui restant toujours inférieure.

En particulier, si $\alpha_1 = \alpha_2$,

$$\zeta_1 = -\frac{Hv_0}{g\tau} \frac{\frac{\alpha_1 v_0}{4gH} \left(1 - \frac{2H}{a_2 \tau}\right)}{1 + \frac{\alpha_1 v_0}{4gH} \left(1 - \frac{2H}{a_2 \tau}\right)},$$

$$\zeta_m = 0,$$

ζ tend vers $\frac{Hv_0}{g\tau}$ en lui restant inférieur.

[13] Apparition des oscillations en masse dans le cas d'une fermeture progressive. — Reportons-nous aux quatre équations A), B), C) et D).

Dans l'hypothèse d'une fermeture linéaire, les deux dernières s'écrivent :

$$\varphi(t) = \frac{\alpha_2}{2\alpha_1} \left\{ \frac{a_1 v_0}{g} \frac{2nH}{a_2 \tau} - \zeta_n \left[1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} + \frac{a_1 v_0}{2gH} \left(1 - \frac{2nH}{a_2 \tau}\right) \right] \right\},$$

$$\psi\left(t - \frac{2H}{a_2}\right) = \frac{\alpha_2}{2\alpha_1} \left\{ \frac{a_1 v_0}{g} \frac{2nH}{a_2 \tau} - \zeta_n \left[1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} + \frac{a_1 v_0}{2gH} \left(1 - \frac{2nH}{a_2 \tau}\right) \right] \right\}.$$

⁽¹⁾ Voir *loc. cit.*, C. R. de l'Académie des Sciences, t. 163, p. 346.

D'où l'on tire, en posant :

$$u_0 = \frac{Sv_0}{\omega} \quad \text{et} \quad \varepsilon_n = \frac{Hu_0}{g}(1 + \varepsilon_n),$$

ou : $|\varepsilon_n| < 1$, ε_n tendant vers 0 quand n augmente :

$$u_n = u_0 \left\{ \frac{2nH}{a_2\tau} - \frac{HS}{a_1\omega\tau} (1 + \varepsilon_n) \left[1 + \frac{a_1v_0}{2gH} \left(1 - \frac{2nH}{a_2\tau} \right) \right] \right\}.$$

Si les données sont telles que $u_n = u_0$ pour $t < \frac{l}{a_1}$, on pourra appliquer les équations de continuité aux deux extrémités de la colonne, et les conditions pour l'oscillation en masse seront remplies.

Si $\frac{l}{a_1} < t < \frac{2l}{a_1}$, la vitesse diminue à l'extrémité amont; elle augmente toujours dans la cheminée. Au moment de l'égalité des vitesses, l'oscillation en masse commencera, mais avec une vitesse initiale inférieure à v_0 .

Je ne continuerai pas ce raisonnement qui n'est d'ailleurs qu'approximatif, mais qui suffit néanmoins pour permettre de concevoir que la fermeture progressive, en même temps qu'elle réduit le coup de bélier d'onde, diminue l'amplitude du coup d'oscillation, puisque la vitesse initiale dans ce mouvement d'oscillation est inférieure à v_0 .

Sauf dans le cas de l'ouverture brusque, je ne reviendrai plus sur le mode de production simultanée des deux phénomènes.

[14] *Cas où le point d'insertion de la cheminée est éloigné du distributeur.*

J'envisage particulièrement dans cette hypothèse le cas des usines avec un long canal d'amenée en charge relativement faible et cheminée d'équilibre placée à l'origine amont des conduites forcées proprement dites.

M. de Sparre a bien voulu également m'indiquer la façon d'aborder le calcul complet, au moins dans un cas assez général. Je le reproduis ci-après :

Soient a_1, l, s, v , les vitesses de propagation d'une onde, la longueur, la section, et la vitesse pour le canal amont;

a_2, H, ω, u , les mêmes quantités pour la cheminée;

a_3, L, σ, w , les mêmes quantités pour la conduite forcée proprement dite;

γ_0 , la charge totale sur le distributeur.

Supposons $t < \frac{2l}{a_1} + \frac{L}{a_3}$.

Pour une section voisine du distributeur, on a ⁽¹⁾, en posant $\rho = \frac{a_3 w_0}{2gY_0}$ et en désignant par $\lambda(t)$ la loi de fermeture du distributeur :

$$F(t) = \rho Y_0 (\lambda_0 - \lambda) + \frac{1}{2} \xi (1 - \rho \lambda),$$

$$f(t) = \rho Y_0 (\lambda_0 - \lambda) - \frac{1}{2} \xi (1 + \rho \lambda).$$

Pour une section de la même conduite forcée, mais au voisinage du point d'insertion, on a :

$$y = H + F\left(t - \frac{L}{a_3}\right) - f\left(t + \frac{L}{a_3}\right),$$

$$w = w_0 - \frac{g}{a_3} \left[F\left(t - \frac{L}{a_3}\right) + f\left(t + \frac{L}{a_3}\right) \right].$$

On a ensuite pour le canal, puisqu'on suppose $t < \frac{2l}{a_1} + \frac{L}{a_3}$:

$$y = H + \psi(t),$$

$$v = v_0 - \frac{g}{a_1} \psi(t),$$

et pour la cheminée :

$$y = H + \varphi(t) - \varphi\left(t - \frac{2H}{a_2}\right),$$

$$u = \frac{g}{a_2} \left[\varphi(t) + \varphi\left(t - \frac{2H}{a_2}\right) \right],$$

v , u et w étant pris au voisinage du point d'insertion.

L'équation de continuité donne :

$$Sv = \sigma w + \omega u, \quad Sv_0 = \sigma w_0.$$

En prenant pour $\lambda(t)$ la forme linéaire : $1 - \frac{t}{\tau}$ et en posant :

$$\chi(t) = \frac{1}{2} (1 - \rho \lambda) \xi, \quad \chi_1(t) = \frac{1}{2} (1 + \rho \lambda) \xi,$$

⁽¹⁾ Voir note du rapport de M. de Sparre au Congrès de la Houille blanche de 1914, p. 18.

M. de Sparre déduit, par un calcul dont je n'indiquerai pas les étapes intermédiaires :

$$\text{F) } \frac{2\alpha_2}{\alpha_1} \varphi(t) = \frac{w_0 L}{g\tau} \left(1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2 \sigma t}{L} \right) - \chi \left(t - \frac{L}{a_3} \right) \left(1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} - \frac{\alpha_2}{\alpha_3} \right) - \chi_1 \left(t + \frac{L}{a_3} \right) \left(1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_3} \right);$$

$$\text{G) } \frac{2\alpha_3}{\alpha_1} \varphi \left(t - \frac{2H}{a_2} \right) = \frac{w_0 L}{g\tau} \left(1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2 \sigma t}{L} \right) - \chi \left(t - \frac{L}{a_3} \right) \left(1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} - \frac{\alpha_2}{\alpha_3} \right) - \chi_1 \left(t + \frac{L}{a_3} \right) \left(1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_3} \right).$$

En remplaçant, dans l'équation (F), t par $t - \frac{2H}{a_2}$ et en égalant la valeur ainsi obtenue à celle donnée par l'équation (G), on aura une équation qui permettra de calculer le proche en proche $\xi \left(t + \frac{L}{a_3} \right)$ en fonction de :

$$\xi \left(t + \frac{L}{a_3} - \frac{2H}{a_2} \right), \quad \xi \left(t - \frac{L}{a_3} \right) \quad \text{et} \quad \xi \left(t - \frac{L}{a_3} - \frac{2H}{a_2} \right).$$

Se plaçant dans le cas où $a_1 = a_2 = a_3$ et $S = \omega = \sigma$, et en supposant la chute assez haute et par suite ρ assez petit pour que $\rho\lambda$ soit négligeable devant 1, M. de Sparre montre que le coup de bélier à la jonction, pour $nH \leq \frac{l}{L}$, a pour valeur :

$$\frac{2v_0 H}{g\tau} \left(1 - \frac{1}{3^n} \right).$$

Son maximum est donc $\frac{2v_0 H}{g\tau}$.

C'est également le résultat que j'avais précédemment indiqué; la valeur du coup de bélier est le double de celle trouvée quand le point d'insertion était voisin du distributeur.

On voit que les calculs sont pénibles. Mais il n'est pas nécessaire pratiquement de les pousser au bout. Il suffit d'en retenir que le coup de bélier d'onde, se transformant en mouvement d'oscillation, ne passe dans le canal d'aménée, pour si peu que la fermeture ne soit pas instantanée et que τ soit appréciable vis-à-vis de $\frac{2H}{a_2}$, que tellement atténué qu'il est pratiquement négligeable.

[15] Pour généraliser toutefois un peu plus le résultat, je montrerai, par une

analyse approchée, ce qui se passe quand on a : $\tau < \frac{3L}{a_3}$, c'est-à-dire que l'effet de réflexion des ondes sur le distributeur n'est pas encore revenu au point d'insertion. En ce point là, le coup de bélier n'arrive qu'au bout du temps $\frac{L}{a_3}$. Prenant cette époque pour origine des temps, j'envisagerai alors ce qui se passe jusqu'au temps $\frac{2L}{a_3}$.

Ensuite, l'on suppose habituellement la manœuvre de fermeture linéaire. M. Allievi a montré que, dans ce cas, le coup de bélier à la vanne montait jusqu'à la valeur $\frac{av_0}{g}$, suivant une courbe concave vers le haut.

Faisant une approximation semblable à celle qui a servi pour l'établissement de la formule de Michaud, je remplacerai cette courbe par une ligne droite; il en résulte que la variation du coup de bélier est linéaire, ainsi que la variation de la vitesse. Il faut pour cela que la loi de fermeture de la vanne ne soit pas linéaire mais aille en ralentissant.

Posons alors :

$$\frac{a_3 w_0}{g\tau} = A.$$

A une époque t , le coup de bélier, direct à la base avant la fermeture totale, sera :

$$\int_0^t A dt = At = f.$$

Arrivé à la bifurcation, un coup $A dt$ a donné, dans la cheminée et dans le tronçon amont un coup :

$$f_2 = 2A dt \frac{\alpha_2 \alpha_3}{\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_1}.$$

Il s'est réfléchi partiellement dans le tronçon aval :

$$f_1 = A dt \frac{\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 - \alpha_2 \alpha_3}{\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_1}.$$

Le coup f_2 , qui a passé dans la cheminée, remonte, se réfléchit sur le haut en changeant de signe, revient à la bifurcation et passe partiellement en amont et en aval :

$$f_3 = -2f_2 \frac{\alpha_1 \alpha_3}{\Sigma \alpha_i \alpha_j} = -4A dt \frac{\alpha_2 \alpha_3 \times \alpha_1 \alpha_3}{\Sigma \alpha_i \alpha_j}.$$

Il s'est réfléchi partiellement à la base de la cheminée.

$$f_2 = f_2 \frac{\alpha_2 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_1 - \alpha_1 \alpha_3}{\Sigma \alpha_i \alpha_j} = 2 \Lambda dt \alpha_2 \alpha_3 \frac{\alpha_2 \alpha_3 + \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_3}{(\Sigma \alpha_i \alpha_j)^2}.$$

Cette onde remonte, repart vers le haut où elle change de signe, revient à la bifurcation et passe partiellement en amont et en aval sous la forme :

$$f_3 = - 2 f_2 \frac{\alpha_1 \alpha_3}{\Sigma \alpha_i \alpha_j} = - 4 \Lambda dt \frac{\alpha_1 \alpha_3 \times \alpha_2 \alpha_3 (\alpha_2 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_1 - \alpha_1 \alpha_3)}{(\Sigma \alpha_i \alpha_j)^3},$$

il en revient dans la cheminée :

$$f_4 = f_2 \frac{\alpha_2 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_1 - \alpha_1 \alpha_3}{\Sigma \alpha_i \alpha_j} = 2 \Lambda dt \frac{\alpha_2 \alpha_3 (\alpha_2 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_1 - \alpha_1 \alpha_3)^2}{(\Sigma \alpha_i \alpha_j)^3}.$$

Coup qui arrive en haut, se réfléchit encore en changeant de signe et revient à la bifurcation; il en passe en amont et en aval :

$$f_5 = - 4 \Lambda dt \frac{\alpha_1 \alpha_3 \times \alpha_2 \alpha_3 (\alpha_2 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_1 - \alpha_1 \alpha_3)^2}{(\Sigma \alpha_i \alpha_j)^4},$$

et il en revient dans la cheminée :

$$f_6 = 2 \Lambda dt \frac{\alpha_2 \alpha_3 (\alpha_2 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_1 - \alpha_1 \alpha_3)^3}{(\Sigma \alpha_i \alpha_j)^4}.$$

Finalement, d'après les signes adoptés pour la réflexion des coups aux bifurcations, la surpression F due à la succession des coups dans le tronçon aval est, au voisinage du point d'insertion de la cheminée :

$$\begin{aligned} F &= f - f_1 + f_3 + f_5 + f_7 + \dots \\ &= \frac{2 \Lambda \alpha_2 \alpha_3}{\Sigma \alpha_i \alpha_j} \left\{ \int_0^t dt - \frac{2 \alpha_1 \alpha_3}{\Sigma \alpha_i \alpha_j} \left[\int_0^{t - \frac{2H}{a_2}} dt + \frac{\alpha_2 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_1 - \alpha_1 \alpha_3}{\Sigma \alpha_i \alpha_j} \int_0^{t - \frac{4H}{a_2}} dt \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(\alpha_2 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_1 - \alpha_1 \alpha_3)^2}{(\Sigma \alpha_i \alpha_j)^2} \int_0^{t - \frac{6H}{a_2}} dt + \dots \right] \right\}. \end{aligned}$$

Dans le tronçon amont, la surpression Φ aura pour expression :

$$\Phi = f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + \dots$$

En faisant le calcul, on retrouve la même valeur que pour F.

Ces équations ne sont vraies que tant qu'on a $t < \tau$; à partir de ce moment, le coup direct f reste constant; il en est de même pour f_1 et f_2 .

Après le temps $\tau + \frac{2H}{a_2}$, f_3 et f_4 deviennent constants.

Après le temps $\tau + \frac{4H}{a_2}$, f_5 et f_6 deviennent constants, et ainsi de suite, de telle sorte que le nombre des termes qui figurent dans F et Φ augmente indéfiniment, mais que pour chacun d'eux l'intégration ne doit se faire que dans un intervalle égal à τ .

Cherchons la valeur de Φ au temps τ . En faisant le calcul, et toutes simplifications faites, on obtient, en désignant par n un nombre tel que $\frac{2nH}{a_2} = \tau$ et en supposant n très grand :

$$\Phi = \frac{2a_2 w_0 HS}{g\tau a_1 \omega},$$

qui, pour $a_2 = a_1$, devient $\frac{2HSw_0}{g\tau\omega}$, à condition que $\frac{2H}{a_2}$ soit suffisamment petit par rapport à $\frac{2L}{a_2}$, ce qui sera le cas général de la pratique pour les usines de la deuxième catégorie.

[16] Ouverture brusque. — Il deviendrait fastidieux de pousser ces calculs plus loin dans tous leurs détails et de les reprendre pour tous les cas d'ouverture.

Je me contenterai, pour en finir, d'étudier l'ouverture brusque quand la cheminée est au voisinage immédiat du distributeur, et de voir dans quelles conditions l'oscillation en masse prend naissance.

A l'origine, l'eau est au repos dans la cheminée et la conduite. On aura donc, dans la phase du coup direct pour la conduite :

Dans la conduite :

$$y = H + \xi, \quad v = -\frac{g}{a_1} \xi;$$

dans la cheminée, en y comptant positivement, comme toujours, les vitesses de bas en haut :

$$y = H + \varphi(t) - \varphi\left(t - \frac{2H}{a_2}\right),$$

$$u = \frac{g}{a_2} \left[\varphi(t) + \varphi\left(t - \frac{2H}{a_2}\right) \right],$$

$\varphi\left(t - \frac{2H}{a_2}\right)$ étant nul quand $t < \frac{2H}{a_2}$.

L'égalité des pressions au distributeur donne :

$$\xi = \varphi(t) - \varphi\left(t - \frac{2H}{a_2}\right).$$

L'équation de continuité donne :

$$Sv - \omega u = k\sqrt{2g(H + \xi)};$$

k est déterminé par la condition que lorsque le régime final est établi, c'est-à-dire lorsque la cheminée ne débite plus, qu'il n'y a plus d'oscillation et que toute l'eau vient par le canal :

$$Sv_1 = k\sqrt{2gH}.$$

On en déduit, dans les limites des approximations déjà admises :

$$Sv - \omega u = Sv_1\left(1 + \frac{\xi}{2H}\right),$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} \varphi(t) - \varphi\left(t - \frac{2H}{a_2}\right) &= \xi, \\ \varphi(t) + \varphi\left(t - \frac{2H}{a_2}\right) &= -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\xi - \frac{Sv_1\alpha_2}{g}\left(1 + \frac{\xi}{2H}\right). \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2\alpha_2}\xi - \frac{Sv_1\alpha_2}{2g}\left(1 + \frac{\xi}{2H}\right), \\ \varphi\left(t - \frac{2H}{a_2}\right) &= -\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2\alpha_1}\xi - \frac{Sv_1\alpha_2}{2g}\left(1 + \frac{\xi}{2H}\right); \end{aligned}$$

si l'on prend l'indice n pour la n^e période de durée $\frac{2H}{a_2}$, on obtient enfin pour ξ la loi de récurrence :

$$\xi_n = \frac{\frac{\alpha_2}{\alpha_1} - 1 + \frac{Sv_1\alpha_2}{2gH}}{\frac{\alpha_2}{\alpha_1} + 1 + \frac{Sv_1\alpha_2}{2gH}} \xi_{n-1}$$

avec :

$$\xi_1 = -\frac{Sv_1\alpha_2}{g} \frac{1}{\frac{\alpha_2}{\alpha_1} + 1 + \frac{Sv_1\alpha_2}{2gH}}$$

ou, en posant :

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_2}{\alpha_1} + 1 + \frac{Sv_1 \alpha_2}{2gH} &= \mu, & \left| \frac{v}{\mu} \right| < 1, \\ \frac{\alpha_2}{\alpha_1} - 1 + \frac{Sv_1 \alpha_2}{2gH} &= \nu, \\ \frac{Sv_1 \alpha_2}{g} &= A, \\ \xi_1 &= -\frac{A}{\mu}, \\ \xi_n &= \frac{\nu}{\mu} \xi_{n-1} = -\frac{\nu^{n-1}}{\mu^n} A, \\ u_n &= -\frac{Ag}{a_2} \left[(1 - \mu) \frac{\nu^{n-1}}{\mu^n} + 1 \right], \\ v_n &= \frac{g}{a_1} \frac{\nu^{n-1}}{\mu^n} A. \end{aligned}$$

Supposons maintenant $\frac{l}{a_1} = \frac{2nH}{a_2}$, n étant assez grand, et considérons la $(n-1)^{\circ}$ période. Aucune onde n'est encore arrivée en haut de la conduite; on a donc à son extrémité amont $v = 0$.

Dans la cheminée, on a la vitesse u_n précédemment écrite, dans l'expression de laquelle le facteur $\frac{\nu^{n-1}}{\mu^n} (1 - \mu)$ tend vers 0; u_n tend donc vers la valeur :

$$-\frac{Ag}{a_2} = -\frac{Sv_1}{\omega}.$$

Enfin ξ_n tend vers 0 et l'écoulement par la vanne tend à se faire sous la charge H , l'intervalle de temps étant trop court pour que x ait pu prendre une valeur appréciable.

On voit, dans ces conditions, que l'équation de continuité s'appliquera aux deux extrémités de la colonne liquide et à l'écoulement par la vanne, et que les conditions initiales du mouvement d'oscillation en masse seront $v_0 = 0$, $u_0 = -\frac{Sv_1}{\omega}$. Au début, c'est donc la cheminée qui fournit tout le débit.

Ce résultat peut paraître paradoxal, mais on peut arriver à s'en rendre compte par le raisonnement suivant : Au moment de l'ouverture, une onde de dépression part à la fois dans la cheminée et la conduite, mettant l'eau en mouvement dans l'une et l'autre vers la vanne. Cette onde, arrivant dans le haut de la cheminée, s'y réfléchit avec changement de signe, revient à la vanne, augmente l'écoulement et passe en partie, sous forme d'onde de compression, dans la conduite, *venant*

ralentir le mouvement déjà amorcé. On voit ainsi qu'il y a tendance à l'arrêt du mouvement de l'eau dans la conduite même.

Ce résultat nous indique le sens des hypothèses à faire dans les cas d'ouverture en fixant les conditions initiales que nous recherchions à la fin du chapitre précédent. Il faudra admettre que, dans toute manœuvre d'ouverture, c'est l'eau qui est dans la cheminée qui fournit seule à l'origine le débit supplémentaire.

[17] Je terminerai ce chapitre par quelques indications numériques sur la valeur des coups de bélier dans les conduites à l'amont des cheminées d'équilibre et par la vérification des formes de coups de bélier d'onde sur les diagrammes qui ont été relevés au cours des expériences que j'ai faites avec M. Camichel à l'Usine de la Mine de Plomb.

a) *Calculs numériques divers.*

Considérons d'abord la conduite de la Mine de Plomb où la cheminée d'équilibre n'est pas située au voisinage immédiat du distributeur. Nous comparerons les coups d'onde dus à une fermeture en une demi-seconde ($\tau < \frac{2l}{a_1}$) avec et sans cheminée. (On trouvera les données de cette usine aux §§ 2 et 7.)

$$\text{Sans cheminée, on a : } \xi = \frac{a_m v_0}{g} = \frac{710 \times 2}{9,81} = 144^m.$$

$$\text{Avec cheminée, on a : } \xi = \frac{2Hv_0S}{g\tau\omega} = 38^m.$$

Si la fermeture est plus lente, la réduction est beaucoup plus considérable.

Je prendrai un autre cas dans une usine avec canal d'amenée en charge dont j'étudie actuellement le projet (Usine de Saillens, dans la Haute-Ariège). Ce canal d'amenée n'est pas prévu en conduite métallique, mais il doit être foré dans la roche en place avec revêtement en maçonnerie et béton armé; a ne doit donc pas différer beaucoup des valeurs habituelles. En l'absence de données précises, je prendrai $a = 900$ pour la conduite et la cheminée (*).

Les données prévues sont les suivantes :

$$\begin{array}{ll} l = 2330^m & S = 2^m,45 \\ H = 8^m & \omega = 15^m,90 \\ L = 1100^m & \sigma = 1^m,23 \\ v_0 = 1^m,47 & w_0 = 2^m,85 \quad \gamma_0 = 700^m \end{array}$$

(*) Voir annexe I.

Sans cheminée, pour $T = 2''$ $\begin{matrix} < \frac{2l}{a_1} \\ < \frac{2L}{a_3} \end{matrix}$ on aurait, dans le canal amont, sur une distance de $2330 - 900 = 1430^m$:

$$\xi = \frac{av_0}{g} = 134^m;$$

avec la cheminée, en prenant par approximation la formule $\frac{2Hw_0S}{g\tau\omega}$, on trouve :

$$\xi = 0^m,36.$$

Je ferai la même remarque que précédemment pour le cas où la fermeture est plus lente. Il ne passe donc pratiquement pas de coup d'onde dans le canal d'amenée.

b) *Vérifications sur la forme des coups d'onde d'après les diagrammes enregistrés à l'Usine de la Mine de Plomb.*

Quoique la cheminée d'équilibre ne soit pas sur le distributeur même, que le manomètre soit situé sur un point où la conduite a changé de diamètre et qu'enfin il soit difficile d'effectuer, sur un volant manœuvré à la main, une manœuvre que l'on puisse considérer comme instantanée⁽⁴⁾, les diagrammes obtenus confirment de façon remarquable les résultats exposés. On y retrouve très nettement, aux arrondis près, l'allure de la courbe donnée figure 17.

Prenons par exemple la figure 19, qui correspond à une faible fermeture.

On y voit d'abord la surpression, puis une dépression suivie immédiatement d'une nouvelle surpression, etc... Si l'on mesure l'intervalle entre deux surpressions consécutives, on trouve (l'enregistrement du temps étant fait en demi-secondes au-dessus) :

$$\theta = 1'',333$$

(4) Il faudrait pour cela que le temps de manœuvre fût inférieur à celui qui est nécessaire à une onde pour aller de la vanne au haut de la cheminée et en revenir.

Or, en cette région, la conduite a une épaisseur moyenne de 8 mm., ce qui donne :

$$a = 900 \text{ m/sec. } 2l = 2 \times (6,24 + 20 + 13,20) = 78,88$$

$$\theta = \frac{78,88}{720} = 0'',088.$$

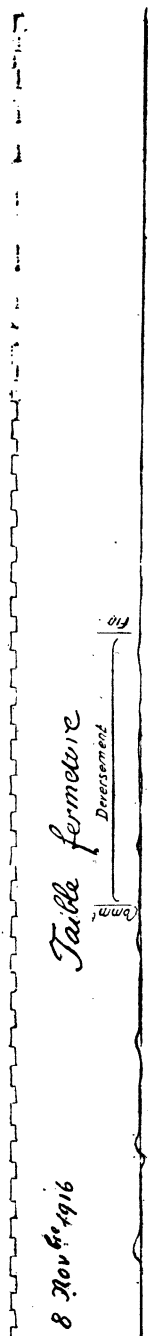


FIG. 19.

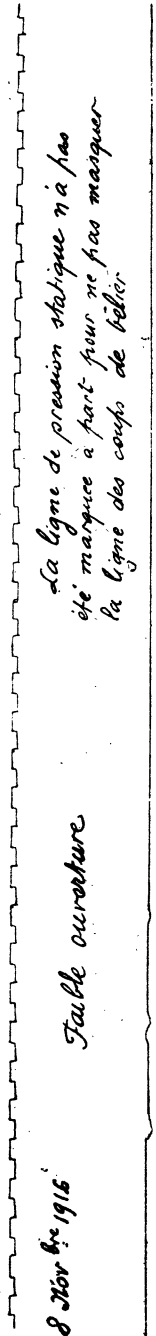


FIG. 20.

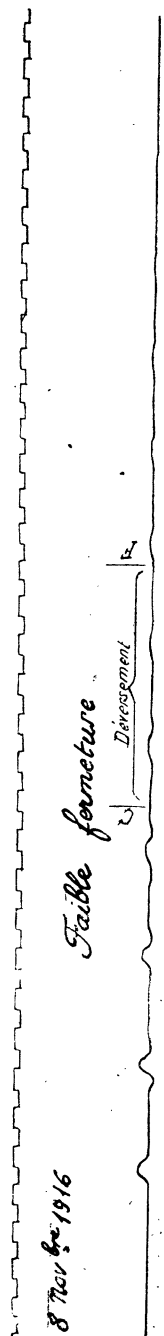


FIG. 21.

