

HENRI VILLAT

**Sur le changement d'orientation d'un obstacle dans un courant
fluide et sur quelques questions connexes**

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3^e série, tome 5 (1913), p. 375-404

[<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1913_3_5_375_0>](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1913_3_5_375_0)

© Université Paul Sabatier, 1913, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LE

CHANGEMENT D'ORIENTATION D'UN OBSTACLE

DANS UN COURANT FLUIDE

ET SUR QUELQUES QUESTIONS CONNEXES

PAR M. HENRI VILLAT,

Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Montpellier.

Lorsqu'on étudie, par la méthode Helmholtz-Levi-Civita, le mouvement dans un fluide, d'un solide dont le profil présente un angle sur sa surface antérieure, il arrive généralement que le problème se révèle comme impossible : sauf dans un cas particulier, pour une valeur spéciale de l'inclinaison du solide sur le courant, la solution formée par le procédé classique ne correspond pas effectivement au solide donné. C'est à propos de la difficulté considérable résultant de cette circonstance, que M. M. Brillouin écrivait récemment : « Pour un solide constitué par exemple par un dièdre, ou par deux plans l'un derrière l'autre, la position même du problème est si difficile, qu'on peut se demander si le mouvement permanent de Helmholtz est toujours possible. » (*Comptes rendus*, t. CLIII, p. 43, 1911.)

C'est à la solution de cette difficulté qu'est consacrée la première partie du présent Mémoire, dont quelques résultats ont été résumés dans une Note présentée à l'Académie des Sciences (*Comptes rendus*, t. CLIV, p. 1693, juin 1912). Nous montrons, en considérant le cas typique du dièdre, que pour un tel solide, et dont on fait varier l'inclinaison sur le courant, un mouvement permanent acceptable existe toujours, à condition de supposer l'existence de plages de fluide en repos, en certaines régions déterminées. Le problème se présente de deux façons tout à fait distinctes, suivant que l'angle aigu du dièdre est dirigé vers le courant ou non.

Si le solide se présente au courant pointe en avant, le fluide mort (indépendamment de celui qui constitue le sillage arrière) se place nécessairement en avant de l'obstacle, le long d'une portion d'une seule des deux lames, à partir de l'arête com-

mune. Si le solide se présente pointe en arrière, j'ai déjà établi dans un Mémoire antérieur (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1914) qu'on pouvait toujours trouver plusieurs solutions du problème: pour celle de ces solutions, que la discussion montre comme la plus naturelle à adopter, une plage de fluide mort vient se placer dans le creux de l'obstacle, baignant, en avant de celui-ci, une portion de chacune des deux lames.

Dans tous les cas, un examen minutieux est nécessaire pour établir que les solutions dont il s'agit existent effectivement et sont valables.

Des résultats obtenus, on peut déduire la façon dont le problème de la résistance peut être posé et résolu, pour un obstacle présentant un angle à sa paroi, lorsqu'on fait varier l'inclinaison de cet obstacle sur le courant de toutes les façons possibles. C'est à cet objet qu'est consacrée la fin du chapitre I^{er}.

Au chapitre II, nous avons examiné le problème, intimement rattaché au précédent, du mouvement d'un fluide contenant deux obstacles l'un derrière l'autre, le second étant de dimensions suffisantes pour empiéter sur le sillage du premier supposé d'abord seul. Une modification convenable des calculs antérieurs donne la solution de ce problème.

Une application essentielle de cette dernière question est indiquée ensuite. On sait que les théories de Helmholtz ont toujours conduit jusqu'ici à l'existence d'un sillage étendu indéfiniment derrière les solides en mouvement. Cette extension à l'infini peut-elle être évitée, ou bien est-elle une nécessité inéluctable dans le cas des fluides parfaits? Comme l'a déjà montré M. M. Brillouin (*Annales de Chimie et de Physique*, p. 150, 1911), cette circonstance est inévitable au moins pour les fluides indéfinis. Nous montrons au chapitre III, que la même conclusion doit subsister même si le fluide est limité, soit par des parois solides fixes, soit par des surfaces de glissement. Le sillage ouvert est donc une conséquence inévitable des équations de l'hydrodynamique des fluides parfaits.

