S. Lattès

# Sur une forme canonique nouvelle des substitutions linéaires

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3e série*, tome 6 (1914), p. 1-84
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1914_3_6__1_0>

# ANNALES

DE LA

# FACULTÉ DES SCIENCES

## DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE


SUR UNE

# FORME CANONIQUE NOUVELLE DES SUBSTITUTIONS LINÉAIRES


PAR S. LATTÈS,

Professeur à l'Université de Toulouse.


## INTRODUCTION

Ce travail a son origine dans la théorie des systèmes d'équations différentielles du premier ordre à coefficients constants. On sait que la discussion d'un pareil système revient en définitive à la réduction d'une substitution linéaire à sa forme canonique (¹). La forme canonique généralement adoptée à cet effet est la forme canonique de M. Jordan (²) comprenant plusieurs groupes d'équations analogues au groupe suivant :

$$X_1 = Sx_1, \quad X_2 = x_1 + Sx_2, \quad \ldots\ldots, \quad X_p = x_{p-1} + Sx_p,$$

où S est une racine de l'équation caractéristique de la substitution ou du système d'équations différentielles donné.

Mais d'autre part une méthode élémentaire d'intégration consiste à ramener, par des dérivations et des éliminations successives, l'intégration du système proposé à celle d'une ou plusieurs équations différentielles linéaires dépendant chacune d'une

(¹) Voir, par exemple, GOURSAT, *Cours d'analyse mathématique*, t. II, 2ᵉ édit., p. 487.
(²) JORDAN, *Traité des substitutions*, pp. 114-126.

seule fonction inconnue. Or, une équation différentielle linéaire d'ordre $m$ se ramène immédiatement au système d'équations du premier ordre

$$\frac{dx_1}{dt}=x_2,\quad \frac{dx_2}{dt}=x_3,\quad \ldots\ldots,\quad \frac{dx_{m-1}}{dt}=x_m,\quad \frac{dx_m}{dt}=a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_mx_m,$$

et à ce système correspond la substitution linéaire ([1])

$$(1)\qquad X_1=x_2,\quad X_2=x_3,\quad \ldots\ldots,\quad X_{m-1}=x_m,\quad X_m=a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_mx_m.$$

La comparaison des deux méthodes m'a suggéré l'idée que toute substitution linéaire devait pouvoir être ramenée à une forme canonique formée de plusieurs groupes analogues au groupe (1).

Le but principal de ce Mémoire est de démontrer la proposition suivante, relative à l'existence d'une pareille forme canonique :

*Toute substitution linéaire, à déterminant non nul, peut être transformée en une substitution de la forme*

$$(\mathrm{C})\quad \begin{cases} \mathrm{C}_1 & X_1=x_2,\; X_2=x_3,\; \ldots\ldots,\; X_{m-1}=x_m,\; X_m=a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_mx_m,\\ \mathrm{C}_2 & Y_1=y_2,\; Y_2=y_3,\; \ldots\ldots,\; Y_{p-1}=y_p,\; Y_p=b_1y_1+b_2y_2+\ldots+b_py_p,\\ \mathrm{C}_3 & Z_1=z_2,\; Z_2=z_3,\; \ldots\ldots,\; Z_{q-1}=z_q,\; Z_q=c_1z_1+c_2z_2+\ldots+c_qz_q,\\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

*que nous appellerons forme canonique* (C) *et qui est formée d'un ou plusieurs groupes d'équations* $\mathrm{C}_1$, $\mathrm{C}_2$, $\mathrm{C}_3$ *que nous appellerons groupes canoniques. Chacun des polynômes*

$$\begin{aligned} \Delta_1(S)&=S^m-a_mS^{m-1}-\ldots-a_2S-a_1,\\ \Delta_2(S)&=S^p-b_pS^{p-1}-\ldots-b_2S-b_1,\\ \Delta_3(S)&=S^q-c_qS^{q-1}-\ldots-c_2S-c_1,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

*formés à l'aide des coefficients de* $\mathrm{C}_1$, $\mathrm{C}_2$, $\mathrm{C}_3$ *est divisible par le polynôme suivant* ([2]).

Ajoutons que *les coefficients* $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots, c_1, c_2, \ldots$ *qui figurent dans* (C) *sont des fonctions rationnelles des coefficients de la substitution primitive* et que cette forme canonique peut se déduire de la substitution primitive par des opérations rationnelles. Au contraire, la forme canonique de M. Jordan contient comme coefficients les racines de l'équation caractéristique et il faut adjoindre ces racines au domaine de rationalité auquel appartiennent les coefficients de la substitution pour

---

([1]) Cette substitution se rencontre aussi, dans des circonstances analogues, dans la théorie des équations linéaires aux différences finies. Voir mon Mémoire *Sur les suites récurrentes non linéaires et sur les fonctions génératrices de ces suites* (Annales de Toulouse, 3e série, t. III, p. 78).

([2]) *Sur la réduction des substitutions linéaires* (Comptes rendus, t. CLV, 1912, p. 1482).

pouvoir transformer, à l'aide d'opérations rationnelles, la substitution donnée en la substitution canonique.

Pour établir l'existence de la forme canonique (C), on peut avoir recours à la théorie classique des *diviseurs élémentaires* et au théorème fondamental de Weierstrass (voir plus loin, chap. I, n° 3) ou bien chercher une démonstration directe qui permette en même temps de préciser la nature des opérations à faire pour effectuer la transformation.

Dans le Chapitre I, je donne sans démonstration ceux des résultats classiques de la théorie des diviseurs élémentaires qu'il m'a paru indispensable de rappeler; puis je montre comment on peut se servir de cette théorie pour obtenir la forme canonique (C). Les deux formes canoniques correspondent à deux modes différents de décomposition en facteurs du déterminant caractéristique $\Delta(S)$ : la forme de M. Jordan correspond à la décomposition de $\Delta(S)$ en *diviseurs élémentaires*, la forme nouvelle (C) à la décomposition de $\Delta(S)$ en *produits élémentaires* [1] : les polynômes $\Delta_1(S)$, $\Delta_2(S)$, $\Delta_3(S)$ ... sont en effet égaux aux produits élémentaires successifs.

Dans les Chapitres II et III, à peu près complètement indépendants du Chapitre I, j'abandonne la théorie des diviseurs élémentaires et je déduis la forme canonique (C) de la substitution donnée par une méthode qui ne fait pas appel au calcul du déterminant caractéristique et de ses mineurs. Dans cette méthode, le calcul des déterminants est remplacé en somme par un calcul d'itération de formes linéaires : pour obtenir le premier groupe canonique $C_1$, par exemple, on applique plusieurs fois de suite la substitution donnée à une forme linéaire $P_1$ à coefficients arbitraires et on obtient ainsi une suite de formes linéaires $P_1$, $P_2$, $P_3$ ... dont chacune est l'*itérée* (ou la *conséquente*) de la précédente; on s'arrête la première fois qu'on obtient une forme linéaire $P_{m+1}$ dépendant des précédentes. La relation

$$P_{m+1} = a_1 P_1 + a_2 P_2 + \ldots + a_m P_m \tag{2}$$

qu'on obtient alors nous donne les coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_m$ du premier groupe canonique $C_1$ qui contient précisément $m$ variables. Les groupes canoniques suivants $C_2$, $C_3$, ... s'obtiennent aussi par un procédé d'itération qui sera développé au Chapitre III.

Cette méthode introduit directement les groupes canoniques $C_1$, $C_2$, $C_3$, ... sans qu'on ait à calculer au préalable ni le déterminant caractéristique, ni ses mineurs. Il en résulte qu'*elle pourrait constituer une méthode d'introduction des diviseurs élémentaires dans la théorie des substitutions linéaires sans recours au calcul des déterminants* : on pourrait, en effet, définir les produits élémentaires comme étant les polynômes $\Delta_1(S)$, $\Delta_2(S)$, ... relatifs à la forme canonique (C); la méthode d'itération

[1] La définition des *produits élémentaires* sera rappelée plus loin (chap. I, n° 6).

que nous venons d'indiquer montre comment sont définis ces polynômes; on verra aussi (chap. II et III) qu'elle met en évidence le rôle d'invariants qu'ils jouent et les rapports qu'ils présentent avec les éléments géométriques (points, droites, multiplicités linéaires quelconques) invariants par la substitution. En se plaçant à ce point de vue, certaines propriétés des diviseurs élémentaires, qui n'ont pas été établies sans difficulté dans la théorie classique, se présenteraient tout naturellement comme conséquence des définitions. C'est ainsi que la méthode de calcul de $\Delta_1(S)$, $\Delta_2(S)$, ... montre immédiatement (chap. III, n° 2) que les degrés de ces polynômes vont en décroissant ou du moins ne croissent pas; si donc on décompose $\Delta_1(S)$, $\Delta_2(S)$, ... en facteurs linéaires, on voit que les exposants des diviseurs élémentaires successifs correspondant à un même facteur linéaire vont en décroissant ou du moins ne croissent pas, proposition qui a donné lieu à de nombreuses recherches [1]. Mais je ne développerai pas davantage ce point de vue, que je me borne à signaler ici.

Le Chapitre II est relatif au cas où la substitution réduite comprend un seul groupe canonique ou, pour employer le langage classique, au cas où $\Delta(S)$ comprend un seul produit élémentaire. J'ai développé plus particulièrement ce cas simple et j'ai appliqué la forme canonique (C) relative à ce cas à la résolution de quelques problèmes concernant les substitutions linéaires, par exemple à la détermination des multiplicités linéaires invariantes par une substitution linéaire donnée. Les mêmes problèmes auraient pu être traités lorsque la substitution comprend plusieurs groupes canoniques, cas qui fait l'objet du Chapitre III; mais je me suis borné dans ce Mémoire au cas le plus simple.

Chaque groupe canonique $C_i$, correspondant à un polynôme $\Delta_i(S)$, peut être décomposé en plusieurs groupes analogues que j'appelle des *groupes sous-canoniques* et qui correspondent à une décomposition de $\Delta_i(S)$ en facteurs premiers entre eux deux à deux. La décomposition de $\Delta_i(S)$ en facteurs *irréductibles* dans le domaine de rationalité des coefficients de la substitution conduit ainsi à une forme sous-canonique de $C_i$ comprenant autant de groupes sous-canoniques que de facteurs irréductibles. C'est ce que je montre dans les n$^{os}$ 11 et 12 du Chapitre II. En particulier, on peut déduire de là la forme canonique de M. Jordan en adjoignant au domaine de rationalité les racines de l'équation caractéristique (chap. II, n° 13).

La théorie des substitutions linéaires, de leurs transformations, de leur réduction rationnelle à des formes canoniques a donné lieu, depuis Weierstrass, à un grand nombre de travaux. J'aurai l'occasion d'en signaler quelques-uns au cours de ce travail; on trouvera une bibliographie plus complète dans l'*Encyclopédie des sciences*

(1) Voir à ce sujet l'article *Sur la théorie des formes et des invariants*, de M. J. DRACH, dans l'Encyclopédie des sciences mathématiques, tome I, (2$^e$ volume), page 395.

*mathématiques* (1). Bien que la méthode de réduction que je donne dans les Chapitres II et III soit, je crois, nouvelle, quelques points de contact avec certains travaux antérieurs n'ont pas pu manquer de se présenter au cours de ce travail. Voici ceux dont j'ai eu connaissance depuis la publication de ma première Note sur ce sujet :

M. Burnside, dans un travail (2) où il se propose comme but essentiel de montrer par quelles opérations on peut passer d'une substitution donnée à la forme canonique de M. Jordan, a été amené à considérer une substitution linéaire du type $C_1$, contenant un seul groupe canonique : mais il emploie seulement cette substitution comme moyen auxiliaire pour arriver à la forme canonique de M. Jordan, sans la considérer elle-même comme une forme canonique et il ne donne pas la forme canonique (C), formée de plusieurs groupes canoniques, qui convient au cas général. Le procédé d'itération d'une forme linéaire $P_1$, qui constitue le principe de la méthode de réduction que j'adopte, se trouve aussi employé dans ce Mémoire de M. Burnside. Il conduit à la relation (2) indiquée plus haut, qui relie un certain nombre de conséquentes successives $P_1, P_2, \ldots, P_{m+1}$. Mais l'auteur ne donne pas les relations analogues qui nous conduiront (chap. III) aux divers groupes canoniques et à la réduction complète de la substitution donnée à la forme (C).

A un autre point de vue, la relation (2) n'est pas autre chose que la relation donnée par Frobenius (3) entre les puissances successives $A^1, A^2, A^3, \ldots$ d'une substitution linéaire A. Mais au lieu d'établir cette relation entre les puissances de la substitution elle-même, nous l'établissons entre les résultats $P_1, P_2, \ldots$ des opérations $A, A^2, \ldots$ appliquées à la forme linéaire arbitraire $P_1$. Cette relation de Frobenius se trouve déjà sous une autre forme dans le célèbre Mémoire antérieur de Laguerre *Sur le calcul des systèmes linéaires* (4).

Le problème de la réduction d'une substitution linéaire à une forme canonique par des opérations rationnelles, ou plutôt le problème équivalent relatif aux faisceaux de formes bilinéaires, a été étudié par divers auteurs. Frobenius, Kronecker, Landsberg ont démontré *sous forme rationnelle* le théorème de Weierstrass, qui se trouve à la base de cette réduction (5), c'est-à-dire qu'ils ont démontré que deux faisceaux de formes bilinéaires ayant les mêmes diviseurs élémentaires peuvent être

---

(1) Voir l'article de M. J. Drach déjà signalé.

(2) W. Burnside, *On the reduction of a linear Substitution to its canonical Form.* (Proceedings of the London Mathematical Society, t. XXX, 1899, p. 180).

(3) Frobenius, *Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen* (Journal de Crelle, t. LXXXIV, 1878). En réalité, il s'agit dans ce Mémoire de la relation entre les puissances successives symboliques d'une forme bilinéaire; mais on en déduit immédiatement la relation entre les puissances successives d'une substitution linéaire.

(4) *Journal de l'École Polytechnique,* LXIIe cahier, 1867, et *Œuvres de Laguerre,* t. I, pp. 228-233.

(5) On trouvera plus loin (chap. I, n° 3) l'énoncé de ce théorème.

réduits l'un à l'autre par des transformations *rationnelles* par rapport aux coefficients des deux faisceaux.

M. Landsberg[1] donne pour une forme bilinéaire la forme réduite

$$x_1 y_2 + x_2 y_3 + \ldots + x_{n-1} y_n + x_n(c_1 y_n - c_2 y_{n-1} + c_3 y_{n-2} + \ldots \pm c_n y_1),$$

d'où l'on pourrait déduire immédiatement pour la substitution linéaire la forme réduite C :

$$X_1 = y_2, \quad X_2 = y_3, \quad \ldots\ldots, \quad X_{n-1} = y_n, \quad X_n = c_1 y_n - c_2 y_{n-1} + \ldots \pm c_n y_1.$$

Cette forme s'applique au cas où le déterminant caractéristique comprend un seul produit élémentaire (mineurs de $\Delta(S)$ premiers entre eux). M. Landsberg ne s'occupe pas explicitement des substitutions linéaires dans son Mémoire qui est consacré aux formes bilinéaires. De plus, la forme réduite (C), relative au cas général, n'est pas indiquée.

M. Nicoletti[2] a repris plus récemment le même problème de la réduction *rationnelle* d'une substitution linéaire à une forme canonique. Il traite le problème d'une façon très générale en supposant que les coefficients de la forme canonique doivent appartenir à un certain domaine de rationalité donné auquel appartiennent aussi les coefficients de la substitution donnée. Toutefois, la méthode de M. Nicoletti ne met pas explicitement en évidence parmi les diverses formes canoniques qu'on peut adopter, la forme (C) dont je m'occupe dans ce travail. D'autre part, cette méthode est entièrement différente de la mienne : elle est basée sur des identités assez compliquées entre les mineurs d'un déterminant et sur la résolution, déduite de ces identités, d'un système de congruences linéaires dont les modules sont certains diviseurs du déterminant caractéristique.

Je signalerai pour terminer le livre récent de M. Harold Hilton[3] sur la théorie des substitutions linéaires. Il contient un exposé de tous les résultats classiques avec quelques recherches de l'auteur. La théorie des diviseurs élémentaires (*Invariant-Factors*) y est développée très simplement. Dans ce livre, dont la publication est postérieure à celle de ma première Note, M. Harold Hilton indique la forme canonique (C) que j'ai proposée et qui fait l'objet de ce Mémoire[4] : en même temps

---

(1) G. Landsberg, *Ueber Fundamentalsysteme und bilineare Formen* (Journal de Crelle, t. CXVI, 1896, p. 342).

(2) O. Nicoletti, *Sulla riduzione a forma canonica di una sostituzione lineare omogenea e di un fascio di forme bilineari* (Annali di Matematica, série 3, t. XIV, p. 265).

(3) Harold Hilton, *Homogeneous linear Substitutions* (Oxford, at the Clarendon Press, 1914).

(4) *Loc. cit.*, chap. II, § 6, *A second canonical substitution.*

qu'il cite ma Note, M. Harold Hilton, d'après quelques références bibliographiques que j'avais eu l'occasion de lui communiquer, indique MM. Nicoletti, Landsberg et Burnside comme ayant fait usage de la forme canonique (C). En réalité, les travaux de ces auteurs ne touchent à la forme (C) que par les quelques points de contact que je viens de signaler, et cette forme ne se trouve indiquée explicitement dans aucun de ces travaux.

## CHAPITRE PREMIER

### Définitions et résultats classiques. — Formes canoniques des substitutions linéaires.

[**1**] *Formes réduites d'une substitution linéaire.* — Soit A une substitution linéaire, à déterminant non nul, faisant correspondre les variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$ aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Supposons qu'on applique aux variables $x_i$ d'une part et aux variables $X_i$ d'autre part, une même substitution linéaire T à déterminant non nul; de la sorte, aux variables $x_i$ correspondent des variables $y_i$, et aux variables $X_i$ des variables $Y_i$; les variables $Y_i$ sont liées aux variables $y_i$ par une substitution linéaire qui, avec les notations habituelles, est désignée par $T^{-1}AT$ et qu'on appelle, comme on sait, la *transformée de* A *par* T.

Les deux substitutions A et $T^{-1}AT$ sont dites *équivalentes* ou *semblables*. Si l'on considère $x_1, x_2, \ldots, x_n$ comme les coordonnées homogènes d'un point P de l'espace à $n-1$ dimensions et $X_1, X_2, \ldots, X_n$ comme les coordonnées d'un point P′ du même espace, la substitution A qui fait correspondre P′ à P est une homographie de l'espace à $n-1$ dimensions. La transformation T peut s'interpréter comme une transformation de coordonnées : $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont alors les anciennes coordonnées et $y_1, y_2, \ldots, y_n$ les nouvelles coordonnées du même point P. L'homographie qui était définie par la substitution A dans l'ancien système de coordonnées est définie dans le nouveau système de coordonnées par la substitution transformée $T^{-1}AT$ (¹). Nous supposerons toujours dans la suite qu'il s'agit d'une *homographie non dégénérée*, c'est-à-dire que *le déterminant de la substitution* A *n'est pas nul*.

On peut chercher à disposer des coefficients de la substitution T de façon que la transformée de A par T prenne une *forme réduite :* on appelle ainsi une substitution qui, en dehors de coefficients purement numériques, ne contient comme coefficients que des *invariants* de l'ensemble des substitutions $T^{-1}AT$ transformées de A, où A est donné et T arbitraire. Il est bien évident qu'aucune transformation linéaire ne pourra faire disparaître ces invariants qui par définition ont la même valeur pour la substitution A et pour toutes ses transformées $T^{-1}AT$, quelle que soit la substitution T : ce sont des nombres indépendants de système de coordonnées adopté pour définir l'homographie donnée.

---

(¹) Pour les substitutions linéaires considérées à ce point de vue, voir Pincherle et Amaldi, *Le operazioni distributive e le loro applicazioni all' Analisi* (Bologne, 1901, Zanichelli, édit.).

Remarquons que la forme réduite R n'est pas unique. Tout d'abord, si on la transforme par une substitution à coefficients numériques quelconque, on obtient une nouvelle forme R' qui, comme R, ne contiendra que des coefficients numériques et les invariants : R' est donc encore une forme réduite au même titre que R. En outre, si $I_1, I_2, \ldots, I_p$ constituent un système d'invariants indépendants, toute fonction de $I_1, I_2, \ldots, I_p$ est aussi un invariant et un système de $p$ fonctions indépendantes quelconques de $I_1, I_2, \ldots, I_p$ constitue, au même titre que $I_1, I_2, \ldots, I_p$ un système d'invariants indépendants. On dira que les deux systèmes sont équivalents. L'aspect de la forme réduite dépend donc du système des invariants indépendants qu'on adopte pour les faire figurer dans cette forme réduite.

[**2**] *Équation caractéristique. Diviseurs élémentaires.* — L'existence d'un système d'invariants et sa détermination résultent de la théorie des *diviseurs élémentaires*. Rappelons brièvement les définitions et les points fondamentaux de cette théorie ([1]).

Soit donnée la substitution linéaire

$$\text{(A)}\qquad \begin{aligned} X_1 &= a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n, \\ X_2 &= a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_n &= a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n. \end{aligned}$$

On appelle *équation caractéristique* ou *équation en* S de cette substitution, l'équation

$$\Delta(S) = \begin{vmatrix} a_{1,1} - S & a_{1,2} & \ldots\ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - S & \ldots\ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots\ldots & a_{n,n} - S \end{vmatrix} = 0.$$

Le premier membre $\Delta(S)$ s'appelle le *déterminant caractéristique* de la substitution.

Soient $S_1, S_2, \ldots, S_p$ les racines distinctes de l'équation et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ leurs ordres de multiplicité, de sorte que

$$\Delta(S) = (S - S_1)^{\alpha_1}(S - S_2)^{\alpha_2}\ldots(S - S_p)^{\alpha_p},$$

$S_1, S_2, \ldots, S_p$ étant différents. On démontre qu'on peut mettre chacun des facteurs de $\Delta(S)$, par exemple $(S - S_1)^{\alpha_1}$, sous la forme

$$(S - S_1)^{\alpha_1} = (S - S_1)^{e_0}(S - S_1)^{e_1}\ldots(S - S_1)^{e_p}$$

---

[1] On trouvera une exposition complète de cette théorie dans les ouvrages suivants :

L. SAUVAGE, *Théorie générale des systèmes d'équations différentielles linéaires et homogènes*, chap. II (Paris, Gauthier-Villars, édit. 1895 et *Annales de Toulouse*, t. VIII et IX).

HAROLD HILTON, *loc. cit.*, chap. II, *Invariant-factors* (p. 50).

Voir aussi l'article cité plus haut de M. J. DRACH, dans l'*Encycl. des Sciences mathém.*

d'un produit de puissances de $(S - S_1)$ dont les exposants $e_0, e_1, \ldots, e_p$, de somme $\alpha_1$, possèdent les propriétés suivantes : la plus haute puissance de $(S - S_1)$ qui divise $\Delta(S)$ est

$$(S - S_1)^{e_0+e_1+\cdots+e_p};$$

la plus haute puissance de $(S - S_1)$ qui divise à la fois tous les mineurs du premier ordre de $\Delta(S)$ est

$$(S - S_1)^{e_1+e_2+\cdots+e_p};$$

la plus haute puissance de $(S - S_1)$ qui divise à la fois tous les mineurs du second ordre est

$$(S - S_1)^{e_2+\cdots+e_p}$$

et ainsi de suite;

la plus haute puissance de $(S - S_1)$ qui divise à la fois tous les mineurs d'ordre $p$ est

$$(S - S_1)^{e_p};$$

enfin les mineurs d'ordre $p + 1$ ne sont pas tous divisibles par $S - S_1$.

Chacun des facteurs $(S - S_1)^{e_i}$ s'appelle un *diviseur élémentaire* de $\Delta(S)$ ou de la substitution linéaire, et si l'on décompose de même chacun des facteurs de $\Delta(S)$ on obtient la décomposition de $\Delta(S)$ en ses *diviseurs élémentaires*. Les exposants $e_0, e_1, \ldots, e_p$ des diviseurs élémentaires fournis par un même facteur $(S - S_1)^{\alpha_1}$ de $\Delta(S)$ vérifient les inégalités

$$e_0 \geqslant e_1 \geqslant e_2 \geqslant \cdots \geqslant e_p,$$

c'est-à-dire qu'ils forment une suite non croissante.

**[3]** *Invariants.* — L'importance des diviseurs élémentaires provient de la proposition suivante :

*Les substitutions linéaires* $T^{-1}AT$ *transformées de* A *par une substitution quelconque* T *ont les mêmes diviseurs élémentaires que* A.

*Réciproquement, si deux substitutions linéaires* A *et* B *ont les mêmes diviseurs élémentaires, la substitution* B *est la transformée de* A *par une certaine substitution* T.

Cette proposition est due à Weierstrass ou du moins elle résulte aisément d'une proposition analogue de Weierstrass relative aux faisceaux de formes bilinéaires (1).

---

(1) Pour la démonstration, voir par exemple :

Harold Hilton, *loc. cit.*, p. 52.

L. Sauvage, *loc. cit.*, pp. 33-50. Le théorème y est démontré pour les faisceaux de formes bilinéaires.

Sur l'identité des deux problèmes, le premier relatif aux formes bilinéaires, le second relatif aux substitutions linéaires, voir *Encyclopédie des Sc. mathém.*, *loc. cit.*, p. 477.

En disant que les diviseurs élémentaires sont les mêmes pour une substitution A et pour sa transformée B, on condense en un énoncé unique un double résultat : 1° les déterminants caractéristiques $\Delta(S)$, $\Delta_1(S)$ des substitutions A et B admettent les mêmes racines avec les mêmes degrés de multiplicité; 2° la *structure* de $\Delta(S)$ et de $\Delta_1(S)$ relativement à une racine quelconque $S_i$ est la même, c'est-à-dire que si la racine $S_i$ annule tous les mineurs d'ordre 1, 2, ... de $\Delta(S)$ jusqu'aux mineurs d'un certain ordre $p$, elle annule aussi les mineurs de même ordre de $\Delta_1(S)$, et le plus petit des ordres de multiplicité qu'a cette racine dans l'ensemble des mineurs d'un certain ordre est le même pour $\Delta(S)$ et pour $\Delta_1(S)$.

La proposition précédente nous fournit un système d'invariants de la substitution linéaire. On peut les distinguer en deux catégories :

1° *Les invariants numériques.* Ce sont les racines $S_1, S_2, \ldots, S_p$ de l'équation caractéristique.

2° *Les invariants de structure.* Ce sont les exposants des diviseurs élémentaires correspondant aux diverses racines.

Toute substitution B admettant les mêmes invariants numériques $S_1, S_2, \ldots, S_p$ que la substitution A et ayant la même structure, c'est à-dire les mêmes diviseurs élémentaires, est la transformée de A par une certaine substitution linéaire T : en outre, si les coefficients de cette substitution B ne dépendent que de $S_1, S_2, \ldots, S_p$, cette substitution B pourra être considérée comme une *forme réduite* ou *forme canonique* de la substitution A, ou si l'on préfère de l'homographie définie par cette substitution.

[**4**] *Forme canonique classique ou forme canonique de M. Jordan.* — La forme canonique classique généralement adoptée dans les questions d'Analyse où interviennent les substitutions linéaires, par exemple dans la théorie des équations différentielles linéaires [1], est la forme canonique de M. Jordan.