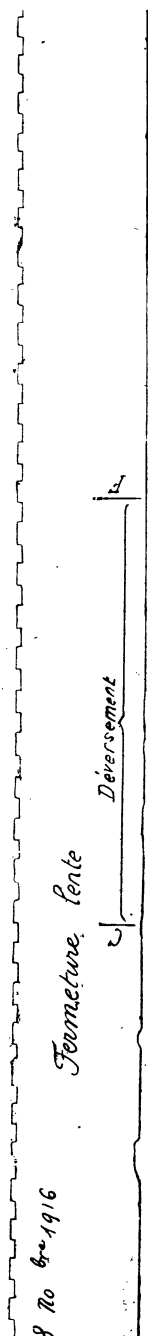
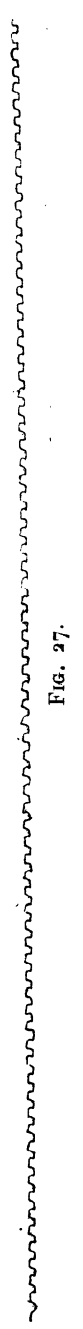
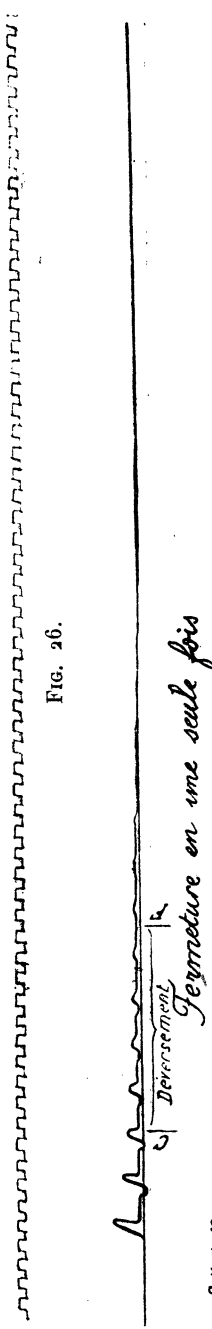
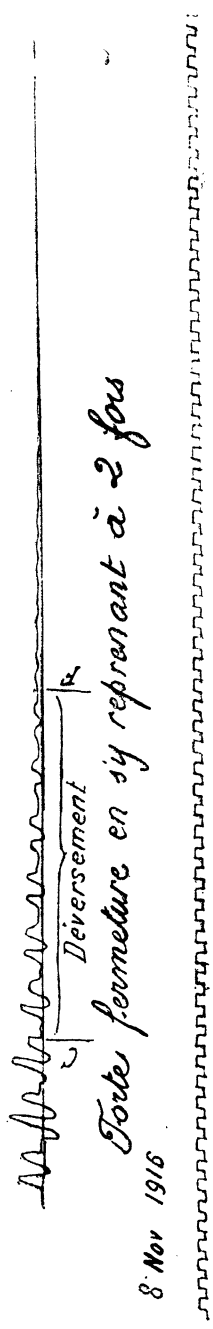
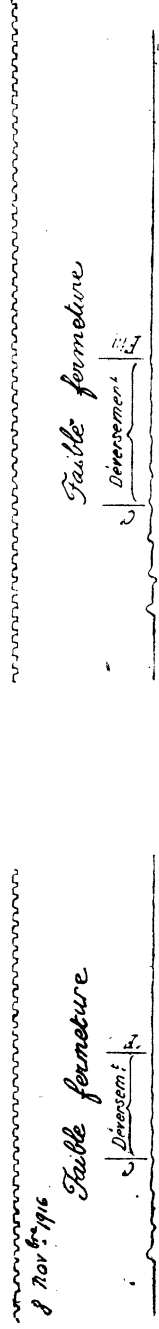
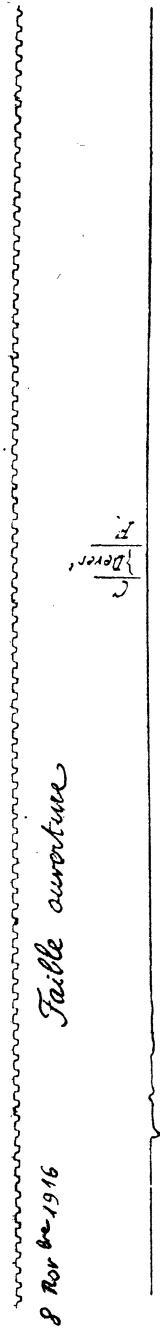


FIG. 22.



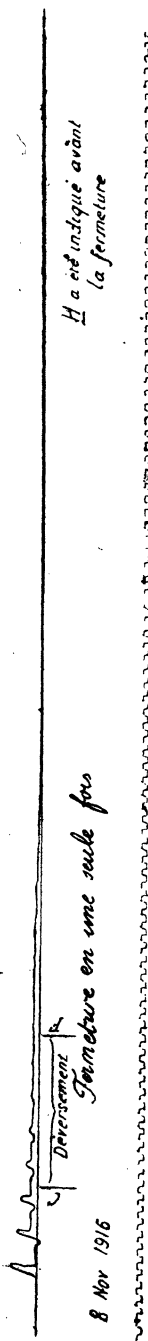


FIG. 28.

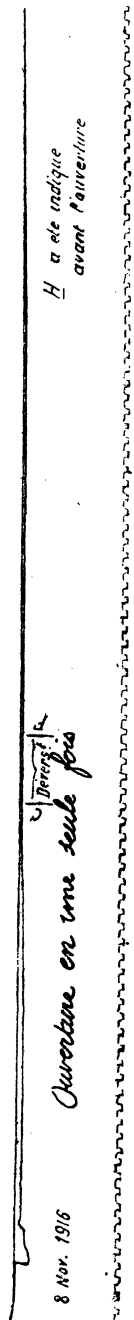


FIG. 29.

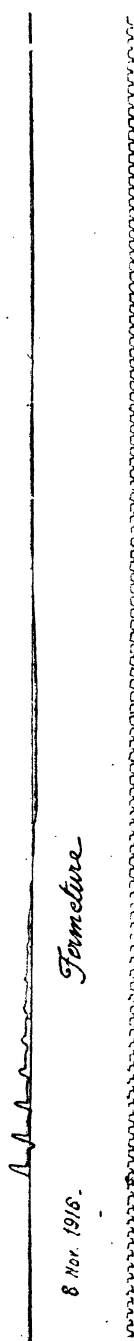


FIG. 30.

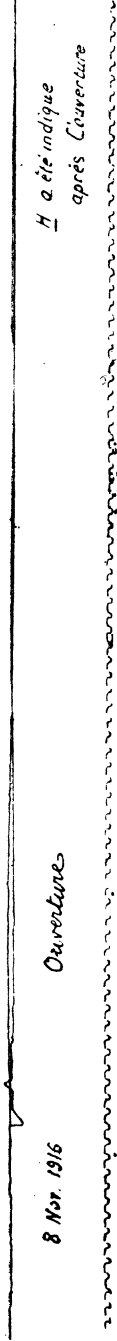


FIG. 31.

D'où l'on déduit :

$$a_m = \frac{2(l + H)}{g} = 563 \text{ m/sec.}$$

On ne retrouve la valeur précédemment calculée avec une épaisseur moyenne de la conduite égale à 4 mm. qu'à 21 % près; mais je ferai remarquer que ce calcul a été fait pour une conduite constituée en acier pour lequel on a admis $E = 20.000$; d'autre part, l'application de la formule suppose qu'elle est constituée d'anneaux homogènes. Or la conduite est ancienne; elle est antérieure à 1896; j'ignore la nature exacte du métal et la rivure, effectuée suivant des procédés peut-être imparfaits, peut être de nature à permettre, sous une pression donnée, une plus grande déformation annulaire par un léger glissement des tôles aux rivures; avec de pareilles incertitudes, je ne m'arrêterai pas davantage sur cette discordance, ne retenant des diagrammes que la forme des courbes conformes aux prévisions⁽¹⁾.

Il y a lieu, en particulier, de remarquer l'amortissement rapide du coup d'onde dès que le déversement se produit. Les figures 21, 22, 24 et 25 donnent les mêmes résultats.

Les figures 20 et 23, qui correspondent à une ouverture, donnent les mêmes résultats en ce qui concerne le temps, mais, comme il est d'ailleurs logique, avec inversion des surpressions et dépressions. Elles montrent en outre l'amortissement extrêmement rapide du coup d'onde par suite de la continuité de l'écoulement; on ne voit nettement qu'un retour de l'onde, et c'est à peine si, sur le diagramme 20, on peut deviner le troisième.

Les figures 26 à 31, prises avec un déroulement du papier plus lent, des manœuvres du distributeur plus importantes et une amplification plus grande, indiquent les mêmes phénomènes du coup de bélier d'onde. Ils montrent en outre la naissance simultanée de l'oscillation en masse.

Sur quelques-uns de ces derniers diagrammes, la ligne de pression statique n'a pas été très exactement indiquée. Il a pu y avoir aussi déplacement du cylindre entre cet enregistrement et celui des surpressions. Aussi n'y a-t-il lieu de tenir compte que de l'allure du phénomène sans s'occuper de voir si le diagramme est recoupé ou non par la ligne de pression statique. Sur la figure 26, où la fermeture a été faite en deux manœuvres très voisines, on remarquera comme ces deux manœuvres se distinguent nettement.

J'ai montré comment les ondes donnaient lieu à l'oscillation en masse. Ces diagrammes prouvent l'existence simultanée des deux phénomènes.

(1) Voir annexe II.

[18] **Résumé et conclusions du chapitre III.** — Il me paraît utile de revoir dès à présent les principaux résultats actuellement acquis.

a) Dans une conduite munie d'une cheminée d'équilibre, toute variation de régime donne lieu à des ondes que la présence de la cheminée affaiblit considérablement dans la partie située en amont du point d'insertion, en les transformant presque totalement en un mouvement d'oscillation en masse de l'eau.

b) Pour peu que la manœuvre du distributeur qui donne lieu à la variation de régime ne soit pas instantanée, mais progressive, et si la section de la cheminée est suffisante (en pratique, on fera bien de la prendre supérieure à celle du canal amont), cet affaiblissement du coup d'onde est tel qu'il n'y a plus lieu d'en tenir compte, et l'on n'a à se préoccuper que de l'oscillation en masse.

c) Je rappellerai, en outre, que la théorie précédente permet de fixer les conditions initiales au moment d'une ouverture. Il faut admettre que c'est la cheminée seule qui commence à fournir tout le débit supplémentaire utile.

Il me reste donc à étudier, avec plus de détails que je ne l'ai fait jusqu'à présent, le mouvement de l'eau dû à l'oscillation en masse. Cette étude fera l'objet du chapitre suivant.

CHAPITRE IV

Analyse plus complète du phénomène d'oscillation en masse.

[19]. Dans le chapitre II, j'ai indiqué la théorie simplifiée du phénomène d'oscillation en masse dans les cheminées d'équilibre. Mais cette théorie laissait de côté certains points très importants en pratique. C'est ainsi que j'ai négligé la variation de niveau dans la cheminée vis-à-vis de la hauteur de celle-ci, ainsi que la perte de charge le long du canal d'amenée. Or j'ai eu à envisager, dans les projets que j'ai étudiés, des cas où la perte de charge était comparable à la demi-amplitude de l'oscillation.

Cette étude doit donc être reprise. Je le ferai en ayant spécialement en vue la solution des problèmes de la pratique, ce qui me permettra de profiter d'ailleurs de quelques-uns des résultats déjà obtenus et qui sont les suivants :

M. de Sparre a montré, dans une étude que j'ai citée (voir § 5, 3°), et en tenant compte de la perte de charge dans la cheminée, qu'il fallait donner à celle-ci, pour qu'elle ait un effet utile, une section voisine de celle de la conduite. Je supposerai cette condition remplie et je pourrai ainsi négliger la perte de charge dans la cheminée devant celle qui se produit dans le canal amont.

De même, si la manœuvre du distributeur est progressive, ce qui rend les coups d'onde dans le canal amont pratiquement négligeables, elle n'en sera pas moins très courte par rapport à la période de l'oscillation en masse, de 3 à 15'', devant 25'' à 15 minutes parfois. Je supposerai donc, au point de vue de la production de l'oscillation en masse, que les manœuvres sont instantanées.

Enfin, j'ai montré de quelle façon l'eau contenue dans la cheminée se met en mouvement par suite des réflexions des ondes. Je pourrai alors admettre, la masse de l'eau contenue dans la cheminée étant pratiquement négligeable vis-à-vis de celle de la conduite, que cette mise en mouvement est instantanée.

Ces deux dernières hypothèses me mettront dans un cas un peu plus défavorable que la réalité, tout en laissant un degré d'approximation très grand. Il ne pourra qu'en résulter une légère marge de sécurité supplémentaire.

Bien entendu, les remarques que j'ai faites à propos des coups d'onde m'amèneront à considérer, dans ce qui suit, l'eau comme incompressible et la conduite comme dépourvue d'élasticité. Dans ces conditions, lorsque le point d'insertion de la cheminée sera éloigné du distributeur, on sera amené à ne considérer comme

participant à l'oscillation en masse que la portion de liquide comprise dans la cheminée et dans la portion de conduite située en amont.

En raison des difficultés analytiques et des différences que l'on trouve dans la mise en équation, je commencerai par traiter les cas de fermeture que l'on peut résoudre à peu près entièrement. Je traiterai ensuite les problèmes d'ouverture (*).

[20] Étude de la fermeture sans négliger x devant H , mais sans tenir compte de la perte de charge dans la conduite. — Cette étude me permettra, par une première approximation, de distinguer plus loin, dans les termes correctifs que je vais chercher, la part qui revient à ce point et celle qui dépendra de la perte de charge.

L'équation du mouvement que j'ai précédemment écrite est :

$$(m + x) \frac{d^2x}{dt^2} + gx + \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = 0.$$

On peut l'intégrer une première fois par la méthode classique, que je serai amené à employer systématiquement, en prenant comme variable x et $\frac{dx}{dt}$ comme inconnue. On arrive ainsi, en désignant par u_0 la vitesse initiale de l'eau dans la cheminée ($Sv_0 = \omega u_0$), à l'expression :

$$(1) \quad dt = \pm dx \sqrt{\frac{m + x}{m u_0^2 - g x^2}}.$$

Il est facile de voir que l'expression sous le radical qui est en dénominateur a les mêmes racines que précédemment. L'amplitude du mouvement est la même, car x varie de l'une à l'autre, l'expression restant positive entre les deux.

L'équation (1) définit donc x comme une fonction périodique de t .

On pourrait, par approximation, obtenir une valeur approchée de t en fonction d'une variable auxiliaire φ définie par l'équation :

$$x = u_0 \sqrt{\frac{m}{g}} \sin \varphi;$$

(*) Voir *C. R. de l'Académie des Sciences*, D. Eydoux, *Sur les mouvements de l'eau dans les cheminées d'équilibre*, t. 166, 1918, p. 462.

La présente étude constitue d'ailleurs une approximation plus serrée que les résultats que j'ai eu l'occasion d'exposer dans cette note.

on obtiendrait ainsi, en se bornant aux deux premiers termes :

$$t = \frac{m}{g} \left[\varphi + \frac{u_0}{2m} \sqrt{\frac{m}{g}} (1 - \cos \varphi) \right].$$

Les maxima et minima correspondent donc aux valeurs :

$$\pm u_0 \sqrt{\frac{m}{g}},$$

que j'écrirai $\pm ma$ en posant : $\frac{u_0}{\sqrt{mg}} = a$.

On retrouve donc les mêmes valeurs que précédemment.

Il est d'ailleurs facile de voir que, dans les conditions de construction que nous nous sommes fixés, $\frac{u_0}{\sqrt{mg}}$ est très inférieur à 1.

[21] Étude de la fermeture en tenant compte de la perte de charge le long du canal. — La perte de charge se présentant comme une résistance dirigée en sens inverse de la vitesse, nous serons amenés à distinguer les périodes de montée des périodes de descente.

L'introduction de cette force résistante ayant pour effet d'amortir le mouvement, il suffira, pour avoir les limites de l'oscillation de l'eau (point le plus important en technique pour déterminer la section et la hauteur à donner à la cheminée), d'étudier la première montée et la première descente.

Il sera logique et suffisamment exact d'écrire, suivant les valeurs admises dans la pratique d'hydraulique industrielle, que cette perte de charge est proportionnelle au carré de la vitesse de l'eau dans le canal d'amenée (¹).

Nous la prendrons donc sous la forme $\frac{Kv^2}{2g}$; K étant une constante, elle se décompose en deux :

- a) Un terme $\frac{v^2}{2g}$ correspondant à la mise en vitesse de l'eau au départ du réservoir;
- b) Un terme $(K - 1) \frac{v^2}{2g}$ correspondant à la perte de charge le long du canal.

K sera donc supérieur à 1. En pratique, cette valeur sera notablement dépassée, comme nous le verrons par un exemple que je donnerai ci-après.

(¹) Voir annexe III.

K sera déterminé par la perte de charge que l'on se sera donnée pour la marche en régime normal; si l'on désigne par j_0 cette perte de charge, on aura $\frac{Kv_0^2}{2g} = j_0$.

Pour la commodité des équations, j'exprimerai cette perte de charge en fonction de la vitesse u dans la cheminée en posant :

$$\frac{Kv^2}{2g} = \frac{\lambda u^2}{2g}$$

D'où :

$$\lambda = \frac{Kv_0^2}{S^2}$$

Exemple numérique. — Pour l'Usine de Saillens (voir ses données § 17), on a calculé, d'après les dimensions données au canal d'amenée, que la perte de charge pour $v_0 = 1$ m. 47 serait de 1 mm. 5 par mètre courant; on aura donc comme perte de charge totale :

$$j_0 = 2.330 \times 0,0015 + \frac{v_0^2}{2g} = 3 \text{ m. } 715.$$

D'où :

$$K = 16,9,$$

$$\lambda = 1.431.$$

a) *Première période de montée.* — $\frac{dx}{dt}$ est positif; la force résistante s'exerce dans le même sens que la pesanteur en gênant la montée.

L'équation

$$(m + x) \frac{d^2x}{dt^2} + gx + \frac{1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = 0$$

devient :

$$(2) \quad (m + x) \frac{d^2x}{dt^2} + gx + \frac{\lambda + 1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = 0.$$

En remarquant que, pour $t = 0$, $x_0 = -\frac{\lambda u_0^2}{2g}$, $\left(\frac{dx}{dt} \right)_0 = u_0$, la même méthode d'intégration nous donne :

$$(3) \quad \frac{dx}{dt} = + \sqrt{\frac{2g}{(\lambda + 1)(\lambda + 2)}} \left\{ [m - (\lambda + 1)x] - \frac{\left[m - 2(\lambda + 1) \frac{u_0^2}{2g} \right] \left(m - \frac{\lambda u_0^2}{2g} \right)^{\lambda + 1}}{(m + x)^{\lambda + 1}} \right\}$$

où λ est un nombre positif quelconque, mais d'un ordre de grandeur en général assez élevé.

Pour obtenir le maximum de montée, il suffira d'annuler l'expression sous radical de l'équation (3). x doit être inférieur à $\frac{m}{\lambda + 1}$, autrement cette expression serait la somme de deux termes négatifs et ne pourrait être nulle.

Donc, puisque $\lambda > 1$, en pratique, on aura $x < m$.

Posons $\frac{x}{m} = \theta$ et prenons, comme ci-dessus :

$$\frac{u_0}{\sqrt{mg}} = a.$$

On obtient ainsi l'équation :

$$(4), \quad 0 = [1 - (\lambda + 1)\theta] [1 + \theta]^{\lambda+1} - [1 - (\lambda + 1)a^2] \left[1 - \frac{\lambda a^2}{2}\right]^{\lambda+1}.$$

Cette équation n'a qu'une racine positive qu'il faudra chercher par les procédés ordinaires.

Un cas intéressant est donné quand λa est petit vis-à-vis de 1, ce qui revient à dire que j_0 , qui est égal à $\frac{m\lambda a^2}{2}$, est petit vis-à-vis de ma .

On pourra alors développer θ en série de la forme :

$$\theta = c_1 a + c_2 a^2 + c_3 a^3.$$

Le calcul effectué d'abord sur θ , puis en remontant de θ à x , donne :

$$(5) \quad x_1 = ma - \frac{m\lambda a^2}{3} - \frac{m\lambda a^3}{72} (22\lambda - 15),$$

Si l'on remarque que $j_0 = \frac{\lambda u_0^2}{2g} = \frac{m\lambda a^2}{2}$, on a finalement, en bornant le développement aux termes en a^2 :

$$(6) \quad x_1 = ma - \frac{2}{3} j_0,$$

formule intéressante qui montre qu'il suffit dans ce cas, pour avoir la montée réelle, de calculer la montée par la formule simplifiée et d'en retrancher les deux tiers de la perte de charge initiale.

b) *Première période de descente.* — $\frac{dx}{dt}$ est négatif; la force résistante s'exerce en sens inverse de la pesanteur pour empêcher la descente.

L'équation devient alors :

$$(7) \quad (m + x) \frac{d^2x}{dt^2} + gx - \frac{\lambda - 1}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = 0.$$

Prenons le commencement de la descente pour origine des temps; pour $t = 0$, $x = x_1$, $\left(\frac{dx}{dt} \right)_1 = 0$.

L'équation s'intègre par :

$$(8) \quad \frac{dx}{dt} = - \sqrt{\frac{2g}{(\lambda - 1)(\lambda - 2)} \left\{ [m + (\lambda - 1)x] - \frac{(m + x)^{\lambda - 1} [m + (\lambda - 1)x_1]}{(m + x_1)^{\lambda - 1}} \right\}}.$$

On obtiendra la valeur de x à la fin de la descente en annulant l'expression sous radical de l'équation (8), ce qui donne, en posant comme avant (*) $\frac{x}{m} = \theta$:

$$(9) \quad (1 + \theta_1)^{\lambda - 1} [1 + (\lambda - 1)\theta] - (1 + \theta)^{\lambda - 1} [1 + (\lambda - 1)\theta_1] = 0,$$

θ_1 étant donné par l'équation (4).

L'équation (9) a une racine négative qui doit être voisine de $-\theta_1$.

Posons :

$$\theta_2 = -\theta_1 + c_1 \theta_1^3 + c_2 \theta_1^5$$

et développons. On trouve finalement :

$$(10) \quad x_2 = -x_1 + \frac{2}{3} \frac{\lambda x_1^3}{m} - \frac{4}{9} \frac{\lambda^2 x_1^5}{m^2},$$

expression facilement calculable.

Si, en particulier, nous prenons pour x_1 l'expression donnée par l'équation (5), nous trouvons :

$$(11) \quad x_2 = -ma + \frac{m\lambda a^2}{3} - \frac{m\lambda a^3}{7^2} [42\lambda + 15],$$

ou, en bornant le développement aux termes en a^2 :

$$(12) \quad x_2 = -ma + 2j_0.$$

(*) La descente est moins grande que la montée. On aura donc : $\left| \frac{x}{m} \right| < 1$.

La descente est égale à la valeur trouvée sans perte de charge, diminuée de deux fois la perte de charge.

Je n'ai développé ces calculs que pour être plus complet dans mon exposé, mais, en pratique, la perte de charge compte seule et l'on peut négliger x devant m et 1 devant λ ; les équations (6) et (11) deviennent dans ce cas :

$$(2') \quad m \frac{d^2x}{dt^2} + gx + \frac{\lambda}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = 0,$$

$$(7') \quad m \frac{d^2x}{dt^2} + gx - \frac{\lambda}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = 0$$

et s'intègrent, avec les mêmes conditions initiales, par :

$$(3') \quad \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{2g}{\lambda^2} \left[m - \lambda x - me^{-\frac{\lambda}{m} \left(x + \frac{\lambda u_0^2}{2g} \right)} \right],$$

$$(8') \quad \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{2g}{\lambda^2} \left[m + \lambda x - (m + \lambda x_1) e^{\frac{\lambda}{m} (x - x_1)} \right],$$

où x_1 est la racine positive du deuxième membre de l'équation (3') égalé à 0.

La même méthode de calcul qu'auparavant nous donnera, pour les valeurs de x à la fin de la première montée et de la première descente :

$$(5') \quad x_1 = ma \left[1 - \frac{\lambda a}{3} + \frac{\lambda^2 a^2}{36} \right].$$

$$(11') \quad x_2 = -x_1 + \frac{2\lambda}{3} \frac{x_1^2}{m} - \frac{4}{9} \frac{\lambda^2 x_1^3}{m^2}.$$

Les premières approximations donnant x_1 et x_2 en fonction de la perte de charge resteront les mêmes :

$$x_1 = ma - \frac{2}{3} j_0,$$

$$x_2 = -ma + 2j_0$$

si j_0 est petit vis-à-vis de ma .

Nous avons ainsi défini les niveaux extrêmes de l'eau en cas de fermeture totale et instantanée. En pratique, ces manœuvres étant exceptionnelles, les résultats trouvés seront plus faibles; nous avons fixé ainsi le cas le plus défavorable.

APPLICATIONS NUMÉRIQUES

a) *Usine de Saillens.* — Je prendrai d'abord l'Usine de Saillens, définie aux § 17 et 21.

On a :

$$u_0 = v_0 \frac{S}{\omega} = 0 \text{ m. } 227,$$

$$m = 15129, \quad a = 0,00059,$$

$$ma = 8 \text{ m. } 93, \quad j_0 = 3 \text{ m. } 72;$$

j_0 est assez petit vis-à-vis de ma .

Le calcul simplifié donnerait pour la période de l'oscillation en masse :

$$T_2 = 4 \text{ min. } 48''.$$

Nous aurons donc les valeurs suivantes :

	Sans tenir compte de la perte de charge.	En tenant compte de la perte de charge.
Montée	$ma = 8^m 93$	$ma - \frac{2}{3}j_0 = 6^m 45$
Descente	$-ma = -8^m 93$	$\left. \begin{array}{l} -ma + 2j_0 = -1^m 49 \\ \text{Formule 12')} -3^m 91 \end{array} \right\}$

Les deux derniers nombres de la troisième colonne montrent que si j_0 était assez petit par rapport à x_1 pour appliquer la formule simplifiée, il n'en était pas de même pour $2j_0$ par rapport à x_2 .

Ces formules doivent donc être employées avec discernement.

Dans le cas choisi, nous prendrons donc comme variation extrême du niveau + 6 m. 45 et - 3 m. 91 par rapport au niveau statique au lieu de ± 8 m. 93, valeurs trouvées en ne tenant pas compte de la perte de charge.

Le niveau de départ de l'eau au moment de la fermeture est - 3 m. 71 au lieu de 0.

L'élongation maximum est de 17 m. 86 avec le calcul élémentaire, et de 10 m. 36 seulement en tenant compte de la perte de charge, soit une différence de 7 m. 30 ou 41 %.

b) *Usine du Hourat* (haute Vallée d'Ossau), projetée pour la Compagnie des Chemins de fer du Midi.