CHAPITRE PREMIER.

[1] Lorsqu'on étudie les courants fluides à deux dimensions, par la méthode des mouvements glissants, on sait que, si l'on place un obstacle dans un courant indéfini, ce courant se divise pour entourer l'obstacle, en formant un sillage à l'arrière. Si la face antérieure de l'obstacle est une courbe dont la tangente varie d'une façon continue, le point mort, où la vitesse est nulle et où le courant se divise avant d'entourer le solide, est (sauf le cas des obstacles symétriques) un point dont la position peut être quelconque sur la courbe; cette position dépend à la fois de la forme et de l'orientation de l'obstacle.

Si, au contraire, la courbe obstacle présente en avant un point anguleux O, où la tangente passe brusquement d'une position à une autre, les choses se passent tout autrement. Deux cas principalement sont à considérer, suivant que le profil présente en O un angle saillant ou un angle rentrant du côté du courant.

S'il s'agit d'un angle rentrant, il résulte des considérations développées dans mon Mémoire inséré aux Annales de l'École Normale (*Sur la détermination des problèmes d'hydrodynamique relatifs à la résistance des fluides*, 1914), qu'on pourra généralement trouver plusieurs mouvements correspondants, également acceptables *a priori*, et pour lesquels toutes les conditions physiques imposées par la question seront remplies. Dans un cas et un seul, pour une orientation très particulière de l'obstacle, le point mort coïncide (pour une des solutions susdites) avec le point anguleux O; dans tous les autres cas, il occupe une position, variable avec l'inclinaison, sur l'une des deux portions de la face antérieure.

[2] Nous nous occuperons ici du cas où il s'agit d'un angle saillant : la présence de cette particularité entraîne, comme nous allons le voir, l'existence d'une région de fluide mort *en avant* de l'obstacle, dans des conditions qui vont être précisées; et, contrairement à ce qui se passe pour l'angle rentrant, la solution que nous allons édifier est probablement *la seule* possible (en restant bien entendu dans le domaine de l'Hydrodynamique théorique). Nous allons étudier complètement l'exemple le plus caractéristique, où l'obstacle est formé de deux lames rectilignes AB et AC. Le cas où AB et AC seraient deux arcs de courbe continus non rectilignes, conduit à des conclusions exactement analogues, légitimées par ce qui va suivre.

Nous appellerons $\alpha - \beta$ et $-\alpha - \beta$ les angles que font respectivement avec le courant général (parallèle à l'axe Ox de la figure) les lames AC et AB. Ces angles sont par hypothèse, le premier positif, le second négatif, et tous deux en valeur

absolue, moindres que π . De plus, la condition que l'angle BAC présente sa pointe du côté du courant, entraîne visiblement

$$(1) \quad \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Dans ces conditions, si l'on cherche à mettre le problème en équations, en appliquant intégralement la méthode exposée par M. T. Levi-Civita dans son Mémoire fondamental (*Scie e leggi di resistenza*, Circolo di Palermo, 1907), c'est-à-dire en plaçant le point mort en A, on constate *a posteriori* que le rapport des deux longueurs AB et AC est déterminé d'une manière unique. Il en résulte de suite que le point mort ne peut être placé en O que pour une valeur particulière du rapport $\frac{AB}{AC}$, si les inclinaisons $\alpha - \beta$ et $-\alpha - \beta$ sont données, ou bien encore pour des valeurs particulières des inclinaisons, si les longueurs AB et AC sont données. C'est dans cette dernière hypothèse que nous nous placerons par la suite; les données de la question sont considérées comme étant : les longueurs AB et AC, et l'angle 2α des deux lames; l'angle β , qui définit la position précise des deux lames, est au contraire variable.