1° Supposons d'abord que la substitution donnée admette un seul diviseur élémentaire d'exposant $n$, de sorte que

$$\Delta(S) = (S - S_1)^n.$$

---

(1) Voir, par exemple, GOURSAT, *Analyse*, t. II, 2e édit., p. 449. La forme canonique adoptée à cet endroit est formée de plusieurs groupes analogues au suivant :

$$Y_1 = sy_1, \quad Y_2 = s(y_1 + y_2), \quad \ldots\ldots, \quad Y_p = s(y_{p-1} + y_p);$$

ce n'est pas tout à fait la forme de M. Jordan, mais elle s'y ramène par la transformation

$$y_i = s^i y'_i$$

Voir aussi, même ouvrage, p. 487.

La forme réduite de M. Jordan est alors la suivante :

$$(1)\qquad Y_1 = S_1 y_1, \quad Y_2 = y_1 + S_1 y_2, \quad \ldots\ldots, \quad Y_n = y_{n-1} + S_1 y_n.$$

2° Supposons que $\Delta(S)$ admette deux diviseurs élémentaires d'exposants $p, q$ et soit

$$\Delta(S) = (S - S_1)^p (S - S_2)^q$$

la décomposition de $\Delta(S)$ en ses diviseurs élémentaires; $S_1$ et $S_2$ peuvent être *distincts ou non*.

La forme réduite de M. Jordan est alors la substitution obtenue en écrivant l'un à la suite de l'autre deux systèmes pareils au système (1), l'un relatif à $S_1$, l'autre relatif à $S_2$.

Soit, par exemple :

$$\Delta(S) = (S - S_1)^4 (S - S_2)^3.$$

La forme réduite sera :

$$(2)\qquad \begin{cases} Y_1 = S_1 y_1, \quad Y_2 = y_1 + S_1 y_2, \quad Y_3 = y_2 + S_1 y_3, \quad Y_4 = y_3 + S_1 y_4, \\ Y_5 = S_2 y_5, \quad Y_6 = y_5 + S_2 y_6, \quad Y_7 = y_6 + S_2 y_7; \end{cases}$$

$S_1$ et $S_2$ peuvent être égaux ou différents. Dans les deux cas, on vérifie immédiatement en formant le déterminant caractéristique $\Delta(S)$ et ses mineurs que la substitution (2) admet les mêmes diviseurs élémentaires $(S - S_1)^4 (S - S_2)^3$ que la substitution proposée et que, par suite, c'est bien une transformée de la substitution donnée.

3° En général, soit

$$\Delta(S) = (S - S_1)^{e_1} (S - S_2)^{e_2} \ldots (S - S_p)^{e_p}$$

la décomposition de $\Delta(S)$ en ses diviseurs élémentaires. ($S_1, S_2, \ldots, S_p$ sont donc des nombres *distincts ou non*.) La forme réduite de M. Jordan est la substitution obtenue en écrivant l'un à la suite de l'autre $p$ systèmes analogues au système (1) relatifs respectivement aux $p$ diviseurs $(S - S_i)^{e_i}$ de $\Delta(S)$. Si l'on appelle, avec certains auteurs [1], *produit direct* de deux substitutions linéaires dépendant de variables différentes la substitution obtenue en écrivant l'une à la suite de l'autre les deux substitutions données, on peut dire que la forme réduite de M. Jordan est le produit direct des formes réduites, telles que (1), correspondant respectivement aux diviseurs élémentaires $(S - S_1)^{e_1}$, $(S - S_2)^{e_2}$, etc. On vérifie immédiatement que la substitution ainsi obtenue est bien une forme réduite de la substitution donnée en constatant qu'elle admet les mêmes diviseurs élémentaires que la substitution donnée, ainsi que le montre immédiatement la forme du déterminant caractéristique de cette substitution.

---

[1] Cf. Harold Hilton, *loc. cit.*, p. 26.

[**5**] *Réduction d'une substitution linéaire par des opérations rationnelles.* — La forme canonique de M. Jordan exige la connaissance des racines de l'équation caractéristique $\Delta(S)=0$. On ne peut donc pas l'obtenir en général par des opérations rationnelles en partant de la substitution donnée.

Supposons que les coefficients de la substitution donnée appartiennent à un certain domaine de rationalité R ne comprenant pas l'ensemble de tous les nombres réels ou complexes : les invariants $S_1, S_2, \ldots, S_p$ qui figurent dans la forme canonique de M. Jordan n'appartiennent pas en général au domaine R. On peut se proposer de n'introduire comme invariants dans la forme réduite que des fonctions des coefficients de la substitution donnée qui appartiennent au domaine R et d'obtenir en outre cette forme réduite par des transformations rationnelles dans le domaine R. C'est le problème de la *réduction rationnelle des substitutions linéaires à des formes canoniques*. Ce problème a donné lieu à divers travaux que nous avons signalés dans l'Introduction.

Nous allons montrer qu'on peut trouver une forme réduite dont les coefficients soient des fonctions rationnelles des coefficients de la substitution donnée.

A cet effet, nous rappellerons d'abord comment on peut trouver un système d'invariants indépendants *rationnels* par rapport aux coefficients de la substitution donnée.

[**6**] *Système d'invariants rationnels par rapport aux coefficients de la substitution donnée.* — La théorie classique des diviseurs élémentaires fournit un pareil système. Soit, par exemple, une substitution linéaire dont le déterminant $\Delta(S)$ décomposé en ses diviseurs élémentaires ait la forme

$$\Delta(S)=\left\{\begin{array}{l}(S-S_1)^3(S-S_2)^3(S-S_3)^2(S-S_4)(S-S_5),\\ (S-S_1)^2(S-S_2)\ (S-S_3)^2(S-S_4),\\ (S-S_1)^2(S-S_2)\ (S-S_3)^2,\\ (S-S_1)\ (S-S_2);\end{array}\right. \tag{3}$$

$S_1, S_2, S_3, S_4, S_5$ sont des nombres différents et les diviseurs élémentaires correspondant à une même racine ont été placés dans une même colonne dans l'ordre des exposants non-croissants. Dans ces conditions :

la plus haute puissance de $(S-S_1)$ qui divise $\Delta(S)$ est

$$(S-S_1)^{3+2+2+1},$$

la plus haute puissance de $(S-S_1)$ qui divise le p. g. c. d. des mineurs du premier ordre de $\Delta(S)$ est

$$(S-S_1)^{2+2+1},$$

la plus haute puissance de $(S-S_1)$ qui divise le p. g. c. d. des mineurs du second ordre de $\Delta(S)$ est

$$(S-S_1)^{2+1},$$

la plus haute puissance de $(S - S_1)$ qui divise le p. g. c. d. des mineurs du troisième ordre de $\Delta(S)$ est

$$(S - S_1)^{l};$$

enfin les mineurs du quatrième ordre de $\Delta(S)$ ne sont pas tous divisibles par

$$S - S_1.$$

On peut énoncer des résultats analogues pour les binômes

$$S - S_2, \; S - S_3, \; S - S_4, \; S - S_5.$$

Effectuons maintenant le produit des facteurs binômes situés dans une même ligne de $\Delta(S)$ mis sous la forme (3) et soient $\Delta_1(S)$, $\Delta_2(S)$, $\Delta_3(S)$, $\Delta_4(S)$ ces produits. Nous les appellerons les *produits élémentaires* [1] et l'on aura

$$\Delta(S) = \Delta_1(S) \, . \, \Delta_2(S) \, . \, \Delta_3(S) \, . \, \Delta_4(S),$$

c'est-à-dire que $\Delta(S)$ s'obtient en multipliant entre eux les produits élémentaires successifs.

Ces produits élémentaires peuvent être obtenus sans connaître les diviseurs élémentaires et en particulier sans connaître les racines de l'équation caractéristique. On peut les obtenir rationnellement à partir de la substitution donnée. Posons en effet :

$$\begin{aligned}
D_1(S) &= \Delta_1(S) \, . \, \Delta_2(S) \, . \, \Delta_3(S) \, . \, \Delta_4(S),\\
D_2(S) &= \phantom{\Delta_1(S) \, . \,} \Delta_2(S) \, . \, \Delta_3(S) \, . \, \Delta_4(S),\\
D_3(S) &= \phantom{\Delta_1(S) \, . \, \Delta_2(S) \, . \,} \Delta_3(S) \, . \, \Delta_4(S),\\
D_4(S) &= \phantom{\Delta_1(S) \, . \, \Delta_2(S) \, . \, \Delta_3(S) \, . \,} \Delta_4(S).
\end{aligned}$$

En décomposant chacun de ces polynômes en facteurs binômes, on voit que

$D_1(S)$ est égal au déterminant caractéristique $\Delta(S)$,

$D_2(S)$ est le p. g. c. d. des mineurs du premier ordre de $\Delta(S)$,

$D_3(S)$ est le p. g. c. d. des mineurs du second ordre de $\Delta(S)$,

$D_4(S)$ est le p. g. c. d. des mineurs du troisième ordre de $\Delta(S)$;

enfin les mineurs du quatrième ordre sont premiers entre eux dans leur ensemble.

Les polynômes $D_1(S)$, $D_2(S)$, $D_3(S)$, $D_4(S)$ peuvent être obtenus par de simples divisions algébriques. Ces polynômes une fois obtenus, on en déduit les produits élémentaires

$$\Delta_1(S) = \frac{D_1(S)}{D_2(S)}, \qquad \Delta_2(S) = \frac{D_2(S)}{D_3(S)}, \qquad \Delta_3(S) = \frac{D_3(S)}{D_4(S)}, \qquad \Delta_4(S) = D_4(S).$$

---

[1] Cette dénomination est celle que M. J. DRACH propose d'adopter dans son article de l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques* (I, 2, p. 394), au lieu du terme classique de premier, second, troisième, etc., diviseur élémentaire qui prête à confusion, les mots *diviseur élémentaire* ayant déjà reçu un autre sens.

Remarquons que d'après la formule (3), chacun des produits élémentaires est divisible par le produit suivant.

Lorsque les mineurs du premier ordre sont premiers entre eux dans leur ensemble, il y a un seul produit élémentaire égal à $\Delta(S)$ lui-même.

La décomposition de $\Delta(S)$ en ses produits élémentaires fournit un système d'invariants qui présente l'avantage d'être obtenu rationnellement à partir de la substitution donnée. Ce système est équivalent au système d'invariants donné au numéro 3; comme lui, il comprend deux catégories d'invariants :

1° *Les invariants numériques*. Ce sont les coefficients des produits élémentaires $\Delta_1(S)$, $\Delta_2(S)$, ....

2° *Les invariants de structure*. Ce sont les degrés de ces produits élémentaires $\Delta_1(S)$, $\Delta_2(S)$, ....

En introduisant ces nouveaux invariants, la proposition de Weierstrass énoncée au n° 3 prend la nouvelle forme suivante :

*Pour qu'une substitution linéaire* B *soit transformée d'une autre substitution linéaire par une certaine substitution* T, *il faut et il suffit que* A *et* B *aient les mêmes produits élémentaires.*

[**7**] *Nouvelle forme canonique* (C) *contenant les invariants rationnels définis au numéro précédent.* — La nouvelle forme canonique (C) dont je me propose d'établir l'existence s'obtient de la façon suivante :

1° Supposons d'abord que les mineurs du premier ordre du déterminant caractéristique de la substitution donnée soient premiers entre eux dans leur ensemble, autrement dit qu'aucune des racines de l'équation en S n'annule à la fois tous les mineurs et soit

$$S^n - a_n S^{n-1} - a_{n-1} S^{n-2} - \dots - a_3 S^2 - a_2 S - a_1 = 0$$

l'équation caractéristique.

On peut alors transformer la substitution donnée de façon à lui donner la forme canonique suivante :

$$(4) \qquad Y_1 = y_2, \quad Y_2 = y_3, \quad \dots\dots, \quad Y_{n-1} = y_n, \quad Y_n = a_1 y_1 + a_2 y_2 + \dots + a_n y_n.$$

On peut le démontrer à l'aide du théorème fondamental de Weierstrass, pris sous la forme rappelée à la fin du numéro précédent. Il suffit de former le déterminant caractéristique de la substitution (4). Ce déterminant est :

$$\begin{vmatrix} -S & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -S & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -S & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -S & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & \dots & a_{n-1} & a_n - S \end{vmatrix}$$

Si l'on ajoute aux éléments de la première colonne ceux des colonnes suivantes multipliés respectivement par S, $S^2$, ..., $S^{n-1}$, ce qui ne change pas les produits élémentaires, il devient

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -S & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ f(S) & a_2 & a_3 & \dots & \dots & a_n - S \end{vmatrix}$$

en posant

$$f(S) = a_1 + a_2 S + \dots + a_n S^{n-1} - S^n$$

et il est égal au signe près à $f(S)$, c'est-à-dire au premier membre de l'équation caractéristique. D'autre part, parmi les mineurs du déterminant, il y a un déterminant égal à l'unité, celui obtenu en supprimant la première colonne et la dernière ligne. Donc les mineurs sont premiers entre eux dans leur ensemble. Par suite, la substitution (4) est bien une forme réduite de la substitution donnée.

Dans cette forme réduite figurent les fonctions symétriques des racines de l'équation en S au lieu des racines qui figurent dans la forme réduite de M. Jordan. Elle s'applique, *quel que soit l'ordre de multiplicité des racines*, pourvu qu'aucune racine n'annule à la fois tous les mineurs du premier ordre du déterminant caractéristique.

2° Supposons maintenant que le déterminant caractéristique soit décomposable en plusieurs produits élémentaires (n° 6) et soit par exemple

$$\Delta_1(S)\,\Delta_2(S)\,\Delta_3(S) = 0$$

l'équation caractéristique dont le premier membre est le produit des trois produits élémentaires suivants [1] :

$$\begin{aligned} \Delta_1(S) &= S^m - a_m S^{m-1} - a_{m-1} S^{m-2} - \dots - a_2 S - a_1, \\ \Delta_2(S) &= S^p - b_p S^{p-1} - b_{p-1} S^{p-2} - \dots - b_2 S - b_1, \\ \Delta_3(S) &= S^q - c_q S^{q-1} - c_{q-1} S^{q-2} - \dots - c_2 S - c_1. \end{aligned}$$

Le premier facteur $\Delta_1(S)$ est divisible (n° 6) par le second $\Delta_2(S)$ et le second facteur $\Delta_2(S)$ est divisible par le troisième $\Delta_3(S)$.

---

[1] Les polynômes $\Delta_1(S)$, $\Delta_2(S)$, $\Delta_3(S)$ définis comme p. g. c. d. de certains polynômes ne sont définis qu'à un facteur constant près. On peut donc toujours supposer, comme nous le faisons, que le coefficient du terme de plus haut degré de chacun de ces polynômes est $+1$. Alors le déterminant caractéristique est égal à $\pm\Delta_1(S)\,\Delta_2(S)\,\Delta_3(S)$ suivant que la substitution a un nombre pair ou un nombre impair de variables.

On peut alors transformer la substitution donnée en une substitution obtenue en juxtaposant trois substitutions analogues à (4), les substitutions partielles étant formées respectivement avec les facteurs $\Delta_1(S)$, $\Delta_2(S)$, $\Delta_3(S)$. On obtient ainsi la forme canonique

$$(5)\quad \begin{cases} X_1 = x_2, & X_2 = x_3, & \ldots.., & X_{m-1} = x_m, & X_m = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_mx_m, \\ Y_1 = y_2, & Y_2 = y_3, & \ldots.., & Y_{p-1} = y_p, & Y_p = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_py_p, \\ Z_1 = z_2, & Z_2 = z_3, & \ldots.., & Z_{q-1} = z_q, & Z_q = c_1z_1 + c_2z_2 + \ldots + c_qz_q, \end{cases}$$

dans laquelle nous avons désigné certaines des variables en nombre $m$ par les lettres $x$, certaines autres variables en nombre $p$ par les lettres $y$ et enfin les $q$ autres variables par les lettres $z$. Le nombre total des variables est $n = m + p + q$.

La forme canonique (5) est le *produit direct* (1) de plusieurs substitutions analogues à (4) formées à partir de déterminants caractéristiques respectivement égaux à $\Delta_1(S)$, $\Delta_2(S)$, $\Delta_3(S)$.

Le déterminant caractéristique de la substitution (5) est du type

$$\begin{vmatrix} \Delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_3 \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire que les éléments situés dans les cases notées $\Delta_1$, $\Delta_2$, $\Delta_3$ forment trois déterminants analogues au déterminant caractéristique de la substitution (4) et égaux au signe près à $\Delta_1(S)$, $\Delta_2(S)$, $\Delta_3(S)$, et que tous les autres éléments situés dans les cases notées zéro sont nuls. Un raisonnement classique et facile (2) permet de déduire de là et du fait que $\Delta_1$ est divisible par $\Delta_2$ et $\Delta_2$ par $\Delta_3$ que le déterminant admet pour produits élémentaires successifs $\Delta_1(S)$, $\Delta_2(S)$, $\Delta_3(S)$.

Puisque la substitution donnée admet les mêmes produits élémentaires que la substitution (5), on peut la transformer en la substitution (5), et, par suite, cette dernière est bien une forme canonique convenant au cas général.

Nous appellerons cette forme canonique la forme canonique (C) pour la distinguer de la forme canonique classique.

D'après les travaux signalés dans l'introduction relativement à la démonstration *sous forme rationnelle* du théorème de Weierstrass, on peut passer par des opérations rationnelles de la substitution donnée aux substitutions canoniques (4) ou (5).

(1) Ce terme a été défini au n° 4.

(2) Voir, par exemple, HAROLD HILTON, *loc. cit.*, chap. II, § 4. — L. SAUVAGE, *loc. cit.*, n$^{\text{os}}$ 53 et 67.

Les deux Chapitres suivants contiennent une méthode pour effectuer cette transformation, méthode qui établira d'une nouvelle façon la légitimité des formes canoniques (4) et (5).

*Exemple.* — Soit une substitution à quatre variables. La forme canonique (C) est l'une des cinq substitutions suivantes :

$$\text{(I)}\qquad X=y,\qquad Y=z,\qquad Z=t,\qquad T=ax+by+cz+dt.$$

$$\text{(II)}\qquad \begin{cases} X=y, & Y=z, \quad Z=ax+by+cz. \\ T=dt. \end{cases} \qquad \begin{cases} S^3-cS^2-bs-a \\ \text{divisible par } S-d. \end{cases}$$

$$\text{(III)}\qquad \begin{cases} X=y, & Y=ax+by. \\ Z=t, & T=az+bt. \end{cases}$$

$$\text{(IV)}\qquad \begin{cases} X=y, & Y=ax+by. \\ Z=cz. \\ T=ct. \end{cases} \qquad \begin{cases} S^2-bS-a \\ \text{divisible par } S-c. \end{cases}$$

$$\text{(V)}\qquad \begin{cases} X=ax. \\ Y=ay. \\ Z=az. \\ T=at. \end{cases}$$

La première comprend un seul groupe canonique, la deuxième et la troisième comprennent deux groupes canoniques, la quatrième comprend trois groupes canoniques, la cinquième comprend quatre groupes canoniques. Le nombre des groupes canoniques est égal dans chaque cas au nombre des produits élémentaires.

[**8**] *Points doubles ou pôles de la substitution donnée. L'équation caractéristique et les diviseurs élémentaires au point de vue géométrique.* — L'équation caractéristique s'introduit tout naturellement dans l'étude des substitutions linéaires lorsqu'on considère une pareille substitution comme une homographie d'un espace linéaire à $(n-1)$ dimensions défini dans un système de coordonnées homogènes $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ainsi qu'il a été expliqué au n° 1. Il n'y a évidemment dans cette façon d'envisager les substitutions linéaires qu'un langage nouveau, mais ce langage géométrique est commode lorsqu'il s'agit de propriétés invariantes communes à toutes les transformées $T^{-1}AT$ d'une même substitution A. Les substitutions linéaires ont été étudiées à ce point de vue surtout par quelques géomètres italiens; ils ont utilisé les résultats de la théorie des diviseurs élémentaires pour classer et étudier les homographies

en même temps qu'ils ont résolu ainsi sous forme géométrique certains problèmes de la théorie des substitutions linéaires [1].

Nous utiliserons plus loin quelques-unes de ces notions géométriques relatives aux substitutions linéaires et dans ce but nous rappellerons ici quelques définitions et quelques résultats.

On appelle *point double* ou *pôle* de l'homographie un point qui coïncide avec son homologue.

Supposons l'homographie définie par les équations (A) du n° 2. Les coordonnées homogènes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ d'un pôle sont des nombres non tous nuls qui doivent vérifier les équations

$$\frac{a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n}{x_1} = \frac{a_{2,1}x_1 + \ldots + a_{2,n}x_n}{x_2} = \ldots\ldots$$
$$\frac{a_{n,1}x_1 + \ldots + a_{n,n}x_n}{x_n} = \mathrm{S},$$

en désignant par S la valeur commune des rapports précédents.

Ce système s'écrit :

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{llll} (a_{1,1} - \mathrm{S})x_1 + & a_{1,2}x_2 + \ldots + & a_{1,n}x_n = 0, \\ a_{2,1}x_1 + & (a_{2,2} - \mathrm{S})x_2 + \ldots + & a_{2,n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1}x_1 + & a_{n,2}x_2 + \ldots + & (a_{n,n} - \mathrm{S})x_n = 0. \end{array}\right.$$

En ordonnant ces équations et en écrivant qu'elles admettent un système de solutions formé de nombres non tous nuls, on obtient l'équation caractéristique

$$\Delta(\mathrm{S}) = 0.$$

Supposons $\Delta(\mathrm{S})$ décomposé en ses produits élémentaires et soit

$$\Delta(\mathrm{S}) = \Delta_1(\mathrm{S})\,\Delta_2(\mathrm{S}) \ldots \Delta_k(\mathrm{S}).$$

1° Soit S une racine annulant $\Delta_1(\mathrm{S})$, mais n'annulant pas les produits suivants; autrement dit, soit S une racine n'annulant pas à la fois tous les mineurs de $\Delta(\mathrm{S})$; si on remplace S par cette racine dans le système (6), le tableau des coefficients de ce système est de rang $n$. Donc à cette racine correspond un pôle et un seul.

---

[1] Voir en particulier :

BERTINI, *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi* (Pise, Spœrri, édit. 1907), ouvrage didactique contenant les résultats essentiels d'un grand nombre de Mémoires.

Parmi les Mémoires originaux, nous citerons les suivants :

SEGRE, *Sulla teoria e sulla classificazione delle omografie in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni* (série 3, t. XIX des *Memorie Lincei*).

PREDELLA, *Le omografie in uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni* (Annali di Matematica, série 2, t. XVII, 1889-90).

Supposons que toutes les racines remplissent cette condition, autrement dit que les mineurs du déterminant soient premiers entre eux dans leur ensemble. Aux $n$ racines distinctes ou confondues de l'équation $\Delta(S) = 0$ correspondent alors $n$ pôles distincts ou confondus. Dans le cas actuel, *le nombre des pôles est donc fini.*

2° Soit S une racine annulant les $r$ premiers produits élémentaires $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_r$ sans annuler $\Delta_{r+1}$. La racine S annule donc le déterminant $\Delta(S)$ et tous ses mineurs de degré $n-1, n-2, \ldots,$ jusqu'aux mineurs de degré $n-r+1$ et elle n'annule pas tous les mineurs de degré $n-r$. Le tableau des coefficients du système (6) est de rang $n-r$. A cette racine correspondent une infinité de pôles dont les coordonnées homogènes sont des fonctions linéaires et homogènes de $r$ paramètres arbitraires : ces pôles constituent un espace à $r-1$ dimensions contenu dans l'espace donné. Il y a donc un espace à $r-1$ dimensions, dit *espace fondamental de l'homographie*, dont chaque point est un point double de l'homographie. Aux diverses racines annulant à la fois $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_r$ sans annuler $\Delta_{r+1}$ correspondent divers espaces fondamentaux : mais une conclusion précise au sujet du nombre de ces espaces ne peut être tirée de là qu'en introduisant les ordres respectifs de multiplicité de la racine S considérée comme appartenant aux polynômes $\Delta_1(S), \Delta_2(S), \ldots, \Delta_r(S)$ (¹). Nous n'utiliserons d'ailleurs pas dans la suite ces résultats sous leur forme géométrique et on pourrait étudier d'une façon plus aisée ces espaces fondamentaux sur la forme réduite de l'homographie que nous obtiendrons au Chapitre III.

[**9**] *Multiplicités linéaires invariantes par la substitution donnée.* — De même qu'on a cherché au numéro précédent les points invariants ou points doubles de l'homographie donnée, de même on peut se proposer de chercher les droites invariantes, les plans invariants ou, pour employer un langage plus correct lorsqu'il y a plus de quatre variables, les multiplicités linéaires à $k$ paramètres ($k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$) invariantes par la substitution donnée.

Nous ne ferons pas ici la recherche systématique de ces multiplicités, car la solution de ce problème se présente d'une façon plus simple lorsque la substitution est prise sous la forme réduite (voir par exemple chapitre II, n° 8). Mais nous démontrerons néanmoins la proposition suivante que nous aurons à utiliser au début du chapitre suivant.

Théorème. — *Toute multiplicité linéaire invariante par une substitution linéaire donnée contient au moins l'un des pôles de la substitution.*

Soit M une multiplicité linéaire à $k$ paramètres ($k < n$), invariante par la substitution (ou homographie) donnée A. Les coordonnées homogènes d'un point quel-

(¹) C'est précisément sur la valeur de ces ordres de multiplicité que M. Predella base sa classification des homographies dans le Mémoire cité plus haut. Nous renvoyons le lecteur à ce Mémoire pour une discussion complète.

conque P de cette multiplicité pourront s'exprimer par des fonctions linéaires et homogènes de $k+1$ paramètres $u_1, u_2, \ldots, u_{k+1}$ (coordonnées paramétriques du point P) :

$$x_i = \alpha_{i,1} u_1 + \alpha_{i,2} u_2 + \ldots + \alpha_{i,k+1} u_{k+1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

L'homologue P' de P dans l'homographie est par hypothèse un nouveau point de la même multiplicité M et il a par suite des coordonnées de la forme

$$X_i = \alpha_{i,1} U_1 + \alpha_{i,2} U_2 + \ldots + \alpha_{i,k+1} U_{k+1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Les coordonnées paramétriques $U_1, U_2, \ldots, U_{k+1}$ du point P' sont des fonctions linéaires et homogènes des coordonnées $u_1, u_2, \ldots, u_{k+1}$ du point P, soit

$$U_i = \lambda_{i,1} u_1 + \lambda_{i,2} u_2 + \ldots + \lambda_{i,k+1} u_{k+1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k+1)$$

avec un déterminant des $\lambda_{i,j}$ différent de zéro.

Cherchons un point P de cette multiplicité M confondu avec son homologue P'. On devra avoir

$$\frac{U_1}{u_1} = \frac{U_2}{u_2} \ldots = \frac{U_{k+1}}{u_{k+1}} = S,$$

d'où pour déterminer S l'équation

$$\delta(S) = \begin{vmatrix} \lambda_{1,1} - S & \lambda_{12} & \lambda_{1,k+1} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} - S & \lambda_{2,k+1} \\ & \vdots & \\ \lambda_{k+1,1} & \lambda_{k+1,2} & \lambda_{k+1,k+1} - S \end{vmatrix} = 0.$$

Il existe au moins un nombre $S_1$ vérifiant cette équation (le cas où il y en aurait un seul est celui où cette équation aurait ses racines égales). A ce nombre $S_1$ correspond au moins un point P confondu avec son homologue P' et l'on aura pour les coordonnées paramétriques de ce point

$$U_1 = S_1 u_1, \qquad U_2 = S_1 u_2, \qquad \ldots\ldots, \qquad U_{k+1} = S_1 u_{k+1},$$

d'où l'on déduit pour les coordonnées homogènes $x_i$ les relations

$$X_i = S_1 x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

qui prouvent que le point P ainsi obtenu est un pôle correspondant à la racine $S_1$ de l'équation caractéristique $\Delta(S) = 0$ de la substitution [1]. Ainsi la multiplicité M contient au moins l'un des pôles de la substitution.