Données :

$$\begin{aligned} \text{Canal d'aménée en charge} \dots & \left\{ \begin{array}{l} l = 5.700 \text{ mètres} \\ S = 12 \text{ m}^2 \\ a_1 = 900 \text{ m/sec. (chiffre admis)} \end{array} \right. \\ \text{Cheminée d'équilibre} \dots \dots & \left\{ \begin{array}{l} H = 15 \text{ mètres} \\ \omega = 315 \text{ m}^2 \\ a_2 = 900 \text{ m/sec. (chiffre admis)} \end{array} \right. \\ \text{4 conduites forcées de 1 m. 30} & \left\{ \begin{array}{l} L = 420 \text{ mètres} \\ \sigma = 5 \text{ m}^2 28 \\ a_3 = 980 \text{ m/sec.} \end{array} \right. \\ \text{de diamètre, 1 m}^2 32 \text{ de sec-} & \\ \text{tion et 12 mm. d'épaisseur} & \\ \text{moyenne} \dots \dots \dots & \end{aligned}$$

$$y_0 = 208 \text{ mètres,}$$

$$w_0 = 3 \text{ m. 25,} \quad v_0 = 1 \text{ m. 433,} \quad u_0 = 0 \text{ m. 055,}$$

$$j_0 = 2 \text{ m. 29.}$$

Calculs :

$$1^\circ \text{ Coup de bélier d'onde : fermeture en } 0''8 < \frac{2L}{a_3}.$$

S'il n'y avait pas de cheminée, le coup de bélier, dans le canal amont, serait égal à $\frac{a_1 v_0}{g} = 132$ mètres et se produirait sur une longueur à partir de la chambre de mise en charge égale à :

$$5.700 - 720 = 6.980 \text{ mètres.}$$

Avec la cheminée, nous appliquerons la formule :

$$\frac{2a_3 w_0}{g \tau a_1} \frac{HS}{\omega}$$

qui donne :

$$\xi = 0 \text{ m. 51.}$$

maximum dont on restera très éloigné avec des fermetures plus lentes.

$$2^\circ \text{ Oscillation en masse : } \frac{u_0^2}{2g} = 0''000153.$$

$$\text{Perte de charge : } j_0 = 2 \text{ m. 29} = \frac{\lambda u_0^2}{2g}; \text{ d'où l'on déduit : } \lambda = 15000.$$

H est négligeable devant $\frac{l\omega}{S}$,

$$m = \frac{l\omega}{S} = 149.640, \quad a = 0,000045,$$

$$ma = 6 \text{ m. } 73.$$

Période de l'oscillation en masse : $T_2 = 13$ minutes environ.

Faisons le même tableau que pour l'usine de Sallens.

	Sans tenir compte de la perte de charge.	En tenant compte de la perte de charge.
Montée	$ma = 6^m 73$	$ma - \frac{2}{3}j_0 = 5^m 20$
Descente.....	$ma = 6^m 73$	$\left. \begin{array}{l} -ma + 2j_0 = -2^m 15 \\ \text{Formule 12') } = 3^m 73 \end{array} \right\}$

On prendra comme limites extrêmes des oscillations + 5 m. 20 et - 3 m. 73, ce qui représente une élongation maximum de 8 m. 93 au lieu de 13 m. 46, soit une diminution de 4 m. 53 ou 33,5 %.

[22] Les applications numériques qui précèdent m'ont fait rencontrer, de prime abord, les différences fondamentales qui existent entre les deux cheminées pour usines de faible chute placées au voisinage du distributeur et celles que j'envisage sur usines de forte chute au point de jonction du canal d'amenée et des conduites forcées.

Dans celles du premier type, si l'on veut ne pas s'exposer à des difficultés de réglage très grandes pour les turbines, il faut ou les faire déversantes (ce qui n'a pas d'inconvénient puisqu'on ne fera pas en général de réserves), ou les calculer de façon que l'oscillation de l'eau soit de très faible amplitude par rapport à H. De plus, si l'on ne veut pas perdre de la chute, il faut que la perte de charge soit aussi très faible.

Dans les usines du deuxième type, il n'en est pas ainsi. H n'est qu'une faible fraction de la chute, fraction que l'on perd même dans les usines où les canaux d'amenée fonctionnent en canaux découverts; la perte de charge est du même ordre de grandeur que H, et si x est négligeable par rapport à m , il peut se faire qu'il soit plus grand que H.

On pourrait donc concevoir que, dans un coup d'oscillation, une cheminée puisse à la descente se vider complètement et l'eau remonter même dans le canal.

La question pouvant se présenter pour les cas d'ouverture et être alors plus importante, puisque l'eau risquerait de ne pas arriver en quantité suffisante aux conduites forcées, je la reprendrai après l'étude des problèmes d'ouverture.

[23] **Ouverture instantanée.** — Ici, les difficultés analytiques sont beaucoup plus grandes. Pour que le problème ne reste pas insoluble, je rappellerai que, comme nous venons de le voir pour la fermeture, $H + x$ est, dans le cas général, complètement négligeable devant $\frac{l\omega}{S}$. Je prendrai donc pour m cette valeur.

Dans ces conditions, également, on peut prendre $X = x$; enfin, l'expression $\sqrt{1 + \frac{x}{H_0}}$ sera toujours remplaçable par $1 + \frac{x}{2H_0}$; car, dans toutes les usines, x devra être faible devant H_0 qui représente la hauteur de chute totale.

Cependant, pour être tout à fait exact, il ne faudra pas prendre la hauteur H_0 elle-même, mais la diminuer de la perte de charge totale dans le canal et dans la conduite pour la vitesse v_1 .

En effet, nous aurons en régime définitif :

$$Q = Sv_1 = \gamma \sqrt{2g \left(y_0 - \frac{\lambda u_1^3}{2g} - \frac{\mu_1 u_1^3}{2g} \right)},$$

$\frac{\lambda u_1^3}{2g}$ étant la perte de charge dans le canal et $\frac{\mu_1 u_1^3}{2g}$ celle dans la conduite, ou :

$$Q = Sv_1 = \gamma \sqrt{2g \left(y_0 - \frac{\mu u_1^3}{2g} \right)} = \gamma \sqrt{2g(y_0 - J_1)},$$

où $\mu = \lambda + \mu_1$, et où J_1 désigne la perte de charge totale.

Comme nous avons désigné précédemment par y_0 la hauteur de chute totale, nous conviendrons que H_0 représente cette hauteur de chute, diminuée de la perte de charge totale correspondant à la vitesse en régime définitif.

Dans ces conditions, j'ai donné, § 5, 4°, l'équation :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{lv_1}{2H_0} \frac{dx}{dt} + gx = 0.$$

Il faut la reprendre en remontant à une équation précédente :

$$\frac{\omega}{g} \frac{l}{S} (dq + \omega du) + \omega x dt = 0.$$

On écrira alors pour la descente :

$$\frac{l}{S} (dq + \omega du) + g \left[x - \frac{\lambda}{2g} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right] dt = 0.$$

D'autre part, on a :

$$q_1 = Sv_1 = \gamma \sqrt{2g(y_0 - J_1)} = \gamma \sqrt{2gH_0},$$

$$q = Sv = \gamma \sqrt{2g \left[y_0 - \zeta - \frac{\lambda}{2g} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + x \right]}$$

en désignant par ζ la perte de charge dans la conduite forcée. Comme elle est très peu variable pendant l'oscillation en masse, nous lui donnerons la valeur constante ζ_1 correspondant à la perte en régime définitif.

Nous aurons alors, en raison des notations adoptées et en désignant par j_0 la perte de charge dans le canal amont toujours en régime définitif ($J_1 = j_0 + \zeta_1$) :

$$q = Sv_1 \sqrt{1 + \frac{j_0 - \frac{\lambda}{2g} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + x}{H_0}} = Sv_1 \left[1 + \frac{j_0 - \frac{\lambda}{2g} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + x}{2H_0} \right],$$

$$dq = \frac{Sv_1}{2H_0} \frac{dx}{dt} \left[1 - \frac{\lambda}{g} \frac{d^2x}{dt^2} \right],$$

ce qui donne enfin, en prenant toujours $\frac{dx}{dt} = z$ pour inconnue et x pour variable :

$$(13) \quad 2mz \frac{dz}{dx} - \frac{lv_1 \lambda}{H_0 g} z^2 \frac{dz}{dx} + \frac{lv_1}{H_0} z + 2gx - \lambda z^2 = 0.$$

Posons $z^2 = y$, $\frac{m}{H_0} = b$, introduisons $u_1 = \frac{Sv_1}{\omega}$ et inversons les signes devant le radical, puisque z est négatif :

$$m \frac{dy}{dx} + \frac{\lambda b u_1}{g} \sqrt{y} \frac{dy}{dx} - b u_1 \sqrt{y} + 2gx - \lambda y = 0.$$

Cette équation n'est pas intégrable; mais, à l'origine des temps, on a :

$$x = 0. \quad y = u_1^2.$$

Je chercherai donc une solution approchée par un développement en série de la forme :

$$y = u_1^2 [1 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3].$$

Cette expression trouvée, il faudra l'annuler pour avoir la descente maximum.

Posant alors $\frac{u_1}{\sqrt{mg}} = a$ et négligeant $\frac{j_0}{H_0}$ devant 1, nous obtiendrons finalement, en nous limitant aux termes en a^2 :

$$(14) \quad x'_2 = -ma + \frac{1}{3} m\lambda a^2 + \frac{5}{12} mba^2 = -ma + \frac{2}{3} j_0 + \frac{5}{12} \frac{m^2 a^2}{H_0}.$$

On trouve ainsi une forme simplifiée analogue à celles que nous avons déjà vues, et qui n'est applicable que si j_0 est petit devant ma : Le premier terme est la descente ordinaire; le deuxième est dû à la perte de charge; le troisième est l'amortissement dû à la continuité de l'écoulement. Je ne pousserai pas l'approximation plus loin à cause de la complication des calculs.

Il faudrait maintenant passer à l'équation de montée qui serait analogue à l'équation (13) en changeant les signes devant le radical et devant $\frac{\lambda}{2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2$; mais le calcul serait très long et n'a d'ailleurs qu'un intérêt secondaire, car la première descente en ouverture est un peu moins importante que la première montée en fermeture, et nous savons ainsi que l'eau montera moins haut qu'après une fermeture, alors que nous n'avions aucun moyen de comparer les premières descentes dans les cas d'ouverture ou de fermeture.

Applications numériques. — Appliquons la formule (14) aux usines que j'ai déjà envisagées pour la fermeture brusque : la perte de charge dans le canal amont a déjà été indiquée dans les conduites forcées; elle a été prise, dans l'établissement des projets, égale à 40 m. 30 pour l'Usine de Saillens, et 5 m. 70 pour l'Usine du Hourat; soit, au total, 44 m. 02 et 7 m. 99.

On a ainsi :

	$H_0 = \gamma_0 - J_1$	$-u_0 \sqrt{\frac{m}{g}}$	Formule 14.
Usine de Saillens.....	656 ^m	— 8 ^m 93	— 6 ^m 40
Usine du Hourat	300 ^m	— 6 ^m 73	— 5 ^m 11

On remarquera sur ces deux exemples la faible valeur du terme amortisseur dû à la continuité de l'écoulement : 0 m. 05 pour Saillens et 0 m. 09 pour le Hourat.

Ce fait est dû (voir § 5, 4^e) à la grande valeur de H_0 par rapport aux valeurs que peut prendre x .

[24] **Fermeture partielle instantanée.** — L'arrêt total et instantané de toute une usine est un phénomène que l'on doit considérer comme normal. Il serait donc peu logique, à moins de cas exceptionnels, d'élever, au prix de grandes dépenses, les cheminées d'équilibre jusqu'au niveau fixé par les formules précédentes. Car, s'il est bon d'économiser l'eau, il ne faut pas pousser ce souci jusqu'à l'extrême limite en se désintéressant de la question pécuniaire. On sera donc amené, dans les usines de pointes, et particulièrement dans les usines de traction, à évaluer, *a priori*, l'importance des variations brusques de charge résultant par exemple du démarrage simultané de plusieurs trains lourds, ou inversement, de la coupure simultanée du courant sur plusieurs trains en marche.

A titre de renseignement, je donne ci-contre la courbe des puissances instantanées dressée en vue de l'étude d'une usine de traction (*fig. 32*).

J'admettrai donc que cette variation est définie (¹), et je vais étudier ce qui se passe quand on réduit la puissance demandée à l'usine d'une certaine fraction de la pleine charge.

Nous sommes ramenés alors à l'équation (13) :

$$2mz \frac{dz}{dx} - \frac{\lambda v_1}{gH_0} z^2 \frac{dz}{dz} + \frac{lv_1}{H_0} z + 2gx + \lambda z^2 = 0$$

avec le signe + devant le terme relatif à la perte de charge, puisqu'il s'agit d'une montée.

Nous affecterons l'indice 0 à la vitesse avant la manœuvre, et l'indice 1 à la vitesse en régime définitif après manœuvre de fermeture. On aura alors : $v_1 = nv_0$, $n < 1$, et la réduction de puissance correspondra à : $\frac{v_0 - v_1}{v_0} = 1 - n$.

Posons comme avant $z^2 = y$: il faudra prendre ici le signe + devant le radical, puisque la vitesse est positive.

Les conditions initiales sont les suivantes :

$$\text{Pour } t = 0 : \quad \frac{dx}{dt} = u' = (v_0 - v_1) \frac{S}{\omega} = u_0(1 - n)$$

$$\text{où : } \quad u_0 = \frac{S}{\omega} v_0, \quad x_0 = -j_0.$$

(¹) En général, on la définira en disant que la charge peut varier du tiers ou du quart de la puissance totale. Il semble rare qu'en pratique on puisse être amené à envisager, en marche normale, des réductions brusques de puissance de plus du tiers.

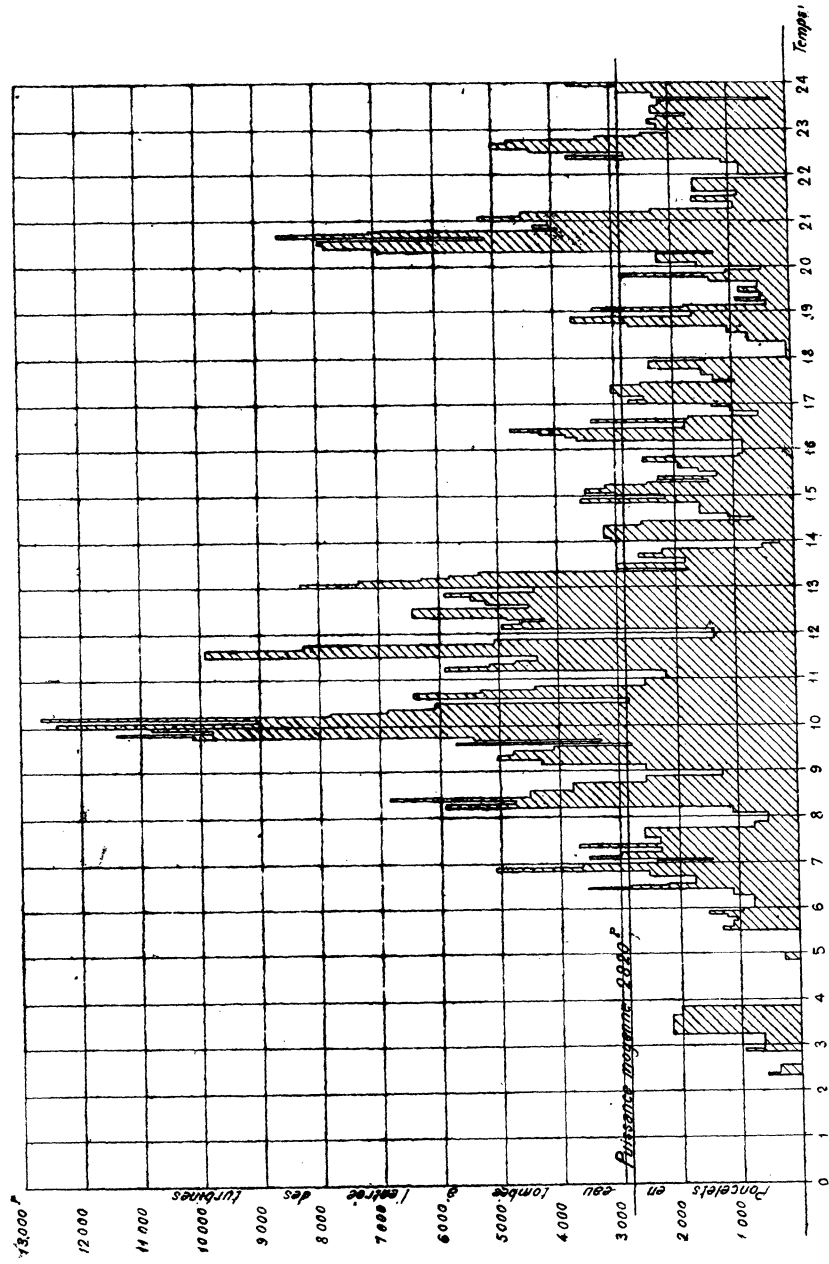


Fig. 32. — Courbe des puissances d'une usine de traction.

L'équation s'écrit avec les mêmes notations que précédemment :

$$m \frac{dy}{dx} - \frac{\lambda b n u_0}{g} \sqrt{y} \frac{dy}{dx} + b n u_0 \sqrt{y} + 2 g x + \lambda y = 0.$$

Nous développerons y en série de la forme :

$$y = z^2 = u_0^2 (1 - n)^2 [1 + c_1(x + j_0) + c_2(x + j_0)^2 + c_3(x + j_0)^3 + \dots].$$

Annulant ensuite, pour obtenir le maximum, l'expression trouvée, on obtient, en négligeant $\frac{j_0}{H_0}$ devant 1 et en se bornant aux termes en a^2 :

$$(15) \quad x'_1 = m a (1 - n) - \frac{2}{3} j_0 (1 - n)^2 - \frac{5 n (1 - n)}{12 H_0} m^2 a^2.$$

La formule précédente correspond, comme je l'ai dit, à une fermeture partielle à partir de la pleine charge.

Supposons au contraire l'usine en marche restreinte; elle ne donne plus que le $(1 - n)^2$ de sa puissance totale, et cherchons alors ce que représenterait la fermeture totale; on aura alors :

$$v'_0 = v_0 (1 - n), \quad j'_0 = j_0 (1 - n)^2.$$

J'appliquerai la formule $x = m a' - \frac{2}{3} j'_0$, qui devient ici :

$$x = m a (1 - n) - \frac{2}{3} j_0 (1 - n)^2.$$

L'expression est la même que dans la formule (15), sauf l'absence du terme amortisseur dû à la continuité de l'écoulement. La montée au-dessus du niveau statique sera donc un peu plus grande, quand on ferme complètement à partir du $(1 - n)^2$ du débit total, que dans le cas où, ce débit total étant établi, on le diminue d'un $(1 - n)^2$.

Remarquons d'ailleurs qu'il ne s'agit que de la montée au-dessus du niveau statique. Si l'on cherche la montée totale de l'eau, il faut remarquer que, dans le premier cas, l'eau part de la cote $-j_0$ pour arriver à la cote donnée par la formule (15). Le déplacement total est donc égal, en négligeant l'amortissement dû à l'écoulement, à :

$$m a (1 - n) + \frac{j_0}{3} (1 + 4 n - n^2);$$

dans le deuxième cas, l'eau part de la cote $-j_0(1-n)^2$.

Le déplacement total est :

$$ma(1-n) + \frac{j_0}{3}(1-n)^2.$$

Il est plus faible que précédemment.

J'appliquerai la formule (15) aux Usines de Saillens et du Hourat, pour lesquelles il a été admis que la variation instantanée de régime en marche normale ne dépasserait pas un tiers.

Nous aurons donc :

$$1-n = \frac{1}{3},$$

$$x_{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}ma - \frac{2}{18}j_0 - \frac{5}{12} \frac{m^2 a^2}{H_0} \frac{2}{9},$$

ce qui représente une montée de 2 m. 55 pour l'Usine de Saillens et 1 m. 97 pour l'Usine du Hourat.

J'ai donné le calcul de la montée parce qu'il est très important pour fixer la hauteur d'arasement des cheminées d'équilibre. Celui de la descente présentant beaucoup moins d'intérêt, je ne déterminerai pas, à cause de sa complication et pour ne pas me répéter, la baisse de l'eau en cas de fermeture partielle.

[25] **Cheminées déversantes envisagées avec la perte de charge.** — Soit h_0 la hauteur d'arasement de la cheminée au-dessus du niveau statique.

Depuis le début de la montée jusqu'à ce niveau de déversement, nous appliquerons l'équation (3'). A l'époque où le déversement commencera, nous aurons :

$$u_1 = + \sqrt{\frac{2g}{\lambda^2} \left[m - \lambda h_0 - me^{-\frac{\lambda}{m}(h_0 + j_0)} \right]}.$$

A ce moment, le déversement commence; à chaque instant, il part une quantité d'eau ωu . Pour qu'elle s'en aille, il faut sur la cheminée une hauteur déversante y telle que :

$$\omega u = \beta y^{\frac{3}{2}}$$

$$\text{ou : } y^{\frac{3}{2}} = \gamma u,$$

γ étant un coefficient dépendant de la façon dont le haut de la cheminée fonctionne comme déversoir.

L'équation des forces vives est à ce moment :

$$\frac{G}{g} [ISvdv + \omega(H + h_0)udu] + \omega Sv \left[h_0 + \frac{y}{2} + \frac{\lambda u^2}{2g} \right] dt = 0.$$

Car nous pouvons admettre que l'eau qui déverse monte, pour s'écouler, à une hauteur moyenne $h_0 + \frac{y}{2}$.

On en déduit :

$$2(m + h_0) \frac{du}{dt} + g(\gamma u)^{\frac{2}{3}} + \lambda u^2 + 2gh_0 = 0.$$

ou :

$$t = - \int_{u_0}^u \frac{2(m + h_0) du}{\lambda u^2 + g(\gamma u)^{\frac{2}{3}} + 2gh_0}.$$

Sous cette forme, il est aisé de voir que u décroît constamment; de plus, si l'on a $h_0 > 0$, u s'annule, et par suite le déversement s'arrête, après un temps fini.

Si l'on a $h_0 = 0$, le déversement doit continuer indéfiniment en devenant de moins en moins important; pratiquement, il s'arrête après un certain temps.

D'où :

a) *Cheminée déversante arasée au niveau statique.*

L'eau déverse, puis le déversement finit par s'arrêter et la vitesse devient nulle. L'équilibre est alors atteint.

On constatera une seule montée, puis l'arrêt complet du mouvement.

b) *Cheminée déversante arasée au-dessus du niveau statique.*

On constatera une montée, puis le déversement pendant lequel le niveau varie très peu. Ce déversement s'arrête après un temps fini. Alors commence un mouvement oscillatoire amorti à partir d'une montée maximum h_0 .

Le premier minimum, négatif, sera égal à :

$$x_2 = - \left[h_0 - \frac{2}{3}(\lambda + 1) \frac{h_0^2}{m} - \frac{4}{9}(\lambda + 1)^2 \frac{h_0^3}{m^2} \dots \right].$$

[26] **Oscillation en masse dans le cas d'une fermeture progressive sans tenir compte de la perte de charge.** — On remarquera que, dans ce qui précède, je n'ai envisagé que des manœuvres instantanées, et j'ai donné au § 19 les raisons qui

m'ont conduit à cette hypothèse. Cependant, dans le chapitre II (§ 5, 3°), j'avais indiqué comment M. de Sparre avait étudié l'effet d'une fermeture progressive pour une cheminée déversante dans le but de déterminer le diamètre utile à donner aux cheminées.

Je montrerai cependant (1) comment on pourrait étudier, avec une fermeture progressive, l'oscillation en masse dans une cheminée non déversante, dans une usine du deuxième type, sans tenir compte de la perte de charge.

Les notations sont toujours celles que j'ai employées jusqu'ici : soit $\lambda(t)$ la loi de fermeture de la vanne.

L'équation de continuité donne :

$$Sv = \omega u + \sigma w.$$

Le mouvement de l'eau est défini, dans le canal amont, par :

$$\frac{l}{g} \frac{dv}{dt} = -X;$$

dans la cheminée, par :

$$\frac{H+x}{g} \frac{du}{dt} = X - x,$$

soient γ_0 et X_1 la charge statique et la surpression au distributeur (2).

Dans la zone où se produit l'oscillation en masse, c'est-à-dire dans le canal amont, X se répartit linéairement. En dehors de cette zone, c'est-à-dire dans la conduite, X se conserve; on aura donc :

$$w = \lambda v_0 \left[1 + \frac{X_1}{2\gamma_0} \right].$$

Ces équations posées, nous remplacerons d'abord X_1 par x , hypothèse simplificative déjà faite; on a ainsi :

$$w = \lambda v_0 \left[1 + \frac{x}{2\gamma_0} \right].$$

(1) M. de Sparre m'a indiqué une méthode différente pour traiter cette question.

(2) On suppose toujours $\frac{X_1}{\gamma_0} < \frac{1}{2}$ pour faire l'approximation habituelle :

$$\sqrt{1 + \frac{X_1}{\gamma_0}} = 1 + \frac{X_1}{2\gamma_0}.$$

Si l'on différencie l'équation de continuité, on obtient, en se servant des équations déjà posées :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{m\sigma v_0 \lambda}{2\omega\gamma_0} \frac{dx}{dt} + \left[g + \frac{m\sigma v_0}{2\omega\gamma_0} \frac{d\lambda}{dt} \right] x + \frac{m\sigma v_0}{\omega} \frac{d\lambda}{dt} = 0.$$

Supposons la fermeture linéaire :

$$\lambda = 1 - \frac{t}{\tau}, \quad \frac{d\lambda}{dt} = -\frac{1}{\tau}.$$

L'équation s'écrit :

$$\frac{md^2 x}{dt^2} + \frac{m\sigma v_0}{2\omega\gamma_0} \left(1 - \frac{t}{\tau} \right) \frac{dx}{dt} + \left(g - \frac{m\sigma v_0}{2\omega\gamma_0 \tau} \right) x - \frac{m\sigma v_0}{\tau\omega} = 0.$$

On cherchera surtout à définir la valeur de x et de u au moment où la fermeture complète est réalisée; on posera alors, tenant compte des conditions initiales qui sont $x = 0$, $\frac{dx}{dt} = 0$:

$$x = c_1 t^2 + c_2 t^3 + \dots$$

On cherchera les coefficients de ce développement en série et on pourra vérifier, en faisant $t = \tau$, époque correspondant à la fermeture totale :

a) Que la valeur de x à l'époque τ est inférieure à la valeur x donnée par la formule ordinaire :

$$x = u_0 \sqrt{\frac{m}{g}} \sin \sqrt{\frac{g}{m}} \tau.$$

b) Que la valeur de x à l'époque t est d'autant plus faible que τ est plus grand. On trouve en effet :

$$x = \frac{\sigma v_0}{\omega \tau} t^2 \left[1 + At + \dots \right].$$

c) Qu'à ce moment $\frac{dx}{dt}$ est également plus faible.