A part une valeur exceptionnelle de β , il est donc impossible de faire coïncider le point mort avec le point A. Si alors, on cherche à former une solution du problème, toujours selon les principes du Mémoire de M. Levi-Civita, en plaçant le point mort sur AB par exemple, et en supposant que le courant, après s'être divisé en O, suive le long de l'obstacle les chemins OB et OAC (ce dernier mixtiligne), on est conduit (cf. mon Mémoire cité plus haut, 1^{re} Partie) à ce résultat que la vitesse dans le fluide est donnée par la relation

$$(2) \quad V = e^{\tau}$$

avec

$$(3) \quad \tau = -\log \left| \frac{z - e^{-is_0}}{z - e^{is_0}} \right| + \frac{\pi - 2\alpha}{\pi} \log \left| \frac{z - e^{-is_1}}{z - e^{is_1}} \right|.$$

Il en résulte que, au voisinage de $z = e^{is_1}$, ce qui correspond au voisinage du point saillant A, la vitesse, à cause de l'inégalité (1), est infiniment grande positive, et, par suite, la pression aux mêmes points est infiniment grande négative. Ceci, du point de vue physique, n'a aucun sens, et la solution est par conséquent illusoire et à rejeter.

[3] Mais nous allons montrer qu'on peut trouver une solution acceptable, en modifiant convenablement les principes d'Helmholtz et en faisant les hypothèses suivantes, que le résultat justifiera. En admettant, par exemple, que le point mort O soit situé sur AB, la ligne de courant qui se divise en O, suivra, d'un côté, le segment OB et ira former la ligne de jet λ_* qui limite inférieurement le sillage arrière :

de l'autre côté, elle suivra d'abord le segment OA, s'en détachera tangentiellement en A pour isoler le long du segment AD de la lame AC, une plage de fluide mort, et viendra se raccorder en D avec AC, pour suivre le segment DC et la ligne de glissement λ_1 limitant supérieurement le sillage. Le long des lignes de glissement λ_1 et λ_2 , ainsi que le long de la ligne λ qui limite le fluide mort de la région avant, on sait que les équations de l'hydrodynamique exigent que la vitesse soit constante; nous désignerons par 1 la vitesse à l'infini du fluide; ce sera aussi par suite la vitesse le long de λ_1 et λ_2 ; la vitesse le long de λ sera désignée par v_1 . Il est impossible que l'on ait $v_1 = 1$, car, ainsi que l'a montré M. M. Brillouin (*Annales de Chimie et de Physique*, 1911, p. 150), la nécessité géométrique d'une inflexion sur la ligne λ entraînerait alors que la vitesse devienne en quelque endroit supérieure à un, et que, par suite, la pression correspondante puisse devenir négative. Pour la même raison, il est nécessaire que v_1 soit moindre que 1; nous poserons, pour abréger l'écriture,

$$(4) \quad a = -\log_e v_1,$$

et a désignera une quantité essentiellement positive.

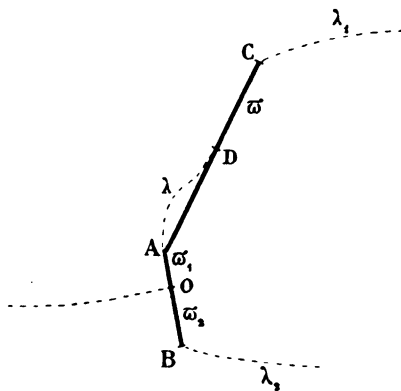


FIG. 1.

Il est alors aisé de se rendre compte, en appliquant des procédés tout à fait semblables à ceux que j'ai exposés dans mon Mémoire déjà cité (chap. II), que la solution du problème ainsi posé s'obtient, si elle existe, comme il suit :