---

[1] On pourrait aller plus loin et démontrer que $\Delta(S)$ est divisible par $\delta(S)$. Mais cette proposition sera démontrée sous une autre forme, équivalente et plus simple, au chap. II, n° 8 et au chap. III, n° 3.

## CHAPITRE II

# Forme canonique (C) des substitutions linéaires admettant un nombre fini de pôles.

[**1**] *Réduction d'une substitution linéaire à la forme canonique* (C) *par itération dans le cas où la substitution admet un nombre fini de pôles.*

Soit donnée la substitution linéaire

$$(1) \qquad \begin{cases} X_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, \\ X_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_1 + \dots + a_{2n}x_n, \\ \vdots \\ X_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

dont nous supposons le déterminant différent de zéro.

Soit $\Delta(S)$ le déterminant caractéristique (chap. I, n° 2) de la substitution. Nous supposerons dans tout ce chapitre que les mineurs du premier ordre de ce déterminant caractéristique sont des polynômes en S *premiers* entre eux dans leur ensemble. D'après ce qui a été vu au chapitre précédent (n° 8) relativement aux pôles, cette hypothèse est équivalente à celle-ci : *les pôles de la substitution, distincts ou confondus, sont en nombre fini* (1). Il résulte en effet de la discussion faite (chap. I, n° 8) que le seul cas où il puisse y avoir une infinité de pôles est celui où les mineurs de $\Delta(S)$ deviennent tous nuls lorsqu'on y remplace S par certaines des racines de l'équation caractéristique.

Posons alors

$$y_1 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n,$$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ *étant des nombres arbitraires, choisis seulement de façon que le plan qui a pour équation*

$$P_1 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0$$

*ne contienne aucun des pôles de la substitution.*

Ceci est possible, parce que les pôles sont des points isolés (chap. I, n° 8) (2).

---

(1) Ainsi qu'on le verra plus loin (n° 3), ce fait pourra être constaté par la méthode même de réduction que nous emploierons sans avoir à calculer les mineurs du déterminant $\Delta(S)$ ni ce déterminant lui-même.

(2) Si, au contraire, il y avait une multiplicité M de pôles, *tout plan* P contiendrait des pôles qui seraient les points communs au plan P et à la multiplicité M.

Désignons par $P_1$ le premier membre de l'équation du plan précédent, ainsi que le plan lui-même. Nous appellerons *conséquent* ou *itéré* de ce plan le plan $P_2$ transformé de $P_1$ par la substitution (1). Il a pour équation $P_2 = 0$, en posant :

$$\begin{aligned} P_2 &= \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_n X_n \\ &= \alpha_1(a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n) + \alpha_2(a_{2,1}x_1 + \dots + a_{2,n}x_n) + \dots \\ &\qquad + \alpha_n(a_{n,1}x_1 + \dots + a_{n,n}x_n). \end{aligned}$$

Nous désignerons de même en général par $P_i$ le conséquent de $P_{i-1}$, de sorte que $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ désigneront les conséquentes ou itérées successives de la forme linéaire $P_1$.

Transformons alors la substitution linéaire donnée par les formules de transformation

$$(2) \qquad y_1 = P_1, \qquad y_2 = P_2, \qquad \dots\dots, \qquad y_n = P_n,$$

de façon à substituer les variables $y_1, y_2, \dots, y_n$ aux variables $x_1, x_2, \dots, x_n$. Il est essentiel tout d'abord d'établir que c'est bien là une transformation de coordonnées, c'est-à-dire que les formes $P_1, P_2, \dots, P_n$ sont indépendantes.

Nous démontrerons d'une façon plus générale que les formes $P_1, P_2, \dots, P_r$ sont indépendantes si $r$ est inférieur à $n$. Il suffit de prouver que si la proposition est vraie pour $r = i$, elle subsiste pour $r = i + 1$. Supposons donc les formes $P_1, P_2, \dots, P_i$ indépendantes. Si $P_1, P_2 \dots, P_{i+1}$ n'étaient pas indépendantes, il existerait des constantes $A_1, A_2, \dots, A_{i+1}$ non toutes nulles donnant lieu à l'identité

$$A_1 P_1 + A_2 P_2 + \dots + A_i P_i + A_{i+1} P_{i+1} \equiv 0$$

et $A_{i+1}$ serait différent de zéro, car sinon les formes $P_1, P_2, \dots, P_i$ ne seraient pas indépendantes. Il résulte de cette identité que le système d'équations

$$P_1 = 0, \qquad P_2 = 0, \qquad \dots\dots, \qquad P_i = 0$$

serait équivalent au système

$$P_2 = 0, \qquad P_3 = 0, \qquad \dots\dots, \qquad P_{i+1} = 0.$$

Or, le second système est le *conséquent* du premier. La multiplicité définie par les équations

$$P_1 = 0, \qquad P_2 = 0, \qquad \dots\dots, \qquad P_i = 0.$$

serait donc une multiplicité invariante par la substitution (1). Mais toute multiplicité linéaire invariante par une substitution linéaire contient au moins l'un des pôles de la substitution (chap. I, n° 9). Donc le plan $P_1 = 0$ contiendrait un pôle de la substitution, contrairement à l'hypothèse.

Ainsi les formes linéaires $P_1, P_2, \ldots, P_n$ sont indépendantes. En langage géométrique, on peut prendre les plans $P_1, P_2, \ldots, P_n$ comme faces d'un polyèdre de référence.

Transformons maintenant la substitution (1) par les formules (2). Au conséquent $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ du point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, les formules (2) font correspondre le conséquent $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ de $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ de sorte qu'on aura :

$$Y_1 = P_2, \qquad Y_2 = P_3, \qquad \ldots\ldots, \qquad Y_n = P_{n+1}. \tag{3}$$

Mais les formes $P_1, P_2, \ldots, P_n, P_{n+1}$ sont dépendantes, puisqu'elles sont au nombre de $n+1$ et qu'il n'y a que $n$ variables. On aura donc entre ces formes linéaires une identité de la forme

$$P_{n+1} \equiv a_1 P_1 + a_2 P_2 + \ldots + a_n P_n.$$

La comparaison des formules (2) et (3) nous fournit alors la substitution linéaire qui lie les $y_i$ aux $Y_i$, c'est-à-dire la substitution transformée de la substitution (1) par la substitution (2). C'est la substitution suivante :

$$Y_1 = y_2, \quad Y_2 = y_3, \quad \ldots\ldots, \quad Y_{n-1} = y_n, \quad Y_n = a_1 y_1 + a_2 y_2 + \ldots + a_n y_n. \tag{4}$$

Ainsi se trouve établie par un procédé direct, indépendant de la théorie des diviseurs élémentaires, la forme canonique (C) posée au Chapitre I [n° 7, équations (4)].

Le coefficient $a_1$ n'est pas nul, car sinon on aurait

$$P_n \equiv a_2 P_1 + \ldots + a_n P_{n-1}$$

et les formes $P_1, P_2, \ldots, P_n$ seraient dépendantes [1].

**[2]** *Détermination de toutes les transformations qui ramènent la substitution* (1) *à sa forme canonique* (4). — Toute transformation linéaire transformant la substitution (1) en la substitution canonique (4) est nécessairement de la forme (2).

En effet, supposons $y_1$ lié à $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par la formule

$$y_1 = P_1.$$

$Y_1$ sera l'itéré de $P_1$, il sera donc égal à $P_2$; mais la première des équations (4) montre alors que l'on a

$$y_2 = Y_1 = P_2,$$

et ainsi de suite. On aura donc

$$y_1 = P_1, \qquad y_2 = P_2, \qquad \ldots\ldots, \qquad y_n = P_n,$$

[1] Ainsi que nous l'avons dit dans l'Introduction, le procédé d'itération employé ici pour ramener la substitution (1) à la forme (4) a été employé par M. Burnside.

$P_2, P_3, \ldots, P_n$ étant les conséquents successifs de $P_1$, ce qui démontre la proposition.

Les transformations (2) qui ramènent la substitution (1) à sa forme réduite (4) dépendent ainsi de $n$ paramètres arbitraires qui sont les coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ de $P_1$ (1).

Montrons maintenant que, *quelles que soient les valeurs de ces coefficients arbitraires* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, *on obtient la même forme réduite* (4) *avec les mêmes coefficients* $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Soit en effet $Q_1$ un plan différent de $P_1$ et assujetti seulement comme $P_1$ à ne contenir aucun pôle de la substitution; soient aussi $Q_2, Q_3, \ldots$ les conséquents de $Q_1$; les formes $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ sont indépendantes. Puisque $P_1, P_2, \ldots, P_n$ sont des formes indépendantes, tout polynôme $Q_1$ homogène en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ peut être exprimé en fonction linéaire de $P_1, P_2, \ldots, P_n$ et l'on a

$$Q_1 = \beta_1 P_1 + \beta_2 P_2 + \ldots + \beta_n P_n,$$

d'où par itération

$$\begin{aligned} Q_2 &= \beta_1 P_2 + \beta_2 P_3 + \ldots + \beta_n P_{n+1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Q_{n+1} &= \beta_1 P_{n+1} + \beta_2 P_{n+2} + \ldots + \beta_n P_{2n}. \end{aligned}$$

Mais les formes linéaires $P_1, P_2, \ldots, P_{n+1}$ sont liées par l'identité

$$P_{n+1} = a_1 P_1 + a_2 P_2 + \ldots + a_n P_n,$$

d'où l'on déduit, quel que soit $j$ :

$$P_{n+j} = a_1 P_j + a_2 P_{j+1} + \ldots + a_n P_{j+n-1}.$$

En ajoutant membre à membre les relations qui donnent $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n+1}$ multipliées respectivement par $a_1, a_2, \ldots, a_n, -1$ et en tenant compte des identités précédentes, on voit que l'on a, quels que soient $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, l'identité

$$Q_{n+1} \equiv a_1 Q_1 + a_2 Q_2 + \ldots + a_n Q_n,$$

et cette identité conduit, en partant de $Q_1$, à la même forme canonique (4) qu'on avait obtenue en partant de $P_1$.

---

(1) Ces coefficients sont seulement assujettis à vérifier les inégalités qui expriment que le plan $P_1$ ne contient aucun des pôles de la substitution, et c'est seulement lorsque ces inégalités sont satisfaites que les formes $P_1, P_2, \ldots, P_n$ sont indépendantes. En égalant à zéro le déterminant de ce système de formes, on obtiendra une équation de degré $n$ en $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ qui exprimera que le plan

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$$

contient l'un des pôles de la substitution. Si l'on considère $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ comme les coordonnées tangentielles du plan, l'équation ainsi obtenue est donc l'équation tangentielle du système des points doubles de la substitution.

[3] *Les coefficients* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *de la forme canonique* (C) *sont des invariants.* — Le mot invariant est pris au sens que nous avons précisé au chapitre I (n°. 1). Il s'agit donc de démontrer :

1° Qu'étant donnée la substitution A qui admet la forme canonique (C) avec les coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_n$, la transformée de A par une transformation linéaire quelconque T peut être ramenée à la même forme canonique (C).

2° Que deux substitutions A et B qui peuvent être ramenées l'une et l'autre à la même forme canonique (C) peuvent être transformées l'une en l'autre.

Or cela résulte de ce que la substitution canonique (C) est une transformée particulière de A et de ce que deux substitutions transformées d'une même troisième peuvent être transformées l'une en l'autre [1].

Nous avons ainsi obtenu la forme réduite (4) et le système d'invariants $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sans faire appel à la théorie des diviseurs élémentaires. La démonstration, qui sera complétée au chapitre suivant par l'étude du cas où il y a une infinité de pôles, montre que l'on passe de la substitution donnée à la substitution canonique par des *opérations rationnelles* par rapport aux coefficients de la substitution donnée.

L'équation caractéristique n'intervient pas directement dans la méthode précédente. Pour être sûr qu'on est dans le cas qui fait l'objet de ce chapitre (mineurs du déterminant caractéristique premiers entre eux), il suffit en effet de constater que la substitution admet un nombre fini de pôles et on le reconnaîtra, sans avoir à former le déterminant caractéristique, au fait que les formes $P_1, P_2, \ldots, P_n$, conséquentes successives d'une forme à coefficients *arbitraires*, sont indépendantes.

En effet, nous avons vu au numéro 1 que si les mineurs du déterminant caractéristique sont premiers entre eux, ou, ce qui revient au même, si les pôles de la substitution sont en nombre fini, les formes $P_1, P_2, \ldots, P_n$ obtenues en partant d'un plan $P_1$ arbitraire, assujetti seulement à ne passer par aucun pôle, sont indépendantes.

Démontrons maintenant la réciproque : si les pôles de la substitution sont en nombre infini, les formes $P_1, P_2, \ldots, P_n$ sont dépendantes quel que soit le plan $P_1$. Dans ce cas, les pôles forment une multiplicité linéaire définie par des équations

---

[1] Rappelons la démonstration. Soient A et B deux substitutions transformables l'une et l'autre en la substitution C, la première à l'aide de la transformation S, la deuxième à l'aide de la transformation $\Sigma$. On a

$$S^{-1}AS = \Sigma^{-1}B\Sigma = C,$$

d'où

$$\Sigma S^{-1}AS\Sigma^{-1} = B.$$

Donc B est la transformée de A par la substitution $S\Sigma^{-1}$.

linéaires indépendantes en nombre au plus égal à $n-2$; supposons, par exemple, qu'il y ait trois pareilles équations :

$$A=0, \qquad B=0, \qquad C=0,$$

(on a alors $n \geqslant 5$). Les pôles en nombre infini définis par les équations

$$P_1=0, \qquad A=0, \qquad B=0, \qquad C=0$$

appartiennent aussi au plan $P_2=0$. Donc $P_2$ dépend linéairement de $P_1$, A, B, C, et il en sera de même des formes successives $P_3$, $P_4$, $P_5$. En éliminant A, B, C entre ces diverses relations linéaires, il en résulte immédiatement qu'il y a au moins une relation linéaire à coefficients non tous nuls entre $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$, $P_5$ et, comme $n$ est supérieur ou égal à 5, la proposition est démontrée.

[**4**] *Les coefficients* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *de la forme canonique* (C) *sont les coefficients de l'équation caractéristique.* — Ainsi qu'on vient de le voir, on peut reconnaître si la forme réduite (4) est valable et former cette forme réduite sans avoir à se servir ni du déterminant caractéristique $\Delta(S)$, ni de la théorie des diviseurs élémentaires. Néanmoins, il est intéressant de relier la théorie actuelle à la théorie classique des diviseurs élémentaires et en particulier de rechercher comment les invariants $a_1, a_2, \ldots, a_n$ qui figurent dans la forme réduite (4) sont liés aux racines de l'équation caractéristique.

Supposons d'abord les racines de l'équation caractéristique distinctes. Dans le cas actuel, à chacune des racines S correspond un pôle unique (chap. I, n° 8). Soient $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ les coordonnées homogènes du pôle correspondant à la racine S. A ces valeurs, la substitution (1) fait correspondre les valeurs

$$X'_1 = Sx'_1, \qquad X'_2 = Sx'_2, \qquad \ldots\ldots, \qquad X'_n = Sx'_n.$$

Soient $P'_1, P'_2, \ldots, P'_n$ les valeurs prises par $P_1, P_2, \ldots, P_n$ lorsqu'on y remplace $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par les coordonnées $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ du pôle. On aura d'après la définition des conséquentes successives d'une forme linéaire (n° 1) :

$$\begin{aligned} P'_2 &= SP'_1 \\ P'_3 &= S^2P'_1 \\ &\vdots \\ P'_n &= S^{n-1}P'_1, \\ P'_{n+1} &= S^nP'_1. \end{aligned}$$

Mais on a entre les formes $P_1, P_2, \ldots, P_n, P_{n+1}$ la relation linéaire

$$P_{n+1} \equiv a_1P_1 + a_2P_2 + \ldots + a_nP_n,$$

d'où

$$P'_1(a_1 + a_2S + a_3S^2 + \ldots + a_nS^{n-1} - S^n) = 0,$$

et, puisque le plan $P_1 = 0$ ne passe pas par le pôle,

$$S^n - a_n S^{n-1} - \dots - a_2 S - a_1 = 0. \tag{5}$$

Le même raisonnement s'applique aux $n$ racines distinctes de l'équation caractéristique. *Donc les invariants* $a_1, a_2, \dots, a_n$ *sont les coefficients de l'équation caractéristique mise sous la forme* (5).

Le résultat subsiste évidemment, par continuité, si certaines des racines deviennent égales, pourvu qu'on s'en tienne toujours au cas qui fait l'objet de ce chapitre, c'est-à-dire qu'à chaque racine corresponde un pôle unique.

**[5]** *Exemple I.* — Soit la transformation (1)

$$\left\{\begin{aligned} X_1 &= \phantom{3x_1 + {}} x_2 - x_3, \\ 2X_2 &= x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4, \\ 2X_3 &= 3x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4, \\ X_4 &= -x_1 + x_2. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Nous chercherons seulement pour l'instant à obtenir une transformation quelconque permettant de passer de la substitution (7) à la forme canonique (C) sans chercher la transformation la plus générale remplissant ce but. Nous verrons (n° 6) comment on peut déduire de là toutes les transformations conduisant à la forme canonique.

Posons par exemple

$$P_1 = 2x_2,$$

d'où par itérations successives à l'aide des formules (7),

$$\begin{aligned} P_2 &= x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4, \\ P_3 &= x_1 - x_2 - x_3, \\ P_4 &= -2x_1 \phantom{{}+x_2-x_3} + 2x_4, \\ P_5 &= -2x_1 + 2x_3. \end{aligned}$$

On voit immédiatement que les formes $P_1, P_2, P_3, P_4$ sont indépendantes, ce qui prouve qu'on est bien dans le cas où les pôles sont en nombre fini (mineurs du déterminant caractéristique premiers entre eux). Entre $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$ existe une relation de dépendance qu'on aperçoit ainsi qu'il suit. On a

$$P_5 + 2P_3 = -2x_2 = -P_1$$

(1) Cet exemple, traité par M. Nicoletti dans son Mémoire cité plus haut (p. 295 du Mémoire), permettra au lecteur de comparer les deux méthodes. La forme canonique obtenue par M. Nicoletti n'est pas la même que celle que nous donnons ici ; elle est obtenue aussi par des calculs rationnels.

ou

$$P_5 = -2P_3 - P_1.$$

Donc, si l'on pose

$$\begin{aligned} y_1 &= 2x_2, \\ y_2 &= x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4, \\ y_3 &= x_1 - x_2 - x_3, \\ y_4 &= -2x_1 \qquad\quad + 2x_4, \end{aligned}$$

la substitution (7) prend la forme réduite

$$Y_1 = y_2, \qquad Y_2 = y_3, \qquad Y_3 = y_4, \qquad Y_4 = -2y_3 - y_1.$$

L'équation caractéristique qu'on déduit de cette forme réduite (n° 4) sans calcul de déterminants est

$$S^4 + 2S^2 + 1 = 0$$

ou

$$(S^2 + 1)^2 = 0.$$

*Exemple II.* — Soit la substitution

$$\left| \begin{aligned} X &= y + z, \\ Y &= z - x, \\ Z &= x + y + z. \end{aligned} \right.$$

Cherchons le conséquent d'un plan quelconque

$$P_1 = \alpha x + \beta y + \gamma z.$$

On a

$$\begin{aligned} P_2 &= \alpha(y + z) + \beta(z - x) + \gamma(x + y + z), \\ &= (\gamma - \beta)x + (\alpha + \gamma)y + (\alpha + \beta + \gamma)z, \\ &= \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z, \end{aligned}$$

en posant

$$\alpha_1 = \gamma - \beta, \qquad \beta_1 = \alpha + \gamma, \qquad \gamma_1 = \alpha + \beta + \gamma.$$

Ces dernières formules définissent la substitution par laquelle on passe des coefficients de P à ceux de $P_1$ : c'est la substitution *conjuguée* ou *corrélative* de la substitution donnée, c'est-à-dire que son déterminant se déduit du déterminant de la proposée par l'échange des lignes et des colonnes. On formera aisément à l'aide de cette substitution les conséquentes successives de la forme $P_1$. On a :

$$\begin{aligned} P_1 &= \alpha x + \beta y + \gamma z, \\ P_2 &= (\gamma - \beta)x + (\alpha + \gamma)y + (\alpha + \beta + \gamma)z, \\ P_3 &= \beta x + (\alpha + 2\gamma)y + (2\alpha + 3\gamma)z, \\ P_4 &= (\alpha + \gamma)x + (2\alpha + \beta + 3\gamma)y + (3\alpha + \beta + 5\gamma)z. \end{aligned}$$

En général, si $\alpha, \beta, \gamma$ sont quelconques, les formes $P_1, P_2, P_3$ sont indépendantes et on voit en outre que l'on a :

$$P_4 \equiv P_1 + P_2 + P_3.$$

On vérifie sur cet exemple que cette relation est indépendante de $\alpha, \beta, \gamma$, ainsi qu'il a été démontré au numéro 2.

Si l'on pose alors

$$u = P_1, \qquad v = P_2, \qquad w = P_3,$$

on aura la forme réduite de la substitution proposée :

$$\left| \begin{array}{l} U = v, \\ V = w, \\ W = u + v + w. \end{array} \right.$$

On a ainsi obtenu le changement de variables le plus général permettant de passer de la substitution donnée à sa forme canonique, tandis que dans l'exemple I nous nous étions bornés à obtenir un changement de variables particulier. Ici, $\alpha, \beta, \gamma$ sont assujettis à la seule condition

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma - \beta & \alpha + \gamma & \alpha + \beta + \gamma \\ \beta & \alpha + 2\gamma & 2\alpha + 3\gamma \end{vmatrix} \neq 0$$

qui exprime que les formes $P_1, P_2, P_3$ sont indépendantes. D'après la théorie générale (note du n° 2), en égalant le déterminant précédent à zéro, on obtient la condition pour que le plan

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$$

passe par l'un des pôles de la substitution, autrement dit l'équation tangentielle (coordonnées $\alpha, \beta, \gamma$) du système de ces pôles. Si le plan passe par l'un des pôles, on est conduit à une nouvelle forme réduite qui sera étudiée plus loin (n$^{\text{os}}$ 11 et 12).

[**6**] *Transformations automorphes de la substitution canonique* (C) *ou substitutions permutables avec* (C).

Soit une substitution linéaire canonique

$$\begin{array}{l} X_1 \;\; = x_2, \\ X_2 \;\; = x_3, \\ \vdots \\ X_{n-1} = x_n, \\ X_n \;\; = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n. \end{array}$$

Si on applique à cette substitution elle-même le procédé de réduction du numéro 1, c'est-à-dire si on la transforme par les formules

$$(8) \qquad y_1 = P_1, \qquad y_2 = P_2, \qquad \ldots\ldots, \qquad y_n = P_n$$

(notations du n° 1)

on trouve comme substitution transformée en $y_i$ et $Y_i$ la substitution elle-même. Donc les formules (8) définissent les transformations automorphes de la forme canonique. Ces transformations (8) forment évidemment un groupe à $n$ paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ : c'est le groupe des transformations automorphes de la forme canonique. Si T désigne une des transformations de ce groupe, C la forme canonique, on a

$$T^{-1}CT = C$$

ou encore

$$CT = TC.$$

Donc le groupe des substitutions linéaires (8) est aussi le groupe des substitutions permutables avec la substitution canonique.

Par exemple, soit une substitution canonique à trois variables $x, y, z$ :

$$X = y, \qquad Y = z, \qquad Z = ax + by + cz.$$

Toute substitution permutable avec cette substitution est donnée par les équations

$$\begin{aligned}
u &= P_1 = \alpha x + \beta y + \gamma z, \\
v &= P_2 = \alpha y + \beta z + \gamma(ax + by + cz) = a\gamma x + (\alpha + b\gamma)y + (\beta + c\gamma)z, \\
w &= P_3 = (a\beta + ac\gamma)x + (a\gamma + b\beta + bc\gamma)y + (\alpha + b\gamma + c\beta + c^2\gamma)z.
\end{aligned}$$

Ces substitutions forment un groupe à trois paramètres $\alpha$, $\beta$, $\gamma$.

On peut se servir du groupe des transformations T ainsi définies pour obtenir toutes les transformations qui permettent de passer d'une substitution linéaire quelconque A à sa forme canonique C. Supposons qu'on ait obtenu la forme canonique en transformant A par une substitution particulière S, comme dans l'exemple I du numéro 5. On a :

$$S^{-1}AS = C.$$

D'autre part,

$$TCT^{-1} = C.$$

On déduit de là

$$S^{-1}AS = TCT^{-1},$$

d'où

$$C = T^{-1}S^{-1}AST.$$

Donc la transformation ST transforme A en la forme canonique.

Réciproquement soit $\tau$ une transformation quelconque transformant A en C. On aura

$$\tau^{-1}A\tau = C.$$

Posons

$$\tau = ST,$$

ce qui détermine T si $\tau$ et S sont connus. On aura, en remplaçant $\tau$ par cette valeur :

$$T^{-1}S^{-1}AST = C$$

ou

$$T^{-1}CT = C.$$

Donc T est une transformation automorphe de la forme canonique.

*Donc si* S *est une substitution linéaire particulière transformant la substitution* A *en sa forme canonique* C, *la substitution linéaire la plus générale qui réalise la même transformation de* A *en* C *est la substitution* ST *où* T *est la substitution automorphe la plus générale de la forme canonique* C, *déterminée plus haut.*

Ainsi, dans l'exemple I du numéro 5 nous avons employé une substitution particulière S pour passer de la substitution donnée à sa forme canonique. On en déduirait immédiatement la substitution ST la plus générale remplissant le même objet et cette substitution dépend de quatre paramètres.

[**7**] *Transformations automorphes d'une substitution quelconque ou substitutions permutables avec cette substitution.* — Le problème vient d'être traité (n° 6) lorsque la substitution donnée a la forme canonique. La solution générale résulte de la solution donnée dans ce cas particulier, ainsi que le montrent des raisonnements classiques de la théorie des groupes que nous reproduirons ici pour plus de clarté.

Soit A une substitution linéaire quelconque et B une substitution linéaire transformant A en elle-même (transformation automorphe). On a :

$$A = B^{-1}AB.$$

On en déduit :

$$BA = AB.$$

B est donc aussi la substitution linéaire la plus générale permutable avec A. Si S, T et C ont les mêmes significations que plus haut, on a d'autre part

$$T^{-1}CT = C, \qquad S^{-1}AS = C,$$

d'où

$$T^{-1}S^{-1}AST = S^{-1}AS$$

ou bien

$$(ST^{-1}S^{-1})A(STS^{-1}) = A.$$

Donc la transformée $STS^{-1}$ d'une quelconque des substitutions T par la substitution $S^{-1}$ est une des substitutions B cherchées transformant la substitution A en elle-même.

Réciproquement, soit B une substitution permutable avec A. On peut toujours poser $B = STS^{-1}$, ce qui détermine T si la substitution S est connue.

On a alors

$$A = B^{-1}AB = ST^{-1}S^{-1}ASTS^{-1},$$

d'où

$$S^{-1}AS = T^{-1}S^{-1}AST$$

ou

$$C = T^{-1}CT.$$

Donc T est une transformation automorphe de C.

Ainsi *la substitution linéaire la plus générale permutable avec la substitution donnée* A *est de la forme* $STS^{-1}$, *où* S *désigne une substitution particulière quelconque transformant* A *en la substitution canonique* C *et où* T *désigne la transformation automorphe générale de la substitution canonique déterminée plus haut* (n° 6).

On voit que les substitutions B permutables avec A s'obtiennent rationnellement à partir de la substitution A : elles forment un groupe à $n$ paramètres (¹).