On en conclura qu'alors commencera une oscillation en masse de plus faible amplitude que pour la fermeture instantanée, ce que j'ai déjà eu l'occasion d'indiquer. Je ne développerai pas davantage les calculs.

[27] Je vais maintenant reprendre la question suivante que je n'ai fait qu'indiquer au § 22.

Peut-il arriver que, dans un coup d'oscillation, la descente soit telle que la cheminée se vide complètement et que l'eau arrive en quantité insuffisante, dans la conduite, s'il s'agit d'une usine du deuxième type, ou à la vanne, s'il s'agit d'une usine du premier type?

Comme on est à la limite du cas posé, il convient de se guider, non sur les équations, qui ne nous donneront jamais que les hypothèses que nous y avons introduites, mais sur la considération directe du phénomène.

Considérons d'abord une ouverture. J'ai montré, à propos de la formation de l'oscillation en masse par la production des ondes, que la vitesse dans la conduite tendait à être nulle au début et que tout le débit était fourni par la cheminée (voir § 16). Mais, pendant ce temps, le niveau baisse dans la cheminée; l'eau qui est dans le canal amont, sollicitée par une différence de niveau — x qui est constamment croissante (x et $\frac{dx}{dt}$ étant négatifs), tend à se mettre en mouvement. Dès que le niveau a quelque peu baissé dans la cheminée, cet effet, qui se traduit d'ailleurs par la production de l'oscillation en masse, tend à se manifester; mais allons à l'extrême et supposons l'ouverture si importante et la cheminée si petite que cette dernière se vide à peu près complètement, amenant ainsi le niveau au point de bifurcation. A ce moment, il se produira dans le canal amont exactement ce qui arrive pour une conduite forcée dont on ouvre brusquement la vanne inférieure.

L'eau se mettra en marche avec production d'une onde de dépression dont la valeur est égale à $-\frac{av}{g} \frac{1}{1 + \frac{av}{2gH}}$, ou se calculera par la formule d'Allievi si elle

est supérieure à $\frac{H}{2}$. Ou cette dépression sera inférieure à H et l'eau coulera sans autre phénomène, ou elle sera supérieure à H , ce qui amènerait une pression négative. (Nous négligerons la pression atmosphérique supposée la même à l'amont et à l'aval.) Comme il n'y a pas de pression négative, il en résultera une aspiration dans le canal qui, au lieu de rester en charge, se mettra à fonctionner momentanément en canal découvert. Or, on démontre que, pour les formes usuelles, le débit maximum d'un canal fermé se produit quand il n'est pas entièrement plein; comme on aura dû calculer le canal pour qu'en charge il débite au moins la demande maximum du distributeur, nous sommes ainsi certains que le débit demandé sera toujours assuré.

Pour les usines du deuxième type, cela n'aura d'autre inconvénient que de créer sur la vanne une dépression au plus égale à H , qui est supposé faible vis-à-vis de y_0 . Pour les usines du premier type, cette dépression importante pourrait être la cause d'une irrégularité de marche. Mais nous avons vu que dans ces usines il fallait

chercher à avoir x petit vis-à-vis de H, à cause des surpressions dues à l'oscillation lors des montées.

Cela n'aura donc pas non plus grand inconvénient, sauf dans un cas très important : c'est celui où l'on aura admis que x , à la montée, pourrait être très grand vis-à-vis de H, mais où on a limité sa valeur par le déversement. Dans ce cas, on aura agi sur la surpression consécutive à une fermeture et sur la dépression qui suit, mais non sur la dépression première consécutive à une ouverture qui reste sans palliatif.

Envisageons maintenant le cas de la dépression suivant une surpression de fermeture; ce que nous avons dit suffit à montrer qu'elle n'aura pas de conséquence.

Dans les usines du premier type, ou, x étant petit par rapport à H, la dépression sera sans inconvénient elle aussi, ou il y aura déversement, et ce déversement, comme je viens de le dire, limitera la dépression suivante.

Dans les usines du deuxième type, la dépression suivant une surpression de fermeture n'aura pas plus d'inconvénients que celle suivant une ouverture. L'eau, il est vrai, pourrait ici être animée d'une certaine vitesse tendant à la faire remonter dans la conduite de l'aval vers l'amont; mais l'effet de canal découvert se produira encore le cas échéant et le mouvement s'amortira très vite. Dans tous les cas, il n'y aura jamais tendance à l'aplatissement du canal ou des conduites par suite d'un effet de vide faisant baisser la pression au-dessous de la pression atmosphérique, parce que la cheminée sert de reniflard permettant les rentrées d'air.

La seule précaution technique à prendre pour éviter les rentrées d'air dans les conduites proprement dites sera celle que l'on prend pour les usines ordinaires. Il faudra faire déboucher le canal assez en contrehaut du départ des conduites pour qu'il y ait une branche assez suffisante entre son radier et l'axe des conduites; on verra un exemple de cette disposition sur les figures 34 et 35 ci-après.

Les dépressions ne pourraient donc être nuisibles que pour les usines du premier type à petites cheminées dans lesquelles on a compté sur le déversement pour limiter les surpressions de fermeture; mais ce n'est pas la présence de la cheminée qui aura rendu la situation mauvaise.

En effet, si la cheminée n'existait pas, il y aurait à l'ouverture une onde de dépression plus forte que la dépression consécutive à l'oscillation en masse. Les prévisions du constructeur ont dû, au point de vue des facilités de réglage des turbines, se porter déjà sur ce point.

[28] **Cheminées à diamètre variable.** — Je ne m'occuperai ici que des usines du deuxième type.

Dans ces usines telles que je les ai définies, c'est-à-dire avec réservoir de pointes à la prise d'eau et cheminée d'équilibre au point de jonction du canal d'amenée en charge et des conduites forcées proprement dites, la cheminée d'équilibre est en

communication directe avec un réservoir où le niveau de l'eau peut varier dans de très grandes limites suivant les différentes heures de la journée.

Cette variation de niveau dépend de la tranche d'eau utilisée dans ledit réservoir. Elle peut atteindre de 3 à 10 mètres, même être beaucoup plus grande, non dans le courant de la journée, mais dans le cours de l'année, si l'on est en communication directe avec un réservoir de grande capacité (plusieurs millions de mètres cubes), formant réservoir annuel pour ramener le débit du cours d'eau à une valeur moyenne aussi régulière que possible, quels que soient les apports du bassin versant. Cette variation de niveau pourra arriver alors jusqu'à 40 mètres.

C'est le cas de l'Usine d'Orlu (Haute-Ariège), qui est alimentée par le lac de Naguilhe, et de plusieurs usines situées en Italie, et parmi lesquelles je citerai l'Usine de Brasimone, aux environs de Florence (réservoir artificiel, créé de toutes pièces, d'une capacité de 6 à 7.000.000 de mètres cubes, avec variations de niveau pouvant atteindre 20 mètres), et l'Usine du lac Delio, près de Varèse (réservoir de 4.000.000 de mètres cubes, avec variations de niveau de 15 mètres).

Or, nous avons vu précédemment que l'amplitude de l'oscillation en masse était en raison inverse de la racine carrée de la section de la cheminée.

La formule simplifiée donne en effet pour la demi-amplitude :

$$A = u_0 \sqrt{\frac{m}{g}} = v_0 \sqrt{\frac{IS}{g\omega}}$$

Il faudrait donc, pour réduire l'oscillation, augmenter le plus possible cette section. La solution est évidemment coûteuse; mais est-il nécessaire d'avoir cette grande section sur toute la hauteur de la cheminée? C'est ce que je vais examiner à présent.

Si le niveau dans le réservoir était constant, il suffirait de faire partir l'élargissement ou, pour mieux dire, l'épanouissement d'un niveau un peu inférieur au

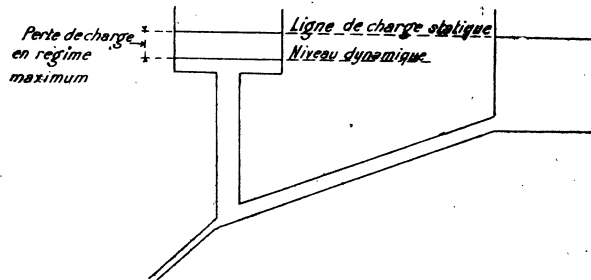
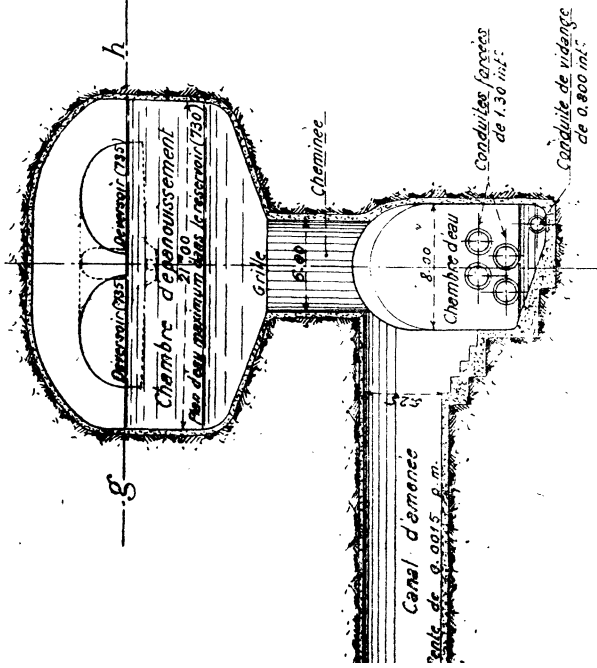


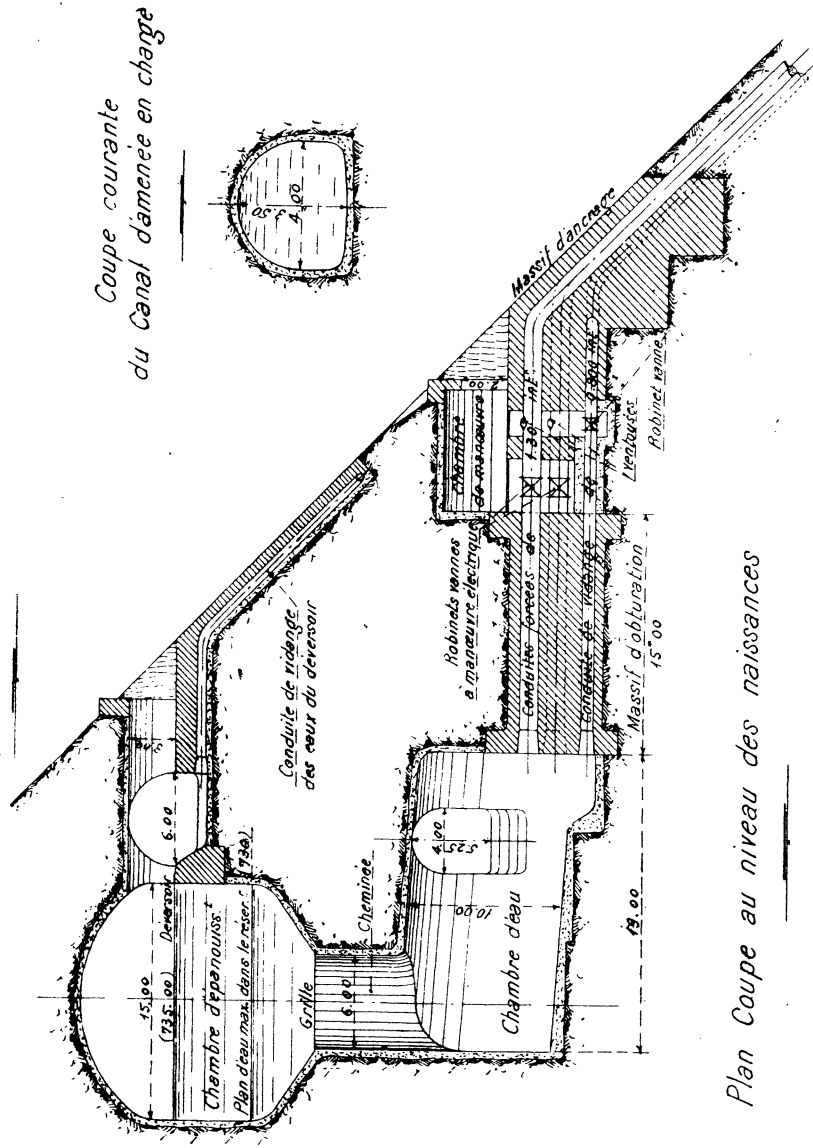
FIG. 33.

niveau dynamique en régime maximum, c'est-à-dire au niveau normal diminué de la perte de charge conformément au croquis ci-dessus.

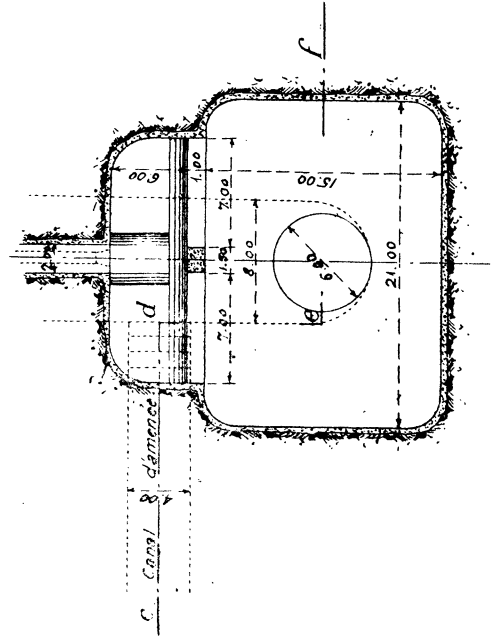
Coupe suivant c d e f



Coupe longitudinale suivant a b



Plan Coupe suivant g h.



1/2 Plan supérieur

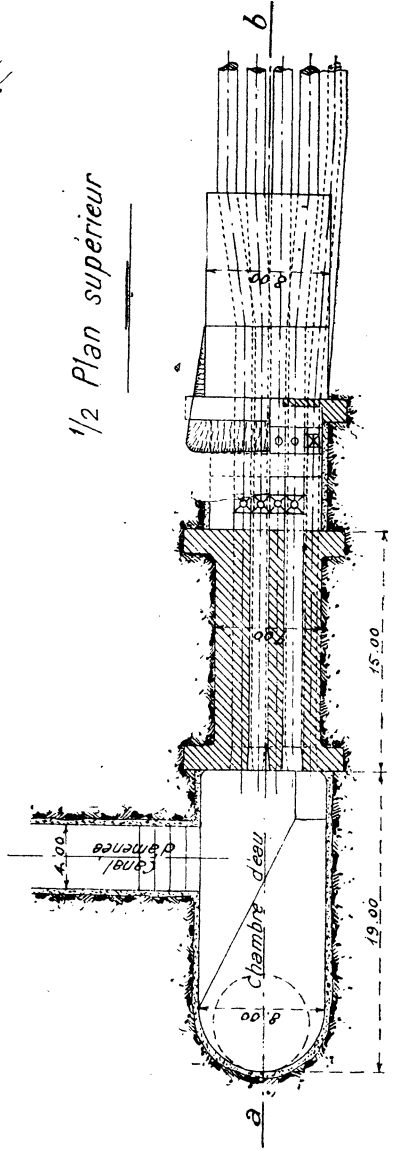


Fig. 35. — Cheminée d'équilibre projetée pour l'usine du Hourat.

Il suffit en effet que l'élargissement règne sur la hauteur de montée, les dépressions étant limitées automatiquement à la pression atmosphérique, comme je l'ai fait voir au paragraphe précédent.

Je vais montrer maintenant que, si le niveau de l'eau est variable dans le réservoir amont, il suffit de faire partir cet élargissement d'un niveau un peu inférieur au niveau correspondant au réservoir plein.

Il faut, pour cela, bien se rendre compte des conditions dans lesquelles travaille le canal d'amenée en charge. Il a dû être calculé pour la pression maximum, c'est-à-dire pour la hauteur statique maximum H_1 , augmentée de la surpression maximum x_1 , résultant des conditions de fonctionnement que l'on s'est imposée pour l'usine (voir § 23). Il suffit donc de ne jamais dépasser cette pression $H_1 + x_1$. Or il est facile de voir, sans écrire aucune équation, que, quel que soit le niveau de l'eau dans le réservoir, on ne dépassera jamais, avec un épanouissement dont le niveau est fixé comme je viens de le dire, la hauteur $H_1 + x_1$.

En effet, avant d'arriver à l'élargissement, l'eau aura dû monter d'une hauteur h ; la force vive aura donc diminué et l'amplitude de l'oscillation à partir du niveau inférieur de l'élargissement sera moins grande que précédemment.

Remarquons d'ailleurs que, si les circonstances étaient telles que l'on puisse faire à la partie supérieure un élargissement de dimensions considérables (analogue à un bassin de brise-lames dans les ports), il serait même inutile de faire

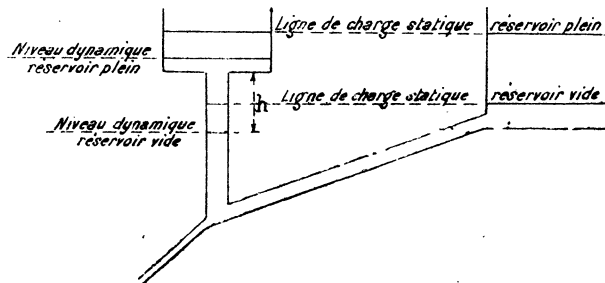


FIG. 36.

partir l'élargissement d'aussi bas que je l'ai indiqué. Dans un pareil bassin, la variation de niveau serait faible, et à la limite, si sa surface était infinie, sa présence équivaldrait pratiquement à la création d'un déversement à la partie supérieure de la cheminée, mais sans perte d'eau.

J'ai eu à envisager, pour une usine projetée à Arreau, un cas analogue; je crois devoir le mentionner pour indiquer la facilité d'application des équations que j'ai précédemment données.

Dans cette usine, quoique le canal soit en charge, sa pente naturelle est très

voisine de sa pente piézométrique. Comme il est très long, la perte de charge totale est très grande. Aussi, si l'on voulait faire partir l'élargissement du niveau dynamique, on aurait à exécuter une cheminée de section énorme et de très grande hauteur (400 m^2 et 25 m. dans le cas présent), ce qui est une conception absolument anti-économique.

J'ai donc commencé par projeter une cheminée de section relativement faible qui monte jusqu'à une faible distance au-dessous du niveau statique, et c'est là seulement que commence l'élargissement proprement dit.

Comment y calculer les mouvements de l'eau? Désignons par ω_1 la section de la partie inférieure de la cheminée, x_1 sa cote d'arasement rapportée au niveau statique, m_1 la quantité $\frac{l\omega_1}{S}$, u la vitesse de l'eau dans cette partie, j_0 la perte de charge initiale. L'équation (3') du paragraphe 21 nous donnera la valeur u_1 quand l'eau atteint le niveau x_1 .

Ceci fait, soit ω_2 la section de l'élargissement, w la vitesse de l'eau, m_2 la quantité $\frac{l\omega_2}{S}$. Nous savons que la vitesse initiale de l'eau, quand elle arrive à l'élargissement, est égale à $w_1 = \frac{\omega_1 u_1}{\omega_2}$.

Reprenons alors l'équation (2') et intégrons-la en tenant compte que, pour $x = x_1$, $\frac{dx}{dt} = w_1$; on trouve, en posant $\frac{\lambda u_1^2}{2g} = \frac{\mu w_1^2}{2g}$:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{\mu^2} \left\{ m_2 - \mu x - \left[m_2 - \mu \left(x_1 + \frac{\mu w_1^2}{2g} \right) \right] e^{-\frac{\mu}{m_2}(x-x_1)} \right\}.$$

Le maximum de montée s'obtiendra en annulant le deuxième membre de cette équation. Le solution s'obtient d'ailleurs très aisément en cherchant graphiquement l'intersection d'une droite avec une courbe en exponentielle.

A l'Usine d'Arreau, les données sont les suivantes :

$$\begin{aligned} l &= 10.760 \text{ mètres,} & S &= 7 \text{ m}^2, 25, & \omega_1 &= 15 \text{ m}^2, 90, & \omega_2 &= 400 \text{ m}^2, \\ H &= 19 \text{ m. } 20, & m_1 &= 23.619, & m_2 &= 594.000, \\ j_0 &= 16 \text{ m. } 14, & \lambda &= 276, & \mu &= 174.300, \\ & & & & v_0 &= 2 \text{ m. } 35. \end{aligned}$$

a) Supposons que l'on néglige la perte de charge et que l'on admette, sur toute la hauteur, une cheminée de 400 m^2 de section. La formule simplifiée donne une montée de 9 m. 55.

b) Si, supposant encore la cheminée élargie sur toute sa hauteur, on tient compte

de la perte de charge, on trouve, par l'application de l'équation (3'), une montée de 3 m. 25, c'est-à-dire le tiers environ de la valeur précédente.

Mais on aura, dans ces deux cas, un ouvrage de dimensions énormes.

c) Surmontons maintenant la conduite d'une première cheminée de 4 m. 50 de diamètre ou 15 m^2 de section, montant jusqu'à 2 mètres en contre-bas du niveau statique.

On trouve, pour $x_1 = -2^{\text{m}},00$, $u_1 = 1^{\text{m}},025$ et $w_1 = 0^{\text{m}},0418$.

L'application de l'équation précédente donne alors, pour le maximum de montée, 5 m. 65 environ. La hauteur sur laquelle existe l'élargissement a été réduite de $16.14 + 3.25 - 2 - 5.65 = 11 \text{ m. } 74$. Et l'on a économisé ainsi 4.500 m^3 de déblais, sans compter les maçonneries et revêtements, en n'augmentant la montée de l'eau que de 2 m. 40.

Dans tous les cas analogues, il faudra, pour le passage des coups de bélier d'onde à la bifurcation, donner à la partie inférieure de la cheminée des dimensions conformes aux règles de construction que j'ai précédemment énoncées.

[29] Je me suis inspiré de ces principes pour les diverses usines dont j'ai eu à dresser le projet pour la Compagnie des Chemins de fer du Midi.

J'ai fait, au cours de cette étude, des applications numériques nombreuses sur les Usines de Saillens et du Hourat, pour lesquelles j'ai donné le dessin des ouvrages projeté. (Voir figures 34 et 35.)

On remarquera d'ailleurs que, comme dans tous les ouvrages analogues, on s'est donné une marge de sécurité assez grande pour la fixation des niveaux.

En particulier, pour l'Usine du Hourat, la revanche pour le réservoir plein est de $4^{\text{m}}00$ pour une variation de puissance à l'Usine égale à un tiers de la puissance totale.

Or, d'après le calcul du § 24, il aurait suffi de $1^{\text{m}}97$. Mais, en dehors de la sécurité supplémentaire ainsi obtenue, ce calcul avait été fait avant l'achèvement du présent travail, avec des formules assez incomplètes; il est probable qu'en exécution, il suffira de ramener cette revanche à $2^{\text{m}}25$.

La diminution de hauteur ainsi réalisée, $1^{\text{m}}75$, représente une diminution de cube de 580 m^3 environ, c'est-à-dire, à 60 francs le mètre cube aux prix d'avant-guerre, une économie de 35.000 francs qui est loin d'être négligeable.

[30] Réservoir amortisseur différentiel Johnson. — Un ingénieur américain, M. Raymond-P. Johnson, a imaginé, principalement dans le but de réduire les dépressions à l'ouverture, un dispositif de cheminée d'équilibre qu'il appelle réservoir amortisseur différentiel.

Il n'entre pas dans le cadre de mon travail de reprendre l'étude complète de

ce type de cheminée, ce qu'on pourrait d'ailleurs faire avec les formules que j'ai indiquées.

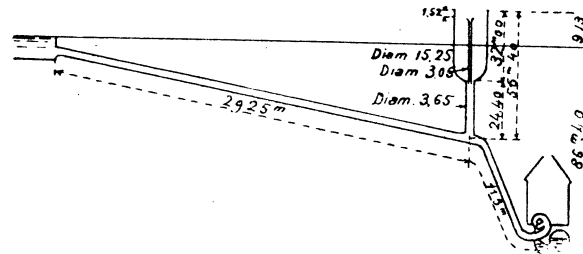


FIG. 37. — Schéma de l'usine de la Salmon River munie de la cheminée différentielle Johnson.

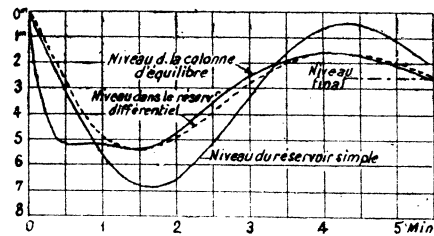


FIG. 38. — Diagramme comparatif des pressions dans une cheminée simple et dans une cheminée différentielle Johnson.

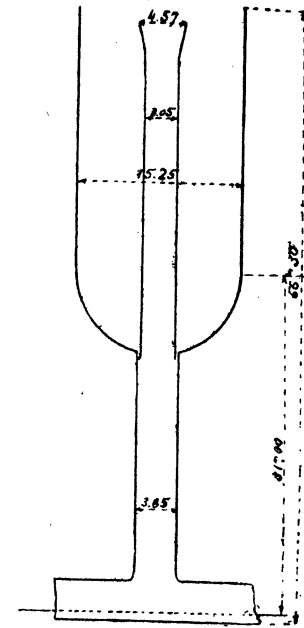


FIG. 39. — Cheminée différentielle Johnson de l'usine de la Salmon River.

Je me bornerai à reproduire l'extrait d'un article du *Génie civil* (¹), qui en expose les principes :

« L'idée ingénieuse de M. Raymond-P. Johnson a été de surmonter la colonne « d'équilibre par un prolongement d'un diamètre un peu réduit à travers le ré- « servoir, en ménageant entre les deux un orifice étranglé. Il appelle ce dispositif « differential surge tank » (réservoir amortisseur différentiel). Grâce à ce système, « l'accélération et la hauteur de charge sont encore gouvernées par le niveau libre « de l'eau dans la colonne d'équilibre, mais elles n'influencent pas la masse d'eau « emmagasinée, les oscillations dans la conduite se trouvent rapidement amorties, « et l'on est surtout prémuni contre les variations synchrones de pression qui, sans « être notables, arrivent cependant à amplifier excessivement les oscillations dans « les réservoirs simples.

« Rappelons que le comte de Sparre a voulu appliquer un principe analogue « lorsqu'il a proposé, dans son mémoire sur les coups de bélier dans les conduites

(¹) Voir *Génie civil*, tome LXVII, n° 8, 21 août 1915.