Le point z du plan $z = x + iy$ dans lequel se fait le mouvement, se place au moyen d'une variable auxiliaire Z , par l'intermédiaire de la relation

$$(5) \quad dz = \frac{2\omega_1}{\pi} e^{i\omega_1 Z} \left\{ \frac{i \wp' \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\gamma}{2i} - \omega_3 | \omega_1 \omega_3 \right) - \wp' \left(\frac{\gamma}{i} | \omega_1 \omega_3 \right)}{2 \wp \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\gamma}{2i} - \omega_3 | \omega_1 \omega_3 \right) - \wp \left(\frac{\gamma}{i} | \omega_1 \omega_3 \right)} + \frac{i \wp' \left(\frac{\omega_1}{\pi} s_0 - \frac{\gamma}{2i} - \omega_3 \right) - \wp' \left(\frac{\gamma}{i} \right)}{2 \wp \left(\frac{\omega_1}{\pi} s_0 - \frac{\gamma}{2i} - \omega_3 \right) - \wp \left(\frac{\gamma}{i} \right)} \right\} \\ \times \left\{ \wp \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z + \frac{\gamma}{2i} - \omega_3 \right) - \wp \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\gamma}{2i} - \omega_3 \right) \right\} \frac{dZ}{Z}.$$

dans laquelle $\wp u$ désigne la fonction elliptique de Weierstrass, et dans laquelle $\Omega(Z) = \Theta + iT$ désigne la fonction de Z (régulière et uniforme dans la demi-couronne circulaire qu'indique la figure) écrite ci-dessous :

$$(6) \quad \Omega(Z) = i \log \frac{\wp\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} s_0 | \omega_1 \omega_3\right)}{\wp\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z + \frac{\omega_1}{\pi} s_0 | \omega_1 \omega_3\right)} + \left(\frac{2\gamma_1 \omega_1}{\pi^2} s_0 - \frac{a}{\pi}\right) \log Z + \pi - \alpha - \beta.$$

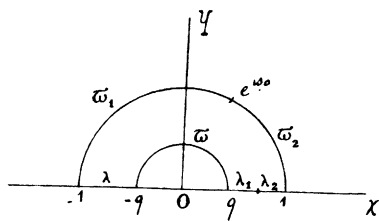


FIG. 2.

La vitesse dans le fluide, au point z , est $V = e^T$; elle fait avec Ox l'angle Θ ; la pression correspondante est donnée par

$$(7) \quad p = p_0 + \frac{1}{2}(1 - V^2),$$

où p_0 désigne la pression du fluide à l'infini (celle-ci est quelconque positive).

L'existence de la fonction $\Omega(Z)$ exige (cf. H. Villat, *loc. cit.*, 2^e Partie, p. 470) que, entre les constantes $\alpha, \beta, \omega_1, \omega_3, a, s_0, \gamma$, on ait la relation

$$(8) \quad \pi - \alpha - \beta + a \frac{\omega_3}{i\omega_1} = 0.$$

La condition énoncée plus haut, que le courant fluide à l'infini soit parallèle à Ox , fournit de plus l'équation

$$(9) \quad i \log \frac{\wp\left(\omega_3 + \frac{\gamma}{2i} - \frac{\omega_1}{\pi} s_0\right)}{\wp\left(\omega_3 + \frac{\gamma}{2i} + \frac{\omega_1}{\pi} s_0\right)} + \left(\frac{2\gamma_1 \omega_1}{\pi} s_0 - a\right) \left(-\frac{\omega_3}{i\omega_1} + \frac{\gamma}{2\omega_1}\right) + \pi - \alpha - \beta = 0.$$

Dans toutes ces équations, la détermination de $\log Z$ est celle qui est réelle pour Z réel positif; la détermination de

$$\log \frac{\wp\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} s_0\right)}{\wp\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z + \frac{\omega_1}{\pi} s_0\right)}$$

est celle qui est égale à $i\pi$ pour $Z = 1$, et dont la variation est suivie par continuité.

[4] Il est maintenant indispensable : 1° de reconnaître si la solution ainsi édiflée est acceptable, c'est-à-dire si l'état des vitesses est possible physiquement (ou bien si les vitesses ne dépassent pas la valeur 1) et si l'allure des lignes de glissement fournit bien un domaine d'un seul tenant pour le liquide en mouvement, ainsi que l'indique la figure 1; 2° de démontrer si l'on peut ou non s'arranger pour que les points ADC soient alignés, comme l'exige la même figure 1.