[**8**] *Détermination des multiplicités linéaires invariantes par une substitution linéaire donnée.* — La forme canonique adoptée dans ce travail se prête très aisément à la détermination de toutes les multiplicités linéaires invariantes par une substitution linéaire donnée et l'on peut préciser très facilement quelles sont celles de ces multiplicités qu'on peut obtenir par des opérations rationnelles (²).

Nous désignerons par $M_p$ une multiplicité linéaire définie par $n-p$ équations linéaires distinctes entre les coordonnées homogènes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ d'un point quelconque de la multiplicité. Ces $n-p$ équations permettent d'exprimer $n-p$ des coordonnées en fonction linéaire et homogènes des $p$ autres coordonnées qui sont arbitraires. Les coordonnées homogènes d'un point quelconque de la multiplicité $M_p$ dépendent donc de $p$ paramètres arbitraires : en réalité, dans la terminologie habituelle de la géométrie analytique, la multiplicité $M_p$ serait une multiplicité à $p-1$ paramètres (non homogènes). A ce point de vue, un point est une multiplicité $M_1$. Les coordonnées homogènes d'un point sont en effet fonctions d'un paramètre $\lambda$ :

$$x_1 = \lambda x'_1, \qquad x_2 = \lambda x'_2, \qquad \ldots\ldots, \qquad x_n = \lambda x'_n.$$

---

(¹) Ces substitutions ont été déterminées par divers auteurs (Landsberg, Nicoletti, etc.). Si nous avons repris ici cette question, c'est que la forme canonique que nous adoptons se prête très aisément à la détermination *rationnelle* des substitutions cherchées.

(²) La forme canonique de M. Jordan permet aussi d'obtenir ces multiplicités invariantes, mais elle exige toujours la résolution préalable de l'équation caractéristique.

Soit donc la substitution linéaire prise sous sa forme canonique

$$(9)\qquad X_1 = x_2, \quad X_2 = x_3, \quad \ldots\ldots, \quad X_{n-1} = x_n, \quad X_n = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n$$

et

$$\Delta(S) = S^n - a_n S^{n-1} - a_{n-1} S^{n-2} - \ldots - a_2 S - a_1 = 0$$

l'équation caractéristique.

Nous démontrerons que la recherche des multiplicités $M_p$ invariantes par la substitution (9) revient à la recherche des diviseurs de degré $p$ de $\Delta(S)$, chaque diviseur fournissant une multiplicité invariante $M_p$. D'une façon plus précise, nous démontrerons la proposition suivante :

Théorème. — *Soit*

$$\Delta_1(S) = S^p + b_1 S^{p-1} + b_2 S^{p-2} + \ldots + b_{p-1} S + b_p$$

*un diviseur de* $\Delta(S)$. *La multiplicité* $M_p$ *définie par les équations*

$$(10)\qquad \left|\begin{array}{l} P_1 \;\;\; = x_{p+1} + b_1 x_p \;\;\; + \ldots + b_p x_1 \;\;\;\; = 0, \\ P_2 \;\;\; = x_{p+2} + b_1 x_{p+1} + \ldots + b_p x_2 \;\;\;\; = 0, \\ \vdots \\ P_{n-p} = x_n \;\;\;\; + b_1 x_{n-1} + \ldots + b_p x_{n-p} = 0 \end{array}\right.$$

*est invariante par la substitution canonique* (9).

*Réciproquement, toute multiplicité linéaire invariante par* (9) *peut être obtenue par ce procédé, chaque multiplicité invariante* $M_p$ *correspondant ainsi à un diviseur de degré* $p$ *de* $\Delta(S)$.

En effet, remarquons que chacune des formes linéaires (10) est la *conséquente* de la forme précédente par la substitution (9). La multiplicité transformée de la multiplicité (10) par la substitution (9) est donc définie par les équations

$$(11)\qquad P_2 = 0, \qquad P_3 = 0, \qquad \ldots\ldots, \qquad P_{n-p} = 0, \qquad P_{n-p+1} = 0,$$

où $P_{n-p+1}$ désigne la conséquente de $P_{n-p}$. On a :

$$P_{n-p+1} = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n + b_1 x_n + b_2 x_{n-1} + \ldots + b_p x_{n-p+1}.$$

Or, si $\Delta_1(S)$ divise $\Delta(S)$, on a une identité de la forme

$$\begin{aligned} &S^n - a_n S^{n-1} - \ldots - a_2 S - a_1 \\ &\qquad \equiv (S^p + b_1 S^{p-1} + \ldots + b_{p-1} S + b_p)(S^{n-p} + c_1 S^{n-p-1} + \ldots + c_{n-p-1} S + c_{n-p}), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} &a_1 + a_2 S + \ldots + a_n S^{n-1} + b_1 S^{n-1} + b_2 S^{n-2} + \ldots + b_p S^{n-p} \\ &\qquad \equiv -(S^p + b_1 S^{p-1} + \ldots + b_{p-1} S + b_p)(c_1 S^{n-p-1} + \ldots + c_{n-p-1} S + c_{n-p}). \end{aligned}$$

Développons et ordonnons le second membre de cette identité, puis remplaçons les puissances successives 1, S, $S^2$, ... de S par les variables $x_1$, $x_2$, $x_3$, .... L'identité en S nous fournira évidemment une identité en $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Or, si l'on se reporte aux équations qui définissent $P_1, P_2, \ldots, P_{n-p}$ et $P_{n-p+1}$, on voit que l'identité ainsi obtenue s'écrit :

$$P_{n-p+1} \equiv -c_1 P_{n-p} - c_2 P_{n-p-1} - \ldots - c_{n-p} P_1.$$

Cette identité entraîne évidemment l'équivalence des systèmes d'équations linéaires (10) et (11). En effet, cette identité montre d'une façon évidente que toute solution de (10) est solution de (11). En outre de toute solution de (11), on déduit

$$c_{n-p} P_1 = 0.$$

Or, $c_{n-p}$ n'est pas nul, car on a

$$a_1 = -b_p c_{n-p}$$

et $a_1$ n'est pas nul, sinon la substitution donnée (9) serait une substitution impropre (à déterminant nul) [1].

Les systèmes (10) et (11) étant équivalents, la multiplicité $M_p$ définie par les équations (10) coïncide avec sa conséquente définie par les équations (11) : c'est bien une multiplicité invariante.

Réciproquement, toute multiplicité invariante $M_p$ peut être obtenue de cette façon. Démontrons tout d'abord qu'une pareille multiplicité peut toujours être définie par un système d'équations ayant la forme des équations (10). En effet, en éliminant $x_{p+2}, x_{p+3}, \ldots, x_n$ entre les $n-p$ équations linéaires qui définissent la multiplicité, on obtient au moins une relation de la forme

$$P = b_0 x_{p+1} + b_1 x_1 + \ldots + b_p x_1 = 0,$$

les coefficients n'étant pas tous nuls.

Mais puisque la multiplicité est supposée invariante, tout point de cette multiplicité doit vérifier non seulement l'équation précédente, mais ses conséquentes successives. On aura donc

$$(12)\qquad \left|\begin{array}{l} P_1 \;\;\, = b_0 x_{p+1} + b_1 x_p + \ldots + b_p x_1 \;\;\;\; = 0, \\ P_2 \;\;\, = b_0 x_{p+2} + \ldots\ldots\ldots + b_p x_2 \;\;\;\; = 0, \\ \vdots \\ P_{n-p} = b_0 x_n \;\;\; + \ldots\ldots\ldots + b_p x_{n-p} = 0, \end{array}\right.$$

et si nous démontrons que ces $n-p$ équations sont indépendantes, nous pourrons

---

[1] Nous laissons de côté dans tout ce travail la réduction des substitutions linéaires singulières ou impropres.

supposer que la multiplicité est définie par ces équations elles-mêmes. Or, une relation de dépendance linéaire s'écrirait

$$c_1 P_1 + c_2 P_2 + \ldots + c_p P_{n-p} \equiv 0,$$

les coefficients $c_1, c_2, \ldots, c_p$ n'étant pas tous nuls. Dans cette relation remplaçons $x_1$ par 1, $x_2$ par S, $x_3$ par $S^2$ et en général $x_i$ par $S^{i-1}$. Elle nous donne alors l'identité en S :

$$(b_0 S^p + b_1 S^{p-1} + \ldots + b_{p-1} S + b_p)(c_1 + c_2 S + \ldots + c_p S^{n-p-1}) \equiv 0.$$

Mais cette identité est impossible, puisque les $b$ ne sont pas tous nuls et les $c$ non plus. Donc on peut toujours supposer que la multiplicité invariante $M_p$ est définie par les équations (12). En outre, le coefficient $b_0$ n'est pas nul, car sinon on pourrait adjoindre aux équations (12) la nouvelle conséquente

$$b_1 x_n + b_2 x_{n-1} + \ldots + b_p x_{n-p+1} = 0,$$

et alors la multiplicité serait définie par $n - p + 1$ équations indépendantes, ce serait une multiplicité $M_{p-1}$ et non pas une multiplicité $M_p$. Le coefficient $b_0$ n'étant pas nul, on peut toujours supposer $b_0 = 1$ et les équations (12) coïncident alors complètement avec les équations (10). Montrons maintenant que le polynôme

$$S^p + b_1 S^{p-1} + \ldots + b_{p-1} S + b_p$$

est un diviseur de $\Delta(S)$. La multiplicité (10) étant invariante, l'équation

$$P_{n-p+1} = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n + b_1 x_n + b_2 x_{n-1} + \ldots + b_p x_{n-p+1} = 0$$

doit être une conséquence des équations (10) de la multiplicité, c'est-à-dire qu'on doit avoir une identité de la forme

$$P_{n-p+1} \equiv - c_1 P_{n-p} - c_2 P_{n-p-1} - \ldots - c_{n-p} P_1.$$

Si l'on remplace dans cette identité $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par $1, S, S^2, \ldots, S^{n-1}$, on obtient une identité en S qui, d'après le calcul déjà fait dans la démonstration de la proposition directe, est la suivante :

$$\Delta(S) \equiv (S^p + b_1 S^{p-1} + \ldots + b_{p-1} S + b_p)(S^{n-p} + c_1 S^{n-p-1} + \ldots + c_{n-p-1} S + c_{n-p}),$$

et cette identité prouve que $S^p + b_1 S^{p-1} + \ldots + b_p$ divise $\Delta(S)$.

La proposition est démontrée.

[**9**] *Conséquences et applications du théorème du numéro précédent.* — La méthode qui vient d'être donnée montre que le problème de la détermination *par des calculs rationnels* des multiplicités invariantes par une substitution linéaire donnée revient à la détermination des diviseurs rationnels du polynôme $\Delta(S)$. Si l'on suppose que

les coefficients de $\Delta(S)$ appartiennent à un certain domaine de rationalité R, les diviseurs de $\Delta(S)$ rationnels dans ce domaine fournissent les multiplicités invariantes susceptibles d'être définies rationnellement.

Supposons par exemple que le domaine de rationalité soit le domaine naturel contenant tous les nombres complexes et que la substitution soit une substitution à quatre variables $x_1, x_2, x_3, x_4$ : cette substitution définit une homographie de l'espace à trois dimensions. Le polynôme $\Delta(S)$ est du quatrième degré. Si ses racines sont distinctes, il y a :

1° Quatre diviseurs du premier degré fournissant quatre multiplicités invariantes $M_1$ : ce sont les quatre points doubles de l'homographie formant un tétraèdre T.

2° Six diviseurs du second degré fournissant six multiplicités $M_2$ invariantes : ce sont les six droites doubles de l'homographie, arêtes du tétraèdre T.

3° Quatre diviseurs du troisième degré fournissant quatre multiplicités $M_3$ invariantes : ce sont les quatre plans doubles, faces du tétraèdre T.

Mais la méthode s'applique tout aussi bien si les racines ne sont pas distinctes [1].

Une conséquence importante de la méthode du numéro 8 est celle-ci :

*Les multiplicités invariantes $M_p$ correspondant à un certain diviseur $\Delta_1(S)$ de degré p de $\Delta(S)$ contiennent les multiplicités invariantes $M_q$ $(q<p)$ correspondant aux sous-diviseurs $\Delta_2(S)$ de degré q de $\Delta_1(S)$.*

Soit, en effet,

$$\Delta_1(S) = S^p + b_1 S^{p-1} + \dots + b_{p-1} S + b_p$$

un diviseur de $\Delta(S)$. A ce diviseur correspond la multiplicité invariante $M_p$ définie par les équations (10). Soit maintenant

$$\Delta_2(S) = S^q + c_1 S^{q-1} + \dots + c_{q-1} S + c_q$$

un diviseur de $\Delta_1(S)$ et par conséquent de $\Delta(S)$. A ce diviseur correspond la multiplicité invariante $M_q$ définie par les équations :

$$(13)\quad \left|\begin{array}{l} Q_1 = x_{q+1} + c_1 x_q + \dots + c_{q-1} x_2 + c_q x_1 = 0, \\ Q_2 = x_{q+2} + c_1 x_{q+1} + \dots + c_{q-1} x_3 + c_q x_2 = 0, \\ \vdots \\ Q_{n-q} = x_n + c_1 x_{n-1} + \dots + c_{q-1} x_{n-p+1} + c_q x_{n-p} = 0. \end{array}\right.$$

[1] Rappelons cependant que d'après les hypothèses posées au début de ce chapitre, il ne s'agit dans tout ce chapitre que de substitutions admettant un nombre fini de pôles. Le cas d'une droite ou d'un plan de pôles (mineurs de $\Delta(S)$ non premiers entre eux) relève du Chapitre III.

Il s'agit de démontrer que les équations (10) sont vérifiées par tout système de valeurs des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qui vérifie les équations (13). Des équations (13) tirons $x_{q+1}, x_{q+2}, \ldots, x_n$ en fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_q$ et portons ces valeurs dans les équations (10). Les premiers membres de ces équations $P_1, P_2, \ldots, P_{n-p}$ deviennent alors des formes linéaires $P'_1, P'_2, \ldots, P'_{n-p}$ en $x_1, x_2, \ldots, x_q$ et il s'agit de prouver que ces formes sont identiquement nulles. Il suffit pour cela de prouver que les polynômes $P'_1(S), P'_2(S), \ldots, P'_{n-p}(S)$ de degré $q-1$ obtenus en remplaçant $x_1, x_2, \ldots, x_q$ respectivement par $1, S, S^2, \ldots, S^{q-1}$ dans les formes $P'_1, P'_2, \ldots, P'_{n-p}$ sont identiquement nuls. On a

$$x_{q+1} = -c_1 S^{q-1} - c_2 S^{q-1} - \ldots - c_{q-1} S - c_q = -\Delta_2(S) + S^q$$

ou en employant la notaticn classique des congruences

$$x_{q+1} \equiv S^q \qquad [\bmod \Delta_2(S)]$$

et en remplaçant $x_{q+1}$ par cette valeur dans la deuxième équation (13),

$$x_{q+2} \equiv S^{q+1} \qquad [\bmod \Delta_2(S)]$$

et ainsi de suite. En général,

$$x_{q+i} \equiv S^{q+i-1} \qquad [\bmod \Delta_2(S)] \qquad [i = 1, 2, 3, \ldots, (n-q)].$$

Transportons ces valeurs dans $P_1, P_2, \ldots, P_{n-p}$. On aura alors :

$$P'_1(S) \equiv S^p + b_1 S^{p-1} + \ldots + b_{p-1} S + b_p \qquad [\bmod \Delta_2(S)].$$

Mais le second membre de cette congruence n'est pas autre chose que le polynôme $\Delta_1(S)$ qui par hypothèse est divisible par le module $\Delta_2(S)$ de la congruence. On a donc

$$P'_1(S) \equiv 0 \qquad [\bmod \Delta_2(S)]$$

et de même

$$\left.\begin{matrix} P'_2(S) \equiv 0 \\ \vdots \\ P'_{n-p}(S) \equiv 0 \end{matrix}\right\} [\bmod \Delta_2(S)].$$

Les polynômes $P'_1(S), \ldots, P'_{n-p}(S)$ qui sont de degré $q-1$, inférieur au degré du module, et qui sont congrus à zéro suivant ce module, sont donc identiquement nuls, et ceci démontre la proposition : la multiplicité invariante $M_p$ contient la multiplicité invariante $M_q$.

**[10]** *Exemples :* 1° Soit à déterminer les multiplicités invariantes par la substitution canonique

$$X_1 = x_2, \quad X_2 = x_3, \quad X_3 = x_4, \quad X_4 = -x_1 - 4x_2 - 6x_3 - 4x_4.$$

On a ici :

$$\Delta(S) = S^4 + 4S^3 + 6S^2 + 4S + 1 = (S+1)^4.$$

En appliquant le théorème du numéro 8, on voit qu'aux diviseurs $(S+1)$, $(S+1)^2$, $(S+1)^3$ de $\Delta(S)$ correspondent respectivement

un point invariant $M_1$ défini par les équations

$$x_2 + x_1 = 0, \quad x_3 + x_2 = 0, \quad x_4 + x_3 = 0,$$

une droite invariante $M_2$ définie par les équations

$$x_3 + 2x_2 + x_1 = 0, \quad x_4 + 2x_3 + x_2 = 0,$$

un plan invariant $M_3$ défini par l'équation

$$x_4 + 3x_3 + 3x_2 + x_1 = 0.$$

D'après les résultats du numéro précédent, le plan $M_3$ contient la droite $M_2$ qui contient elle-même le point $M_1$.

2° Reprenons l'exemple I du numéro 5. La substitution mise sous la forme canonique s'écrit

$$Y_1 = y_2, \quad Y_2 = y_3, \quad Y_3 = y_4, \quad Y_4 = -2y_3 - y_1$$

et les formules de passage de la substitution donnée à la forme canonique nous permettraient de passer des coordonnées canoniques $y_1$, $y_2$, $y_3$, $y_4$ aux coordonnées primitives $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$. On a :

$$\Delta(S) = (S^2 + 1)^2.$$

*a*) Les diviseurs du premier degré sont $S+i$, $S-i$. Il y a donc deux points invariants. Le point $M_1$ qui correspond au diviseur $S-i$ est donné par les équations

$$y_2 - iy_1 = 0, \quad y_3 - iy_2 = 0, \quad y_4 - iy_3 = 0,$$

d'où

$$\frac{y_1}{i} = \frac{y_2}{-1} = \frac{y_3}{-i} = \frac{y_4}{1}.$$

Le point invariant $M'_1$ qui correspond au diviseur $S+i$ aura pour coordonnées

$$\frac{y_1}{-i} = \frac{y_2}{-1} = \frac{y_3}{+i} = \frac{y_4}{1}.$$

*b*) Les diviseurs du second degré sont

$$S^2 + 1, \quad (S+i)^2, \quad (S-i)^2.$$

Ils fournissent trois droites invariantes.

Celle $M_2$ qui correspond au diviseur $S^2+1$, qui admet les sous-diviseurs $S+i$ et $S-i$, doit contenir les points doubles $M_1$ et $M'_1$ correspondant à ces sous-diviseurs : c'est la droite $M_1M'_1$.

Au diviseur $(S+i)^2=S^2+2iS-1$ correspond la droite invariante $M'_2$ définie par les équations

$$y_3+2iy_2-y_1=0,$$
$$y_4+2iy_3-y_2=0.$$

Cette droite contient le point $M'_1$. Au diviseur imaginaire conjugué $(S-i)^2$ correspond la droite invariante $M''_2$ conjuguée de la précédente. Elle contient le point $M_1$.

$c$) Les diviseurs du troisième degré sont

$$(S^2+1)(S+i)=S^3-iS^2+S-i$$

et le diviseur conjugué. Ils fournissent deux plans invariants contenant l'un et l'autre la droite $M_2$ correspondant au sous-diviseur $S^2+1$ et contenant en outre l'un la droite $M'_2$ fournie par le sous-diviseur $(S+i)^2$, l'autre la droite $M''_2$ fournie par le sous-diviseur $(S-i)^2$.

[**11**] *Décomposition de la substitution canonique* (C) *en plusieurs substitutions de même forme. Substitutions sous-canoniques.* — Soit la substitution canonique

$$\text{(C)}\qquad X_1=x_2,\quad X_2=x_3,\quad \ldots\ldots,\quad X_{n-1}=x_n,\quad X_n=a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n$$

et

$$\Delta(S)=S^n-a_nS^{n-1}-a_{n-1}S^{n-2}-\ldots-a_2S-a_1=0$$

l'équation caractéristique.

Supposons que le polynôme $\Delta(S)$ ait été décomposé en un produit de deux polynômes *premiers entre eux*.

$$\Delta(S)=\Delta_1(S)\,.\,\Delta_2(S)$$

avec

$$\Delta_1(S)=S^p-b_pS^{p-1}-b_{p-1}S^{p-2}-\ldots-b_2S-b_1,$$
$$\Delta_2(S)=S^q-c_qS^{q-1}-c_{q-1}S^{q-2}-\ldots-c_2S-c_1$$

et

$$p+q=n.$$

Nous nous proposons de démontrer la proposition suivante :

THÉORÈME. — $\Delta(S)$ *étant décomposé en un produit de deux facteurs* $\Delta_1(S)$, $\Delta_2(S)$ *premiers entre eux, la substitution canonique* (C) *peut être transformée en une substitution* (C'C'') *qui est le produit direct* (¹) *de deux substitutions* (C'), (C'') *ayant l'une et*

(¹) Nous avons défini ce terme au chap. I, n° 7.

*l'autre la même forme que* (C) *et formées la première avec les coefficients* $b_i$ *de* $\Delta_1(S)$, *la deuxième avec les coefficients* $c_i$ *de* $\Delta_2(S)$.

La substitution transformée (C′C″) sera définie par les formules

$$(C'C'')\quad \begin{cases} (C') & Y_1 = y_2, \quad Y_2 = y_3, \quad \ldots\ldots, \quad Y_{p-1} = y_p, \quad Y_p = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_p y_p, \\ (C'') & Z_1 = z_2, \quad Z_2 = z_3, \quad \ldots\ldots, \quad Z_{q-1} = z^b, \quad Z_q = c_1 z_1 + c_2 z_2 + \ldots + c_q z_q. \end{cases}$$

Nous désignons les nouvelles variables par $y_1, y_2, \ldots, y_p$; $z_1, z_2, \ldots, z_q$; elles sont au nombre de $p+q$ ou $n$; la substitution (C′C″) est obtenue en juxtaposant les substitutions (C′) et (C″) portant respectivement sur les variables $y$ et les variables $z$ et ayant l'une et l'autre la forme canonique.

Nous dirons que (C′) et (C″) sont les substitutions *sous-canoniques* correspondant aux diviseurs $\Delta_1(S)$ et $\Delta_2(S)$.

La démonstration résulte aisément du théorème du numéro 8 relatif aux multiplicités linéaires invariantes par la substitution canonique (C). D'après ce théorème, chacun des diviseurs $\Delta_1(S)$, $\Delta_2(S)$ définit une multiplicité invariante. Le diviseur $\Delta_1(S)$ de degré $p$ fournit une multiplicité invariante $M_p$ définie par les $n-p$, ou $q$, équations suivantes :

$$(14)\qquad \begin{cases} P_1 = x_{p+1} - b_p x_p - b_{p-1} x_{p-1} - \ldots - b_1 x_1 = 0, \\ P_2 = x_{p+2} - b_p x_{p-1} - b_{p-1} x_p - \ldots - b_1 x_2 = 0, \\ \vdots \\ P_q = x_n - b_p x_{n-1} - b_{p-1} x_{n-2} - \ldots - b_1 x_q = 0. \end{cases}$$

De même le diviseur $\Delta_2(S)$ de degré $q$ fournit une multiplicité invariante $M_q$ définie par les $n-q$, ou $p$, équations suivantes :

$$(15)\qquad \begin{cases} Q_1 = x_{q+1} - c_q x_q - c_{q-1} x_{q-1} - \ldots - c_1 x_1 = 0, \\ Q_2 = x_{q+2} - c_q x_{q+1} - e_{q-1} x_q - \ldots - c_1 x_2 = 0, \\ \vdots \\ Q_p = x_n - c_q x_{n-1} - c_{q-1} x_{n-2} - \ldots - c_1 x_p = 0. \end{cases}$$

Transformons alors la substitution donnée (C) par la substitution

$$(16)\qquad y_1 = Q_1, \ y_2 = Q_2, \ \ldots, \ y_p = Q_p; \qquad z_1 = P_1, \ z_2 = P_2, \ \ldots, \ z_q = P_q$$

qui remplace les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par les variables $y_1, y_2, \ldots, y_p$; $z_1, z_2, \ldots, z_q$ et d'où l'on déduit

$$Y_1 = Q_2, \ Y_2 = Q_3, \ \ldots, \ Y_p = Q_{p+1}; \qquad Z_1 = P_2, \ Z_2 = P_3, \ \ldots, \ Z_q = P_{q+1}$$

en désignant par $P_{q+1}$ et $Q_{p+1}$ les formes itérées de $P_q$ et de $Q_p$.

Démontrons tout d'abord que les équations (16) sont résolubles en $x_1, x_2, \ldots, x_n$, c'est-à-dire que les formes $Q_1, Q_2, \ldots, Q_p$; $P_1, P_2, \ldots, P_q$ sont indépendantes. C'est une conséquence du fait que $\Delta_1(S)$, $\Delta_2(S)$ ont été supposés *premiers entre eux*.

Si en effet les formes linéaires précédentes étaient dépendantes, on aurait

$$\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \ldots + \alpha_q P_q + \beta_1 Q_1 + \beta_2 Q_2 + \ldots + \beta_p Q_p \equiv 0,$$

les constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$ n'étant pas toutes nulles. Remplaçons dans cette identité $x_1, x_2, \ldots, x_n$ respectivement par $1, S, S^2, \ldots, S^{n-1}$; les formes linéaires $P_1, P_2, \ldots, P_q$ deviennent respectivement $\Delta_1(S), S\Delta_1(S), \ldots, S^{q-1}\Delta_1(S)$ et de même $Q_1, Q_2, \ldots, Q_p$ deviennent $\Delta_2(S), S\Delta_2(S), \ldots, S^{p-1}\Delta_2(S)$. L'identité devient :

$$(\alpha_1 + \alpha_2 S + \ldots + \alpha_q S^{q-1})\Delta_1(S) + (\beta_1 + \beta_2 S + \ldots + \beta_p S^{p-1})\Delta_2(S) \equiv 0.$$

Or, c'est là l'identité bien connue de la théorie du p. g. c. d. qui exprime que $\Delta_1(S)$, $\Delta_2(S)$ ont un diviseur commun du premier degré au moins, contrairement à l'hypothèse faite. Donc les formes $P_1, P_2, \ldots, P_q$; $Q_1, Q_2, \ldots, Q_p$ sont indépendantes.

Démontrons ensuite que les formes $P_1, P_2, \ldots, P_q$ et la forme $P_{q+1}$ conséquente de $P_q$ donnent lieu à l'identité

$$P_{q+1} \equiv c_1 P_1 + c_2 P_2 + \ldots + c_q P_q. \tag{17}$$

Écrivons en effet $P_{q+1}$ explicitement

$$P_{q+1} = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n - b_p x_n - b_{p-1} x_{n-1} - \ldots - b_1 x_{q+1}.$$

Remplaçons $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dans l'identité (17) par $1, S, S^2, \ldots, S^{n-1}$ respectivement. Les deux membres deviendront des polynômes en S et, pour démontrer l'identité (17), il suffira de démontrer l'identité en S suivante :

$$\begin{aligned}(a_1 + a_2 S + \ldots + a_n S^{n-1}) - (b_p S^{n-1} + b_{p-1} S^{n-2} + \ldots + b_1 S^q)\\ \equiv (c_1 + c_2 S + \ldots + c_{q-1} S^{q-1})\Delta_1(S)\end{aligned}$$

ou encore

$$[S^n - \Delta(S)] - S^q[S^p - \Delta_1(S)] \equiv [S^q - \Delta_2(S)]\Delta_1(S)$$

ou

$$S^n - \Delta(S) - S^n + S^q\Delta_1(S) \equiv S^q\Delta_1(S) - \Delta_2(S) \cdot \Delta_1(S),$$

identité qui se réduit à

$$\Delta(S) \equiv \Delta_1(S) \cdot \Delta_2(S),$$

et cette dernière est exacte par définition de $\Delta_1(S)$ et $\Delta_2(S)$.