« forcées (¹), d'insérer entre le réservoir d'air et l'extrémité de la conduite une tubu-
« lure de section rétrécie.

« La fonction essentielle de ces dispositifs est, en définitive, de retarder l'écou-
« lement vers les turbines quand la charge de l'usine s'accroît brusquement, de
« manière que l'influence accélératrice ne s'exerce pas subitement sur la colonne
« d'eau ; ils retardent également l'augmentation de pression provoquée par la sup-
« pression rapide de la charge.

« La théorie en est développée dans le mémoire de M. Johnson, intitulé *The Surge*
« *Tank in Water Power Plants*, et qui a été publié en juin 1908 dans le recueil de
« *l'American Society of Mechanical Engineers*. Les résultats, pour une augmen-
« tation de charge brusque, ressortent nettement du diagramme comparatif des
« oscillations dans le réservoir simple et dans le régulateur différentiel, reproduit
« sur la figure 38 et qui est établi sur les données ci-après :

« Longueur de la conduite d'amenée.....	3.450 mètres.
« Section transversale de la conduite d'amenée.....	9 m ² 20
« Section du réservoir simple.....	63 m ² 50
« Section du régulateur différentiel.....	54 m ² »
« Section de la colonne d'équilibre.....	9 m ² 50
« Hauteur de chute.....	76 mètres.
« Vitesse v_1 avant l'augmentation de charge par m./sec.....	2,13
« Vitesse v_1 après l'augmentation de charge.....	2,82
« Perte de charge par frottement.....	0,2 $\times v^2$.

« La Salmon-River, qui sort du groupe montagneux d'Adirondack, débouche
« dans la rive orientale du lac Ontario, après un parcours restreint, mais accidenté,
« de 70 kilomètres, dans la longueur duquel une portion de 13 kilomètres correspond
« à une dénivellation de 120 mètres ; la superficie du bassin versant est de 500 kilo-
« mètres carrés. Un barrage en béton, dont la hauteur maxima est de 14 mètres,
« soutient une retenue d'eau ayant un volume de 7.400.000 mètres cubes et 14 kilo-
« mètres carrés de surface. La conduite d'amenée à l'Usine hydro-électrique d'Alt-
« mar (New-York) comprend : 1° une galerie bétonnée de 180 mètres de longueur ;
« 2° sur 2.380 mètres, une conduite dont le diamètre intérieur varie de 3^m65 à 3^m35 ;
« 3° une conduite en tôle d'acier de 365 mètres de longueur, laquelle se ramifie, à
« 100 mètres en avant de l'usine, en quatre conduites forcées de 2^m40 de diamètre.

« Dans les deux usines, les conduites d'amenée aux turbines sont munies du
« dispositif amortisseur des coups de bélier de Johnson (*fig. 37*).

(¹) Voir la *Houille blanche* de 1912, et une brochure : J. Rey, éditeur, Grenoble.

« Pour les détails de construction du réservoir métallique de Salmon-River, nous ne pouvons que renvoyer à l'article de l'*Engineering News* du 16 juillet 1914; c'est un édifice considérable s'élevant à 62 mètres au-dessus des fondations; la contenance totale de la cuve à fond sphérique est de 5.680 mètres cubes, et son diamètre est de 15^m25 (*fig. 39*). La colonne amortisseuse a un diamètre de 3^m65 au-dessous du réservoir et de 3^m05 à l'intérieur. Le réservoir est porté sur dix piliers en treillis inclinés, et le fond de la cuve se trouve ainsi à environ 24 mètres au-dessus du sol. »

Ces cheminées sont spécialement applicables aux usines de basse et moyenne chute, et, pour plus de détails, je renverrai le lecteur au mémoire original de M. Johnson ⁽¹⁾.

[31] Il reste une question à envisager; dans quelques usines on a établi, sur le trajet de la conduite, plusieurs cheminées d'équilibre. En particulier, l'Usine de Champ, sur le Drac (Isère), qui utilise une chute de 37 m. 40 de hauteur et est alimentée par une conduite de 3 m. 30 de diamètre et 4.600 mètres de longueur, possède trois cheminées d'équilibre. Les deux premières (en partant de l'amont) ont respectivement 9 et 20 mètres de hauteur. Elles sont installées sur une portion de la conduite qui est en béton armé et sont exécutées en béton.

La troisième, en tôle, a 35 mètres de hauteur; son diamètre est de 3 m. 30 à la base et de 1 m. 40 au sommet.

Elle est située près de l'extrémité aval, dans une région où la conduite est en tôle, et est établie pour déverser.

On voit, d'après cette courte description, que l'Usine de Champ est une usine du premier type.

Le cas de n cheminées s'aborde exactement comme le cas de n poches d'air, par le procédé qu'a indiqué M. Camichel ⁽²⁾.

⁽¹⁾ M. de Sparre m'a fait remarquer, à propos de cet article du *Génie civil*, que l'auteur n'avait pas bien défini le but qu'il s'était proposé dans l'emploi des réservoirs d'air à tubulure rétrécie.

M. de Sparre a voulu, avec ce dispositif :

1° Donner au coup de bélier une valeur constante pendant toute la durée de la compression de l'air, ce qui, comme il l'a montré, réduit de moitié les dimensions du réservoir d'air pour une valeur du coup de bélier maximum ;

2° Assurer, en vertu du théorème de Bélanger, une destruction rapide de la force vive possédée par l'eau de la conduite, par l'élargissement brusque qui suit la tubulure rétrécie. Le calcul montre en effet qu'à la fin de la première compression la moitié environ de cette force vive est détruite.

Ces dispositions n'ont donc pas pour but de retarder l'écoulement vers les turbines quand la charge de l'usine s'accroît brusquement.

⁽²⁾ Voir *C. R. de l'Académie des Sciences*, t. 161, p. 343, C. Camichel, *Sur les coups de bélier, Oscillations en masse*.

Je traiterai seulement, en envisageant le cas élémentaire et en utilisant les équations de Lagrange, le problème de la fermeture pour une conduite à section constante munie de deux cheminées.

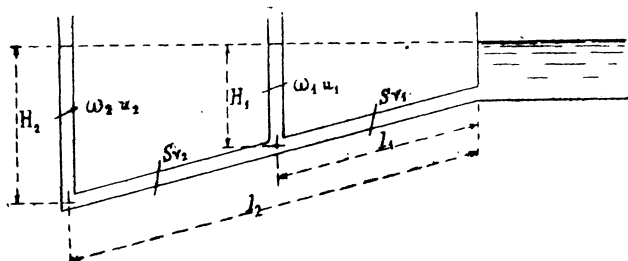


FIG. 40.

Les notations sont indiquées sur la figure 40.

En négligeant, comme nous l'avons fait dans les formules simplifiées, la force vive de l'eau dans les cheminées, l'expression de la force vive est :

$$2\bar{C} = \frac{\omega S}{g} \left[l_1 v_1^2 + (l_2 - l_1) v_2^2 \right].$$

Le travail virtuel a pour expression :

$$- \bar{C} [\omega_1 x_1 \delta x_1 + \omega_2 x_2 \delta x_2].$$

En se servant des équations de continuité :

$$Sv_2 = \omega_2 u_2 = \omega_2 \frac{dx_2}{dt},$$

$$Sv_1 = \omega_1 u_1 + \omega_2 u_2 = \omega_1 \frac{dx_1}{dt} + \omega_2 \frac{dx_2}{dt},$$

les équations de Lagrange sont alors :

$$l_1 \omega_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + l_1 \omega_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + g S x_1 = 0,$$

$$l_1 \omega_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + l_2 \omega_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + g S x_2 = 0$$

et se résolvent, en posant :

$$\frac{l_1 \omega_1}{S} = m_1, \quad \frac{l_2 \omega_2}{S} = m_2,$$

par l'équation suivante donnant la valeur α des nouvelles fréquences des oscillations conjuguées :

$$\begin{vmatrix} l_2 \left(\alpha^2 - \frac{g}{m_2} \right) & l_1 \alpha^2 \\ l_1 \alpha^2 & l_1 \left(\alpha^2 - \frac{g}{m_1} \right) \end{vmatrix} = 0.$$

Sous cette forme, et se rappelant que les fréquences des oscillations en masse dues aux cheminées considérées isolément sont proportionnelles à $\sqrt{\frac{g}{m_1}}$ et $\sqrt{\frac{g}{m_2}}$, on voit qu'une des fréquences est augmentée et l'autre raccourcie. La plus longue période est donc allongée et la plus courte raccourcie.

Dans le cas de n cheminées, l'équation serait, en affectant l'indice n à la dernière cheminée et en comptant toujours les longueurs l depuis l'extrémité amont de la conduite :

$$\begin{vmatrix} l_n \left(\alpha^2 - \frac{g}{m_n} \right) & l_{n-1} \alpha^2 & l_{n-2} \alpha^2 & \dots & \dots \\ l_{n-1} \alpha^2 & l_{n-1} \left(\alpha^2 - \frac{g}{m_{n-1}} \right) & l_{n-2} \alpha^2 & \dots & \dots \\ l_{n-2} \alpha^2 & l_{n-2} \alpha^2 & l_{n-2} \left(\alpha^2 - \frac{g}{m_{n-2}} \right) & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0.$$

Il est encore facile de voir, pour trois périodes, que l'une des nouvelles périodes est plus longue et une autre plus courte des périodes dues aux cheminées considérées isolément.

C'est un fait général pour le cas de n cheminées. La démonstration, dans toute sa généralité, se trouve dans la théorie des petits mouvements des systèmes holonomes.

Ceci posé, on pourra, dans chaque cas, poursuivre le problème en suivant la méthode classique.

Quoi qu'il en soit, on montrerait, avec la méthode employée par M. Camichel dans le travail que j'ai précédemment cité, que la répartition de la surpression est linéaire entre chaque cheminée.

Je ne pousserai pas plus loin ces calculs qui seraient pénibles sous la forme algébrique et qu'on pourra aborder numériquement dans chaque cas concret.

J'attirerai seulement l'attention sur un point assez remarquable. Supposons qu'il s'agisse d'une fermeture dans un système à n cheminées et que nous voulions fixer les conditions initiales.

Les seules équations dont nous disposerons résulteront de l'application de l'équation de continuité aux diverses bifurcations.

$$Sv_1 = \omega_1 u_1 + Sv_2,$$

$$Sv_2 = \omega_2 u_2 + Sv_3,$$

.....,

$$Sv_n = \omega_n u_n.$$

Nous connaissons v_1 ; nous avons à définir $n - 1$ quantités v et n quantités u , et nous ne disposons que de n équations. $n - 1$ quantités restent donc indéterminées.

Nos hypothèses sont donc insuffisantes pour fixer les conditions initiales. Nous avons vu un cas analogue pour l'ouverture d'une cheminée unique, et nous l'avons résolu (voir § 16) en faisant intervenir la théorie des ondes.

On sera donc amené à procéder d'une façon analogue dans le cas présent et à déterminer les conditions initiales dans le mouvement d'oscillation en fonction des vitesses qui tendent à produire les ondes,

Évidemment, le problème pourra être extrêmement complexe; mais je ne puis m'empêcher, à son sujet, de faire un rapprochement avec la Résistance des Matériaux.

Dans cette science appliquée, on rencontre des systèmes (les poutres à travées indépendantes, les arcs à triple articulation, les systèmes triangulés normaux) tels que, étant donnée une répartition connue des charges appliquées, on peut déterminer, par les seules équations de la statique, soit les réactions de l'ensemble du système sur ses appuis — et l'on dit alors que le système est isostatique, — soit les réactions des diverses pièces du système les unes sur les autres — et l'on dit alors que le système est complet, — soit les deux, et l'on dit alors que le système est isostatique et complet.

Quelquefois les conditions sont telles qu'on a plus d'inconnues que d'équations, et l'on a affaire à des systèmes hyperstatiques (poutres sur plusieurs appuis, arcs encastres, table sur quatre pieds) ou surabondants (poutres à montants et croix de Saint-André, par exemple), ou les deux à la fois. Cela ne signifie pas que ces réactions aient une valeur indéterminée (c'est pratiquement inadmissible), mais revient simplement à dire que les équations de la statique ordinaire ne suffisent plus, et l'on résoud le problème en faisant intervenir les équations de déformation qui tiennent compte de l'élasticité des matériaux en jeu.

Il y a, avec le cas qui nous occupe, une analogie très nette. Les équations ordinaires résultant de la continuité de l'écoulement ne suffisent plus pour fixer les conditions initiales, et l'on sera amené, pour les définir, à faire usage du mouvement créé à l'origine par les ondes.

Ce qui précède suffit pour montrer les difficultés de la question. Faut-il une ou plusieurs cheminées? Je ne pourrais y répondre que de sentiment. Si une cheminée bien calculée étouffe les coups d'onde en les transformant en oscillations en masse dont on sait limiter l'amplitude, on peut se demander quelle amélioration nouvelle pourrait apporter l'addition de plusieurs nouveaux organes semblables.

Au point de vue des coups de bélier et des surpressions dues à l'oscillation en masse, elles n'auront pas grand effet; mais il ne faudrait pas en conclure de suite qu'elles seront entièrement inutiles, car elles permettront l'évacuation des poches d'air qui peuvent se former dans la canalisation en charge et donner lieu à des phénomènes dangereux tant locaux, ainsi que M. de Sparre l'a indiqué dans la *Houille blanche* de décembre 1912, que généraux, par des oscillations en masse, quoique la cheminée principale, donnant des oscillations de période beaucoup plus longue, atténue notablement ces derniers effets. Si donc l'on établit des cheminées secondaires, elles pourront être de diamètre assez restreint, et il conviendra de les placer aux points où l'air peut se porter de préférence.

Si l'on avait, par exemple, un siphon sur le tracé de la conduite, de pareils

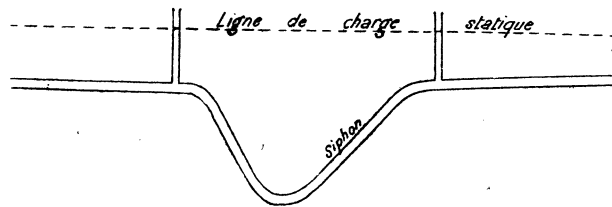


FIG. 41.

ouvrages seraient tout indiqués aux deux extrémités du siphon et particulièrement à l'extrémité aval. D'une façon générale, il sera bon d'en mettre à tous les points hauts de la canalisation en charge.

[32] Cas d'un réservoir important créé sur le parcours du canal d'amenée. —

La solution du canal d'amenée en charge permet de créer des réserves non seulement à la prise d'eau, mais encore sur le tracé du canal, partout où il se présentera un point particulièrement favorable; par exemple, en barrant une vallée secondaire.

Le canal sera ainsi coupé par un ou plusieurs grands réservoirs qui feront aussi fonction de cheminée d'équilibre.

Remarquons d'ailleurs qu'il sera inutile pour cela de calculer le canal comme comportant deux ou plusieurs cheminées. En effet, si le réservoir est important, et c'est ce que nous supposons, les variations de niveau de l'eau y seront insensibles; nous nous trouvons dans le cas visé au § 11 b d'un réservoir pratiquement

indéfini où toutes les oscillations et toutes les ondes s'amortissent sans qu'il transmette rien à ses affluents.

Nous serons donc amenés à considérer le canal comme formé de deux parties,

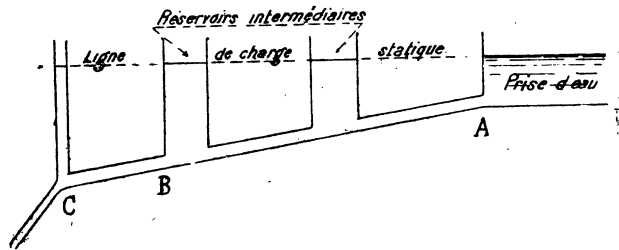


FIG. 42.

la première allant de la prise d'eau jusqu'au grand réservoir situé le plus en aval, de A en B sur la figure 42. L'eau s'y écoulera suivant la demande, mais par variations extrêmement lentes, sans ondes ni variations de pression appréciables. Cette partie ne supportera qu'une pression constante. La partie BC sera seule à considérer, et, dans les formules, l devra être pris égal à BC et non à AC.

[33] **Résumé du chapitre IV.** — J'ai terminé, avec ce qui précède, l'étude détaillée du mouvement de l'eau dans les cheminées d'équilibre en ce qui concerne l'oscillation en masse. J'ai montré en particulier que, si x est en général négligeable devant m en ce qui concerne l'établissement des équations, la perte de charge n'est pas négligeable en ce qui concerne la valeur finale à attribuer à la variation de niveau de l'eau. Tenant compte de cette perte de charge, j'ai donné, pour les cas de fermeture totale, les formules (4), (6), (9) et (12); pour les cas de fermeture partielle, la formule (15), et pour les cas d'ouverture totale, la formule (14). Enfin j'ai indiqué comment aborder le cas de n cheminées et les difficultés analytiques et pratiques auxquelles il donne lieu. On voit donc que les cheminées d'équilibre constituent un excellent dispositif anti-bélier transformant les coups d'onde violents et brusques en une oscillation en masse beaucoup plus lente et d'amplitude beaucoup plus limitée, que l'on peut d'ailleurs régler presque à volonté soit par le déversement, soit par l'élargissement de la cheminée.

Si l'on veut maintenant se rendre compte de façon simple du rôle de la cheminée sur les ondes, on peut dire qu'une conduite munie d'une cheminée fonctionne comme un tuyau ouvert aux deux bouts. Chaque fois que les ondes arrivent à une extrémité, elles se réfléchissent *avec changement de signe*, ce qui n'est pas le cas des conduites ordinaires où il y a réflexion *avec changement de signe* au réservoir amont et réflexion *sans changement de signe*, *avec doublement de la pression* sur

l'extrémité fermée. Comme, de plus, la cheminée est en général très courte par rapport à la conduite, l'onde, changée de signe sur le haut de la cheminée, vient suivre de très près et réduire beaucoup l'onde première cheminant dans la conduite (4).

[34] Conclusions techniques générales sur les cheminées d'équilibre. — Des divers points que nous avons exposés résultent donc les règles de construction suivantes :

A) Ainsi que l'a déjà indiqué M. de Sparre, il faudra admettre pour la cheminée d'équilibre une section voisine de celle de la conduite, et il sera bon de ne jamais descendre au-dessous de $1/2$ ou $1/4$. L'adoption d'une section aussi grande que possible, au besoin limitée à la partie supérieure de la cheminée (épanouissement), sera toujours une solution désirable.

B) Il faudra, autant pour la partie inférieure que pour la partie supérieure, rapprocher le plus possible la cheminée du distributeur. Cette position aura pour effet, tout en réduisant le coup d'onde dans le haut, mais moins que si la cheminée était sur le distributeur même, de raccourcir notablement dans le bas le temps pendant lequel la surpression agit, tant par la réflexion de l'onde à la bifurcation que sur le haut de la cheminée.

C) Étant donnée l'importance que peut avoir le coup d'onde par rapport à la pression statique dans les basses chutes, l'emploi d'une cheminée dans ce cas sera d'autant plus indiqué que la conduite est plus longue. Comme en général on ne constitue pas, dans ce cas, des réserves, le déversement à un niveau voisin du niveau statique sera tout indiqué.

D) La montée de l'eau dans les cheminées se calculera par les formules que j'ai indiquées précédemment.

E) On peut réaliser sans inconvénient, par l'emploi de cheminées rationnellement définies, des usines de pointes avec canal d'amenée en charge comportant réservoirs créés aussi économiquement que possible, soit à la prise d'eau, soit sur le parcours du canal. Il n'y aura ainsi aucun organe répartiteur interposé entre le réservoir et la turbine qui demandera automatiquement aux réservoirs amont, sans qu'il y ait de manœuvres à faire, l'eau nécessaire à chaque instant pour faire face à la demande d'énergie du réseau. En vue d'économiser l'eau, les cheminées seront établies pour ne pas déverser, sinon dans des circonstances exceptionnelles.

(4) Si la cheminée insérée sur le distributeur et la conduite sont de même diamètre, il y a même, au bout du temps $\frac{2H}{a}$, annulation complète.

F) En dehors de la cheminée principale, placée dans les conditions indiquées à l'article B, il sera bon de prévoir, sur les canalisations à faible charge, des cheminées secondaires de diamètre restreint destinées surtout à évacuer l'air. Leur emplacement devra être fixé principalement aux points où des accumulations d'air peuvent se produire.

DEUXIÈME PARTIE

Sur divers systèmes hydrauliques à mouvement alternatif.

[35] Dans la première partie de ce travail, j'ai étudié en détail les cheminées d'équilibre et j'ai montré qu'il s'y produisait simultanément des surpressions sous forme de coups d'onde et sous forme d'oscillations en masse. Cette particularité provient de ce que, par la présence de la cheminée, l'ensemble soumis à l'oscillation est situé dans une conduite ouverte aux deux extrémités. Il rentre ainsi dans une classe de systèmes hydrauliques à mouvement alternatif, dont une autre catégorie importante est formée par les conduites munies de poches ou réservoirs d'air.

Leur caractéristique commune est, je le répète, que les deux extrémités de la colonne liquide sont libres.

Je vais envisager maintenant un ordre de phénomènes différent.

La grande extension donnée actuellement dans nos usines de guerre aux distributions d'énergie par l'eau sous pression m'a donné l'idée d'étudier, au moins d'une façon rapide, les phénomènes de surpression qui peuvent s'y produire.

On y emploie en effet des pressions élevées : 150 kgs/cm² est un chiffre courant, et on arrive même à 1.400 kgs/cm², ce qui représente une hauteur d'eau de 14 km., et, dans ces conditions, les surpressions peuvent être particulièrement importantes.

C'est cet essai qui constitue la deuxième partie de mon travail (¹); je dois dire d'ailleurs que je n'ai pu me livrer à aucune expérience quantitative, dont j'indiquerai plus loin les difficultés; j'ai dû me contenter de voir que les résultats numériques que j'obtenais étaient voisins des valeurs lues couramment sur les manomètres.

Nous trouverons, dans de pareilles canalisations, des conduites ou des récipients comportant une extrémité fixe, analogue à l'extrémité aval d'une conduite forcée une fois la vanne entièrement fermée et dont l'autre extrémité est occupée par un piston mobile. Comme nous le verrons plus loin, un pareil ensemble est assimi-

(¹) Voir *C. R. de l'Académie des Sciences*, D. Eydoux, *Conduites fermées aux deux extrémités, Accumulateurs et pare-chocs*, t. 166, 1918, p. 559.

ble, au point de vue des réflexions des ondes, à une conduite fermée aux deux extrémités.

Nous verrons alors, dans ces systèmes, les surpressions prendre une nouvelle apparence; si la colonne liquide est assez courte, de façon que le temps de parcours d'une onde à l'intérieur soit très faible, l'ensemble formé par l'eau et la conduite fonctionnera comme un ressort se détendant ou se comprimant en un seul bloc.

Je reviendrai plus loin sur ces divers points.

[36] Sur de semblables distributions d'énergie par eau comprimée, on rencontre en général les organes suivants :

a) *Appareils de production d'eau sous pression.* — Ce sont en général des pompes ou des multiplicateurs de pression, quand celle-ci est trop forte pour que les pompes puissent la fournir directement.

Ces multiplicateurs se composent simplement d'un piston différentiel recevant sur sa grande face une pression telle que les pompes (ou parfois un générateur de vapeur) peuvent la produire.

La petite face comprime l'eau dans la canalisation définitive. On voit facilement que si p est la pression sur la grande face de section S , la pression x sur la petite face de section s sera :

$$x = \frac{S}{s} p.$$

Parfois, mais plus rarement, l'eau est fournie directement par la conduite forcée d'une chute aménagée dans ce but. Je ne connais, comme exemple de ce type, que l'Usine de Servette, près Chapareillan (Isère), qui fonctionne pour l'usinage des obus.

b) *Appareils d'utilisation.* — Ceux-ci sont en général à marche discontinue, car, s'ils étaient à marche continue, il serait la plupart du temps plus pratique d'employer l'énergie nécessaire à la marche des pompes pour les actionner directement.

Leur type courant est la presse hydraulique, qui peut produire un effort de compression total allant jusqu'à plusieurs milliers de tonnes. On l'emploie pour le forgeage, l'usine et l'emboutissage des métaux.

c) Les pompes fonctionnant d'une façon continue, et la consommation de l'eau sous pression étant discontinue⁽¹⁾, on y adjoint la plupart du temps un organe destiné à emmagasiner l'eau sous pression fournie par les pompes durant les périodes d'arrêt des presses, pour la rendre en grande quantité aux moments d'utilisation.

(1) Dans certains cas, le nombre des appareils à fonctionnement discontinu étant très grand, leur marche simultanée équivaut pratiquement à une consommation continue de l'eau sous pression; on peut alors se passer de l'accumulateur dont je parle plus loin.

Cet organe est l'accumulateur formé d'un cylindre dans lequel se déplace un piston dont le poids fait équilibre à la pression moyenne dans la canalisation. L'envoi d'eau en excès fait monter le piston; la consommation plus grande que la production le fait descendre.

d) Ces appareils donnant lieu, comme je le montrerai, à des surpressions importantes, on monte souvent sur les canalisations des appareils dits pare-chocs, qui sont simplement composés d'un petit cylindre où se déplace un piston maintenu par des ressorts. Quand une surpression arrive, les ressorts cèdent et le piston recule, donnant ainsi un espace supplémentaire qui suffit, étant donné le peu de compressibilité de l'eau, à réduire considérablement la surpression.

On pourrait envisager, dans ce but, des réservoirs d'air, et on les a même utilisés quelquefois. Mais il est souvent difficile, sous de pareilles pressions, de maintenir une quantité constante d'air dans ces réservoirs.

Je donne ci-après (*fig. 43, 44 et 45*) un croquis de presse, accumulateur et pare-chocs, que je dois à l'obligeance de la Maison Neyret-Beylier et C^o de Grenoble, qui construit ces appareils. J'y joins également les quelques renseignements techniques suivants que cette Maison m'a fournis.

Ces renseignements sont relatifs à une installation pour usiner des obus de calibre moyen. Ils me serviront pour des applications numériques des résultats généraux que je trouverai.

Pompes. — Les pompes sont presque toujours du type à deux ou quatre pistons; elles fonctionnent à des pressions de 50 à 200 kgs/cm² ⁽¹⁾; la pression la plus souvent adoptée est 150 kgs/cm². Les débits sont de l'ordre du litre à la seconde.

Ces pompes sont parfois munies de petits réservoirs d'air destinés à compenser dans une certaine mesure les variations du débit par tour.

Presses. — Les presses à obus de calibre moyen ont des capacités de l'ordre de 100 litres pour la pression moyenne indiquée ci-dessus; la course se fait en quelques secondes, 5 par exemple, ce qui correspond à un débit de 20 lit./sec.