Pour ce qui concerne les lignes de glissement λ_1 et λ_2 , elles doivent rester constamment convexes vers le liquide en mouvement, et il n'y a pas pour elles d'autres conditions, puisque les limites de variations de l'angle Θ sur ces lignes sont, par construction, $\alpha - \delta$ et zéro pour λ_1 ; zéro et $-\alpha - \delta$ pour λ_2 . Par un calcul identique à celui qu'on trouvera dans mon Mémoire cité, p. 473 et suiv., on trouve que la condition précédente s'exprime par l'unique inégalité

$$(10) \quad -2\omega_1 z_2 \frac{\omega_1}{\pi} s_0 + \frac{2\tau_1 \omega_1}{\pi} s_0 - a \leq 0.$$

Si l'on envisage ensuite la ligne λ , on voit qu'il sera nécessaire, pour donner à cette ligne l'allure nécessitée par sa situation en avant de la lame AB, que l'angle Θ que fait la tangente au courant le long de λ , avec l'axe Ox , soit d'abord décroissant, puis croissant, quand on parcourt cette ligne du point A au point D, c'est-à-dire lorsque le point $Z = -\rho$ ($\rho > 0$) décrit le segment $-1, -q$, de l'axe réel, ρ décroissant de 1 à q . Or, on a sans difficulté, en faisant dans $\Omega(Z)$, $\log Z = \log q + i\pi$, et en prenant la partie réelle du résultat :

$$(11) \quad \Theta(\rho) = i \log \frac{\sigma_1 \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log \rho - \frac{\omega_1}{\pi} s_0 \right)}{\sigma_1 \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log \rho + \frac{\omega_1}{\pi} s_0 \right)} + \left(\frac{2\tau_1 \omega_1}{\pi^2} s_0 - \frac{a}{\pi} \right) \log \rho + \pi - \alpha - \delta.$$

La dérivée $\frac{d\Theta}{d\rho}$ a le signe de la fonction

$$\omega_1 \left[z_1 \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log \rho - \frac{\omega_1}{\pi} s_0 \right) - z_1 \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log \rho + \frac{\omega_1}{\pi} s_0 \right) \right] + \frac{2\tau_1 \omega_1}{\pi} s_0 - a,$$

laquelle varie constamment dans le même sens dans l'intervalle considéré. Pour que $\frac{d\Theta}{d\rho}$ soit d'abord négatif pour $\rho = q$, puis positif pour $\rho = 1$, après un seul changement de signe, il est nécessaire et suffisant par suite que l'on ait les deux inégalités

$$(12) \quad -2\omega_1 z_2 \frac{\omega_1}{\pi} s_0 + \frac{2\tau_1 \omega_1}{\pi} s_0 - a < 0$$

et

$$(13) \quad -2\omega_1 z_1 \frac{\omega_1}{\pi} s_0 + \frac{2\tau_1 \omega_1}{\pi} s_0 - a > 0.$$

On verra facilement que ces deux conditions sont compatibles et qu'elles entraînent l'inégalité (10).

Mais cela ne suffit peut-être pas à assurer la validité de la ligne de jet λ : il faut encore être sûr que le minimum de Θ le long de λ ne descend pas au-dessous d'une certaine limite, de façon que le dessin correspondant, soit effectivement celui de la figure 3, et non celui de la figure 4, pour laquelle la ligne λ se recouperait elle-même et serait par suite à rejeter. Or, je vais faire voir qu'il résulte des conditions déjà écrites, que le minimum de Θ ne peut pas descendre au-dessous de la valeur $-\alpha - \delta$, de sorte que la figure 5 indique le cas de figure-limite et que le recouplement est impossible.

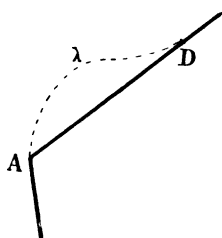


FIG. 3.