On démontre de même que les formes $Q_1, Q_2, \ldots, Q_p$ et $Q_{p+1}$ donnent lieu à l'identité

$$Q_{p+1} \equiv b_1 Q_1 + b_2 Q_2 + \ldots + b_p Q_p. \tag{18}$$

Les identités (17) et (18) montrent que si l'on effectue la transformation (16) dans la substitution (C), on obtient comme transformée la forme réduite (C′C″) (¹).

Si les polynômes $\Delta_1(S)$ ou $\Delta_2(S)$ sont eux-mêmes décomposés en deux facteurs premiers entre eux, on pourra transformer les substitutions C′ ou C″ à leur tour en produits directs de substitutions analogues, et l'on peut énoncer le théorème suivant qui généralise le précédent.

THÉORÈME. — *Si* $\Delta(S)$ *est décomposé en un produit de k facteurs premiers entre eux deux à deux*

$$\Delta(S) = \Delta_1(S) \cdot \Delta_2(S) \ldots \Delta_k(S),$$

*la substitution canonique* (C) *peut être transformée en produit direct de k substitutions de même forme, chacune de ces substitutions étant fournie par l'un des facteurs. La substitution canonique* (C) *est ainsi transformée en une substitution* $(C_1 C_2 \ldots C_k)$ *qui est le produit direct de k substitutions sous-canoniques* $(C_1)$, $(C_2)$, ..., $(C_k)$ *ayant chacune la forme de* (C) *et formées respectivement avec* $\Delta_1(S)$, $\Delta_2(S)$, ..., $\Delta_k(S)$ *comme la substitution* (C) *était formée avec* $\Delta(S)$.

Si les coefficients de $\Delta(S)$ appartiennent à un certain domaine de rationalité, toute décomposition de $\Delta(S)$ en facteurs irréductibles dans le domaine permet d'obtenir par des opérations rationnelles (qui seront précisées au paragraphe suivant) une forme canonique $(C_1 C_2 \ldots C_k)$ à coefficients rationnels formée des substitutions sous-canoniques $(C_1)$, $(C_2)$, ..., $(C_k)$.

Supposons par exemple que le domaine de rationalité soit celui des *nombres réels*. $\Delta(S)$ est alors décomposable en un produit de facteurs du premier ou du second degré à coefficients réels.

Au facteur $S^2 + pS + q$ correspond la substitution sous-canonique suivante :

$$Y_1 = y_2, \qquad Y_2 = -qy_1 - py_2.$$

De même au facteur $(S^2 + pS + q)^\alpha$ correspond une substitution sous-canonique d'ordre $2\alpha$ qu'on écrira sans aucune difficulté à l'aide du développement de $(S^2 + pS + q^\alpha)$.

---

(¹) On a démontré que les formes $P_1, P_2, \ldots, P_q$; $Q_1, Q_2, \ldots, Q_p$ sont indépendantes et que cela résulte de l'hypothèse d'après laquelle $\Delta_1(S)$, $\Delta_2(S)$ sont premiers entre eux. Il résulte de la démonstration qu'en exprimant que ces formes sont dépendantes, on obtient la condition pour que $\Delta_1(S)$, $\Delta_2(S)$ aient un diviseur commun. La condition s'obtient en égalant à zéro le déterminant du système des formes, système formé par la réunion des systèmes (14) et (15). On constate immédiatement qu'on obtient ainsi le résultant des deux équations

$$\Delta_1(S) = 0, \qquad \Delta_2(S) = 0$$

tel qu'il se présente dans la méthode d'élimination dite méthode dialytique de Sylvester.

[**12**] *Transformations permettant de décomposer la substitution* (C) *en substitutions sous-canoniques. Interprétation géométrique des substitutions sous-canoniques.* — Pour compléter la proposition qui précède, il reste à montrer quelle est la substitution qui permet de transformer la substitution canonique (C) en la substitution $(C_1 C_2 \ldots C_k)$. Nous avons indiqué au numéro 11 une pareille substitution dans le cas où $k = 2$. Il suffira d'énoncer les résultats relatifs au cas général, car les démonstrations sont analogues à celle du numéro précédent.

On obtiendra la substitution sous-canonique $(C_i)$ correspondant au facteur $\Delta_i(S)$ en considérant le quotient $\dfrac{\Delta(S)}{\Delta_i(S)}$. Soit

$$\frac{\Delta(S)}{\Delta_i(S)} = S^p - b_p S^{p-1} - b_{p-1} S^{p-2} - \ldots - b_2 S - b_1$$

ce quotient : c'est un diviseur de $\Delta(S)$ auquel correspond une multiplicité invariante $M_p$ définie par $n - p$ équations

$$P_1 = 0, \qquad P_2 = 0, \qquad \ldots\ldots, \qquad P_{n-p} = 0$$

en nombre égal au degré de $\Delta_i(S)$. On a posé comme au numéro précédent

$$P_1 = x_{p+1} - b_p x_p - b_{p-1} x_{p-1} - \ldots - b_2 x_2 - b_1 x_1$$

et on a désigné par $P_2, \ldots, P_{n-p}$ les conséquentes successives de $P_1$. On pose alors

$$z_1 = P_1, \qquad z_2 = P_2, \qquad \ldots\ldots, \qquad z_{n-p} = P_{n-p}.$$

Chacun des facteurs $\Delta_i(S)$ fournit ainsi des équations analogues à ces dernières en nombre égal au degré du facteur et on constitue ainsi les $n$ formules de transformation cherchées qui transforment la substitution (C) en la substitution $(C_1 C_2 \ldots C_k)$.

C'est là une solution du problème; mais il y en a une infinité d'autres. On peut en effet appliquer à chacune des substitutions sous-canoniques $(C_1)$, $(C_2)$, ..., $(C_k)$ une transformation automorphe (n° 6). Cela revient à remplacer $P_1$ par une combinaison linéaire $P'_1$ de $P_1, P_2, \ldots, P_n$ et à définir la multiplicité $M_p$ envisagée plus haut par les équations $P'_1 = 0$, $P'_2 = 0$, ..., $P'_{n-p} = 0$, en posant

$$P'_1 = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \ldots + \alpha_p P_{n-p}$$

et en désignant par $P'_2, P'_3, \ldots, P'_{n-p}$ les conséquentes successives de $P'_1$. Les constantes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ sont assujetties seulement à la condition que le plan $P'_1 = 0$ ne contienne pas d'autres multiplicités invariantes que celles qui correspondent aux diviseurs de $\Delta_i(S)$. Les paramètres $\alpha$ ainsi introduits sont en nombre égal au degré de $\Delta_i(S)$. Donc la substitution $(C_1 C_2 \ldots C_k)$ peut être obtenue à partir de (C) par une transformation dépendant de $n$ paramètres arbitraires, $n$ étant le nombre des variables de (C).

*Exemple :* Soit la substitution

$$(C)\qquad \begin{aligned} X_1 &= x_2, \\ X_2 &= x_3, \\ X_3 &= x_4, \\ X_4 &= x_5, \\ X_5 &= 2x_1 - x_2 - 4x_3 + 2x_4 + 2x_5. \end{aligned}$$

On a $\Delta(S) = S^5 - 2S^4 - 2S^3 + 4S^2 + S - 2$.

On peut décomposer $\Delta(S)$ en un produit de trois facteurs premiers entre eux

$$\Delta(S) = (S-2)(S-1)^2(S+1)^2 = (S-2)(S^2-2S+1)(S^2+2S+1)$$

et la substitution (C) pourra par suite être transformée en une substitution $(C_1C_2C_3)$ qui est le produit direct de trois substitutions sous-canoniques $(C_1)$, $(C_2)$, $(C_3)$ correspondant respectivement aux trois facteurs $S-2$, $S^2-2S+1$, $S^2+2S+1$. La nouvelle substitution est

$$(C_1C_2C_3)\qquad \begin{aligned} &(C_1) && Y_1 = 2y_1, \\ &(C_2) && \begin{cases} Z_1 = z_2, \\ Z_2 = -z_1 + 2z_2, \end{cases} \\ &(C_3) && \begin{cases} T_1 = t_2, \\ T_2 = -t_1 - 2t_2 \end{cases} \end{aligned}$$

en désignant par $y_1$, $z_1$, $z_2$, $t_1$, $t_2$ les nouvelles variables.

Cherchons maintenant les formules de transformation de (C) en $(C_1C_2C_3)$. On a :

$$\frac{\Delta(S)}{S-2} = S^4 - 2S^2 + 1, \quad \frac{\Delta(S)}{(S-1)^2} = S^3 - 3S - 2, \quad \frac{\Delta(S)}{(S+1)^2} = S^3 - 4S^2 + 5S - 2.$$

On pourra donc prendre les formules de transformation suivantes :

$$(T)\qquad \left|\begin{aligned} y_1 &= x_5 - 2x_3 + x_1, \\ z_1 &= x_4 - 3x_2 - 2x_1, \\ z_2 &= x_5 - 3x_3 - 2x_2, \\ t_1 &= x_4 - 4x_3 + 5x_2 - 2x_1, \\ t_2 &= x_5 - 4x_4 + 5x_3 - 2x_2. \end{aligned}\right.$$

La vérification numérique est facile : si on transforme (C) par (T), on trouve bien $(C_1C_2C_3)$.

Pour avoir ensuite *toutes les transformations* transformant (C) en $(C_1C_2C_3)$, il suffit d'appliquer à $(C_1)$, $(C_2)$ et $(C_3)$ les transformations automorphes les plus générales (n° 6). Cela revient à passer directement de (C) à $(C_1C_2C_3)$ par la transformation

$$\begin{aligned}
y_1 &= \alpha_1(x_5 - 2x_3 + x_1),\\
z_1 &= \beta_1(x_4 - 3x_2 - 2x_1) \qquad + \beta_2(x_5 - 3x_3 - 2x_2),\\
z_2 &= \beta_1(x_5 - 3x_3 - 2x_2) \qquad + \beta_2(\overline{2x_1 - x_2 - 4x_3 + 2x_4 + 2x_5} - 3x_4 - 2x_3),\\
t_1 &= \gamma_1(x_4 - 4x_3 + 5x_2 - 2x_1) + \gamma_2(x_5 - 4x_4 + 5x_3 - 2x_2),\\
t_2 &= \gamma_1(x_5 - 4x_4 + 5x_3 - 2x_2) + \gamma_2(\overline{2x_1 - x_2 - 4x_3 + 2x_4 + 2x_5} - 4x_5 + 5x_4 - 2x_3).
\end{aligned}$$

La transformation ainsi définie dépend des cinq paramètres $\alpha_1$, $\beta_1$, $\beta_2$, $\gamma_1$, $\gamma_2$.

Remarquons la définition géométrique des seconds membres de ces équations. L'équation

$$\alpha_1(x_5 - 2x_3 + x_1) = 0 \qquad \text{ou} \qquad y_1 = 0$$

représente le plan invariant $A_1$ correspondant au diviseur $S^4 - 2S^2 + 1$ de $\Delta(S)$. L'équation $z_1 = 0$ obtenue à l'aide du diviseur $(S-2)(S+1)^2$ représente un plan $A_2$ contenant le point double correspondant à $S = 2$ et la droite double correspondant à $(S+1)^2$ (¹) et ne contenant aucune autre multiplicité invariante ($\beta_1$, $\beta_2$ doivent être choisis de façon à éviter cette circonstance, et on est sûr en particulier qu'il en est ainsi si l'on prend $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 0$); l'équation $z_2 = 0$ représente le plan $A_3$ conséquent de $A_2$; l'équation $t_1 = 0$ obtenue à l'aide du diviseur $(S-2)(S-1)^2$ représente de même un plan $A_4$ contenant le point double correspondant à $S = 2$ et la droite double correspondant à $(S-1)^2$ et ne contenant aucune autre multiplicité invariante; l'équation $t_2 = 0$ représente le plan $A_5$ conséquent de $A_4$.

Ainsi on obtient la transformation de (C) en $(C_1C_2C_3)$ en prenant un nouveau polyèdre de référence formé par les plans $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$, $A_5$ que nous venons de définir.

Ceci est général : *les substitutions sous-canoniques s'obtiennent en prenant pour faces du polyèdre de référence des plans passant par certains des éléments doubles convenablement groupés.*

Supposons par exemple, pour simplifier, que l'équation caractéristique ait ses racines distinctes : la substitution proposée admet $n$ pôles distincts. Groupons ces pôles en un certain nombre de groupes, trois groupes par exemple, comprenant respectivement le premier (A) les pôles $A_1, A_2, \ldots, A_p$; le second (B) les pôles $B_1, B_2, \ldots, B_q$; le troisième (C) les pôles $C_1, C_2, \ldots, C_r$; $(p + q + r = n)$. Ce groupement revient à la décomposition de $\Delta(S)$ en un produit de trois facteurs

$$\Delta(S) = \Delta_1(S) \,.\, \Delta_2(S) \,.\, \Delta_3(S),$$

(¹) Le lecteur est prié de se reporter aux n$^{os}$ 8 et 9 de ce Chapitre.

les pôles du groupe (A) étant fournis par les racines de $\Delta_1(S) = 0$, ceux du groupe (B) par les racines de $\Delta_2(S) = 0$, ceux du groupe (C) par les racines de $\Delta_3(S) = 0$. Par les $n - p$ pôles des groupes (B) et (C) passe une multiplicité invariante $M_p$ (¹); c'est la multiplicité correspondant au diviseur $\Delta_1(S)$; d'après le théorème du numéro 8, elle est définie par $n - p$ ou $q + r$ équations. Un plan quelconque $P_1$ contenant cette multiplicité, c'est-à-dire contenant les pôles des groupes (B), (C), mais ne contenant aucun pôle du groupe (A), dépend, sous forme homogène, de $p$ paramètres. Les conséquents successifs $P_2$, $P_3$, ... de ce plan contiennent les mêmes pôles que $P_1$; il en résulte que les plans $P_1, P_2, \ldots, P_p$ sont indépendants, mais que le plan $P_{p+1}$ passe par la multiplicité $M_p$ définie par $P_1, P_2, \ldots, P_p$. Donc si l'on désigne par la même notation $P_i$ le premier membre de l'équation du plan $P_i$, on a une relation de la forme

$$P_{p+1} \equiv b_1 P_1 + b_2 P_2 + \ldots + b_p P_p,$$

d'où le premier groupe sous-canonique en prenant pour nouvelles variables $z_1 = P_1$, $z_2 = P_2, \ldots, z_p = P_p$. On prendra ensuite un plan quelconque $Q_1$ contenant les pôles des groupes (C), (A) et ne contenant aucun pôle du groupe (B); ce plan et ses conséquents $Q_1, Q_2, \ldots, Q_q$ fourniront le second groupe sous-canonique correspondant au diviseur $\Delta_2(S)$ et de même un plan quelconque $R_1$ contenant les pôles des groupes (A), (B) et ne contenant aucun pôle du groupe (C), adjoint à ses conséquents $R_2, R_3, \ldots, R_r$, fournira le troisième groupe sous-canonique correspondant au diviseur $\Delta_3(S)$.

On voit ainsi, dans un cas particulier (racines distinctes), l'origine géométrique de la forme sous-canonique, Mais ce raisonnement, pour être rigoureux, exige qu'on ait démontré l'indépendance des formes linéaires $P_1, P_2, \ldots, P_p$; $Q_1, Q_2, \ldots, Q_q$; $R_1, R_2, \ldots, R_r$, ce qui a été fait en toute rigueur par la méthode algébrique du numéro 11. En outre le cas où l'équation caractéristique a des racines multiples ne pourrait être traité par cette méthode géométrique que comme cas limite : si deux pôles $A_1$, $A_2$, par exemple, viennent se confondre, la droite $A_1A_2$ a une position limite qui est une droite double, et le plan $Q_1$, par exemple, qui était assujetti à contenir $A_1$ et $A_2$ devra contenir maintenant cette droite double (c'est ce qui arrivait dans l'exemple numérique précédent). Dans la méthode algébrique du numéro 11, le même fait géométrique est exprimé implicitement; mais la décomposition est obtenue en toute rigueur, et dans tous les cas, par cette méthode, sans avoir à considérer le cas des pôles multiples comme un cas limite du cas général.

[**13**] *Retour de la forme canonique* (C) *à la forme canonique de M. Jordan.* — La décomposition de $\Delta(S)$ en facteurs binômes de la forme $(S - a)^\alpha$ donne une décom-

(¹) Nous employons ici les notations du n° 8.

position de (C) en substitutions sous-canoniques d'où nous tirerons immédiatement la forme canonique classique de M. Jordan.

Soit donc une substitution linéaire réduite à sa forme canonique (C)

$$X_1 = x_2, \quad X_2 = x_3, \quad \ldots\ldots, \quad X_{n-1} = x_n, \quad X_n = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n$$

et soit

$$\Delta(S) = S^n - a_n S^{n-1} - a_{n-1} S^{n-2} - \ldots - a_2 S - a_1 = 0$$

l'équation caractéristique.

Supposons d'abord les racines de cette équation distinctes et soient $S_1, S_2, \ldots, S_n$ ces racines. On a :

$$\Delta(S) = (S - S_1)(S - S_2) \ldots (S - S_n).$$

D'après les résultats des numéros 11 et 12, à cette décomposition de $\Delta(S)$ en $n$ facteurs correspond la forme réduite suivante formée de $n$ substitutions sous-canoniques correspondant respectivement aux $n$ facteurs :

$$Y_1 = S_1 y_1, \qquad Y_2 = S_2 y_2, \qquad \ldots\ldots, \qquad Y_n = S_n y_n.$$

C'est la forme canonique classique de M. Jordan dans le cas où les racines de l'équation caractéristique sont distinctes.

Les formules de passage des coordonnées $x$ aux coordonnées $y$ s'obtiendront en formant $\frac{\Delta(S)}{S - S_i}$. Posons

$$\frac{\Delta(S)}{S - S_i} = b_1 + b_2 S + \ldots + b_{n-1} S^{n-1}.$$

On posera :

$$y_i = b_{n-1} x_n + b_{n-2} x_{n-2} + \ldots + b_2 x_2 + b_1 x_1.$$

L'équation $y_i = 0$ représente un plan invariant; dans la forme canonique de M. Jordan, les plans de référence sont précisément les plans invariants de l'homographie.

Supposons maintenant que l'équation caractéristique ait des racines multiples et soit

$$\Delta(S) = (S - S_1)^\alpha (S - S_2)^\beta \ldots .$$

A chacun des facteurs $(S - S_1)^\alpha$, $(S - S_2)^\beta$, ... correspond une substitution sous-canonique. Considérons par exemple une racine $a$ d'ordre $m$. Au facteur $(S - a)^m$ correspond la substitutiou sous-canonique

$$(19) \qquad X_1 = x_2, \quad X_2 = x_3, \quad \ldots\ldots, \quad X_{m-1} = x_m,$$
$$X_m = C_m^1 a x_m - C_m^2 a^2 x_{m-1} + C_m^3 a^3 x_{m-3} + \ldots + (-1)^m a^m x_1,$$

$C^1_m$, $C^2_m$, ... étant les coefficients de la formule du binôme pour l'exposant $m$. Il est facile de passer de cette substitution à la forme canonique de M. Jordan. Employons la notation symbolique $[x-a]^m$ pour désigner la forme linéaire suivante :

$$[x-a]^m = x_{m+1} - C^1_m a x_m + C^2_m a^2 x_{m-1} + \ldots + (-1)^m C^m_m a^m x_1$$

et remarquons que le second membre devient $(S-a)^m$ lorsqu'on y remplace $x_1$, $x_2$, ..., $x_m$, $x_{m+1}$ par $1$, $S$, $S^2$, ..., $S^m$ respectivement. Posons alors

$$(20)\quad \begin{cases} y_1 = [x-a]^{m-1} = x_m - C^1_{m-1} a x_{m-1} + C^2_{m-1} a^2 x_{m-2} - C^3_{m-1} a^3 x_{m-3} + \ldots, \\ y_2 = [x-a]^{m-2} = x_{m-1} - C^1_{m-2} a x_{m-2} + C^2_{m-2} a^2 x_{m-3} - C^3_{m-2} a^3 x_{m-3} + \ldots, \\ y_3 = [x-a]^{m-3} = \ldots, \\ \vdots \\ y_{m-1} = [x-a]^1 = x_2 - a x_1, \\ y_m = x_1. \end{cases}$$

Si l'on remplace $x_1, x_2, \ldots, x_m$ par $1, S, S^2, \ldots, S^{m-1}$, les quantités $y_1, y_2, \ldots, y_m$ prennent les valeurs

$$y_1 = (S-a)^{m-1}, \quad y_2 = (S-a)^{m-2}, \quad \ldots\ldots, \quad y_{m-1} = S-a, \quad y_m = 1.$$

Pour passer de $y_1, y_2, \ldots, y_m$ à $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$, il faut remplacer dans ces formules $x_1, x_2, \ldots, x_m$ par $X_1, X_2, \ldots, X_m$; remarquons que si l'on donne comme plus haut à $x_1, x_2, \ldots, x_m$ les valeurs $1, S, S^2, \ldots, S^{m-1}$, les quantités $X_1, X_2, \ldots, X_m$ deviendront

$$X_1 = x_2 = S, \quad X_2 = S^2, \quad \ldots\ldots, \quad X_{m-1} = S^{m-1}, \quad X_m = S^m - (S-a)^m$$

et l'on aura

$$\begin{aligned} Y_1 = X_m - C^1_{m-1} a X_{m-1} + \ldots &= S^m - (S-a)^m - S[S^{m-1} - (S-a)^{m-1}] \\ &= (S-a)^{m-1}[S - (S-a)] = a(S-a)^{m-1}, \end{aligned}$$

d'où en revenant des puissances de S aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$, puis aux variables transformées $y_1, y_2, \ldots$

$$Y_1 = a y_1.$$

On aura de même

$$\begin{aligned} Y_2 = X_{m-1} - C^1_{m-2} a X_{m-2} + \ldots &= S^{m-1} - C^1_{m-2} a S^{m-2} + \ldots + (-1)^m a^m S \\ &= S(S-a)^{m-2} \\ &= (S-a)^{m-2}(S-a+a) \\ &= (S-a)^{m-1} + a(S-a)^{m-2}, \end{aligned}$$

d'où

$$Y_2 = y_1 + a y_2.$$

Par le même procédé, on démontre que l'on a

$$Y_3 = y_2 + a y_3$$

et ainsi de suite. Donc finalement la substitution transformée de la substitution (19) par la substitution (20) est la suivante :

$$\begin{aligned} Y_1 &= a y_1, \\ Y_2 &= y_1 + a y_2, \\ Y_3 &= y_2 + a y_3, \\ &\vdots \\ Y_m &= y_{m-1} + a y_m. \end{aligned}$$

On voit que la substitution (19) est ainsi ramenée à la forme canonique de M. Jordan.

A chacune des racines multiples de $\Delta(S)$ correspond un groupe réduit analogue au précédent et on retrouve ainsi dans le cas général la forme canonique de M. Jordan.

*Exemple.* — Transformons de cette façon la substitution sous-canonique correspondant au diviseur $(S-1)^4$.

C'est la substitution

$$\begin{aligned} X_1 &= x_2, \\ X_2 &= x_3, \\ X_3 &= x_4, \\ X_4 &= 4x_4 - 6x_3 + 4x_2 - x_1. \end{aligned}$$

Il suffira, pour obtenir la forme canonique de M. Jordan, de poser

$$\begin{aligned} y_1 &= [x-1]^3 = x_4 - 3x_3 + 3x_2 - x_1, \\ y_2 &= [x-1]^2 = x_3 - 2x_2 + x_1, \\ y_3 &= [x-1]^1 = x_2 - x_1, \\ y^4 &= \qquad\quad = x_1, \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned} x_1 &= y_4, \\ x \; &= y_4 + y_3, \\ x_3 &= y_4 + 2y_3 + y_2, \\ x_4 &= y_4 + 3y_3 + 3y_2 + y_1. \end{aligned}$$

La substitution transformée est :

$$\begin{aligned}
Y_1 &= X_4 - 3X_3 + 3X_2 - X_1 &&= x_4 - 3x_3 + 3x_2 - x_1 &&= y_1, \\
Y_2 &= X_3 - 2X_2 + X_1 &&= x^4 - 2x_3 + x_2 &&= y_1 + y_2, \\
Y_3 &= X_2 - X_1 &&= x_3 - x_2 &&= y_2 + y_3, \\
Y_4 &= X_1 &&= x_2 &&= y_3 + y_4.
\end{aligned}$$

C'est bien là la forme canonique de M. Jordan.

## CHAPITRE III

### Forme canonique (C) des substitutions linéaires admettant une infinité de pôles.

[**1**] *Réduction de la substitution donnée par l'introduction d'un premier groupe canonique.* — Le cas où la substitution n'a qu'un nombre fini de pôles a été étudié dans le chapitre précédent. Nous supposerons donc maintenant que la substitution a une infinité de pôles. Il résulte de là qu'une forme linéaire $P_1$ *à coefficients arbitraires*

$$P_1 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$$

et ses *conséquentes* $P_2, P_3, \dots, P_n$, où $n$ désigne le nombre des variables, sont des formes *dépendantes*, quelle que soit la forme $P_1$ (chap. II, n° 3).

Il existe donc un entier $m$, inférieur au nombre des variables $n$, tel que les $m$ premières conséquentes $P_1, P_2, \dots, P_m$ soient indépendantes et que $P_{m+1}$ soit une combinaison linéaire (à coefficients indépendants de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$) des conséquentes précédentes $P_1, P_2, \dots, P_m$. On aura

$$(1) \qquad P_{m+1} \equiv a_1 P_1 + a_2 P_2 + \dots + a_m P_m$$

et cette relation devant avoir lieu quels que soient les coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ de $P_1$, il en résulte que la même relation doit avoir lieu entre les coefficients de $\alpha_1$, de $\alpha_2, \dots$, de $\alpha_m$ dans l'équation (1), et comme ces coefficients sont des formes linéaires à coefficients indépendants de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, il en résulte que $a_1, a_2, \dots, a_m$ *sont indépendants de ces coefficients* $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$.

Il se peut que, pour des valeurs *particulières* de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ il y ait une relation analogue à la relation (1) entre les conséquentes $P_1, P_2, \dots, P_r, P_{r+1}$, $r$ étant inférieur à $m$ : cela aura lieu si le plan $P_1$ contient quelque élément invariant, pôle, droite double, etc..., qu'il ne contenait pas en général. Il est donc essentiel de se rappeler que la relation (1) a été supposée obtenue pour des valeurs *arbitraires* de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$. Dans le chapitre II, une pareille relation avait été obtenue pour $m = n$ : le cas actuel est celui où la plus petite valeur de $m$ pour laquelle la relation a lieu est inférieure à $n$.