La mise en marche de la presse se fait à l'aide d'un distributeur à manœuvre très rapide, en sorte qu'on passe de la fermeture totale à l'ouverture complète en un temps de l'ordre d'une fraction de seconde.

Pour l'arrêt de la presse, il faut distinguer trois cas :

a) Ou l'on s'arrête sur l'obus que l'on est en train de forger, et alors il se produit un certain ralentissement de la presse, en sorte que l'arrêt dure un temps de l'ordre de une ou plusieurs secondes;

(1) Bien entendu, tous les nombres indiqués ci-dessous donnent des ordres de grandeur pour des machines de dimensions moyennes.

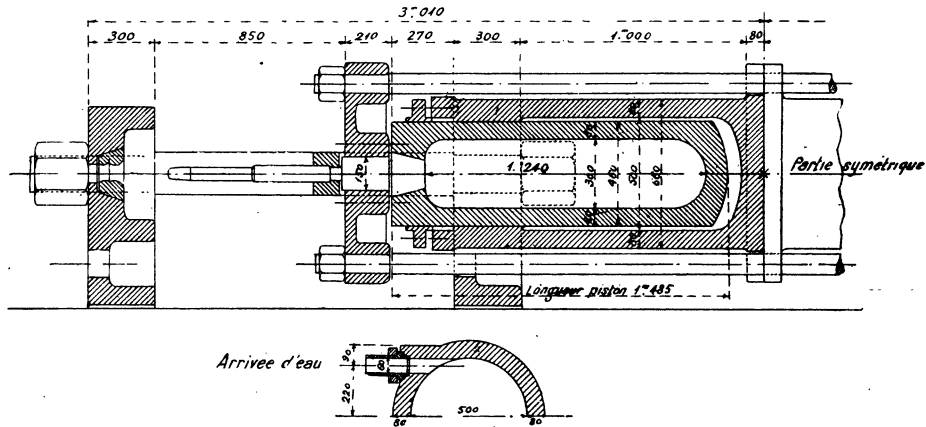


FIG. 43. — Presse hydraulique de 100 tonnes à 60 kilog. c. m².

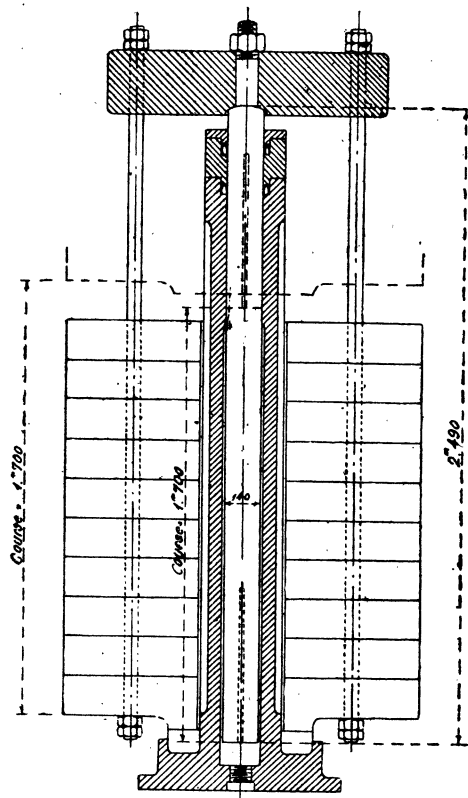
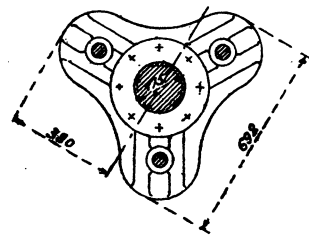
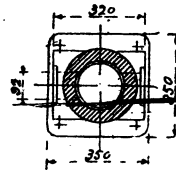


FIG. 44. — Accumulateur hydraulique de 25 litres de capacité utile à 60 kilogr. c. m².

Vue en plan du cylindre



Coupe en plan du cylindre



Elevation - Coupe

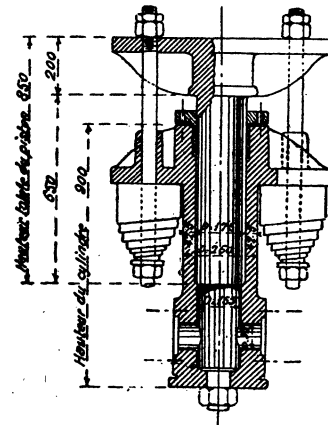


FIG. 45. — Pare-chocs.

b) Ou l'on arrête la presse par le distributeur, et l'arrêt se produit en une fraction de seconde;

c) Ou la presse s'arrête sur une butée fixe, et l'arrêt dure un temps extrêmement court et pratiquement impossible à évaluer avec des moyens ordinaires.

Tuyauteries. — Les diverses tuyauteries sont assez courtes généralement; leur longueur peut être admise de l'ordre d'une dizaine de mètres. Cependant, dans les installations importantes où l'on a une batterie centrale de pompes, les tuyauteries peuvent avoir plusieurs dizaines de mètres.

Les vitesses admises dans les tuyaux sont généralement considérables, de l'ordre de 5 à 10 mètres par seconde.

Ces tuyaux sont généralement en acier étiré sans soudure (diam. 30/40, 20/32, 48/60).

Accumulateurs. — Un accumulateur destiné à alimenter une presse a généralement une capacité de l'ordre de deux fois la cylindrée de la presse. Les courses des accumulateurs sont de l'ordre de 2 à 5 mètres. Ces deux données permettent de déterminer le poids de l'accumulateur qui est de l'ordre de la centaine de tonnes.

Pare-chocs. — Les pare-chocs ont une capacité de quelques litres, cette capacité variant par exemple de moitié lorsque la surpression est égale à la pression statique. On admet couramment des surpressions de cet ordre.

Soupape de sûreté. — On peut relier le piston du pare-chocs à une soupape de décharge qui s'ouvre en cas de surpression.

[37] Je ne discuterai pas ici la question de savoir si, étant donnée une installation à réaliser, il peut être opportun d'y prévoir tel ou tel appareil. Je m'occuperai exclusivement des surpressions auxquelles ils peuvent donner lieu et des moyens d'y pallier.

Je reviendrai d'abord sur une remarque que j'ai déjà faite.

Pour qu'il y ait mouvement d'oscillation en masse d'un ensemble liquide, il faut qu'on puisse trouver un moment où les extrémités de l'ensemble soient animées d'une vitesse telle que l'on puisse appliquer l'équation de continuité entre ces vitesses : $\Sigma Sv = 0$, un régime constant d'ouverture ou de fermeture des robinets existant à ce moment.

Sans une conduite fermée à un bout, ouverte à l'autre, sans cheminée d'équilibre, poche d'air ou autre organe élastique, il n'y aura pas oscillation en masse, une des extrémités de l'ensemble étant fixe. Il en sera ainsi du mouvement d'un piston dans un cylindre que je vais étudier; ce sera le cas pour un accumulateur quand le distributeur de la presse est entièrement fermé. Mais alors, si le cylindre est court, apparaîtra le mouvement de ressort.

Avant d'étudier ces phénomènes, je commencerai par déterminer la valeur de la vitesse de propagation d'une onde dans ces appareils par la formule d'Allievi.

Si l'on fait ce calcul, d'abord pour les tuyauteries en acier précédemment mentionnées, puis pour les divers appareils dont j'ai donné les schémas, on trouve :

Tuyau acier de 30/40.....	$a = 1.380$ m./sec
Accumulateur fonte : D = 160 mm.; épaisseur, 55 mm.	$a = 1.380$ m./sec.
Presse à tréfiler (fonte) : D = 300 mm.; épaisseur, 80 mm.	$a = 1.340$ m./sec.
Pare-chocs (fonte) : D = 175 mm.; épaisseur, 42 ^m /m 5.	$a = 1.365$ m./sec.

On voit que ces valeurs, pour des appareils différents et soumis à des pressions diverses, sont très voisines et qu'on peut prendre une moyenne de 1.360 m./sec.

Avec des épaisseurs plus grandes, on se rapprochera de plus en plus de la vitesse du son dans l'eau, soit $\frac{9.900}{\sqrt{48,3}} = 1.433$ m./sec.

Ceci posé, j'aborderai la question des surpressions par un cas théorique qui me servira à résoudre les problèmes pratiques.

[38] **Mouvement d'un piston dans un cylindre clos.** — Soient γ_0 la pression initiale à l'intérieur du cylindre, l la longueur de ce cylindre, a la vitesse de propagation d'une onde à l'intérieur de ce cylindre donnée par la formule d'Allievi. On suppose le poids du piston, ou la force qui maintient le piston, tels qu'ils fassent équilibre à la pression intérieure de régime. Nous supposons que nous partons de cet état d'équilibre.

a) *Déplacement du piston pendant un temps τ très court ($\tau < \frac{2l}{a}$) avec une vitesse v_0 .*

Avançons le piston pendant un temps très court inférieur à $\frac{2l}{a}$ avec une vitesse v_0 et maintenons-le dans cette nouvelle position. Nous avons exactement inversé le phénomène de la dépression brusque étudié par M. Camichel (*). On envoie une compression de valeur $\frac{av_0}{g}$. Elle part du piston, arrive sur le fond, s'y réfléchit sans changer de signe en y donnant une surpression de valeur double, revient, etc..., de telle sorte que les diagrammes que l'on pourrait relever seraient les suivants :

(*) Voir *loc. cit.*, C. R. de l'Académie des Sciences, t. 161, 1915, p. 412.

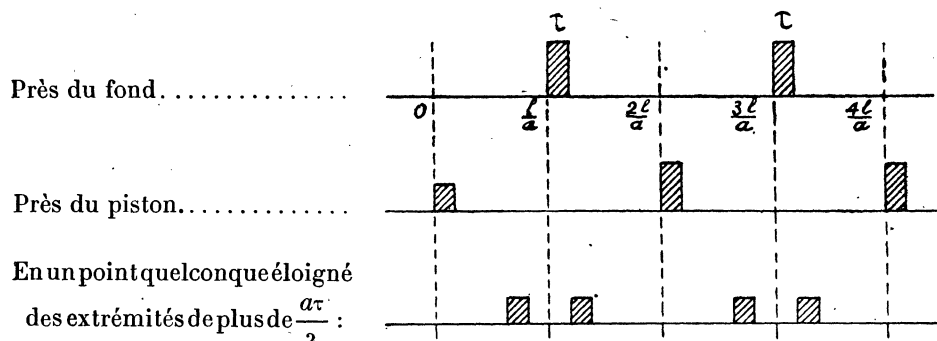


FIG. 46.

On peut le vérifier par les équations suivantes :

Une onde de durée τ passe; elle a la valeur $\frac{av_0}{g}$ et imprime à son passage aux particules liquides une vitesse v :

$$y = f, \quad v = -\frac{g}{a}f = -v_0.$$

Au fond, la vitesse s'annule; il y a eu réflexion sur une paroi inébranlable :

$$y = f - f_1, \quad v = -\frac{g}{a}(f + f_1) = 0,$$

$$f + f_1 = 0, \quad y = 2f_1.$$

L'onde f_1 revient seule; elle se double à nouveau sur le piston, renvoie une onde $f_2 = f_1$, et ainsi de suite.

Théoriquement, le phénomène devrait garder cette allure discontinue; ce n'est qu'à la longue, par suite de l'étalement des ondes, que l'on verra apparaître une surpression résultante δy_0 uniforme dans tout le cylindre, et qui sera donnée par la formule :

$$\frac{v_0\tau}{l} = \frac{g}{a^2}\delta y_0.$$

D'où :

$$\delta y_0 = \frac{a^2 v_0 \tau}{gl}.$$

Remarquons que l'expression « à la longue » que j'ai employée ne veut pas dire

forcément que ce fait se réalisera au bout d'un temps très long. Elle signifie simplement qu'il y aura eu un grand nombre de réflexions; si $\frac{2l}{a}$ est très petit, le temps pourra être court en valeur absolue.

b) *Déplacement du piston par un mouvement continu avec une vitesse constante v_0 .*

Considérons maintenant le cas où, au lieu de ne faire avancer le piston que pendant un temps très court, on continue le mouvement avec la vitesse uniforme v_0 .

Il part à l'origine une onde de compression $\frac{av_0}{g}$ qui dure d'une façon continue, à cause du mouvement continu du piston, jusqu'au temps $\frac{2l}{a}$, où il y a, par suite de la réflexion sur le fond, retour d'une onde de compression double; la surpression est alors $\frac{3av_0}{g}$; à partir du temps $\frac{4l}{a}$, elle devient $\frac{5av_0}{g}$, et ainsi de suite...

On voit donc le mécanisme d'une compression qui, bien que causée par un mouvement continu, est elle-même un phénomène discontinu; si, en pratique, on ne s'en rend pas compte, cela vient de ce fait qu'habituellement les tubes dans lesquels on produit les compressions sont très courts et que les réflexions successives se font à intervalles très rapprochés. Les diagrammes que l'on devrait théoriquement relever seraient les suivants :

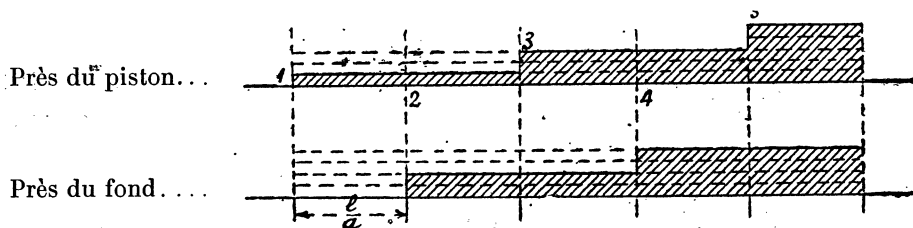


FIG. 47.

Cherchons la pression moyenne dans le cylindre :

Près du piston, elle est $(2n + 1) \frac{av_0}{g}$; près du fond, elle est : $\frac{2nav_0}{g}$ immédiatement après l'époque $\frac{2nl}{a}$.

La moyenne est : $\left(2n + \frac{1}{2}\right) \frac{av_0}{g}$, ou $2n \frac{av_0}{g}$ si n est très grand. Pendant ce temps,

le piston a avancé de $\frac{2nv_0}{a}$. La formule de compression continue donnerait :

$$-\frac{\delta l}{l} = \frac{g}{a^2} \delta y, \quad \text{ou : } \delta y = \frac{2nav_0}{g}.$$

Nous retombons sur le résultat précédent.

c) *Piston animé d'une vitesse initiale v_0 qu'on ne maintient pas.*

Pour aborder les problèmes qui suivront, et particulièrement la question des accumulateurs, il me reste à envisager le cas suivant :

On imprime au piston une vitesse v_0 et on le lâche brusquement. Qu'arrive-t-il ? Je suppose toujours que le poids du piston fait équilibre à la pression normale γ_0 .

Du fait de la compression initiale, il part une onde $\frac{av_0}{g}$ qui s'en va vers le fond ; mais cette compression ralentit le mouvement du piston, qui n'a plus qu'une vitesse v_1 , laquelle ne produit plus à son tour qu'une compression $\frac{av_1}{g}$ pour ralentir le piston. Le mouvement du piston sera donc donné par l'équation :

$$m \frac{dv_1}{dt} + \omega S \frac{av_1}{g} = 0.$$

Si l'on admet qu'au début le système était en équilibre et si l'on ramène le tout à l'unité de surface, on voit, en désignant par ω le poids du liquide par unité de volume, que l'on a :

$$m = \frac{\omega \gamma_0}{g}.$$

L'équation se réduit donc à :

$$\gamma_0 \frac{dv_1}{dt} + av_1 = 0$$

et s'intègre par :

$$v_1 = v_0 e^{-\frac{a}{\gamma_0} t}$$

en tenant compte qu'on est parti d'une vitesse initiale v_0 .

La surpression correspondante, exprimée en hauteur de liquide, sera :

$$\frac{a}{g} v_0 e^{-\frac{a}{\gamma_0} t}$$

Cette situation durera jusqu'au temps $\frac{2l}{a}$. A partir de ce temps, elle sera modifiée par le retour de l'onde réfléchie sur le fond. Le mouvement du piston sera ralenti, non seulement par la variation de pression provenant de son mouvement propre, mais encore par l'onde réfléchie venant du fond du cylindre. L'équation du mouvement sera alors :

$$\gamma_0 \frac{dv_2}{dt} + a(2v_1 + v_2) = 0$$

et l'onde réfléchie sur le piston sera :

$$\frac{a}{g} (2v_1 + v_2).$$

Cette onde revient sur le fond, s'y réfléchit, remonte sous le piston, et ainsi de suite, de telle sorte que la vitesse v_n dans la période $2(n-1)\frac{l}{a} - 2n\frac{l}{a}$ sera donnée par l'équation :

$$(1) \quad \gamma_0 \frac{dv_n}{dt} + a \left[2(v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1}) + v_n \right] = 0$$

qui s'intègre par :

$$(2) \quad v_n = e^{-\frac{a}{\gamma_0} t} \left[c - \frac{a}{\gamma_0} \int_0^t 2(v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1}) e^{\frac{at}{\gamma_0}} dt \right],$$

où l'on fera varier t de 0 à $\frac{2l}{a}$, 0 correspondant à l'époque $2(n-1)\frac{l}{a}$ et $\frac{2l}{a}$ à l'époque $\frac{2nl}{a}$.

La constante se détermine par la condition que, pour $t = 0$, v_n a la valeur qu'avait v_{n-1} à la fin de la période précédente; nous la désignerons par u_{n-1} .

L'équation devient donc :

$$v_n = e^{-\frac{a}{\gamma_0} t} \left[u_{n-1} - \frac{2a}{\gamma_0} \int_0^t \sum_1^{n-1} v e^{\frac{at}{\gamma_0}} dt \right].$$

Il est à peu près impossible d'étudier le phénomène dans ces conditions, car la résolution des équations successives conduirait à des calculs inextricables; mais, en pratique, $\frac{2l}{a}$ est toujours très petit; l varie de 2 à 5 mètres, et a est compris entre 1.300 et 1.400 m./sec. pour les fortes pressions envisagées, comme nous l'avons vu plus haut. $\frac{2l}{a}$ varie donc de $\frac{1}{350}$ à $\frac{1}{100}$ de seconde. Nous servant de ce fait, nous voyons que l'équation (1) peut s'écrire :

$$\frac{dv_n}{dt} + \frac{a^2}{ly_0} \left[v_1 + v_2 + \dots + v_{n-1} + \frac{v_n}{2} \right] \frac{2l}{a} = 0$$

ou, à un terme très petit près, et en considérant $\frac{2l}{a}$ comme le temps élémentaire correspondant aux éléments d'une intégrale (c'est, en effet, celui qui correspondra aux valeurs moyennes des vitesses $v_1, v_2 \dots v_{n-1}$) :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{a^2}{ly_0} \int_0^t v dt = 0.$$

C'est, en somme, comme nous allons le voir, faire l'hypothèse que la compression de l'ensemble se fait en bloc, et j'en montre ainsi la légitimité.

Si, en effet, nous admettons la compression en bloc, nous raisonnerons comme suit :

Considérons le piston que nous avons poussé avec la vitesse v_0 ; au bout du temps t , sa vitesse est v et il s'est enfoncé de $\int_0^t v dt$. La colonne liquide se sera raccourcie d'autant et la surpression exprimée en hauteur de liquide sera donnée par la formule :

$$\frac{-\delta l}{l} = \frac{g}{a^2} y.$$

D'où :

$$\int_0^t v dt = \frac{gl}{a^2} y$$

à cause du sens dans lequel sont comptées les vitesses.

La force qui intervient dans le mouvement du piston est donc :

$$-\sigma y = -\frac{\sigma a^2}{gl} \int_0^t v dt.$$

L'équation du mouvement est donc :

$$a^2 \int_0^t v dt + l y_0 \frac{dv}{dt} = 0$$

et s'intègre par :

$$v = v_0 \cos \frac{a}{\sqrt{ly_0}} t,$$

les conditions étant :

$$v = v_0 \quad \text{et} \quad \frac{dv}{dt} = 0.$$

La surpression est donnée par la formule :

$$y = \frac{av_0}{g} \sqrt{\frac{y_0}{l}} \sin \frac{a}{\sqrt{ly_0}} t.$$

Son maximum est :

$$\frac{av_0}{g} \sqrt{\frac{y_0}{l}}$$

et se produit au temps

$$T = \frac{\pi}{2a} \sqrt{ly_0}.$$

Si, au lieu d'un cylindre et d'un piston de même diamètre, on avait un piston plongeur de surface s dans un grand cylindre de surface σ , on aurait, en désignant par U le volume occupé par le liquide :

$$-\frac{dU}{U} = \frac{g}{a^2} y, \quad dU = s \int_0^t v dt, \quad U = \sigma l.$$

D'où :

$$y = \frac{a^2}{g} \frac{s}{\sigma l} \int_0^t v dt.$$

L'équation est la même, au facteur $\frac{s}{\sigma}$ près.

Je suis donc amené, pour ne pas distinguer le cas du piston alésé au diamètre du cylindre de celui du piston plongeur, à envisager une certaine longueur l_1 qui ne sera pas la longueur réelle l du cylindre, mais qui sera donnée par la formule $\frac{V}{s}$,

où V est le volume total du liquide au début même du phénomène. Si le cylindre est de diamètre constant, on aura $l_1 = l \frac{\sigma}{s}$.

Je donnerai à l_1 le nom de *longueur virtuelle*.

On voit ainsi se produire le mouvement de ressort de l'eau dont j'ai parlé⁽¹⁾. Si l'on résolvait le problème en se servant des équations différentielles, on trouverait un mouvement analogue se produisant avec une allure discontinue. L'équation simplifiée que j'ai utilisée ne change pas la forme générale du phénomène. Elle lui donne simplement une allure continue.

[39] **Accumulateurs.** — Je vais maintenant aborder la question des surpressions dues aux accumulateurs.

Je rappellerai que l'accumulateur hydraulique est un cylindre de volume assez important en relation directe avec la canalisation d'eau sous pression, dans lequel peut se déplacer un piston plongeur de poids suffisant pour faire équilibre à la pression qui existe normalement dans la canalisation.

Pour bien comprendre son rôle, il faut admettre, comme je l'ai dit, qu'une conduite ou un système de pompes envoie couramment de l'eau dans la canalisation, sans qu'il y ait, pendant un certain temps, de demande correspondante.

L'eau en excès passe alors dans le cylindre de l'accumulateur, qui remonte peu à peu.

A un moment donné, on demande, pendant un temps assez court, un débit notablement plus grand que celui qui est fourni par la conduite ou la pompe, par exemple pour une presse hydraulique ou pour un retour dont la durée de fonctionnement est faible par rapport au temps total.

a) *Fermeture brusque de l'écoulement.*

Supposons que la presse ou le moteur fonctionnent; ce fonctionnement, quoique de durée relativement courte, a lieu cependant pendant un temps appréciable; un régime s'établit et l'eau s'écoule du cylindre de l'accumulateur vers l'appareil d'utilisation avec une vitesse v_0 . A un moment, l'écoulement s'arrête; nous supposons cet arrêt brutal. Alors, du fond du cylindre, remonte à la rencontre du piston une onde de compression $\frac{av_0}{g}$ qui se double au contact du piston, tandis que le piston lui-même est animé d'une vitesse v_0 . C'est un cas analogue au précédent, et nous poserons les équations de façon semblable.

1. Dans des recherches encore inédites et d'un ordre tout différent sur les réservoirs d'air, M. Camichel a fait intervenir également, dans des mouvements d'ensemble, la compressibilité de l'eau et la dilatation de l'enveloppe.

Nous prendrons pour instant initial celui où l'onde, remontant du fond du cylindre, rencontre le piston en mouvement.

Nous aurons comme précédemment :

$$\gamma_0 \frac{dv_1}{dt} + a(2v_0 + v_1) = 0.$$

L'équation est analogue à celle que nous avons déjà vue avec addition du temps av_0 .

Elle s'intègre par :

$$v_1 = v_0 \left[3e^{-\frac{a}{\gamma_0} t} - 2 \right].$$

Les équations successives seront encore de la forme :

$$\gamma_0 \frac{dv_n}{dt} + 2a \sum_0^{n-1} v + av_n = 0$$

avec substitution de l'indice 0 à l'indice 1 sous le signe Σ .

Le piston aura donc un mouvement de va-et-vient semblable au précédent. La surpression maximum se produira quand la vitesse s'annulera. Nous la calculerons par la même méthode approchée que précédemment; mais il faut tenir compte du fait que le piston s'enfonce dans un milieu déjà comprimé de $\frac{av_0}{g}$; la compression à l'instant t est alors :

$$\frac{av_0}{g} + \frac{a^2}{gl_1} \int_0^t v dt.$$

L'équation du mouvement devient :

$$\gamma_0 \frac{dv}{dt} + a \left(v_0 + \frac{a}{l_1} \int_0^t v dt \right) = 0.$$

Elle s'intègre par :

$$v = v_0 \sqrt{1 + \frac{l_1}{\gamma_0}} \cos \left[\frac{a}{\sqrt{l_1 \gamma_0}} t + \text{arc tg} \sqrt{\frac{l_1}{\gamma_0}} \right]$$

en tenant compte des conditions initiales :

$$v = v_0, \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{av_0}{\gamma_0}.$$

Le maximum de la surpression sera :

$$\frac{av_0}{g} \sqrt{1 + \frac{y_0}{l_1}}$$

En pratique, l_1 est très faible par rapport à y_0 ; il n'y aura pas une grande augmentation sur le cas précédent.

On voit ainsi comment la surpression dépend des données.

Dans des conditions de construction données, si y_0 est commandé, pour des presses hydrauliques par exemple, a est très peu variable et voisin de 1.300 à 1.400 mètres, car on a des tubes épais. On ne pourra donc agir que sur l_1 , et encore on aura des résultats restreints, d'abord par construction (on ne peut en effet augmenter l_1 indéfiniment), puis parce que l_1 n'intervient que par sa racine carrée.

Cependant tout gain sur ce point donnera un double résultat :

D'abord il diminuera l'intensité de la surpression maximum, puis il augmentera le terme $\frac{\sqrt{l_1 y_0}}{a}$ dont l'inverse figure l'expression de la ligne trigonométrique qui donne le coup. La périodicité de la fonction, dans le cas simplifié, est donnée par :

$$T = \frac{2\pi}{a} \sqrt{l_1 y_0};$$

plus l_1 sera grand et moins le phénomène aura le caractère dynamique. Il ne faut pas cependant compter encore sur un gros résultat sur ce point, car, en pratique, $y_0 = 600$ à 1.500 mètres environ, et $a = 1.300$ à 1.400 mètres. On aura donc à peu près : $T = \frac{1}{8}$ à $\frac{1}{5} \sqrt{l_1}$; T sera de l'ordre de $\frac{1}{5}$ à $\frac{1}{2}$ seconde pour l_1 , variant entre 2 et 5 mètres.