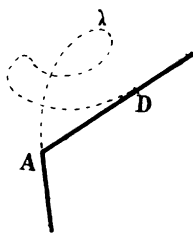


FIG. 4.

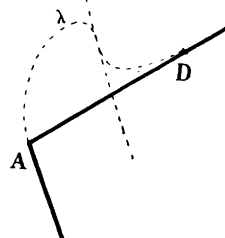


FIG. 5.

On a en effet, par l'équation (11),

$$\Theta + \alpha + \delta = i \log \frac{\tau_1 \left(\frac{\omega_1}{\pi} \log \rho - \frac{\omega_1}{\pi} s_0 \right)}{\tau_1 \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log \rho + \frac{\omega_1}{i\pi} s_0 \right)} + \left(\frac{2\eta_1 \omega_1}{\pi^2} s_0 - \frac{a}{\pi} \right) \log \rho + \pi,$$

puis l'inégalité (12) permet d'écrire, puisque $\log \rho$ est négatif :

$$\left(\frac{2\eta_1 \omega_1}{\pi^2} s_0 - \frac{a}{\pi} \right) \log \rho > \frac{2\omega_1}{\pi} \log \rho \times \zeta_2 \frac{\omega_1}{\pi} s_0.$$

D'où

$$(14) \quad \Theta + \alpha + \delta > i \log \frac{\tau_1 \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log \rho - \frac{\omega_1}{\pi} s_0 \right)}{\tau_1 \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log \rho + \frac{\omega_1}{\pi} s_0 \right)} + \frac{2\omega_1}{\pi} \log \rho \times \zeta_2 \frac{\omega_1}{\pi} s_0 + \pi = H(\rho).$$

On voit sans peine que $\frac{dH}{d\rho}$ est toujours positif dans l'intervalle $q, 1$, de valeurs de ρ . La valeur initiale de $H(\rho)$ est d'ailleurs

$$H(q) = i \log \frac{\tau_1 \left(\omega_3 - \frac{\omega_1}{\pi} s_0 \right)}{\tau_1 \left(\omega_3 + \frac{\omega_1}{\pi} s_0 \right)} - \frac{2\omega_3}{i} \zeta_2 \frac{\omega_1}{\pi} s_0 + \pi,$$

c'est-à-dire

$$H(q) = -2i \frac{\tau_3 \omega_1}{\pi} s_0 - \frac{2\omega_3}{i} \tau_2 \frac{\omega_1}{\pi} s_0 + \pi = I(s_0).$$

Je dis que cette quantité, minimum de H , est elle-même positive. On a

$$\frac{dI}{ds_0} = \frac{2\omega_1}{i\pi} \left[\omega_3 \wp \left(\frac{\omega_1}{\pi} s_0 + \omega_2 \right) + \tau_3 \right],$$

expression qui varie entre $\frac{2\omega_1}{i\pi} (\omega_3 e_2 + \tau_3)$ et $\frac{2\omega_1}{i\pi} (\omega_3 e_3 + \tau_3)$; ces deux valeurs sont essentiellement négatives, comme on le verra un peu plus loin (cf. n° 10), $I(s_0)$ est donc décroissant, depuis π jusqu'à la valeur finale

$$I(\pi) = -2i \tau_3 \omega_1 - \frac{2\omega_3}{i} \tau_2 \omega_1 + \pi.$$

Et comme on a

$$\tau_2 \omega_1 = \tau(\omega_1 + \omega_2) - \tau_2 = -\tau_3 - \tau_2 = \tau_1,$$

il vient

$$I(\pi) = 2i(\tau_1 \omega_3 - \tau_3 \omega_1) + \pi = 0.$$

D'où il résulte que $I(s_0)$ reste toujours positif, et qu'il en est de même de $H(z)$, ce que nous voulions faire voir.