La relation (1) permet d'effectuer un premier changement de variables dans la substitution linéaire donnée en prenant pour $m$ des nouvelles variables les formes linéaires indépendantes $P_1, P_2, \dots, P_m$. Désignons encore ces nouvelles variables par

$x_1, x_2, \ldots, x_m$ pour ne pas compliquer les notations. La substitution linéaire donnée aura alors la forme

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} X_1 &= x_2, \\ X_2 &= x_3, \\ &\vdots \\ X_{m-1} &= x_m, \\ X_m &= a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_m x_m, \\ X_{m+1} &= \alpha_{1,1}x_1 + \alpha_{1,2}x_2 + \ldots + \alpha_{1,m}x_m + \alpha_{1,m+1}x_{m+1} + \ldots + \alpha_{1,n}x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_{m+i} &= \alpha_{i,1}x_1 + \alpha_{i,2}x_2 + \ldots + \alpha_{i,m}x_m + \ldots\ldots\ldots\ldots + \alpha_{i,n}x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

$$(i = 1, 2, \ldots\ldots, n - m).$$

Elle comprend un premier groupe canonique formé des $m$ premières équations et contenant les $m$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$. En général, nous appellerons *groupe canonique* un système d'équations de la forme des $m$ premières équations (2).

La nouvelle substitution (2) possédera évidemment la même propriété que la substitution (1) : *une forme linéaire* $P_1$ *à coefficients arbitraires des nouvelles variables et ses conséquentes* $P_2, P_3, \ldots, P_{m+1}$ *donneront lieu à la relation* (1). Il suffit en effet d'effectuer le changement de variables dans la relation (1) écrite avec les variables primitives : $P_1, P_2, \ldots, P_{m+1}$ deviennent des fonctions des nouvelles variables; mais par rapport aux nouvelles variables, ce sont encore les conséquentes successives déduites de $P_1$ par la transformation (2).

[**2**] *Introduction d'un second groupe canonique. Forme réduite provisoire de la substitution donnée.* — La forme réduite (2) contient un premier groupe canonique formé par les $m$ premières équations. Une deuxième réduction va introduire un second groupe canonique.

Soit $Q_1$ une forme linéaire de l'ensemble des variables $x$ qui figurent dans la substitution (2),

$$Q_1 = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_m x_m + \beta_{m+1} x_{m+1} + \ldots + \beta_n x_n,$$

dans laquelle les coefficients de $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ont des valeurs numériques quelconques et les coefficients $\beta_{m+1}, \beta_{m+2}, \ldots, \beta_n$ *des valeurs arbitraires.* Soient de même $Q_2, Q_3 \ldots$ les conséquentes successives déduites de $Q_1$ par la substitution (2).

Il existe un entier $p$ tel que $Q_1, Q_2, \ldots, Q_p, x_1, x_2, \ldots, x_m$ soient des formes linéaires indépendantes et $Q_{p+1}$ une forme linéaire dépendant linéairement de $Q_1, Q_2, \ldots, Q_p, x_1, x_2, \ldots, x_m$ et cela pour des valeurs arbitraires de $\beta_{m+1}, \beta_{m+2}, \ldots, \beta_n$.

Le nombre $p$ est au plus égal à $n-m$, car dans tous les cas les $n+1$ formes $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n-m+1}, x_1, x_2, \ldots, x_m$ des $n$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont dépendantes.

D'autre part, et c'est là un point important, *ce nombre $p$ est au plus égal à $m$*, puisque les formes $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m, Q_{m+1}$ *qui vérifient la relation* (1) *du numéro 1* [1] sont dépendantes, ce qui revient à dire que le système des formes $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m, Q_{m+1}, x_1, x_2, \ldots, x_m$ est formé de formes dépendantes.

On aura donc une identité de la forme

$$Q_{p+1} \equiv \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_m x_m + b_1 Q_1 + b_2 Q_2 + \ldots + b_p Q_p \qquad (p \leqslant m). \tag{3}$$

Les formes $Q_1, Q_2, \ldots, Q_p, x_1, x_2, \ldots, x_m$ étant indépendantes, on peut les prendre en qualité de $m+p$ nouvelles variables. En d'autres termes, on garde les variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$ et on remplace $p$ des variables $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots$ par les nouvelles variables $y_1, y_2, \ldots, y_p$ liées aux anciennes variables par les relations

$$\begin{gathered} y_1 = Q_1, \\ y_2 = Q_2, \\ \vdots \\ y_p = Q_p. \end{gathered}$$

La substitution (2) prendra alors la forme

$$\begin{cases} X_1 = x_2, \\ X_2 = x_3, \\ \vdots \\ X_{m-1} = x_m, \\ X_m = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_m x_m; \end{cases} \tag{4}$$
$$\begin{cases} Y_1 = y_2, \\ Y_2 = y_3, \\ \vdots \\ Y_{p-1} = y_p, \\ Y_p = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_m x_m + b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_p y_p. \end{cases}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Si $m+p=n$, le système (4) comprend uniquement les deux groupes d'équa-

---

[1] Nous avons vu, en effet, que la relation (1) est vérifiée par *n'importe quelle forme* et ses conséquentes jusqu'à l'ordre $m+1$.

tions (4) écrites explicitement; si, au contraire, on a $m+p<n$, il y a dans le système (4), outre les équations écrites explicitement, des équations de la forme

$$Y_{p+i}=f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_p, y_{p+1}, y_{p+2}, \ldots),$$

les $f_i$ étant des fonctions linéaires et les nouvelles variables étant, outre les variables $x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_p$ écrites explicitement, des variables $y_{p+1}, y_{p+2}, \ldots$ en nombre suffisant pour que la substitution transformée (4) comprenne bien $n$ variables comme la substitution primitive. Nous représentons l'ensemble de ces équations par la ligne de points qui termine les équations (4).

*Supposons d'abord* $m+p=n$. La substitution (4), que nous appellerons forme réduite provisoire, comprend alors deux groupes d'équations dont le premier est un groupe canonique. Le second groupe n'est pas un groupe canonique, à cause de la présence des termes $\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2, \ldots+\lambda_m x_m$. Mais nous montrerons bientôt qu'on peut faire disparaître ces termes par une nouvelle transformation. Nous devons, au préalable, démontrer deux propositions importantes relativement aux coefficients $b_1, b_2, \ldots, b_p$ et $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$.

**[3]** *Démonstration de deux propositions concernant les coefficients de la forme réduite provisoire* (4).

THÉORÈME I. — *Le polynôme*

$$\Delta_2(S)=S^p-b_p S^{p-1}-b_{p-1}S^{p-2}-\ldots-b_2 S-b_1$$

*est un diviseur du polynôme*

$$\Delta_1(S)=S^m-a_m S^{m-1}-a_{m-1}S^{m-2}-\ldots-a_2 S-a_1\,(^1).$$

Ce théorème va résulter du fait que la forme $Q_1$ et ses conséquentes jusqu'à l'ordre $p+1$ vérifient la relation

$$Q_{p+1}=\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\ldots+\lambda_m x_m+b_1 Q_1+b_2 Q_2+\ldots+b_p Q_p \tag{3}$$

et que, d'autre part, cette même forme et ses conséquentes jusqu'à l'ordre $m+1$ vérifient la relation

$$Q_{m+1}=a_1 Q_1+a_2 Q_2+\ldots+a_m Q_m. \tag{5}$$

Cette dernière relation est en effet vérifiée par n'importe quelle forme, ainsi qu'on l'a vu au numéro 1.

---

(1) Dans la théorie des diviseurs élémentaires (chap. I, n° 6), $\Delta_1(S)$, $\Delta_2(S)$ apparaissent comme les deux premiers produits élémentaires du déterminant caractéristique $\Delta(S)$.

Donnons aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$ la valeur zéro et aux autres $n-m$ variables des valeurs telles que l'on ait :

$$Q_1 = 1, \quad Q_2 = S, \quad Q_3 = S^2, \quad \ldots\ldots, \quad Q_p = S^{p-1}.$$

Puisque $Q_1, Q_2, \ldots, Q_p, x_1, x_2, \ldots, x_m$ constituent un système de formes indépendantes, on peut choisir les variables de façon que ces formes prennent des valeurs données, en particulier les valeurs que nous venons de choisir.

Calculons dans ces conditions les valeurs prises par $Q_{p+1}, Q_{p+2}, \ldots, Q_{m+1}$ et écrivons que ces valeurs vérifient la relation (5).

La relation (3) donne :

$$\begin{aligned} Q_{p+1} &= b_1 + b_2 S + \ldots + b_p S^{p-1} \\ &= (b_1 + b_2 S + \ldots + b_p S^{p-1} - S^p) + S^p. \end{aligned}$$

Introduisons la notation classique des congruences. Nous aurons

$$Q_{p+1} \equiv S^p \qquad [\text{mod } \Delta_2(S)].$$

Mais la relation (3) donne aussi, par itérations successives, pour

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_m = 0,$$

la relation

$$Q_{p+i} = b_1 Q_i + b_2 Q_{i+1} + \ldots + \ldots + b_p Q_{i+p-1},$$

d'où successivement, pour $i = 2, 3, \ldots,$

$$\begin{aligned} Q_{p+2} &\equiv b_1 S + b_2 S^2 + \ldots + b_p S^p \equiv S^{p+1}, \\ Q_{p+3} &\equiv \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \equiv S^{p+2} \quad [\text{mod } \Delta_2(S)]. \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

On a donc finalement

$$Q_i \equiv S^{i-1} \qquad [\text{mod } \Delta_2(S)]$$

pour toutes les valeurs de $i$.

Transportons ces valeurs dans la relation (5). Elle devient :

$$S^m - a_m S^{m-1} - \ldots - a_2 S - a_1 \equiv 0 \qquad [\text{mod } \Delta_2(S)]$$

ou

$$\Delta_1(S) \equiv 0 \qquad [\text{mod } \Delta_2(S)].$$

On a ainsi établi que $\Delta_1(S)$ est divisible par $\Delta_2(S)$.

*Conséquence.* — Il résulte de là que les coefficients $b_1, b_2, \ldots, b_p$ sont indépendants des coefficients arbitraires des formes $P_1, Q_1$ choisies pour faire la réduction.

Nous l'avons en effet établi au numéro I en ce qui concerne les coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_m$, et le théorème précédent montre qu'il en est de même pour les coefficients $b_1, b_2, \ldots, b_p$.

THÉORÈME II. — *Le polynôme*

$$\pi(S) = \lambda_m S^{m-1} + \lambda_{m-1} S^{m-2} + \ldots + \lambda_2 S + \lambda_1$$

*est divisible par le polynôme*

$$\Delta_2(S) = S^p - b_p S^{p-1} - \ldots - b_2 S - b_1.$$

Nous partirons encore des relations (3) et (5). Mais ici nous donnerons aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$ les valeurs

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = S, \qquad x_3 = S^2, \qquad \ldots\ldots, \qquad x_m = S^{m-1}$$

et aux autres variables des valeurs vérifiant les équations

$$Q_1 = 0, \qquad Q_2 = 0, \qquad \ldots\ldots, \qquad Q_p = 0.$$

Ceci est possible, puisque $Q_1, Q_2, \ldots, Q_p, x_1, x_2, \ldots, x_m$ constituent un système de formes linéaires indépendantes. Cherchons les valeurs prises par $Q_{p+1}, Q_{p+2}, \ldots$. Il suffira de donner à $Q_1, Q_2, \ldots, Q_p$ la valeur zéro dans la relation (3) et dans les relations qu'on en déduit par itération. Si l'on pose

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_m x_m = \pi_1,$$

la relation (3) s'écrit :

$$Q_{p+1} = \pi_1 + b_1 Q_1 + b_2 Q_2 + \ldots + b_p Q_p.$$

Utilisons la notion de système de *modules* due à Kronecker [1].

On aura :

$$Q_{p+1} \equiv \pi_1 \qquad [\text{mod}^{\text{es}}\ Q_1, Q_2, \ldots, Q_p].$$

Si l'on donne à $Q_1, Q_2, \ldots, Q_p$ la valeur zéro, la congruence se transforme en iden-

---

[1] KRONECKER, *Vorlesungen über Zahlentheorie*.

Dans ce qui suit, il nous suffira d'adopter la définition suivante : Deux formes linéaires A, B sont dites *congrues* suivant le système de modules $Q_1, Q_2, \ldots, Q_p$, si l'on a

$$A = B + \alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2 + \ldots + \alpha_p Q_p,$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ *étant des constantes*. On écrit alors :

$$A \equiv B \qquad [\text{mod}^{\text{es}}\ Q_1, Q_2, \ldots, Q_p].$$

tité. Désignons par $\pi_2, \pi_3, \ldots$ les *conséquentes* successives déduites de $\pi_1$ par la substitution linéaire donnée. On aura :

$$Q_{p+2} = \pi_2 + b_1 Q_2 + b_2 Q_3 + \ldots + b_{p-1} Q_p + b_p Q_{p+1}$$

ou

$$\begin{aligned} Q_{p+2} &\equiv \pi_2 + b_p Q_{p+1} \\ &\equiv \pi_2 + b_p \pi_1 \qquad [\text{mod}^{\text{es}}\ Q_1, Q_2, \ldots, Q_p]. \end{aligned}$$

On a ensuite :

$$\begin{aligned} Q_{p+3} &\equiv \pi_3 + b_{p-1} Q_{p+1} + b_p Q_{p+2} \\ &\equiv \pi_3 + b_{p-1}\pi_1 + b_p(\pi_2 + b_p \pi_1) \\ &\equiv \pi_3 + b_p \pi_2 + (b_{p-1} + b_p^2)\pi_1. \end{aligned}$$

En général, on aura pour $Q_{p+i}$ une congruence de la forme

$$(6) \qquad Q_{p+i} \equiv \pi_i + q_1 \pi_{i-1} + q_2 \pi_{i-2} + \ldots + q_{i-1}\pi_1 \qquad [\text{mod}^{\text{es}}\ Q_1, Q_2, \ldots, Q_p],$$

les coefficients $q_1, q_2, \ldots$, indépendants de $i$, étant des fonctions de $b_1, b_2, \ldots, b_p$. On a

$$q_1 = b_p, \qquad q_2 = b_{p-1} + b_p^2$$

et l'on voit aisément la loi de formation de ces coefficients : *ce sont les coefficients du développement suivant les puissances croissantes de* $\frac{1}{S}$ *du quotient de* 1 *par le polynôme* $S^p - b_p S^{p-1} \ldots - b_2 S - b_1$. Posons en effet :

$$(7) \qquad \frac{1}{\Delta_2(S)} = \frac{1}{S^p - b_p S^{p-1} - \ldots - b_2 S - b_1} = \frac{1}{S^p} + \frac{q_1}{S^{p+1}} + \frac{q_2}{S^{p+2}} + \ldots \frac{q_i}{S^{p+i}} + \ldots.$$

On constate immédiatement que l'on a bien

$$q_1 = b_p, \qquad q_2 = b_{p-1} + b_p^2$$

et nous allons démontrer, par induction complète, qu'en général les coefficients de la congruence (6) coïncident avec les coefficients du développement (7). Supposons la loi vérifiée jusqu'à $Q_{p+i-1}$. On aura :

$$(8) \qquad \left| \begin{aligned} &Q_{p+1} \equiv \pi_1, \\ &Q_{p+2} \equiv \pi_2 + q_1\pi_1, \\ &Q_{p+3} \equiv \pi_3 + q_1\pi_2 + q_2\pi_1, \\ &\vdots \\ &Q_{p+i-1} \equiv \pi_{i-1} + q_1\pi_{i-2} + q_2\pi_{i-3} + \ldots + q_{i-2}\pi_1. \end{aligned} \right. \qquad (\text{mod}^{\text{es}}\ Q_1, Q_2, \ldots, Q_p).$$

On a, par itération de la relation (3),

$$Q_{p+i} \equiv \pi_i + b_{p-i+2} Q_{p+1} + b_{p-i+3} Q_{p+2} + \ldots + b_p Q_{p+i-1},$$

ou, en remplaçant $Q_{p+1}$, $Q_{p+2}$, ..., $Q_{p+i-1}$ par les valeurs (8) et en ordonnant en $\pi_1$, $\pi_2$ ...

$$\begin{aligned}Q_{p+i} \equiv \pi_i + b_p\pi_{i-1} + (b_pq_1 + b_{p-1})\pi_{i-2} + (b_pq_2 + b_{p-1}q_1 + b_{p-2})\pi_{i-3} + \ldots \\ + (b_pq_{i-2} + b_{p-1}q_{i-3} + \ldots + b_{p-i}q_2 + b_{p-i+1}q_1 + b_{p-i+2})\pi_1.\end{aligned}$$

Or, il résulte immédiatement de la théorie de la division qu'on a dans le développement (7) :

$$\begin{aligned}&q_1 = b_p,\\ &q_2 = b_pq_1 + b_{p-1},\\ &q_3 = b_pq_2 + b_{p-1}q_1 + b_{p-1},\\ &\vdots\\ &q_{i-1} = b_pq_{i-2} + b_{p-1}q_{i-3} + \ldots + b_{p-i+1}q_1 + b_{p-i+2}.\end{aligned}$$

L'égalité précédente devient donc

$$Q_{p+i} \equiv \pi_i + q_1\pi_{i-1} + q_2\pi_{i-2} + \ldots + q_{i-1}\pi_1 \qquad (\text{mod}^{\text{es}}\ Q_1, Q_2, \ldots, Q_p).$$

C'est la relation (6) avec les coefficients du développement (7).

Si maintenant on donne aux variables les valeurs indiquées plus haut, telles que $Q_1$, $Q_2$ ..., $Q_p$ soient nuls, les congruences (8) deviennent des identités. Dans ces identités, donnons à $x_1$, $x_2$, ..., $x_m$ les valeurs respectives 1, S, $S^2$, ..., $S^{m-1}$. Le polynôme $\pi_1$ devient $\pi(S)$. Pour savoir ce que deviennent les conséquents successifs $\pi_2$, $\pi_3$, ... de $\pi(S)$, remarquons d'abord que le conséquent $X_m$ de $x_m$ devient

$$X_m = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_mx_m = a_1 + a_2S + \ldots + a_mS^{m-1}.$$

Introduisons maintenant des congruences suivant le module

$$\Delta_1(S) = S^m - a_mS^{m-1} - \ldots - a_2S - a_1.$$

On aura

$$X_m \equiv S^m \qquad [\text{mod}\ \Delta_1(S)].$$

Les conséquents successifs $X_{m+1}$, $X_{m+2}$, ... de $x_m$ seront de même :

$$\begin{aligned}X_{m+1} &= a_1x_2 + a_2x_3 + \ldots + a_{m-1}x_m + a_mX_m\\ &\equiv a_1S + a_2S^2 + \ldots + a_mS^m \equiv S\,.\,S^m \equiv S^{m+1},\\ X_{m+2} &\equiv S^{m+2}.\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Dans ces conditions, $\pi_1$, $\pi_2$, ... prennent des valeurs vérifiant les congruences suivantes :

$$\begin{aligned}&\pi_1 \equiv \pi(S),\\ &\pi_2 \equiv S\pi(S), \qquad [\text{mod}\ \Delta_1(S)].\\ &\pi_i \equiv S^{i-1}\pi(S),\end{aligned}$$

Les identités (8) nous donnent alors :

$$\left.\begin{aligned}
Q_{p+1} &\equiv \pi(S),\\
Q_{p+2} &\equiv \pi(S)\,[S+q_1],\\
Q_{p+3} &\equiv \pi(S)\,[S^2+q_1S+q_2],\\
&\vdots\\
Q_m &\equiv \pi(S)\,[S^{m-p-1}+q_1S^{m-p-2}+\ldots+q_{m-p-2}S+q_{m-p-1}],\\
Q_{m+1} &\equiv \pi(S)\,[S_{m-p}+q_1S_{m-p-1}+\ldots+q_{m-p-1}S+q_{m-p}].
\end{aligned}\right\}\ [\bmod \Delta_1(S)].$$

Écrivons maintenant que ces valeurs vérifient l'identité (5); cette identité, lorsqu'on donne à $Q_1, Q_2, \ldots, Q_p$ la valeur zéro, devient

$$Q_{m+1}-a_mQ_m-a_{m-1}Q_{m-1}-\ldots-a_{p+1}Q_{p+1}=0.$$

En remplaçant $Q_{p+1}, \ldots$ par leurs valeurs, nous obtenons une congrueuce de la forme

$$(9)\qquad 0\equiv \pi(S)\,[S^{m-p}+r_1S^{m-p-1}+r_2S^{m-p-2}+\ldots+r_{m-p-1}S+r_{m-p}]$$

avec les valeurs suivantes des coefficients

$$\begin{aligned}
r_1 &= q_1-a_m,\\
r_2 &= q_2-a_mq_1-a_{m-1},\\
r_3 &= q_3-a_mq_2-a_{m-1}q_1-a_{m-2},\\
&\vdots\\
r_{m-p} &= q_{m-p}-a_mq_{m-p-1}-a_{m-1}q_{m-p-2}-\ldots-a_{p+2}q_1-a_{p+1}.
\end{aligned}$$

Ces coefficients sont comme on le reconnaît aisément les coefficients du quotient $\dfrac{\Delta_1(S)}{\Delta_2(S)}$. On a en effet :

$$\frac{1}{\Delta_2(S)}\equiv\frac{1}{S^p}+\frac{q_1}{S^{p+1}}+\frac{q_2}{S^{p+2}}+\ldots+\frac{q_{m-p}}{S^m}+\ldots$$

$$\Delta_1(S)=S^m-a_mS^{m-1}-\ldots-a_2S-a_1.$$

En ordonnant le produit $\Delta_1(S)\times\dfrac{1}{\Delta_2(S)}$, ou $\dfrac{\Delta_1(S)}{\Delta_2(S)}$, qui se réduit à un polynôme (Théorème I), on obtient pour ce polynôme la valeur

$$\frac{\Delta_1(S)}{\Delta_2(S)}=S^{m-p}+r_1S^{m-p-1}+\ldots+r_{m-p}.$$

La congruence (9) devient donc

$$\pi(S)\,.\,\frac{\Delta_1(S)}{\Delta_2(S)}\equiv 0\qquad [\bmod \Delta_1(S)]$$

ou encore

$$\pi(S) \,.\, \Delta_1(S) = \textit{multiple de } \Delta_1(S) \,.\, \Delta_2(S),$$

d'où

$$\pi(S) = \textit{multiple de } \Delta_2(S).$$

Le théorème est démontré.

[**4**] *Forme canonique définitive dans le cas où cette forme comprend deux groupes canoniques.* — A l'aide des deux théorèmes précédents, on peut démontrer maintenant la proposition suivante annoncée à la fin du numéro 2 : *on peut faire disparaître $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ dans la substitution* (4), *c'est-à-dire la transformer en une substitution de même forme dans laquelle $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ soient nuls.*

En effet, $\pi(S)$ étant divisible par $\Delta_2(S)$ (théorème II), on a

$$\pi(S) = \Delta_2(S) \,.\, \varphi(S)$$

en désignant le quotient par $\varphi(S)$. Soit

$$\varphi(S) = k_0 + k_1 S + k_2 S^2 + \ldots + k_{m-p-1} S^{m-p-1}$$

ce quotient. Désignons par $\varphi_1$ la forme linéaire déduite de $\varphi(S)$ en y remplaçant $1, S, S^2, \ldots,$ par $x_1, x_2, x_3, \ldots$.

$$\varphi_1 = k_0 x_1 + k_1 x_2 + \ldots + k_{m-p-1} x_{m-p}$$

et soient $\varphi_2, \varphi_3, \ldots$ les conséquentes successives déduites de $\varphi_1$ par la substitution (4).

Transformons alors la substitution (4) en y laissant les variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$ et en remplaçant les variables $y_1, y_2, \ldots, y_p$ par les variables nouvelles $y'_1, y'_2, \ldots, y'_p$ définies par les équations :

$$(10) \qquad \begin{cases} y'_1 = y_1 - \varphi_1, \\ y'_2 = y_2 - \varphi_2, \\ \vdots \\ y'_p = y_p - \varphi_p; \end{cases}$$

$\varphi_1$ est une forme linéaire en $x_1, x_2, \ldots\ldots x_{m-p}$
$\varphi_2$ » » » $x_2, x_3, \ldots\ldots x_{m-p+1}$
$\vdots$
$\varphi_p$ » » » $x_p, x_{p+1}, \ldots\ldots x_{m-1}$
$\varphi_{p+1}$ » » » $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots\ldots x_m$.

Chaque forme se déduit de la précédente en augmentant tous les indices des $x$ d'une unité. Il en résulte que si on remplace $x_1, x_2, x_3, \ldots$ par $1, S, S^2, \ldots,$ les formes linéaires $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ deviennent respectivement les polynômes $\varphi(S)$, $S\varphi(S)$, $S^2\varphi(S), \ldots, S^{p-1}\varphi(S)$. Il est facile de voir maintenant que le changement de variables (10) remplit le but cherché. Le second groupe de la substitution (4) est en effet transformé par la substitution (10) de la façon suivante :

$$\begin{aligned} Y'_1 &= Y_1 - \varphi_2 = y_2 - \varphi_2 = y'_2, \\ Y'_2 &= Y_2 - \varphi_3 = y_3 - \varphi_3 = y'_3, \\ &\vdots \\ Y'_{p-1} &= \ldots\ldots\ldots\ldots = y'_p, \end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned} Y'_p = Y_p - \varphi_{p+1} &= \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_m x_m + b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_p y_p - \varphi_{p+1} \\ &= \pi_1 + b_1(y'_1 + \varphi_1) + b_2(y'_2 + \varphi_2) + \ldots + b_p(y'_p + \varphi_p) - \varphi_{p+1} \\ &= b_1 y'_1 + b_2 y'_2 + \ldots + b_p y'_p + (\pi_1 + b_1\varphi_1 + b_2\varphi_2 + \ldots + b_p\varphi_p - \varphi_{p+1}). \end{aligned}$$

Il suffira de prouver que la forme linéaire en $x_1, x_2, \ldots, x_m$

$$\pi_1 + b_1\varphi_1 + b_2\varphi_2 + \ldots + b_p\varphi_p - \varphi_{p+1}$$

est identiquement nulle. Pour cela, il suffit de prouver que le polynôme en S déduit de cette forme en y remplaçant $x_1, x_2, \ldots, x_m$ par $1, S, S^2, \ldots, S^{m-1}$ est identiquement nul. Or, on obtient ainsi, d'après les remarques faites plus haut, le polynôme

$$\pi(S) + (b_1 + b_2 S + \ldots + b_p S^{p-1} - S^p)\varphi(S)$$

ou

$$\pi(S) - \Delta_2(S)\varphi(S)$$

qui est identiquement nul, puisque $\varphi(S)$ est le quotient de $\pi(S)$ par $\Delta_2(S)$.