Quoi qu'il en soit, on aura toujours un certain avantage à augmenter les dimensions du réservoir d'accumulation, soit en l'allongeant, soit en augmentant sa capacité par l'emploi du piston plongeur.

Remarquons d'ailleurs que, dans ce qui précède, la quantité l_1 à considérer ne correspond pas à la position la plus haute du piston, mais à celle qu'il occupe réellement au moment de l'arrêt de l'écoulement; le coup sera d'autant plus dangereux que le piston sera plus bas. Il est donc indispensable d'empêcher, par un procédé quelconque, butée par exemple, l'accumulateur de descendre au-dessous d'un point défini et de prendre cette longueur pour base des calculs; sinon on pourrait avoir des coups beaucoup plus dangereux que ceux escomptés.

Cette remarque essentielle est applicable à tout ce que j'exposerai par la suite.

b) *Fermeture d'un distributeur placé loin de l'accumulateur.*

J'ai supposé jusqu'ici que l'organe de fermeture était placé sur le cylindre même de l'accumulateur. Mais il n'en est pas ainsi en général; car l'accumulateur, d'une longueur assez faible (1 m. 50 à 5 mètres), est relié par une conduite de plus petit diamètre, également pas très longue mais qui peut varier de 10 à 100 mètres à l'appareil d'utilisation.

Les réflexions dans l'accumulateur se suivront à des périodes voisines du $\frac{1}{100}$ de seconde, et, dans la conduite, à des périodes variant de $\frac{1}{10}$ à $\frac{1}{7}$ de seconde.

A la fermeture, il se produit dans la conduite un coup $\frac{a'v'_0}{g}$. Il remonte et arrive à l'accumulateur. Il en passe, suivant ce que j'ai dit dans la première partie de ce travail, $f_2 - f_1 \left(1 - \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \right)$ et il en revient $f'_1 = f_1 \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$ si α_1 est la caractéristique de la conduite et α_2 celle du cylindre de l'accumulateur.

En général, α_1 est bien plus grand que α_2 . Il y aura donc une forte baisse de pression dans la conduite dès l'arrivée de cette première onde dans le cylindre d'accumulateur. A partir de ce moment, les réflexions se succéderont très vite dans le cylindre d'accumulateur et souvent aussi dans la conduite, amenant le phénomène de la diffusion du coup de bélier et de l'égalisation des pressions dans les deux parties à un taux voisin de celui de l'accumulateur. On pourra alors, sans tenir compte des ondes, ce qui serait très difficile à cause des variations relatives des données, appliquer le principe de Pascal et prendre pour maximum du coup dans la conduite celui qui se produit dans l'accumulateur.

Mais il y aura lieu, dans ce cas, de considérer pour la résistance de la conduite quel est le plus grand des deux coups, ou le coup initial $\frac{a'v'_0}{g}$ (a' et v'_0 étant la vitesse de propagation et la vitesse d'écoulement dans la conduite) qui a du reste un caractère beaucoup plus instantané que l'autre, tout en durant beaucoup moins, ou celui résultant de l'accumulateur.

S'il y a une bifurcation de trois conduites, dont l'une aboutit à l'appareil d'utilisation, l'autre à l'accumulateur et la troisième à des pompes envoyant toujours de l'eau avec une vitesse V , il y aura partage du coup entre les trois suivant les règles que nous avons définies, puis égalisation de la pression. Mais si nous nous rendons compte, en outre, que l'eau arrive des pompes avec une vitesse $V < v'_0$, le coup de bélier dans la partie de la conduite venant de la pompe sera : $\frac{\lambda a}{g} (v'_0 + V)$, λ étant un facteur indiquant la réduction subie par le coup à son passage à la bifurcation.

Si les conduites sont égales, $\lambda = \frac{2}{3}$. En général, cette partie sera beaucoup moins chargée par le premier coup que les autres.

Si donc on a à prévoir un appareil de protection, il faudra le mettre près de l'appareil d'utilisation ; au passage, il amortira le premier coup $\frac{av'_0}{g}$ et, par conséquent, jouera le rôle d'une fermeture lente et protégera l'accumulateur en même temps.

Nous aurions d'ailleurs dû tenir compte dans nos calculs précédents de la vitesse d'arrivée de l'eau qui fait remonter l'accumulateur ; l'équation serait alors :

$$\gamma_0 \frac{dv}{dt} + a \left(v_0 + V \frac{s}{S} + a \int_0^t v dt \right) = 0.$$

Il faudrait alors mettre $v_0 + \frac{s}{S}V$ au lieu de v_0 dans les formules ; mais comme V est toujours très petit par rapport à v_0 (par exemple un accumulateur peut débiter 20 litres à la seconde et les pompes refouler 1 litre, ce qui donne $\frac{Vs}{v_0 S} = \frac{1}{20}$), nous n'avons pas fait une grande erreur pratique en la négligeant.

Application numérique.

J'appliquerai ces résultats à l'accumulateur dont le schéma a été donné précédemment, en supposant que le piston parte de 1 m. 50 au-dessus du fond de course, que la presse d'utilisation consomme 15 litres et que le volume total de son cylindre, avec piston à fond, soit 20 litres. J'admettrai que les conduites ont un diamètre intérieur de 30 mm. et une longueur de 10 mètres, et que la vitesse de l'eau y est égale à 7 m. 50.

Dans ces conditions, on a :

$$v_0 = 7,50 \frac{300^2}{1400} = 0 \text{ m. } 34.$$

Descente totale du piston par suite de la consommation de la presse : 0^m,975.

Durée de l'opération : 3ⁿ environ.

$$\gamma_0 = 600 \text{ mètres.}$$

Poids du piston de l'accumulateur : 91,24.

Je supposerai l'arrêt produit par une butée située sur la presse arrivant à fond de course. Dans ces conditions, le volume de l'eau, qui reste constant, est égal, en évaluant à 3 litres l'espace mort du cylindre de la presse :

$$V = \frac{\pi}{4} \left[100 \times 0,3^2 + 15 \times 1,6^2 + 2(1,6^2 - 1,4^2) \right] + 3 = 52 \text{ litres.}$$

On a ainsi :

$$l_1 = \frac{V}{S} = 3 \text{ m. } 37$$

et le coup de bélier est égal, pour $a = 1.360 \text{ m./sec.}$, à :

$$\frac{av_0}{g} \sqrt{1 + \frac{y_0}{l_1}} = 627 \text{ mètres.}$$

La surpression est supérieure à la pression statique.

La période du mouvement de va-et-vient serait :

$$\frac{2\pi}{a} \sqrt{l_1 y_0} = 0'', 208.$$

L'amplitude du mouvement de va-et-vient serait :

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2a} \sqrt{l_1 y_0}} v_0 \sqrt{1 + \frac{l_1}{y_0}} \cos \frac{a}{\sqrt{l_1 y_0}} t dt = 22^{\text{mm}}, 7^{(1)}.$$

La variation de volume correspondant à la demi-amplitude est égale à : $0^l, 34$.

On conçoit que la petitesse de la période, la faible amplitude du mouvement de va-et-vient et la grandeur des pressions en jeu, jointes au très grand amortissement dû au frottement du piston plongeur sur ses garnitures et dans l'eau, rendent très difficile l'enregistrement direct du phénomène. Aussi n'existe-t-il pas, à ma connaissance, d'expériences directes à ce sujet.

(1) On peut vérifier approximativement ce résultat en se servant du coefficient de compressibilité de l'eau qui est égal à $0,5 \times 10^{-4}$ pour 10 mètres de hauteur d'eau. Nous aurons :

$$\frac{\delta l}{l} = 627 \times 0,5 \times 10^{-4} = 0^{\text{m}}, 00314.$$

Pour 3 m. 37, on trouve : $\delta l = 10 \text{ mm. } 7$, et l'amplitude, qui est égale à $2\delta l$, est bien voisine de 22 mm. 7, ce dernier chiffre tenant compte de l'élasticité du métal.

J'ai pu cependant, dans un atelier, vérifier sur un manomètre que la pression normale était à peu près doublée à l'arrêt de la presse et que le cylindre d'accumulateur avait une légère tendance à remonter, puis reprenait sa position d'équilibre.

Il resterait, pour envisager la question de façon plus complète, à étudier le cas d'une fermeture qui ne soit pas instantanée. Mais la difficulté est de connaître cette loi de fermeture. En général, les moteurs hydrauliques à marche intermittente fonctionnent de façon plus ou moins brutale et, en tout cas, variable. Quant aux presses, elles sont employées en général au forgeage, et, si elles peuvent avoir en fin de course une marche ralentie par la résistance de l'objet à forger, il faut envisager qu'elles peuvent avoir fréquemment aussi des arrêts brutaux dus à des calages. On ne se trouve pas dans un cas comme celui des turbines où la fermeture de la vanne est commandée par un régulateur qui fonctionne suivant une loi définie. Aussi, je ne ferai pas de recherches sur les fermetures lentes.

Il faudra donc en général prévoir l'arrêt instantané qui donne les résultats les plus défavorables.

[40] Accumulateurs par multiplicateur de pression, à vapeur et hydraulique.

— On remarquera dans ce qui précède que l'intensité de la surpression est due à

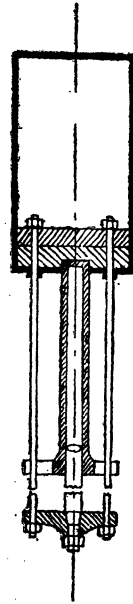


FIG. 48. — Schéma d'un multiplicateur à vapeur.

l'inertie de la masse du piston, pesant entre 10 et 250 tonnes, qui vient brusquement comprimer l'eau.

Un grand perfectionnement peut être apporté par l'emploi de multiplicateurs à vapeur⁽¹⁾; dans ces appareils, dont le schéma est donné figure 48, l'eau est mise sous pression par l'intermédiaire d'un système de deux pistons réunis rigidement. Sur le plus grand agit la vapeur, et la pression est transmise au piston hydraulique avec une amplification correspondant au rapport des diamètres.

La vapeur étant très compressible, on peut admettre que les variations de volume dues au mouvement de va-et-vient sont trop faibles pour modifier sensiblement le volume du cylindre à vapeur, et par suite la pression de la vapeur.

On aura donc un piston relativement léger sur lequel agit, d'un côté, une force constante due à la pression de la vapeur et, de l'autre, la pression due à l'eau.

Soient S la surface du piston soumise à la pression de la vapeur, s celle soumise à la pression de l'eau, P le poids du piston, p la pression de la vapeur, $\omega(y + y_0)$ la pression de l'eau, celle-ci à l'état statique étant égale à ωy_0 .

Je désignerai par $p_1 = p \frac{S}{s}$, et par $P_1 = \frac{P}{s}$, la pression due à la vapeur et le poids du piston rapportées à l'unité de surface du petit cylindre.

Si le cylindre à vapeur est situé au-dessus du cylindre à eau, on devra avoir, pour l'équilibre à l'état statique :

$$p_1 + P_1 = \omega y_0.$$

Si c'est l'inverse, cette formule devient :

$$p_1 = P_1 + \omega y_0.$$

Si l'ensemble est horizontal, on aura :

$$p_1 = \omega y_0.$$

Dans tous les cas, l'équation du mouvement sera :

$$\frac{P_1}{g} \frac{dv}{dt} + \omega y = 0.$$

Or :

$$y = \frac{a^2}{gl_1} \int_0^t v dt + \frac{av_0}{g}.$$

(1) On pourrait tout aussi bien remplacer la vapeur par l'air comprimé, et l'on aurait ainsi, en somme, un réservoir d'air dans lequel l'air serait séparé de l'eau sous pression par un piston. On éviterait ainsi les inconvénients résultant de la disparition de l'air par dissolution dans l'eau. Il n'y a là qu'une question de dimensions à donner au réservoir principal pour que la pression ne change pas sensiblement lors d'une descente de l'accumulateur; mais la vapeur est d'un usage plus commode.

D'où l'on déduit finalement :

$$P_1 \frac{d^2v}{dt^2} + \frac{\sigma a^2}{l_1} v = 0.$$

C'est la même équation que celle que nous avons précédemment trouvée pour les accumulateurs; mais le terme γ_0 est remplacé par $\frac{P_1}{\sigma}$, qui peut être beaucoup plus faible.

La valeur maximum de la pression sera :

$$\frac{av_0}{g} \sqrt{1 + \frac{P_1}{\sigma l_1}}$$

et la période :

$$T = \frac{2\pi}{a} \sqrt{\frac{l_1 P_1}{\sigma}}$$

Ces deux quantités seront très diminuées.

Application numérique. — Prenons un accumulateur dont le corps cylindrique et le piston plongeur aient les dimensions de celui que nous avons déjà étudié; mais supposons-le monté en multiplicateur à vapeur avec une contrepression de 6 kgs, ce qui nous donnera :

$$S = 1540 \text{ cm}^2 \quad \text{et} \quad D = 44 \text{ cm. } 3.$$

Si nous admettons pour le piston un poids maximum de 17, nous aurons $\frac{P_1}{\sigma} = 65^m$.

La surpression n'atteindra que 211^m, soit environ le tiers du chiffre précédemment trouvé, et la période sera réduite à : 0",0655.

On voit ainsi le très grand progrès réalisé par l'emploi du multiplicateur à vapeur en ce qui concerne les surpressions dans les canalisations et l'avantage qu'il peut y avoir à l'employer au lieu et place de l'accumulateur ordinaire.

[41] **Pare-chocs** (voir le schéma fig. 45). — Le pare-chocs est un piston maintenu par des ressorts se déplaçant dans un cylindre et engendrant par ce déplacement un volume proportionnel à la surpression qui agit sur lui. Ce déplacement est toujours assez faible et est généralement réglé de façon que la moitié du déplacement total est obtenue pour une surpression égale à la pression normale. On peut considérer que le pare-chocs étant très léger, l'appareil lui-même est sans inertie.

Les ressorts sont réglés de façon que, sous la pression normale, le piston soit à peu près au milieu de sa course.

Cet appareil se monte au voisinage des presses et des accumulateurs. Quand une surpression arrive, venant d'un de ces organes, les ressorts cèdent, permettant ainsi à l'eau de se détendre. La surpression est ainsi diminuée; quand elle a cessé, le piston est ramené par les ressorts à sa position normale.

Nous allons étudier le fonctionnement d'un de ces appareils associé à un accumulateur.

L'équation s'établit de la manière suivante :

Soient s la section de l'accumulateur,

l_1 sa longueur au moment de l'arrêt (voir ci-dessus la définition de cette longueur),

σ la section du piston du pare-chocs.

Le volume engendré par le pare-chocs sous la surpression y sera $h\sigma y_0$; nous poserons, pour plus de commodité :

$$K\sigma = \frac{gs}{a^2} \lambda,$$

λ étant homogène à une longueur.

En réalité, à mesure que le mouvement du piston de l'accumulateur tendra à diminuer le volume de l'eau de $s \int_0^t v dt$, la présence du pare-chocs tendra à compenser cette diminution. L'équation de compressibilité nous donnera :

$$\frac{dV}{V} = - \frac{g}{a^2} y.$$

Or :

$$dV = -s \int_0^t v dt + \frac{gs}{a^2} \lambda y.$$

D'où l'on déduit :

$$y = \frac{a^2}{l_1 + \lambda} \int_0^t v dt.$$

Le mouvement de l'accumulateur sera donc donné par la formule :

$$\frac{\sigma s y_0}{g} \frac{dv}{dt} + \frac{\sigma a^2 s}{g(l_1 + \lambda)} \int_0^t v dt = 0,$$

et l'intégration donne :

$$v = v_0 \cos \frac{a}{\sqrt{y_0(l_1 + \lambda)}} t$$

avec surpression maximum :

$$\frac{av_0}{g} \sqrt{\frac{y_0}{l_1 + \lambda}}$$

L'équation est à peu près la même que précédemment, mais avec substitution de $l_1 + \lambda$ à l_1 . Le pare-chocs permet donc de réaliser en somme l'allongement du cylindre de l'accumulateur que nous avons indiqué comme un des moyens de parer aux coups de bélier.

Appliquons les résultats précédents à un cas concret correspondant aux données précédentes :

$$y = 600 \text{ mètres.}$$

$$a = 1360 \text{ m/sec.}$$

Volume d'eau dans l'accumulateur et dans la presse : 54 l.

$$S = 154 \text{ cm}^2, \quad l_1 = 3 \text{ m. } 37.$$

Nous avons vu que, dans ces conditions, la surpression atteignait 627 m.

Prenons un pare-chocs sur les données de la figure 45 :

$$d = 0 \text{ m. } 175; \quad \sigma = 240 \text{ cm}^2. \quad \text{Course de } 0 \text{ m. } 6 \text{ pour } \delta y = 600 \text{ mètres.}$$

Nous aurons :

$$600K = 0,06; \quad K = 1 \times 10^4,$$

$$K\sigma = 240 \times 10^8 = \frac{9,81 \times 0,0154 \times \lambda}{1360^3},$$

$$\lambda = 29 \text{ m. } 40.$$

Le coup de bélier sera alors :

$$\frac{av_0}{g} \sqrt{\frac{y_0}{l_1 + \lambda}} = 201 \text{ mètres.}$$

Il est réduit dans la proportion de 3, 2 à 1.

La période du mouvement de ressort sera :

$$\frac{2\pi}{a} \sqrt{(l_1 + \lambda)y_0} = 0^{\text{r}}, 655.$$

La pression totale supportée par les ressorts atteindra :

$$(60 + 20,1) \times 240 = 19^{\text{T}}, 25$$

et le volume engendré sous la surpression sera égal à 1^l,44.

Ce que je viens d'exposer précédemment prouve donc la très grande utilité du pare-chocs. l_1 , dans un accumulateur, est une quantité variable, suivant le degré de remplissage du cylindre lors du commencement de la manœuvre et peut devenir très petit. Les coups de bélier peuvent donc arriver à des valeurs considérables. La présence du pare-chocs, par le remplacement de l_1 par $l_1 + \lambda$, où λ est fixe, sera donc une protection considérable, en empêchant le coup d'augmenter au delà de la valeur donnée par λ seul, en supposant $l_1 = 0$.

[42] **Soupapes de choc.** — On cherche souvent, dans les distributions d'eau sous pression, à limiter les surpressions, non par des pare-chocs, mais par des soupapes dites « soupapes de choc », qui, s'ouvrant lorsque la surpression atteint une valeur donnée, limitent celle-ci par l'évacuation d'une certaine quantité de liquide.

Nous allons en étudier le fonctionnement, en supposant la soupape sans inertie sensible, ce qui arrive en pratique.

Supposons que, la pression normale étant y_0 , le ressort de la soupape soit réglé pour que l'ouverture se produise sous une pression $y_1 + y_0$, y_1 étant la surpression admise.

Nous prendrons l'équation simplifiée où l'on néglige $\frac{l_1}{y_0}$ devant t .

On a :

$$v = v_0 \cos \frac{a}{\sqrt{l_1 y_0}} t$$

et la surpression à chaque instant est donnée par la formule :

$$y = \frac{av_0}{g} \sqrt{\frac{y_0}{l_1}} \sin \frac{a}{\sqrt{l_1 y_0}} t.$$

On atteint la valeur y_1 au bout d'un temps T tel que :

$$y_1 = \frac{av_0}{g} \sqrt{\frac{y_0}{l_1}} \sin \frac{a}{\sqrt{l_1 y_0}} T.$$

La vitesse à ce moment est égale à :

$$v_1 = v_0 \cos \frac{a}{\sqrt{l_1 y_0}} T = v_0 \sqrt{1 - \frac{l_1 g^2 y_1^2}{a^2 v_0^2 y_0}}.$$

La soupape s'ouvrira alors et laissera échapper une certaine quantité de liquide pendant que la surpression y_1 se maintiendra constante.

L'équation à appliquer à partir de ce moment sera :

$$\frac{\mathcal{O}}{g} y_0 \frac{dV}{dt} + \mathcal{O} y_1 = 0$$

et s'intégrera par :

$$V = v_1 - \frac{g y_1}{y_0} (t - T).$$

Le mouvement s'arrêtera à l'époque $t = T + \frac{v_1 y_0}{g y_1}$.

Et la soupape se refermera. Il existe alors dans la conduite une surpression très légèrement inférieure à y_1 qui tendra à faire remonter l'accumulateur.

Il se produira ainsi un nouveau mouvement de va-et-vient analogue à celui qui se produirait sans soupape de choc, mais tel que la surpression ait pour maximum y_1 , autour d'une position d'équilibre située à un niveau inférieur à celui de la position d'origine. Cet abaissement se déduit de la quantité d'eau écoulée pendant l'ouverture de la soupape.

La quantité d'eau écoulée par unité de surface du piston de l'accumulateur durant l'ouverture de la soupape est donnée par la formule :

$$Q = \int_T^{T + \frac{v_1 y_0}{g y_1}} V dt = \frac{v_1^2 y_0}{2g y_1} = \frac{v_0^2 y_0}{2g y_1} - \frac{l_1 g y_1}{2a^2}.$$

L'analyse précédente du phénomène peut paraître un peu sommaire en ce sens que la soupape, commençant à s'ouvrir sous une surpression y_1 , ne donnera son plein débit que pour une surpression supérieure. Mais on peut réaliser des soupapes donnant, dès le commencement de l'ouverture, un orifice important.

En tous cas, pour être sûr de ne jamais dépasser la surpression γ_1 , il faudra pratiquement réaliser une soupape s'ouvrant à une pression inférieure et donnant, sous la surpression γ_1 , un orifice suffisant pour écouler un débit Ωv_1 , Ω étant la section du piston de l'accumulateur.

Comme nous allons le voir dans l'application numérique qui suit, ces phénomènes se produisent dans des temps extrêmement courts, et, en pratique, il suffira de définir le débit à écouler par la formule :

$$Q \frac{g\gamma_1}{v_1\gamma_0},$$

qui indique le débit moyen nécessaire pour écouler la quantité Q pendant l'intervalle T , $T + \frac{v_1\gamma_0}{g\gamma_1}$.

Appliquons ces diverses formules à l'accumulateur déjà défini et qui nous a servi d'exemple jusqu'à présent. Supposons que nous ne voulions pas dépasser 200^m comme valeur de la surpression.

Cette valeur sera atteinte au bout du temps T .

$$\begin{aligned} T &= \frac{\sqrt{l\gamma_0}}{a} \arcsin \frac{g\gamma_1}{av_0} \sqrt{\frac{\gamma_0}{l_1}} \\ &= \frac{\sqrt{3,37 \times 600}}{1360} \arcsin \frac{9,81 \times 200}{1360 \times 0,34} \sqrt{\frac{3,37}{600}} \\ &= \frac{\sqrt{3,37 \times 600}}{1360} \arcsin [18^\circ] = 0^m,0104. \end{aligned}$$

La vitesse v_1 sera égale à :

$$v_0 \cos 18^\circ = 0,34 \times 0,95 = 0 \text{ m. } 324.$$

La quantité d'eau écoulee sera, pour une surface de 154 cm² :

$$\begin{aligned} Q &= \left[\frac{v_0^2 \gamma_0}{2g\gamma_1} - \frac{l_1 g \gamma_1}{2a^2} \right] \omega = \left[\frac{0,34^2 \times 600}{19,62 \times 200} - \frac{3,37 \times 9,81 \times 200}{2 \times 1360^2} \right] 0,0154 \\ &= [0,0175 - 0,0018] \times 0,0154 = 0 \text{ l. } 242. \end{aligned}$$

Le débit à assurer par la première formule serait :

$$0,0175 \times 0,324 = 5 \text{ l./sec.}$$

et par la deuxième :

$$4 \text{ l./sec. } 9.$$

Dans la limite où l'on peut être sûr du fonctionnement de ces appareils sous des effets dynamiques, l'approximation est plus que suffisante.

La durée d'ouverture de la soupape est égale à :

$$\frac{v_1 y_0}{g y_1} = \frac{0,324 \times 600}{19,62 \times 200} = 0",048.$$

Il est d'ailleurs facile de se faire une idée des dimensions extrêmement réduites que doit avoir l'orifice de la soupape.

Si, pour tenir compte des pertes de charge et de la contraction de la veine à la sortie, on pose :

$$q = 0,3\omega \sqrt{2g(y_0 + y_1)}.$$

on trouve, pour $q = 5$ l./sec. et $y_0 + y_1 = 800$:

$$\omega = 1 \text{ cm}^2, 32.$$

[43] Influence du frottement de l'accumulateur sur ses garnitures. — Le piston de l'accumulateur est maintenu dans des garnitures qui ont pour but principal d'assurer l'étanchéité. Une partie de ces garnitures est fixe; l'autre est constituée par des cuirs emboutis dont la pression sur le cylindre mobile est d'autant plus considérable que la pression est plus grande.

Toutefois, ces garnitures sont placées assez loin pour que les variations rapides de pression, telles que les surpressions dont nous nous occupons, sont amorties avant d'y arriver.

En marche normale, on peut donc admettre que l'effort de frottement F est de la forme :

$$F = \alpha + \beta y_0.$$

Il sera donc constant dans une installation donnée.

Soit f sa valeur par unité de surface du piston de l'accumulateur; posons

$$f = \frac{\omega a}{g} \mu.$$

L'équation du mouvement devient alors :

$$y_0 \frac{dv}{dt} + a \left[v_0 + \mu + \frac{a}{l_1} \int_0^t v dt \right] = 0$$

et s'intègre par :

$$v = v_0 \sqrt{1 + \left(1 + \frac{\mu}{v_0}\right)^2 \frac{l_1}{y_0}} \cos \left[\frac{a}{\sqrt{l_1 y_0}} t + \text{arc tg} \left(1 + \frac{\mu}{v_0}\right) \sqrt{\frac{l_1}{y_0}} \right].$$

Elle s'applique jusqu'au moment où l'accumulateur s'arrête au point le plus bas en donnant la surpression maximum y_1 .

A partir de cette époque, il faut appliquer l'équation :

$$y_0 \frac{dv}{dt} + a \left[\frac{gy_1}{a} - \mu + \frac{a}{l_1} \int_0^t v dt \right] = 0$$

et ainsi de suite pour chaque période en prenant pour y_1 la valeur de la surpression à la fin de la période précédente, en mettant devant μ le signe + dans les mouvements de descente et le signe — dans les mouvements de montée, et en prenant chaque fois, pour origine des temps, l'époque du commencement du mouvement de montée ou de descente considéré.

On obtient ainsi un mouvement amorti.

Il est d'ailleurs simple de voir que la présence du terme en μ diminue la surpression à la fin de la première période de descente.

Un calcul élémentaire donne en effet :

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{av_0}{g} + \frac{a^2}{gl_1} \int_0^T v dt \\ &= \frac{av_0}{g} \left[1 + \sqrt{\frac{y_0}{l_1} + \left(1 + \frac{\mu}{v_0}\right)^2} - \left(1 + \frac{\mu}{v_0}\right) \right] \end{aligned}$$

et l'on vérifie facilement que y_1 est une fonction décroissante de μ .