*La substitution (4) prend donc maintenant la forme réduite définitive*

$$(11) \quad \begin{cases} X_1 = x_2, \quad X_2 = x_3, \quad \ldots\ldots, \quad X_{m-1} = x_m, \quad X_m = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_m x_m, \\ Y'_1 = y'_2, \quad Y'_2 = y'_3, \quad \ldots\ldots, \quad Y'_{p-1} = y'_p, \quad Y'_p = b_1 y'_1 + b_2 y'_2 + \ldots + b_p y'_p \end{cases}$$

*constituée avec deux groupes canoniques.* Rappelons que dans cette forme canonique, *les constantes $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_p$ sont telles que le polynôme*

$$\Delta_1(S) = S^m - a_m S^{m-1} - \ldots - a_2 S - a_1$$

*est divisible par le polynôme*

$$\Delta_2(S) = S^p - b_p S^{p-1} - \ldots - b_2 S - b_1.$$

*Remarque.* — La transformation (10) est une transformation particulière permettant de faire disparaître les termes en $x_1, x_2, \ldots, x_m$ qui figuraient primitivement dans la dernière équation du second groupe canonique. Il est facile de voir quelle est la transformation la plus générale possédant cette propriété. Remarquons que dans les formules (10), le polynôme $\varphi_1$ ne contenait que les variables $x_1, x_2, \ldots, x_{m-p}$, et il en résultait que $\varphi_2, \ldots, \varphi_{p+1}$ se déduisaient immédiatement de $\varphi_1$ en augmentant tous les indices des variables d'une unité. Plus généralement, cherchons un changement de variables analogue à (10), remplissant comme (10) le but proposé, mais tel que le polynôme $\varphi'_1$, analogue à $\varphi_1$, employé à cet effet, puisse contenir toutes les variables jusqu'à $x_m$. Désignons par $\varphi'(S)$ le polynôme déduit de $\varphi'_1$ en y remplaçant $x_1, x_2, x_3 \ldots$ par $1, S, S^2, \ldots$. Alors à $\varphi'_i$ correspondra, non plus le polynôme $S^{i-1}\varphi'(S)$, mais un polynôme *congru* à $S^{i-1}\varphi'(S)$ suivant le module $\Delta_1(S)$ (1). La démonstration précédente montre alors que le changement de variables (10) remplira le but proposé pourvu que l'on ait

$$\pi(S) - \Delta_2(S)\varphi'(S) \equiv 0 \qquad [\bmod\ \Delta_1(S)].$$

Une première solution est celle trouvée plus haut. On prend pour $\varphi'(S)$ le quotient $\varphi(S)$ de la division de $\pi(S)$ par $\Delta_2(S)$. Pour en déduire la solution générale, posons :

$$\varphi'(S) = \varphi(S) + X(S).$$

On devra avoir :

$$\Delta_2(S)X(S) \equiv 0 \qquad [\bmod\ \Delta_1(S)].$$

Or, $\Delta_1(S)$ est divisible par $\Delta_2(S)$. On devra donc avoir :

$$X(S) \equiv 0 \qquad \left[\bmod \frac{\Delta_1(S)}{\Delta_2(S)}\right].$$

Donc la solution générale est

$$\varphi'(S) = \varphi(S) + \frac{\Delta_1(S)}{\Delta_2(S)}\lambda(S),$$

$\lambda(S)$ étant un polynôme arbitraire. Remarquons qu'il faut prendre pour $\varphi'(S)$ un polynôme de degré $m-1$ au plus. Comme $\dfrac{\Delta_1}{\Delta_2}$ est de degré $m-p$, il faut prendre pour $\lambda(S)$ un polynôme arbitraire de degré $p-1$, c'est-à-dire que $\varphi'(S)$ dépend de $p$ coefficients arbitraires.

Ainsi, *la transformation* (10) *la plus générale permettant de faire disparaître les termes en* $x_1, x_2, \ldots, x_m$ *dans la dernière équation du second groupe de la substitution* (4) *dépend de* $p$ *coefficients arbitraires.*

Il est facile de voir d'après cela de combien de paramètres dépend dans le cas actuel la substitution S la plus générale qui transforme la substitution donnée en

(1) Ainsi qu'on l'a vu par exemple pour les polynômes $\pi_1, \pi_2, \ldots$ dans la démonstration du théorème II.

la substitution canonique (C) définie par les équations (11). La première réduction faite au numéro 1 introduit d'abord comme paramètres arbitraires les coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ de la forme $P_1$ : ils sont au nombre de $n$, c'est-à-dire dans le cas actuel de $m+p$. La réduction provisoire faite au numéro 2 introduit comme paramètres arbitraires les coefficients $\beta_{m+1}, \ldots, \beta_n$ de $x_{m+1}, \ldots, x_n$ dans $Q_2$ : ils sont au nombre de $p$. Enfin la transformation (10) la plus générale que nous effectuons ensuite dépend, comme nous venons de le voir, de $p$ paramètres. Donc, en tout, la transformation S dépend de $m+3p$ coefficients arbitraires.

En particulier, *les transformations automorphes* (chap. II, n° 6) *de la forme canonique* (C) *définie par les équations* (11) *dépendent de $m+3p$ coefficients arbitraires.*

On en déduira, comme au chapitre II (n° 7), les *substitutions linéaires permutables avec la substitution donnée : ces substitutions dépendent dans le cas actuel de $m+3p$ paramètres arbitraires* [1].

[**5**] *Forme canonique* (C) *dans le cas général où cette forme est composée d'un nombre quelconque de groupes canoniques.* — Dans ce qui précède, nous avons introduit d'abord deux groupes canoniques comprenant le premier $m$ variables, le second $p$ variables, et nous avons supposé, pour plus de simplicité, que ces deux groupes canoniques épuisaient l'ensemble des variables, c'est-à-dire que l'on avait $n=m+p$ en désignant par $n$ le nombre des variables.

Supposons maintenant $m+p<n$ et étudions les nouvelles transformations permettant d'obtenir de nouveaux groupes canoniques.

Nous supposons qu'on a effectué d'abord sur la substitution donnée les transformations des numéros 1, 2, 3, 4. La substitution comprend alors : 1° un premier groupe canonique avec les variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ; 2° un second groupe canonique avec les variables $y_1, y_2, \ldots, y_p$ ; 3° un groupe d'équations quelconques contenant, outre les variables $x_1, x_2, x_m, \ldots, y_1, y_2, \ldots, y_p$, de nouvelles variables $y_{p+1}, y_{p+2}, \ldots, y_{n-m}$. Il suffira de montrer *comment on pourra introduire un troisième groupe canonique, car on passerait de la même façon du cas de $k$ groupes canoniques au cas de $k+1$ groupes.* Soit

$$(12)\quad \begin{cases} X_1=x_2, \quad X_2=x_3, \quad \ldots, \quad X_{m-1}=x_m, \quad X_m=a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_mx_m, \\ Y_1=y_2, \quad Y_2=y_3, \quad \ldots, \quad Y_{p-1}=y_p, \quad Y_p=b_1y_1+b_2y_2+\ldots+b_py_p, \\ Y_{p+1}=\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_p, y_{p+1}, y_{p+2}, \ldots), \\ Y_{p+2}=\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_p, y_{p+1}, y_{p+2}, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

[1] Rappelons que le cas actuel est celui où la substitution réduite comprend deux groupes canoniques ou, si l'on préfère, c'est le cas où le déterminant caractéristique $\Delta(S)$ est décomposable en deux produits élémentaires de degrés $m$ et $p$ $(m \geqslant p)$.

la substitution donnée comprenant déjà deux groupes canoniques écrits dans les deux premières lignes; $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ désignent des formes linéaires de l'ensemble des variables.

Nous procéderons comme au numéro 2 pour obtenir une nouvelle forme réduite provisoire. Soit $R_1$ une forme linéaire de l'ensemble des $n$ variables dans laquelle les coefficients de $x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_p$ ont des valeurs numériques quelconques, la valeur zéro par exemple, et les coefficients de $y_{p+1}, y_{p+2}, \ldots$ des valeurs arbitraires $\gamma_{p+1}, \gamma_{p+2}, \ldots$. Soient $R_2, R_3, \ldots$, les conséquentes déduites de $R_1$ par la substitution (12).

D'après la façon même dont on a obtenu les deux premiers groupes canoniques, on aura entre ces conséquentes les identités suivantes :

$$R_{m+1} \equiv a_1 R_1 + a_2 R_2 + \ldots + a_m R_m, \tag{13}$$

$$R_{p+1} \equiv k_1 x_1 + k_2 x_2 + \ldots + k_m x_m + b_1 R_1 + b_2 R_2 + \ldots + b_p R_p, \tag{14}$$

où les coefficients $k_1, k_2, \ldots, k_m$ sont tels que le polynôme $k_1 + k_2 S + \ldots + k_m S^{m-1}$, soit divisible par le polynôme $S^p - b_p S^{p-1} - \ldots - b_2 S - b_1$ ou $\Delta_2(S)$.

La relation (13) exprime la dépendance des conséquentes d'une fonction linéaire arbitraire $R_1$, la relation (14) exprime la dépendance entre ces conséquentes et les variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Enfin, il existera de même un entier $q$, *au plus égal à p*, tel que les formes $R_1, R_2, \ldots, R_q, x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_p$ soient indépendantes et tel que $R_{q+1}$ dépende linéairement de ces formes :

$$R_{q+1} \equiv \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \ldots + \mu_m x_m + \nu_1 y_1 + \ldots + \nu_p y_p + c_1 R_1 + c_2 R_2 + \ldots + c_q R_q; \tag{15}$$

cette dernière identité exprime la dépendance entre les variables $x, y$ des deux premiers groupes canoniques et les conséquentes successives de $R_1$.

Gardons les variables $x_i, y_k$ des deux premiers groupes canoniques, mais introduisons $q$ nouvelles variables $z_1, z_2, \ldots, z_q$ définies par

$$z_1 = R_1, \qquad z_2 = R_2, \qquad \ldots\ldots, \qquad z_q = R_q.$$

La substitution (12) prendra alors la forme

$$\left\{\begin{array}{l}
\left\{\begin{array}{l} X_1 = x_2, \quad X_2 = x_3, \;\ldots\ldots\; X_{m-1} = x_m, \\ X_m = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \;\ldots\ldots\; + a_m x_m; \end{array}\right. \\
\left\{\begin{array}{l} Y_1 = y_2, \quad Y_2 = y_3, \;\ldots\ldots\; Y_{p-1} = y_p, \\ Y_p = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \;\ldots\ldots\; + b_p y_p; \end{array}\right. \\
\left\{\begin{array}{l} Z_1 = z_2, \quad Z_2 = z_3, \;\ldots\ldots\; Z_{q-1} = z_q, \\ Z_q = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \;\ldots\ldots\; + \mu_m x_m + \nu_1 y_1 + \nu_2 y_2 + \ldots + \nu_p y_p + c_1 z_1 + c_2 z_2 + \ldots + c_q z_q, \end{array}\right.
\end{array}\right. \tag{16}$$

forme réduite provisoire qui comprend deux groupes canoniques et un troisième groupe *qui serait canonique si les coefficients* $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_p$ *étaient nuls*. Nous allons voir qu'on peut, comme aux numéros 3 et 4, faire disparaître ces coefficients par une nouvelle transformation.

A cet effet, nous démontrerons d'abord quelques propositions analogues aux théorèmes I et II du numéro 3 :

1° *Le polynôme*

$$\Delta_3(S) = S^q - c_q S^{q-1} - c_{q-1} S^{q-2} - \ldots - c_2 S - c_1$$

*est un diviseur du polynôme*

$$\Delta_2(S) = S^p - b_p S^{p-1} - b_{p-1} S^{p-2} - \ldots - b_2 S - b_1.$$

Il suffit pour établir cette proposition de procéder comme au numéro 3. Reprenons rapidement la démonstration en renvoyant pour les détails au numéro 3. On donne aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$ et aux variables $y_1, y_2, \ldots, y_p$ la valeur zéro et on choisit les autres variables de façon à avoir

$$R_1 = 1, \quad R_2 = S, \quad \ldots\ldots, \quad R_q = S^{q-1}.$$

Ceci est possible parce que $x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_p, R_1, R_2, \ldots, R_{q-1}$ constituent un système de formes indépendantes de l'ensemble des variables. On a alors, en vertu de la relation (15), les congruences

$$R_{q+1} \equiv S^q, \quad R_{q+2} \equiv S^{q+1}, \quad \ldots\ldots, \quad [\mathrm{mod}\ \Delta_3(S)],$$

et en portant ces valeurs dans la relation (14), on obtient

$$S^{p+1} \equiv b_1 + b_2 S + \ldots + b_p S^p \qquad [\mathrm{mod}\ \Delta_3(S)]$$

ou

$$\Delta_2(S) \equiv 0 \qquad [\mathrm{mod}\ \Delta_3(S)].$$

La proposition est ainsi démontrée.

2° *Le polynôme*

$$M(S) = \mu_1 + \mu_2 S + \ldots + \mu_m S^{m-1}$$

*et le polynôme*

$$N(S) = \nu_1 + \nu_2 S + \ldots + \nu_p S^{p-1}$$

*sont l'un et l'autre divisibles par le polynôme* $\Delta_3(S)$.

On procédera comme dans la démonstration du théorème II du numéro 3.

En ce qui concerne le polynôme $M(S)$, on donnera aux variables $y_1, y_2, \ldots, y_p$ la valeur zéro, aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$ les valeurs $1, S, S^2, \ldots, S^{m-1}$ et aux autres variables des valeurs vérifiant les équations

$$R_1 = 0, \quad R_2 = 0, \quad \ldots\ldots, \quad R_q = 0.$$

On calcule alors les valeurs prises par $R_{q+1}$, $R_{q+2}$, ... à l'aide de la relation (15), comme au numéro 3, en introduisant d'abord des congruences suivant le module $\Delta_1(S)$. En portant les valeurs ainsi calculées dans la relation (14), on obtient alors la congruence suivante :

$$(k_1 + k_2 S + \ldots + k_m S^m) - M(S)\frac{\Delta_2(S)}{\Delta_3(S)} \equiv 0 \qquad [\bmod \Delta_1(S)].$$

Or $k_1 + k_2 S \ldots + k_m S^n$ est divisible par $\Delta_2(S)$.

On a donc

$$\theta(S)\Delta_2(S) - M(S)\frac{\Delta_2(S)}{\Delta_3(S)} = \psi(S)\Delta_1(S),$$

$\theta(S)$ et $\psi(S)$ étant deux polynômes, ou encore

$$\theta(S) - \frac{M(S)}{\Delta_3(S)} = \psi(S)\frac{\Delta_1(S)}{\Delta_2(S)},$$

et comme $\dfrac{\Delta_1(S)}{\Delta_2(S)}$ est un polynôme, cette égalité prouve que $\dfrac{M(S)}{\Delta_3(S)}$ est un polynôme, c'est-à-dire que $M(S)$ est divisible par $\Delta_3(S)$.

En ce qui concerne le polynôme $N(S)$, on donnera aux variables $x_1, x_2 \ldots, x_m$ la valeur zéro, aux variables $y_1, y_2, \ldots, y_p$ les valeurs $1, S, S^2, \ldots, S^{p-1}$ et aux autres variables des valeurs vérifiant les équations

$$R_1 = 0, \quad R_2 = 0, \quad \ldots\ldots, \quad R_q = 0.$$

En calculant alors $R_{q+1}$, $R_{q+2}$, ..., on introduira ici des congruences suivant le module $\Delta_2(S)$, et en portant les valeurs ainsi calculées dans la relation (14), on obtient la congruence

$$N(S)\,.\,\frac{\Delta_2(S)}{\Delta_3(S)} \equiv 0 \qquad [\bmod \Delta_2(S)]$$

ou

$$\frac{N(S)}{\Delta_3(S)}\,.\,\Delta_2(S) \equiv 0 \qquad [\bmod \Delta_2(S)]$$

qui prouve que $\dfrac{N(S)}{\Delta_3(S)}$ est un polynôme, c'est-à-dire que $N(S)$ est divisible par $\Delta_3(S)$.

La proposition est établie.

Il est facile maintenant de transformer la substitution (16) de façon à faire disparaître les termes $\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \ldots + \mu_m x_m$ et les termes $\nu_1 y_1 + \nu_2 y_2 \ldots + \nu_p y_p$. A cet effet, nous désignons par $\psi(S)$, $\chi(S)$ les quotients respectifs de $M(S)$ et de $N(S)$ par $\Delta_3(S)$. On aura :

$$M(S) = \Delta_3(S)\,.\,\psi(S), \qquad N(S) = \Delta_3(S)\,.\,\chi(S).$$

Procédons alors comme au numéro 4. Désignons par $\psi_1$ la forme linéaire en $x_1, x_2, \ldots, x_{m-q}$ déduite de $\psi(S)$ comme d'habitude en y remplaçant $1, S, S^2, \ldots$ par $x_1, x_2, x_3 \ldots$ et de même par $\chi_1$ la forme en $y_1, y_2, \ldots, y_{p-q}$ déduite de $\chi(S)$ en y remplaçant $1, S, S^2, \ldots$ par $y_1, y_2, y_3, \ldots$. Soient $\psi_2, \psi_3, \ldots$ et $\chi_2, \chi_3 \ldots$ les conséquentes successives déduites de $\psi_1$ et de $\chi_1$ par la substitution (16).

Transformons la substitution (16) en conservant les variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$, ainsi que les variables $y_1, y_2, \ldots, y_p$ et en remplaçant les variables $z_1, z_2, \ldots, z_q$ par de nouvelles variables $z'_1, z'_2, \ldots, z'_q$ définies par les formules

$$
(17)\qquad
\begin{aligned}
z'_1 &= z_1 - \psi_1 - \chi_1, \\
z'_2 &= z_2 - \psi_2 - \chi_2, \\
&\vdots \\
z'_q &= z_q - \psi_q - \chi_q.
\end{aligned}
$$

Remarquons que

$\psi_1$ contient $x_1, x_2, \ldots, x_{m-q}$; de même $\chi_1$ contient $y_1, y_2, \ldots, y_{p-q}$;
$\psi_2$ contiendra $x_2, x_3, \ldots, x_{m-q+1}$; » $\chi_2$ contiendra $y_2, y_3, \ldots, y_{p-q+1}$;
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
$\psi_q$ contiendra $x_q, x_{q+1}, \ldots, x_{m-1}$; de même $\chi_q$ contiendra $y_q, y_{q+1}, \ldots, y_{p-1}$;
$\psi_{q+1}$ contiendra $x_{q+1}, x_{q+2}, \ldots, x_m$; » $\chi_{q+1}$ contiendra $y_{q+1}, y_{q+2}, \ldots, y_p$;

de sorte que chacune des formes $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{q+1}$ et chacune des formes $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_{q+1}$ se déduit de la précédente en augmentant de 1 les indices des variables.

Les formules de transformation (17) donnent immédiatement

$$Z'_1 = z'_2, \quad Z'_2 = z'_3, \quad \ldots\ldots, \quad Z'_{q-1} = z'_q,$$

puis

$$
\begin{aligned}
Z'_q = Z_q - \psi_{q+1} - \chi_{q+1} = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \ldots + \mu_m x_m + \nu_1 y_1 + \nu_2 y_2 + \ldots + \nu_p y_p \\
+ c_1 z_1 + c_2 z_2 + \ldots + c_q z_q - \psi_{q+1} - \chi_{q+1}
\end{aligned}
$$

ou, en exprimant $z_1, z_2, \ldots, z_q$ en fonction de $z'_1, z'_2, \ldots, z'_q$,

$$
(18)\qquad
\begin{aligned}
Z'_q = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \ldots + \mu_m x_m + c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2 + \ldots + c_q \psi_q - \psi_{q+1} \\
+ \nu_1 y_1 + \nu_2 y_2 + \ldots + \nu_p y_p + c_1 \chi_1 + c_2 \chi_2 + \ldots + c_q \chi_q - \chi_{q+1} \\
+ c_1 z'_1 + c_2 z'_2 + \ldots + c_q z'_q.
\end{aligned}
$$

Or, il est facile de voir que dans cette formule les termes de la première ligne sont identiquement nuls, ainsi que les termes de la seconde ligne. En ce qui concerne la première ligne, qui ne dépend que des variables $x_i$, il suffit de remplacer $x_1, x_2, \ldots, x_m$ par $1, S, S^2, \ldots, S^{m-1}$ et de montrer que le polynôme en S ainsi obtenu est identiquement nul; or, le raisonnement déjà fait au numéro 4 montre que ce polynôme est

$$M(S) - \Delta_3(S)\psi(S)$$

et ce polynôme se réduit à zéro, puisque $\psi(S)$ est le quotient de $M(S)$ par $\Delta_3(S)$. On procédera de même en ce qui concerne la seconde ligne qui ne dépend que des variables $y$ : on remplacera $y_1, y_2, \ldots, y_p$ par $1, S, S^2, \ldots, S^{p-1}$; on obtient ainsi le polynôme

$$N(S) - \Delta_3(S)\chi(S)$$

qui est identiquement nul parce que $\chi(S)$ est le quotient de $N(S)$ par $\Delta_3(S)$. Les termes de la seconde ligne de la formule (18) sont donc identiquement nuls et on a finalement :

$$Z'_q = c_1 z'_1 + c_2 z'_2 + \ldots + c_q z'_q.$$

Ainsi la substitution (16) a été ramenée à la forme

$$(19)\qquad \begin{array}{ll} C_1 \left\{ \begin{array}{l} X_1 = x_2, \quad X_2 = x_3, \quad \ldots \quad X_{m-1} = x_m, \\ X_m = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_m x_m; \end{array}\right. \\ C_2 \left\{ \begin{array}{l} Y_1 = y_2, \quad Y_2 = y_3, \quad \ldots \quad Y_{p-1} = y_p, \\ Y_p = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_p y_p; \end{array}\right. \\ C_3 \left\{ \begin{array}{l} Z_1 = z_2, \quad Z_2 = z_3, \quad \ldots \quad Z_{q-1} = z_q, \\ Z_q = c_1 z_1 + c_2 z_2 + \ldots + c_q z_q. \end{array}\right. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

avec trois groupes canoniques $C_1, C_2, C_3$. On introduirait de même un quatrième groupe canonique, puis un cinquième, et ainsi de suite jusqu'à épuisement des $n$ variables.

Rappelons que, dans la forme canonique (19), les coefficients sont tels que si l'on pose

$$\begin{aligned} \Delta_1(S) &= S^m - a_m S^{m-1} - \ldots - a_2 S - a_1, \\ \Delta_2(S) &= S^p - b_p S^{p-1} - \ldots - b_2 S - b_1, \\ \Delta_3(S) &= S^q - c_q S^{q-1} - \ldots - c_2 S - c_1, \end{aligned}$$

$\Delta_1(S)$ est divisible par $\Delta_2(S)$, $\Delta_2(S)$ est divisible par $\Delta_3(S)$ et ainsi de suite.

On retrouve ainsi par une méthode directe la forme canonique (C) établie au numéro 7 du Chapitre I à l'aide de la théorie des diviseurs élémentaires. Nous appliquerons plus loin (n[os] 8 et 9) notre méthode de réduction à quelques exemples.

Chacun des groupes canoniques $C_1, C_2, C_3$ peut être décomposé en groupes sous-canoniques conformément à la méthode du Chapitre II (n[os] 11 et 12). Pour décomposer $C_1$, par exemple, il suffit de décomposer le polynôme $\Delta_1(S)$, relatif à $C_1$ en un produit de facteurs premiers entre eux. En particulier, si $\Delta_2(S)$ est premier avec $\frac{\Delta_1(S)}{\Delta_2(S)}$, ce qui arrive si $\Delta_1(S)$ admet les zéros de $\Delta_2(S)$ avec le même exposant que dans $\Delta_2(S)$, on pourra décomposer $C_1$ en deux groupes sous-canoniques $C'_1$, $C''_1$, le premier relatif à $\frac{\Delta_1(S)}{\Delta_2(S)}$, le second à $\Delta_2(S)$. Le groupe $C''_1$ est alors identique au groupe $C_2$ aux notations des variables près.

[**6**] *Transformation linéaire la plus générale ramenant la substitution donnée à la forme canonique* (C). *Substitutions permutables avec une substitution donnée.* — Complétons tout d'abord la méthode employée au numéro précédent pour transformer la substitution (16) en la substitution (19).

Pour faire disparaître les termes

$$\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 \dots + \mu_m x_m$$

et les termes

$$\nu_1 y_1 + \nu_2 y_2 \dots + \nu_p y_p$$

de la substitution (16), nous avons utilisé le changement de variables (17). Mais ce changement de variables n'est pas le plus général remplissant le but proposé. On voit, comme au numéro 4, qu'on peut remplacer les polynômes $\psi(S)$ et $\chi(S)$ dont on s'est servi pour obtenir les formules (17), par les polynômes plus généraux $\psi'(S)$, $\chi'(S)$ donnés par les formules

$$\psi'(S) = \psi(S) + \frac{\Delta_1}{\Delta_3} X(S),$$

$$\chi'(S) = \chi(S) + \frac{\Delta_2}{\Delta_3} Y(S),$$

où $X(S)$, $Y(S)$ sont deux polynômes arbitraires. Comme les polynômes $\psi'(S)$ et $\chi'(S)$ les plus généraux remplissant le but proposé doivent être respectivement de degrés $m-1$ et $p-1$, on voit aisément qu'il faut prendre pour $X(S)$ et pour $Y(S)$ des polynômes de degré au plus égal à $q-1$. Donc $\psi'(S)$ et $\chi'(S)$ dépendent l'un et l'autre de $q$ coefficients arbitraires. Le changement de variables (17) peut donc être remplacé par un changement de variables analogue, mais dépendant de $2q$ paramètres arbitraires.

Il est facile d'après cela de voir la nature de la transformation T la plus générale permettant de transformer la substitution A donnée en la forme canonique C. Nous avons déjà traité ce problème lorsque la forme canonique comprenait un seul groupe canonique (chap. II, n° 2) ou deux groupes canoniques (chap. III, n° 4). Il est facile de généraliser ces résultats.

Supposons qu'il y ait dans la forme canonique C plusieurs groupes canoniques comprenant respectivement $m, p, q, r, s, \ldots$ variables $(m > p > q > r > s > \ldots)$ [1].

Pour obtenir le premier groupe canonique, on introduit comme paramètres arbitraires les coefficients d'une forme linéaire arbitraire $P_1$, c'est-à-dire $m+p+q+r+s+\ldots$ coefficients.

Pour le second groupe canonique, on introduit d'abord les $p+q+r+s+\ldots$ coefficients arbitraires de la forme $Q_1$ (n$^{os}$ 3 et 4), puis $p$ nouveaux paramètres arbitraires, lorsqu'on fait disparaître dans la dernière équation du second groupe canonique les termes contenant les variables $x$ du premier groupe.

Pour le troisième groupe canonique, on introduit d'abord les $q+r+s+\ldots$ coefficients arbitraires de la forme $R_1$, puis $2q$ paramètres arbitraires lorsqu'on fait disparaître dans la dernière équation du troisième groupe canonique les termes contenant les variables $x$ du premier groupe et les variables $y$ du second groupe.

Pour le quatrième groupe canonique, on introduirait de même d'abord les $r+s+\ldots$ coefficients d'une forme linéaire où les variables des trois premiers groupes auraient des valeurs données, les autres variables étant seules arbitraires; puis on introduirait $3r$ paramètres arbitraires destinés à faire disparaître dans la dernière équation du quatrième groupe les termes contenant les variables des trois premiers groupes.

Et ainsi de suite.

En résumé, *la transformation linéaire* T *la plus générale permettant de transformer a substitution* A *donnée en la forme canonique* (C) *formée de groupes canoniques successifs à* $m, p, q, r, s, \ldots$ *variables dépend d'un nombre de paramètres arbitraires* N *donné par la formule*

$$\begin{aligned} N = {} & (m+p+q+r+s+\ldots\ldots) \\ & + (p+q+r+s+\ldots\ldots) + p \\ & + (q+r+s+\ldots\ldots) + 2q \\ & + (r+s+\ldots\ldots) + 3r \\ & + (s+\ldots\ldots) + 4s \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

ou encore

$$N = m + 3p + 5q + 7r + 9s + \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ [2]}$$

---

[1] Nous gardons les notations $m, p, q$ employées jusqu'ici pour les trois premiers groupes canoniques.

[2] Cette proposition, ou la proposition analogue pour les formes bilinéaires, a été dé-

En particulier, les transformations automorphes de la forme canonique dépendent de N paramètres, N étant le nombre que nous venons de définir.

On déduit de là, par la méthode vue au Chapitre II (n° 7), toutes les substitutions qui permettent de transformer en elle-même une substitution quelconque A (transformations automorphes de A) : ce sont aussi les substitutions linéaires les plus générales permutables avec la substitution donnée A. Ces substitutions forment un groupe à N paramètres qu'on peut déterminer, comme on le voit, par des calculs rationnels à partir de la substitution donnée (¹).