Je n'ai malheureusement pas pu procéder à des mesures sur cet amortissement; mais j'ai pu constater qu'il était très rapide.

Sur une installation de fabrication d'obus de 75, avec un accumulateur de 35^r environ et une distribution d'eau à 150 kgs, j'ai constaté que la descente de l'accumulateur était suivie d'un très faible mouvement de remontée.

Sur une installation beaucoup plus importante pour obus de 155 avec distribution d'eau à 150 kgs et accumulateur de 234^r, mais muni d'une soupape de choc, j'ai pu voir, après la grande descente, une remontée suivie d'une petite descente après laquelle on pourrait constater encore une légère tendance à la montée.

Ces mouvements sont d'ailleurs très rapides, de très faible amplitude, et il faut beaucoup d'attention pour les discerner.

La même installation m'a permis de voir l'importance d'une manœuvre progressive du distributeur à la fermeture.

Les phénomènes ci-dessus, accompagnés d'un jet important de la soupape de choc, se sont produits dans la manœuvre d'une presse à ogiver où l'arrêt se produit sur la butée de la presse.

Sur une presse à tréfiler, où l'arrêt du distributeur se produit à la main avec interposition supplémentaire de dispositifs ralentisseurs, la soupape donnait beaucoup moins et il était impossible de voir une oscillation quelconque de l'accumulateur.

[44] Je n'ai étudié jusqu'ici que les cas de fermeture du distributeur d'une presse montée sur une distribution d'eau sous pression avec accumulateur.

Il resterait à voir ce qui se passe au moment où l'on ouvre le distributeur et où le piston de la presse se met en marche; mais ce cas donne lieu à des calculs plus compliqués que le précédent parce que, en dehors des mouvements oscillatoires de l'eau dont nous avons vu antérieurement l'expérience, il faudrait en outre envisager le déplacement d'ensemble de l'eau à travers les canalisations, faire intervenir dans ce déplacement les pertes de force vive aux changements de diamètre des conduites (théorème de Borda), etc...

Nous allons étudier cependant un cas théorique en supposant que l'accumulateur et la presse sont reliés par un cylindre de même diamètre qu'eux et nous verrons à en tirer quelques conséquences pratiques.

Il est facile alors de se rendre compte qu'il revient au même d'étudier, dans un cylindre placé horizontalement, le mouvement de deux pistons séparés par une tranche d'eau de longueur l_0 , cette eau étant supposée compressible.

Soit S la section du cylindre et $\frac{\omega S y_0}{g}$ la masse du piston de l'accumulateur.

Sur la face de l'accumulateur opposée à l'eau, s'exerce un effort égal à $\omega S y_0$ (poids du piston).

Considérons, du côté opposé, le piston de la presse. Sa masse sera $\frac{\omega}{g} S y_1$; sur la face opposée à l'eau, s'exerce un effort $\omega S y_1$.

y_2 est plus grand que y_1 et se compose en général du poids du piston augmenté d'efforts de contrepression destinés à commander le mouvement inverse du piston après le travail de la presse.

Soit V la vitesse du piston de l'accumulateur,

v la vitesse du piston de la presse,

u la vitesse d'une branche d'eau située à une distance x de la face plongée dans l'eau du piston de l'accumulateur.

Nous rappellerons que si ωy_0 est la pression initiale de l'eau quand la longueur

de la colonne liquide est l_0 , la pression à l'instant est donnée par la formule :

$$\varpi y = \varpi \left[y_0 + \frac{a^2}{gl} \int_0^t (V - v) dt \right].$$

Enfin le travail élémentaire produit par un fluide compressible qui change de volume est $p dU$, dU étant la variation de volume.

Écrivons, pour l'ensemble du système, le théorème des projections des quantités de mouvement; on obtient facilement, en posant :

$$\begin{aligned} \frac{1}{g} \left(y_0 + \frac{l_0}{2} \right) &= A, \\ \frac{1}{g} \left(y_1 + \frac{l_0}{2} \right) &= B, \\ (1) \quad A \frac{dV}{dt} + B \frac{dv}{dt} &= y_0 - y_1. \end{aligned}$$

Écrivons le théorème des forces vives; on trouve :

$$\frac{\varpi}{g} S y_0 V \frac{dV}{dt} + \frac{\varpi}{g} S y_1 v \frac{dv}{dt} + \frac{\varpi}{g} S \int_0^{l_0} u \frac{du}{dt} dx = \varpi S y_0 V - \varpi S y_1 v + p dU.$$

Or, en supposant linéaire la répartition des vitesses le long de la colonne liquide, on a :

$$u = V + \frac{v - V}{l_0} x.$$

D'autre part :

$$dU = S(v - V) dt.$$

Calculons le terme :

$$\int_0^{l_0} u \frac{du}{dt} dx.$$

On obtient :

$$\left(V \frac{dV}{dt} + v \frac{dv}{dt} \right) \frac{l_0}{2} - \frac{l_0}{6} (v - V) \left(\frac{dv}{dt} - \frac{dV}{dt} \right).$$

L'équation des forces vives se transforme alors comme suit :

$$\begin{aligned} (2) \quad AV \frac{dV}{dt} + Bv \frac{dv}{dt} &= (y_0 - y_1)v - \frac{a^2}{gl_0} (v - V) \int_0^t (v - V) dt \\ &\quad + \frac{l_0}{6g} (v - V) \left(\frac{dv}{dt} - \frac{dV}{dt} \right). \end{aligned}$$

La seule quantité qui nous intéresse, au point de vue du calcul des pressions, est $v - V$, que nous désignerons par w .

Multipliant (1) successivement par v et V et le retranchant de (2), on obtient, après avoir divisé par w :

$$\begin{aligned} A \frac{dV}{dt} &= \frac{a^2}{gl_0} \int_0^t w dt - \frac{l_0}{6g} \frac{dw}{dt}, \\ B \frac{dv}{dt} \gamma_0 - \gamma_2 &- \frac{a^2}{gl_0} \int_0^t w dt + \frac{l_0}{6g} \frac{dw}{dt}. \end{aligned}$$

Enfin, multipliant par B et A ces deux dernières équations et retranchant la première de la seconde, on obtient :

$$AB \frac{dw}{dt} = A(\gamma_0 - \gamma_2) - \frac{a^2}{gl_0} (B + A) \int_0^t w dt + \frac{l_0}{6g} (A + B) \frac{dw}{dt}$$

ou :

$$\left[AB - \frac{l_0}{6g} (A + B) \right] \frac{dw}{dt} + \frac{a^2}{gl_0} (A + B) \int_0^t w dt = A(\gamma_0 - \gamma_2).$$

Il est facile de voir que le coefficient de $\frac{dw}{dt}$ est toujours positif. L'équation qui donne w est de la forme :

$$m \frac{dw}{dt} + n \int_0^t w dt = p.$$

Elle s'intègre par :

$$w = \frac{p}{\sqrt{nm}} \sin \sqrt{\frac{n}{m}} t,$$

en tenant compte que pour

$$t = 0, \quad w = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dw}{dt} = \frac{p}{m}.$$

On en tire :

$$\begin{aligned} y &= \gamma_0 - \frac{a^2}{gl_0} \int_0^t w dt = \gamma_0 - \frac{a^2 p}{gl_0 n} \left[1 - \cos \sqrt{\frac{n}{m}} t \right] \\ &= \gamma_0 - \frac{\left(\gamma_0 + \frac{l_0}{2} \right) (\gamma_0 - \gamma_2)}{\gamma_0 + \gamma_1 + l_0} \left[1 - \cos \sqrt{\frac{n}{m}} t \right]. \end{aligned}$$

Le coefficient du terme en $1 - \cos \sqrt{\frac{n}{m}} t$ est inférieur à γ_0 , mais il peut, si γ_1 et γ_2 sont assez petits, être plus grand que $\frac{\gamma_0}{2}$. Si, en vertu de l'équation ci-dessus, γ ne dépasse jamais γ_0 , cette pression pourrait par contre devenir négative, ce qui correspondrait à des ruptures de continuité de la colonne liquide, pouvant ensuite produire des phénomènes dangereux. Il est donc nécessaire, dans le cas que nous avons envisagé, que :

$$2 \left(\gamma_0 + \frac{l_0}{2} \right) (\gamma_0 - \gamma_2) < (\gamma_0 + \gamma_1 + l_0) \gamma_0.$$

Pour cela, il faut que γ_2 et γ_1 ne soient pas trop faibles, c'est-à-dire que la masse du piston de la presse et la contrepression qui s'exerce sur ce piston soient assez grands par rapport à γ_0 .

En pratique, quand on aura une presse ou tout autre appareil d'utilisation relié à l'accumulateur par des canalisations de diamètre restreint, la pression γ_0 sur le piston de la presse sera diminuée dès le départ par les pertes de charge et de force vive, et l'effet de dépression tendra à être réduit; mais l'analyse précédente montre, dans tous les cas, la nécessité d'éviter une mise en marche trop rapide du piston de la presse.

D'ailleurs, il s'ensuivra un amortissement très rapide de ces variations oscillatoires de la pression qui s'atténueront très vite et la pression reprendra, pendant la suite de la manœuvre, la valeur moyenne γ_0 .

Ainsi donc, dans le fonctionnement d'une presse s'arrêtant sur butée, on devra constater les phénomènes suivants :

a) *Ouverture du distributeur.* — Une variation oscillatoire de la pression commençant par une dépression et ne dépassant pas γ_0 .

b) *Durée de la manœuvre.* — Ces oscillations de pression étant amorphes, la pression garde la valeur γ_0 pendant la durée de la manœuvre.

c) *Arrêt de la presse sur sa butée.* — On constate des variations oscillatoires de la pression, avec surpressions très nettement marquées.

Je donnerai ci-après quelques indications que j'ai pu relever sur la distribution d'eau à 150 kgs/cm² pour l'usinage d'obus de 155 dont j'ai parlé au § 43 :

Accumulateur du poids de 234^r;

Le diamètre du piston est de 0^m445;

Sa capacité est de 700 litres.

Presse à ogiver avec contrepression de 20^r et capacité de cylindre égale à 65 litres.

Canalisations de l'accumulateur à la presse d'une capacité de 174 litres, dont 38^m50 en tubes de 75 mm. et 11^m100 en tubes de 41 mm.

Les pressions sont mesurées à l'aide d'un manomètre Bourdon d'inertie assez grande, de sorte qu'on ne peut guère espérer avoir autre chose que le sens des variations de pression et non leur valeur réelle.

Quand on ouvre le distributeur de la presse on constate une dépression, l'aiguille du manomètre baisse brusquement vers 80 kgs, remonte ensuite à près de 200⁽¹⁾ sans fonctionnement de la soupape de choc, puis revient à 150 et s'y tient pendant la course qui dure environ 1^m4 avec une vitesse de descente de l'accumulateur égale à 0^m30 par seconde. A l'arrêt, la pression monte jusqu'à 210-215 kgs avec ouverture de la soupape de choc, redescend vers 125 kgs et s'arrête finalement à 150.

On remarque d'ailleurs un fonctionnement beaucoup plus important de la soupape quand l'accumulateur est à fond de course.

[45] Conclusions sur les accumulateurs et les moyens de protection contre les surpressions. — En pratique, on peut retenir ce qui suit :

1° Faire l'accumulateur aussi grand que possible, pour y diminuer v_0 et augmenter l_1 ; y prévoir une butée pour que l_1 ne descende pas au-dessous d'une valeur définie qui servira de base aux calculs de surpression.

2° Ne pas dépasser 5 à 10 m. pour la vitesse dans les conduites; mais il est inutile de descendre trop bas parce qu'alors le coup de bélier d'accumulateur reste toujours et devient plus grand que le premier coup de fermeture.

3° Calculer l'accumulateur par la formule : $\frac{av_0}{g} \sqrt{1 + \frac{y_0}{l_1}}$, l_1 étant la longueur qu'aurait un accumulateur de même volume et de section égale à celle du piston.

4° Calculer la tuyauterie pour le plus grand des deux coups, savoir le précédent ou $\frac{a'v'_0}{g}$, a' et v'_0 étant les chiffres correspondant à la tuyauterie.

5° Si on peut avoir un appareil de protection, pare-chocs ou autres, l'employer et le mettre le plus près possible de l'appareil d'utilisation pour réduire la brutalité de l'arrêt qui est la cause des coups. J'ai indiqué précédemment comment calculer l'effet du pare-chocs.

6° Mettre également, toutes les fois qu'on le pourra, un appareil de protection au voisinage immédiat de l'accumulateur pour éviter les surpressions dues à son inertie. Cet appareil est encore plus important que ceux placés près des appareils d'utilisation pour la protection des canalisations de longueur importante.

(¹) Remontée apparente de la pression qui est due en réalité au lancer de l'aiguille du manomètre.

7° Si les circonstances le permettent, utiliser de préférence les accumulateurs avec multiplicateurs à vapeur.

Les considérations précédentes ne constituent qu'un premier pas dans la solution de ces questions.

Il y a en effet entre la conduite initiale, les conduites d'amenée et les appareils eux-mêmes des causes de réflexion des ondes qui peuvent influencer notablement sur les phénomènes. Enfin les élargissements et rétrécissements brusques qui existent en certains points peuvent amener des pertes de force vive toutes les fois que l'eau y passe avec une vitesse notable. C'est ce qui explique d'ailleurs les accidents plus fréquents aux points de jonction des tuyauteries et des appareils. Des expériences soigneuses et multipliées pourront seules indiquer l'influence de ces divers points.

[46] **Généralisation de l'oscillation en masse.** — Comme j'ai eu l'occasion de le dire, l'ensemble formé par un accumulateur et un pare-chocs paraît devoir donner lieu à des oscillations en masse, car nous avons entre les deux engins une masse liquide dont les extrémités sont mobiles.

Mais, dans ce cas, pour bien faire ressortir la nature du phénomène, les hypothèses faites jusqu'à présent, en supposant l'eau incompressible et conduite inélastique, ne suffisent plus.

Il faut donc serrer de plus près la réalité, en tenant compte de cette compressibilité et cette élasticité et considérer que l'eau agit comme un ressort. En admettant que ces mouvements de ressort se fassent en bloc, nous aurons ainsi une oscillation en masse de nature plus générale que celle que j'ai envisagée pour les cheminées d'équilibre et qui est définie par les équations que je viens de donner.

Remarquons d'ailleurs que c'est bien ainsi que M. Rateau avait abordé la question dans son *Traité sur les turbo-machines* (Dunod, 1900), quand il faisait intervenir la compressibilité de l'eau et l'élasticité de la conduite dans un mouvement d'ensemble. Le seul point sujet à contestation était la légitimité de cette hypothèse, car, lorsqu'il s'agit d'une conduite de grande longueur, on ne peut pas négliger le fait que les ondes se transmettent dans l'eau avec une vitesse finie.

A ce titre, les divers mouvements de va-et-vient que je viens d'étudier apparaissent donc comme une généralisation de l'oscillation en masse, telle que M. Camichel et moi-même l'avons définie, l'un pour les réservoirs d'air et l'autre pour les cheminées d'équilibre.

ANNEXE I

**Sur la vitesse de propagation des ondes dans les conduites
en ciment armé.**

Il n'a pas été publié jusqu'à ce jour, du moins à ma connaissance, d'essais pour la détermination de la vitesse a de propagation des ondes dans les conduites en ciment armé. Je crois cependant que M. Camichel a l'intention de procéder à des expériences à ce sujet et M. Gariel en a entrepris sur des usines des Alpes.

A propos de l'Usine de Saillens, j'ai cependant indiqué que cette valeur devait être du même ordre de grandeur que pour les conduites métalliques. Il me reste à indiquer sur quoi je base mon hypothèse.

Les conduites en béton armé sont constituées en général par des armatures métalliques circulaires, disposées suivant les directrices, et dont l'ensemble est destiné à assurer la résistance à l'éclatement. Elles sont reliées par des armatures longitudinales posées suivant les génératrices, et dont la section par unité de surface est la moitié de celle des directrices, conformément au résultat bien connu pour les conduites.

On déduit de ce qui précède la limitation d'emploi des conduites en béton armé. En négligeant, au point de vue résistance, mais non au point de vue déformation, comme nous le verrons plus loin, la résistance du béton à l'extension, on voit que dès que la section de métal sera supérieure à celle correspondant à une épaisseur continue de 5 à 7 mm. de métal, suivant le diamètre de la conduite (car il faut prévoir sa tendance à l'aplatissement), on sera ramené à la conduite entièrement métallique.

Pour calculer la vitesse a , on sera amené naturellement ⁽¹⁾ à considérer, comme on le fait dans les calculs courants de ciment armé, une épaisseur fictive e_f donnée par la formule :

$$e_f = e_m \left[1 + \frac{1}{m} \frac{e_b}{e_m} \right],$$

où e_m est l'épaisseur continue correspondant à la section du métal;

e_b l'épaisseur du béton,

et m un coefficient variant entre 8 et 15, ainsi qu'il résulte des données pratiques.

(1) Puisqu'il s'agit de déformation, il faudra tenir compte de la présence du béton.

Pour nous rendre compte de l'ordre de grandeur de a , j'appliquerai la formule au cas suivant que j'ai eu à étudier.

$$D = 3 \text{ m. } 90, \quad p = 1 \text{ kg. par cm}^2.$$

Pour que l'effort moléculaire du métal ne dépasse pas 8 kgs/mm^2 , on trouve $e_m = 2 \text{ mm. } 5$; $e_b = 0 \text{ m. } 25$. Prenons $m = 10$.

On trouve ainsi :

$$e_f = 27 \text{ mm. } 5, \quad a = 910 \text{ m/sec.}$$

Cette vitesse de propagation est de l'ordre de celles qu'on trouve pour les conduites entièrement métalliques.

Remarquons d'ailleurs qu'en dehors des incertitudes théoriques que présentent ces hypothèses, interviennent encore les variations dues à la composition et à l'exécution du béton qui est beaucoup moins bien défini que le métal, variations dont l'influence se ferait également sentir en cours de recherches expérimentales; de telle sorte que de pareilles conduites donneront toujours lieu, au point de vue du calcul préalable du coup de bélier, à de notables difficultés.

ANNEXE II

Sur la détermination de la vitesse moyenne de propagation des ondes à l'Usine de la Mine de Plomb.

J'ai indiqué au § 17 *b* les différences entre les valeurs trouvées par le calcul théorique et par l'expérience pour la vitesse moyenne de propagation des ondes à l'Usine de la Mine de Plomb. J'ai donné les raisons pour lesquelles je ne croyais pas devoir m'arrêter à cette différence.

Le meilleur procédé aurait été évidemment de mesurer directement cette vitesse par une autre méthode expérimentale, la perturbation brusque par exemple. La présence de la cheminée d'équilibre amenant une réflexion trop rapide des premières ondes, et les difficultés de manœuvre du volant du distributeur pour obtenir à un très court intervalle une ouverture et une fermeture consécutive, m'ont interdit l'emploi de ce procédé.

J'y suis arrivé en faisant apparaître les harmoniques par la méthode du robinet tournant indiquée par M. Camichel. Pour cela, j'ai fait monter sur la conduite

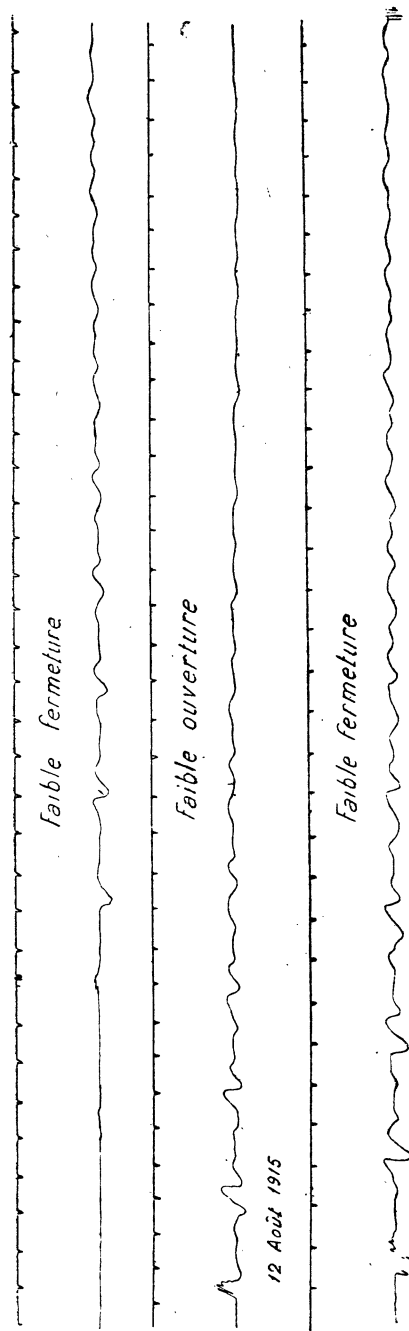


FIG. 49.

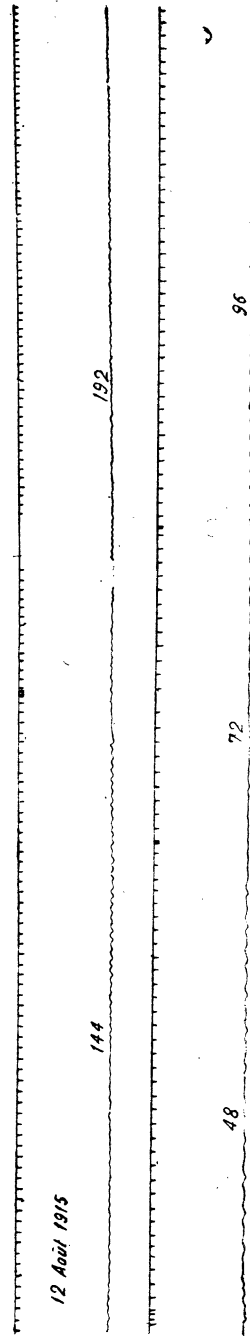


FIG. 50.

FIG. 49 et 50. — Diagrammes donnant les coups de bélier d'ouverture et de fermeture et les résonances à l'usine de la mine de plomb.

un robinet dont l'ouverture avait 6 mm. de diamètre, et que je manoeuvrais rythmiquement à la main suivant la cadence donnée par un métronome (*).

Le premier diagramme de la figure 49 est relatif à une fermeture isolée; il donne $\theta = 1,333$ et $a_m = 563$ m./sec. comme précédemment.

La figure 50 indique les résonances pour lesquelles il faut prendre l'ensemble de la conduite (**).

On voit qu'il y a résonance nette pour les cadences 96 et 144.

En prenant la longueur totale 387 m. 24, on voit que la cadence 96 correspond à $\theta_1 = 0^{\text{m}}54$ et la cadence 144 à $\theta_2 = 0^{\text{m}}432$.

$$\text{Pour } a_m = 563 \text{ mètres, } \frac{4l}{a_m} = 2^{\text{m}},752.$$

θ_1 correspond sensiblement à l'harmonique 5 et θ_2 à l'harmonique 6, les harmoniques pairs pouvant apparaître à cause de la cheminée.

En faisant le calcul en sens inverse, on trouverait, pour a_m , 573 m./sec. dans le premier cas et 597 m./sec. dans le deuxième.

La moyenne donne : 585 m./sec.; on approche de la valeur 563 m. à + 4 % près.

Ce n'est qu'une vérification indirecte, mais qu'il n'y a pas lieu cependant de négliger.

ANNEXE III

Sur la forme choisie pour l'expression donnant la perte de charge.

J'ai indiqué (voir § 21) que je prenais, pour définir la perte de charge pour une vitesse donnée v , une expression de la forme $\frac{Kv^2}{2g}$; c'est également ce qu'avait fait M. de Sparre dans l'étude que j'ai déjà citée et qui a paru dans la *Houille blanche* de septembre 1904.

(*) Je ferai remarquer en passant la sensibilité de la méthode, puisqu'avec de si petits moyens, étant donné l'importance de la conduite (près de 400 m. de long et 1^m15 de diamètre), j'ai pu enregistrer des oscillations appréciables.

(**) Les chiffres indiquent la cadence du métronome.

C'est se baser sur une formule analogue à celle de Darcy qui indique, pour la perte de charge au mètre courant dans les tuyaux de conduite :

$$j = \frac{4}{d} \left[\alpha + \frac{\beta}{d} \right] v^2.$$

Bresse avait également donné une expression de la forme :

$$j = av^3.$$

M. Flamant a donné à son tour une expression de la forme :

$$i = av^{\frac{7}{4}}.$$

Il en résulterait que j'aurais dû, semble-t-il, pour me baser sur les travaux les plus récents, prendre une expression de cette dernière forme; mais il est à remarquer que les formules de Flamant sont prévues pour des conduites métalliques à section circulaire de diamètre courant, que toutes les pertes de charge accessoires dues aux coudes, élargissements, mises en vitesse, etc., sont de la forme $\frac{Kv^2}{2g}$, de telle sorte que si l'on voulait employer la formule de Flamant, il faudrait enfin écrire :

$$J = av^{\frac{7}{4}} + bv^2.$$

Mais, d'un autre côté, dans les Usines du deuxième type que j'ai surtout envisagées, on se trouve en général non en présence de conduites métalliques à section circulaire, mais de canaux en béton armé ou non, avec revêtements en ciment, et dont la forme peut s'écarter beaucoup du cercle.

Faute d'avoir, en ces matières, des expériences directes, dont l'absence regrettable ne s'explique que trop par les difficultés d'expérimentation, on est amené, pour étudier le fonctionnement en charge de ces ouvrages, à extrapoler la formule des canaux découverts qui donne alors, non la pente superficielle, mais la perte de charge par mètre courant.

Or cette formule s'écrit :

$$Rj = b_1 u^2.$$

On voit donc que, dans l'état actuel de l'hydraulique expérimentale, l'hypothèse que j'ai faite en écrivant la perte de charge sous la forme $\frac{Kv^2}{2g}$ est parfaitement admissible.

TABLE

PREMIÈRE PARTIE

Les mouvements de l'eau et les coups de bélier dans les cheminées d'équilibre.

	Pages.
CHAPITRE PREMIER. — But et utilité des cheminées d'équilibre montées sur une canalisation d'eau sous pression.	148
CHAPITRE II. — Théorie simplifiée des cheminées d'équilibre par les oscillations en masse.	156
CHAPITRE III. — Coexistence des coups de bélier d'onde et des oscillations en masse..	173
CHAPITRE IV. — Analyse plus complète du phénomène d'oscillation en masse.	208

DEUXIÈME PARTIE

Sur divers systèmes hydrauliques à mouvement alternatif. Application aux distributions d'eau sous pression	246
--	-----

ANNEXES

ANNEXE I. — Sur la vitesse de propagation des ondes dans les conduites en ciment armé.	280
ANNEXE II. — Sur la détermination de la vitesse moyenne de propagation des ondes à l'Usine de la Mine de Plomb.	281
ANNEXE III. — Sur la forme choisie pour l'expression donnant la perte de charge. ...	283