[**7**] *Méthode pratique de transformation d'une substitution linéaire en la forme canonique* (C). — L'existence de la forme canonique (C) formée de plusieurs groupes canoniques $C_1$, $C_2$ ... étant établie, on peut pour l'obtenir procéder plus simplement que nous ne l'avons fait. Le premier groupe canonique $C_1$ une fois obtenu, nous avons vu comment on introduisait le second groupe canonique. On obtient tout d'abord un groupe canonique provisoire (n° 2) en partant d'une forme linéaire $Q_1$ à coefficients arbitraires et en prenant pour nouvelles variables la forme $Q_1$ et ses conséquentes $Q_2, Q_3, \ldots, Q_p$ jusqu'à un certain ordre. Ceci fournissait la forme réduite provisoire (4) et un nouveau changement de variables défini au numéro 4 faisait disparaître les termes $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_m x_m$ dans la forme réduite provisoire. *La possibilité de cette disparition étant ainsi établie*, on pourra dans la pratique procéder plus simplement et éviter ce nouveau changement de variables. Il suffit de remarquer que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ sont des fonctions des coefficients $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m, \ldots, \beta_n$ de $Q_1$. Dans la théorie générale, on a supposé $\beta_{m+1}, \beta_{m+2}, \ldots, \beta_n$ seuls arbitraires; mais on peut laisser aussi arbitraires $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$. On pourra disposer alors des

---

montrée, après divers auteurs, par M. Landsberg dans le Mémoire déjà cité (*Journal de Crelle*, t. CXVI, p. 349).

On peut encore écrire la formule sous une autre forme en posant

$$\begin{aligned} m_1 &= m + p + q + r + s + \ldots\ldots \\ p_1 &= \phantom{m+{}} p + q + r + s + \ldots\ldots \\ q_1 &= \phantom{m+p+{}} q + r + s + \ldots\ldots \\ r_1 &= \phantom{m+p+q+{}} r + s + \ldots\ldots \\ s_1 &= \phantom{m+p+q+r+{}} s + \ldots\ldots \end{aligned}$$

On a

$$N = m_1 + 2(p_1 + q_1 + r_1 + s_1 + \ldots\ldots).$$

Sous cette forme, la formule est donnée par Frobenius (*Journal de Crelle*, t. LXXXIV, 1878, p. 288). Elle est aussi démontrée dans le Mémoire de M. Nicoletti (*Annali di Matematica*, série 3, t. XIV, p. 288).

(¹) M. Harold Hilton a déterminé ces mêmes substitutions en partant de la forme canonique classique de M. Jordan; mais cette détermination exige alors la connaissance des racines de l'équation caractéristique (Harold Hilton, *loc. cit.*, chap. V, p. 112).

coefficients $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ de façon que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ soient nuls et que les formes $Q_1, Q_2, \ldots, Q_p, x_1, x_2, \ldots, x_m$ continuent à former un système de formes linéaires indépendantes.

Il suffira donc pratiquement de prendre pour coefficients de $Q_1$ des coefficients tels que la forme canonique provisoire (4) soit une forme canonique définitive, c'est-à-dire tels que la relation de dépendance (3) entre $Q_1, Q_2, \ldots, Q_p, x_1, x_2, \ldots, x_m$ ne contienne pas de termes en $x_1, x_2, \ldots, x_m$ et on sait *a priori* par la théorie générale que ceci sera possible.

Une méthode analogue s'applique bien entendu aux groupes canoniques suivants qu'on pourra obtenir sous leur forme définitive en choisissant les coefficients, jusque-là arbitraires des formes linéaires $P_1, Q_1, R_1, \ldots$ prises (avec leurs conséquentes) pour nouvelles variables, de façon à annuler les coefficients des termes que l'on veut faire disparaître.

Il est d'ailleurs bien évident que cette marche à suivre pour obtenir dans la pratique la forme canonique n'a rien d'absolu et que dans certains cas il peut être plus simple, au contraire, de faire les changements de variables mêmes qui ont été introduits dans la théorie. C'est ce que nous ferons dans l'exemple II ci-après (n° 9).

[**8**] *Exemple I.* — Soit donnée la substitution

$$(A) \qquad \begin{cases} X = y + z + t, \\ Y = z + t + x, \\ Z = t + x + y, \\ T = x + y + z. \end{cases}$$

Calculons les conséquentes successives $P_1, P_2, P_3 \ldots$ d'une forme linéaire arbitraire $P_1$ jusqu'à ce que nous obtenions une forme en dépendance linéaire avec les formes précédentes. On a :

$$P_1 = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t,$$
$$P_2 = (\beta + \gamma + \delta)x + (\gamma + \delta + \alpha)y + (\delta + \alpha + \beta)z + (\alpha + \beta + \gamma)t,$$
$$P_3 = (3\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta)x + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

les termes non écrits dans $P_3$ se déduisant du premier par permutation circulaire. On voit que l'on a :

$$P_3 = 3P_1 + 2P_2$$

et que les formes $P_1$ et $P_2$ sont généralement indépendantes. Pour faire la réduction, il n'est pas nécessaire maintenant de laisser les paramètres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ indéterminés. Il suffit de leur donner des valeurs numériques quelconques, mais en ayant soin de les choisir de façon que $P_1$ et $P_2$ soient des formes indépendantes (1). On ne pourrait pas prendre par exemple $\alpha=\beta=\gamma=\delta$, parce qu'on aurait alors $P_2=3P_1$, de sorte que $P_1$ et $P_2$ ne seraient pas des formes indépendantes. Mais on pourra prendre par exemple $\alpha=1$, $\beta=0$, $\gamma=0$, $\delta=0$. On a alors :

$$P_1=x, \qquad P_2=y+z+t, \qquad P_3=3P_1+2P_2.$$

Posons (2) :

$$u=x,$$
$$v=y+z+t.$$

Gardons les variables $z$ et $t$ et introduisons les variables $u, v$ à la place des variables $x, y$.

La substitution (A) est transformée en la suivante :

$$(A_1) \qquad \left.\begin{aligned} U&=v\\ V&=3u+2v \end{aligned}\right| C_1,$$
$$Z=u+v-z,$$
$$T=u+v-t,$$

et l'on a déjà un premier groupe canonique $C_1$.

Calculons maintenant, à l'aide de $(A_1)$, les conséquentes $Q_1, Q_2, \ldots$ d'une forme linéaire arbitraire en $u, v, z, t$ jusqu'à ce que nous obtenions une forme en dépendance linéaire avec $u, v$ et les formes précédentes. On a

$$Q_1=\alpha' u+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \beta' v+\gamma' z+\delta' t,$$
$$Q_2=(3\beta'+\gamma'+\delta')u+(\alpha'+2\beta'+\gamma'+\delta')v-\gamma' z-\delta' t,$$

de sorte que $Q_1, Q_2, u, v$ sont dépendantes, car on a :

$$Q_2+Q_1=(\alpha'+3\beta'+\gamma'+\delta')u+(\alpha'+3\beta'+\gamma'+\delta')v.$$

Conformément à la méthode pratique de calcul indiquée au numéro précédent, on prendra $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ de façon que la relation précédente ne contienne ni $u$, ni $v$. Il suffira que l'on ait :

$$\alpha'+3\beta'+\gamma'+\delta'=0.$$

(1) Voir à ce sujet le début du nº 1 de ce Chapitre.

(2) On pose aussi, bien entendu,

$$U=X,$$
$$V=Y+Z+T,$$

conformément aux notations et aux définitions du Chapitre I (nº 1) relatives aux transformées d'une substitution.

Il faut en outre, bien entendu, que $Q_1$ contienne l'une au moins des variables $z$ et $t$, c'est-à-dire que $\gamma'$ et $\delta'$ ne soient pas nuls tous les deux, afin que $Q_1$ puisse remplacer l'une des anciennes variables $z, t$. Prenons, par exemple, $\alpha'=0$, $\beta'=0$, $\gamma'=1$, $\delta'=-1$ et posons :

$$w = Q_1 = z - t.$$

Nous remplacerons la variable $z$ par la variable $w$ et nous garderons les variables $u, v, t$.

La substitution $(A_1)$ est transformée en la suivante :

$$(A_2)\qquad \begin{array}{ll} U = v, & \multirow{2}{*}{$\Big|\ C_1,$} \\ V = 3u + 2v & \\ W = -w & |\ C_2, \\ T = u + v - t, & \end{array}$$

et celle-ci contient deux groupes canoniques $C_1$ et $C_2$, ce dernier formé d'une seule équation.

Calculons enfin, à l'aide de $(A_2)$, la conséquente $R_2$ d'une forme linéaire arbitraire $R_1$ en $u, v, w, t$; les cinq formes $R_1, R_2, u, v, w$ seront nécessairement en dépendance linéaire, puisqu'elles ne dépendent que de quatre variables. On a

$$R_1 = \alpha''u + \beta''v + \gamma''w + \delta''t,$$
$$R_2 = (3\beta'' + \delta'')u + (\alpha'' + 2\beta'' + \delta'')v - \gamma''w - \delta''t,$$

d'où

$$R_2 + R_1 = (\alpha'' + 3\beta'' + \delta'')u + (\alpha'' + 3\beta'' + \delta'')v.$$

Nous choisirons $\alpha'', \beta'', \gamma''$ de façon que cette relation se réduise à

$$R_2 + R_1 = 0.$$

Il suffira que l'on ait

$$\alpha'' + 3\beta'' + \delta'' = 0.$$

On ne peut pas donner à $\delta''$ la valeur zéro, car il faut que $R_1$ puisse être prise comme variable à la place de $t$. Mais on peut prendre par exemple $\delta''=1$, $\alpha''=-1$, $\beta''=0$, $\gamma''=0$. Posons alors

$$p = R_1 = -u + t$$

et remplaçons la variable $t$ par la variable $p$. La substitution $(A_2)$ est transformée en la suivante :

$$(A_3)\qquad \begin{array}{ll} U = v & \multirow{2}{*}{$\Big|\ C_1,$} \\ V = 3u + 2v & \\ W = -w & |\ C_2, \\ P = -p & |\ C_3, \end{array}$$

et cette substitution comprend trois groupes canoniques $C_1$, $C_2$, $C_3$. Avec les notations de la théorie générale, on a ici

$$\Delta_1(S) = S^2 - 2S - 3,$$
$$\Delta_2(S) = S + 1,$$
$$\Delta_3(S) = S + 1,$$

et l'on voit que, conformément à cette théorie, $\Delta_1(S)$ est divisible par $\Delta_2(S)$, $\Delta_2(S)$ par $\Delta_3(S)$. Le groupe $C_1$ peut être décomposé en deux groupes sous-canoniques $C'$, $C''$, dont l'un $C''$ identique à $C_2$, conformément à ce qu'on a vu à la fin du numéro 5. On a en effet :

$$\Delta_1(S) = (S+1)(S-3).$$

On effectuera la décomposition du groupe $C_1$ par la méthode du Chapitre II (n° 11). On obtient ainsi, en appelant les nouvelles variables $u_1$, $v_1$,

$$U_1 = 3u_1,$$
$$V_1 = -v_2,$$

et la forme canonique transformée est

$$\begin{array}{ll} U_1 = 3u_1 & \mid C'_1, \\ V_1 = -v_2 & \mid C'_2, \\ W = -w & \mid C_2, \\ P = -p & \mid C_3. \end{array}$$

On retrouve la forme canonique de M. Jordan.

On a ici, avec les notations du numéro 6,

$$m = 2, \qquad p = 1, \qquad q = 1.$$

Le nombre de paramètres dont dépend la transformation la plus générale qui permet de ramener la substitution (A) à sa forme canonique $(A_3)$ est ici

$$N = m + 3p + 5q = 2 + 3 + 5 = 10,$$

et effectivement on a introduit douze paramètres $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$, $\delta'$, $\alpha''$, $\beta''$, $\gamma''$, $\delta''$ liés par les deux relations

$$\alpha' + 3\beta' + \gamma' + \delta' = 0,$$
$$\alpha'' + 3\beta'' + \delta'' = 0,$$

d'où dix paramètres indépendants.

La comparaison des méthodes de ce Chapitre et du précédent avec la méthode des diviseurs élémentaires (chap. I, n° 7) nous permet d'avoir, *sans aucun calcul de déterminants*, la décomposition du déterminant caractéristique $\Delta(S)$ en ses diviseurs ou ses produits élémentaires. On a :

$$\Delta(S) = \begin{vmatrix} -S & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -S & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -S & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -S \end{vmatrix} = \Delta_1(S) . \Delta_2(S) . \Delta_3(S) = \begin{cases} (S+1)(S-3)\,(^1), \\ (S+1), \\ (S+1). \end{cases}$$

La méthode de réduction précédente revient à prendre comme nouvelles variables des coordonnées tétraédriques pour lesquelles le tétraèdre de référence a pour faces les quatre plans

$$P_1 = 0, \qquad P_2 = 0, \qquad Q_1 = 0, \qquad R_1 = 0.$$

Le choix de ces plans provient de la nature des pôles de la substitution. Dans le cas actuel à la racine $S = -1$ correspond une infinité de pôles qui sont tous les points du plan $\pi$ qui a pour équation

$$x + y + z + t = 0.$$

A la racine $S = 3$ correspond un pôle isolé qui est le point $\alpha$ ayant pour coordonnées $x = y = z = t$.

Le plan arbitraire $P_1$ contient alors nécessairement une infinité de pôles : ce sont tous les points de la droite $\delta$ d'intersection des plans $\pi$ et $P_1$. Les conséquents de $P_1$ passent évidemment tous par $\delta$; en outre, si $P_1$ ne contient pas le point double $\alpha$, les plans $P_1$ et $P_2$ sont distincts. On peut prendre $P_1$ et $P_2$ comme deux des faces du tétraèdre de référence. Le plan $P_3$ passant par l'intersection $\delta$ des plans $P_1$ et $P_2$, il en résulte une dépendance linéaire entre les trois formes $P_1$, $P_2$, $P_3$. Le plan $Q_1$ est un plan arbitraire passant par $\alpha$ : ce plan est invariant, car son conséquent $Q_2$ a en commun avec lui le point $\alpha$ et la droite d'intersection de $Q_1$ avec le plan $\pi$. De même le plan $R_1$ est un plan passant par $\alpha$ et distinct de $Q_1$. Enfin, les plans $Q_1$ et $R_1$ ne doivent pas passer par la droite $\delta$.

Une interprétation géométrique analogue s'applique au cas général. Mais elle présente quelques difficultés provenant des racines multiples communes aux divers produits élémentaires, tandis que dans l'exemple actuel la racine $-1$ est racine simple de $\Delta_1(S)$, $\Delta_2(S)$, $\Delta_3(S)$. C'est pourquoi nous avons présenté la théorie sous un aspect purement algébrique, ce qui nous a permis de l'établir en toute rigueur (²).

---

(¹) Nous écrivons comme au Chapitre I sur trois lignes différentes les trois produits élémentaires; les diviseurs élémentaires correspondant à un même diviseur linéaire se trouvent alors écrits dans une même colonne.

(²) Des considérations analogues ont été déjà faites au Chapitre II (n° 12).

[9] *Exemple II.* — Dans la transformation d'une substitution donnée en sa forme canonique, on peut simplifier les calculs, en partant d'une forme linéaire *particulière* $P_1$ *convenablement choisie*, au lieu d'employer comme dans l'exemple précédent la forme générale $P_1$ à coefficients arbitraires. Et de même pour les formes $Q_1$, $R_1$, ..., d'où l'on part pour former les groupes canoniques successifs. C'est ce que nous avons fait dans l'exemple précédent en particularisant à un moment donné les coefficients $\alpha$, $\beta$, .... Mais il faut procéder avec quelques précautions.

Supposons en effet qu'en partant d'une forme $P_1$ *arbitraire*, les conséquentes $P_1, P_2, \ldots, P_m$ soient indépendantes et que $P_{m+1}$ dépende linéairement de $P_1, P_2, \ldots, P_m$. En partant d'une forme $P_1$ *particulière*, il pourra se faire qu'on arrive à une conséquente en dépendance linéaire avec les conséquentes précédentes plus vite qu'on n'y arrivait avec la forme $P_1$ *arbitraire*, c'est-à-dire que, *r étant inférieur à m*, la forme $P_r$ dépende linéairement de $P_1, P_2, \ldots, P_{r-1}$; il faut éviter cette circonstance, car on n'arriverait pas ainsi à la forme canonique cherchée. Ainsi qu'on l'a vu au début de ce Chapitre, cela arrive si le plan $P_1$ contient quelque élément invariant (pôle, droite, etc.) qu'il ne contenait pas en général.

Lorsqu'on partira de formes *particulières* $P_1$, $Q_1$, $R_1$ à coefficients numériques pris au hasard pour former les conséquentes qui conduiront aux divers groupes canoniques, comment pourra-t-on constater que ces formes ont été convenablement choisies et que les circonstances exceptionnelles signalées plus haut ont pu être évitées?

Une première méthode consiste à chercher *a priori* la structure de la forme canonique que l'on veut obtenir (chap. I, n$^{os}$ 6 et 7). Il suffit pour cela d'utiliser la théorie des diviseurs élémentaires; on formera le déterminant caractéristique $\Delta(S)$ et on le décomposera en ses produits élémentaires

$$\Delta(S) = \Delta_1(S) \,.\, \Delta_2(S) \,.\, \Delta_3(S) \,.\, \ldots,$$

*ce qui n'exige que des opérations rationnelles*. Si $\Delta_1$, $\Delta_2$, $\Delta_3$ ... sont de degrés $m, p, q, \ldots$, cela signifie que le premier groupe canonique doit contenir $m$ équations, le second $p$ équations, le troisième $q$ équations. Si donc en partant d'une forme $P_1$ et de ses conséquentes $P_2$, $P_3$ ..., on obtient *pour une valeur de i inférieure à m*, une conséquente $P_{i+1}$ en dépendance linéaire avec les conséquentes précédentes, c'est que la forme $P_1$ aura été mal choisie et on partira d'une autre forme $P_1$ à coefficients numériques. On procédera de même pour les formes $Q_1$, $R_1$, ... qui fournissent le second groupe canonique, le troisième, ....

On peut aussi procéder autrement, sans former $\Delta(S)$ et sans avoir recours à la théorie des diviseurs élémentaires. Si, en effet, la forme $P_1$ ayant été mal choisie, le premier groupe canonique qui en résulte contient un nombre de variables inférieur au nombre de variables voulu, on ne pourra plus faire, dans le second groupe canonique ou dans les groupes suivants, la réduction qui résulte du théorème II (n° 3);

il arrivera par exemple que le polynôme $\pi(S)$ ne sera pas divisible par $\Delta_2(S)$. Si, au cours de la réduction, on se trouve en présence d'une pareille impossibilité, c'est que l'un des polynômes $P_1$, $Q_1$, $R_1$, ... d'où l'on est parti aura été mal choisi.

Ces réserves une fois faites, rien n'empêche, pour effectuer la réduction d'une substitution linéaire A à sa forme canonique (C), de partir de formes linéaires $P_1$, $Q_1$, $R_1$, ... à coefficients aussi simples que possible [1].

Appliquons cette méthode à la réduction de la substitution suivante :

$$
(\mathrm{A})\qquad
\begin{array}{lrrrrrr}
X_1 = & x_1 & - \ x_2 & + \ x_3 & & & \\
X_2 = & x_1 & - 2x_2 & + 2x_3 & & & \\
X_3 = & & - \ x_2 & + 2x_3 & & & \\
X_4 = & & - \ x_2 & + 2x_3 & - x_4 & & \\
X_5 = & & - \ x_2 & & & & + x_6 \\
X_6 = & x_1 & - 3x_2 & + 3x_3 & & + x_5. &
\end{array}
$$

Il paraît avantageux de choisir $x_5$ comme forme $P_1$. On aura alors :

$$
\begin{array}{lrrrrlrrrrr}
P_1 = & & & & & = & & & & + x_5 & \\
P_2 = & & & + X_5 & & = & & - x_2 & & & + x_6 \\
P_3 = & & - X_2 & & + X_6 & = & & - x_2 & + x_3 & + x_5 & \\
P_4 = & & - X_2 + X_3 & + X_5 & & = & - x_1 & & & & + x_6 \\
P_5 = & - X_1 & & & + X_6 & = & & - 2x_2 & + 2x_3 & + x_5. &
\end{array}
$$

On voit immédiatement que les trois formes $P_1$, $P_3$, $P_5$ qui ne dépendent que de $x_5$ et de $x_3 - x_2$ sont dépendantes. On a :

$$P_5 - 2P_3 + P_1 = 0.$$

En outre, les formes $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$ sont indépendantes. On peut prendre ces formes $P_1$, $P_2$, $P_2$, $P_4$ comme nouvelles variables $y_1$, $y_2$, $y_3$, $y_4$ et conserver en outre les variables $x_3$, $x_4$.

Les nouvelles variables sont liées aux variables primitives par les relations

$$
\begin{array}{lrrr}
y_1 = & & & + x_5 \\
y_2 = & - x_2 & & + x_6 \\
y_3 = & - x_2 + x_3 + x_5 & & \\
y_4 = - x_1 & & & + x_6
\end{array}
\qquad \text{d'où} \qquad
\begin{array}{lrrrr}
x_1 = & y_1 + y_2 & - y_3 & - y_4 & + x_3 \\
x_2 = & y_1 & - y_3 & & + x_3 \\
x_5 = & y_1 & & & \\
x_6 = & y_1 + y_2 & - y_3 & & + x_3
\end{array}
$$

---

[1] On n'obtient ainsi, il est vrai, qu'une substitution particulière S transformant A en (C). Mais si l'on veut la substitution la plus générale remplissant le même but, on procédera comme au Chapitre II, n° 6. Il suffira de former la substitution T la plus générale transformant (C) en elle-même, substitution facile à former.

et la substitution (A) devient :

$$(A_1) \quad \begin{aligned} Y_1 &= y_2, \\ Y_2 &= y_3, \\ Y_3 &= y_4, \\ Y_4 &= 2y_3 - y_1, \\ X_3 &= -y_1 + y_3 + x_3, \\ X_4 &= -y_1 + y_3 + x_3 - x_4. \end{aligned}$$

Elle comprend un premier groupe canonique formé par les quatre premières équations. Pour poursuivre la réduction, partons de la fonction $x_3 + x_4$, par exemple, et formons ses conséquentes. On a :

$$\begin{aligned} Q_1 &= x_3 + x_4, \\ Q_2 &= 2x_3 - x_4 - 2y_1 + 2y_3, \\ Q_3 &= x_3 + x_4 - y_1 - 2y_2 + y_3 + 2y_4. \end{aligned}$$

Il faut chercher une relation de dépendance entre $y_1, y_2, y_3, y_4$ et les conséquentes successives. On voit immédiatement que les formes $Q_1, Q_2, y_1, y_2, y_3 y_4$ sont indépendantes et que $Q_3$ dépend linéairement de ces formes. On a :

$$Q_3 = -y_1 - 2y_2 + y_3 + 2y_4 + Q_1.$$

Remplaçons les variables $x_3, x_4$ par de nouvelles variables $y_5, y_6$ égales respectivement à $Q_1$, et à $Q_2$. On aura :

$$\begin{aligned} y_5 &= x_3 + x_4, \\ y_6 &= 2x_3 - x_4 - 2y_1 + 2y_3. \end{aligned}$$

La substitution $(A_1)$ devient :

$$(A_2) \quad \begin{aligned} &\left\{ \begin{aligned} Y_1 &= y_2, \\ Y_2 &= y_3, \\ Y_3 &= y_4, \\ Y_4 &= 2y_3 - y_1, \end{aligned} \right. \\ &\left\{ \begin{aligned} Y_5 &= y_6, \\ Y_6 &= -y_1 - 2y_2 + y_3 + 2y_4 + y_5. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Il faut faire une nouvelle réduction suivant la méthode des numéros 3 et 4, afin de faire disparaître les termes en $y_1, y_2, y_3, y_4$ dans le second groupe d'équations.

Avec les notations des numéros 3 et 4, on a ici :

$$\begin{aligned}\Delta_1(S) &= S^4 - 2S^2 + 1,\\ \Delta_2(S) &= S^2 - 1,\\ \pi(S) &= 2S^3 + S^2 - 2S - 1.\end{aligned}$$

On voit que, conformément à la théorie générale, $\Delta_1(S)$ est divisible par $\Delta_2(S)$ et que $\pi(S)$ est divisible par $\Delta_2(S)$. Ceci indique que les polynômes $P_1$ et $Q_1$ ont été bien choisis et qu'on pourra obtenir la forme canonique définitive en poursuivant la réduction. On a :

$$\pi(S) = 2S^3 + S^2 - 2S - 1 = (S^2 - 1)(2S + 1).$$

Avec les notations du numéro 4, on a

$$\varphi(S) = 2S + 1,$$

d'où

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= 2y_2 + y_1.\\ \varphi_2 &= 2y_3 + y_2.\end{aligned}$$

On posera donc

$$\begin{aligned}y'_5 &= y_5 - \varphi_1 = y_5 - 2y_2 - y_1,\\ y'_6 &= y_6 - \varphi_2 = y_6 - 2y_3 - y_2,\end{aligned}$$

et l'on aura alors

$$\begin{aligned}Y'_5 &= Y_5 - 2Y_2 - Y_1 = y_6 - 2y_3 - y_2 = y'_6,\\ Y'_6 &= Y_6 - 2Y_3 - Y_2 = -y_1 - 2y_2 + y_3 + 2y_4 + y_5 - 2y_4 - y_3 = -y_1 - 2y_2 + y_5 = y'_5.\end{aligned}$$

La forme réduite définitive est ainsi obtenue. C'est la forme suivante :

$$\left\{\begin{aligned}Y_1 &= y_2,\\ Y_2 &= y_3,\\ Y_3 &= y_4,\\ Y_4 &= 2y_3 - y_1,\end{aligned}\right.$$
$$\left\{\begin{aligned}Y'_5 &= y'_6,\\ Y'_6 &= y'_5.\end{aligned}\right.$$

Elle comprend deux groupes canoniques. On déduit de là la valeur du déterminant caractéristique $\Delta(S)$ de la substitution (A) et la décomposition de ce déterminant en ses produits élémentaires, et par suite en ses diviseurs élémentaires *sans avoir eu à faire le calcul effectif de ce déterminant.* Ainsi que nous l'avons fait observer dans l'Introduction, *le calcul des déterminants est remplacé par un calcul d'itération de formes linéaires*. On a :

$$\Delta(S) = \begin{cases} (S^2 - 1)^2 \\ (S^2 - 1) \end{cases} = \begin{cases} (S - 1)^2 (S + 1)^2, \\ (S - 1)(S + 1). \end{cases}$$

Par la méthode du Chapitre II (n° 12), chacun des deux groupes canoniques peut être décomposé en groupes sous-canoniques correspondant aux diviseurs élémentaires $(S - 1)^2$, $(S + 1)^2$ pour le premier groupe et aux diviseurs élementaires $(S - 1)$, $(S + 1)$ pour le second groupe. On obtient ainsi la forme réduite :

$$\begin{array}{ll} (S - 1)^2 & \left| \begin{array}{l} U_1 = u_2, \\ U_2 = -u_1 + 2u_2, \end{array} \right. \\ (S + 1)^2 & \left| \begin{array}{l} U_3 = u_4, \\ U_4 = -u_1 - 2u_2, \end{array} \right. \\ (S - 1) & \left| \; U_5 = u_5, \right. \\ (S + 1) & \left| \; U_6 = -u_6, \right. \end{array}$$

composée de quatre groupes canoniques correspondant au diviseur élémentaire écrit en regard de chaque groupe. La méthode du Chapitre II (n° 13) permettrait enfin de transformer les deux premiers groupes de façon à retrouver la forme canonique de M. Jordan.

# TABLE DES MATIÈRES

## CHAPITRE III

### Forme canonique (C) des substitutions linéaires admettant une infinité de pôles.