[5] Voyons maintenant si les vitesses sont acceptables. Il suffit de le vérifier sur les frontières de la demi-couronne du plan Z (cf. H. Villat, *Sur la validité des solutions de certains problèmes d'hydrodynamique*, Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1914). Et comme les valeurs de la vitesse sont connues déjà sur les lignes de glissement, il suffit de considérer les vitesses sur les parois solides, c'est-à-dire pour les points Z des deux demi-circonférences $|Z| = q$ et $|Z| = 1$.

Pour $Z = e^{is}$ ($0 < s < \pi$), le coefficient de i dans $\Omega(Z)$ est

$$T_1(s) = \log \left| \frac{\tau \frac{\omega_1}{\pi} (s - s_0)}{\tau \frac{\omega_1}{\pi} (s + s_0)} \right| + \left(\frac{2\tau_1 \omega_1}{\pi^2} s_0 - \frac{a}{\pi} \right) s;$$

il est discontinu, et égal à $-\infty$, pour $s = s_0$. Ses deux premières dérivées sont

$$\frac{dT_1}{ds} = \frac{\omega_1}{\pi} \left[\tau \frac{\omega_1}{\pi} (s - s_0) - \tau \frac{\omega_1}{\pi} (s + s_0) \right] + \frac{2\tau_1 \omega_1}{\pi^2} s_0 - \frac{a}{\pi}$$

et

$$\frac{d^2 T_1}{ds^2} = -\frac{\omega_1^2}{\pi^2} \left[\wp \frac{\omega_1}{\pi} (s - s_0) - \wp \frac{\omega_1}{\pi} (s + s_0) \right],$$

dont la seconde est toujours négative dans l'intervalle envisagé. $\frac{dT_1}{ds}$ est d'ailleurs égal, pour $s = 0$, à

$$-\frac{2\omega_1}{\pi} \tau \frac{\omega_1}{\pi} s_0 + \frac{2\tau_1 \omega_1}{\pi^2} s_0 - \frac{a}{\pi}.$$

et, pour $s = \pi$, à

$$-\frac{2\omega_1}{\pi} \zeta_1 \frac{\omega_1}{\pi} s_0 + \frac{2\tau_1 \omega_1}{\pi^2} s_0 - \frac{a}{\pi}.$$

La dernière de ces valeurs est positive, d'après la condition (13); quant à la première, elle est certainement négative, d'après les relations

$$\zeta_1 \frac{\omega_1}{\pi} s_0 - \zeta_1 \frac{\omega_1}{\pi} s_0 = \zeta_1 \left(\frac{\omega_1}{\pi} s_0 + \omega_1 \right) - \tau_1 - \zeta_1 \frac{\omega_1}{\pi} s_0 = \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{p}' \frac{\omega_1}{\pi} s_0}{\mathfrak{p} \frac{\omega_1}{\pi} s_0 - e_1} < 0,$$

jointes à l'inégalité (12).

De tout ceci résulte que la fonction $T_1(s)$ est constamment décroissante dans l'intervalle $0, s_0$, et constamment croissante dans l'intervalle s_0, π ; comme elle est égale à $0, -\infty, -a$, pour $s = 0, s_0, \pi$, respectivement, on en conclut immédiatement que T_1 reste constamment négatif ou nul dans l'intervalle $0, \pi$, et que la vitesse du fluide le long de la lame AB est toujours au plus égale à l'unité. Cette vitesse va même en croissant d'une façon continue, de la valeur zéro à la valeur e^{-a} , le long de la portion OA de la lame; et de la valeur zéro à la valeur 1 le long de la portion OB.

Enfin, en ce qui concerne la paroi DC, qui correspond à $Z = q.e^{is}$ ($0 < s < \pi$), on constate sans difficulté que la vitesse y reste constamment inférieure à 1, et qu'elle va en croissant constamment le long de DC, depuis e^{-a} jusqu'à 1.

[6] Récapitulant les résultats déjà obtenus, nous voyons qu'il nous faut, pour arriver à une solution acceptable de notre problème, satisfaire à toutes les conditions suivantes :

$$(15) \quad |z \pm \bar{z}| < \pi, \quad z - \bar{z} > 0, \quad 0 < z < \frac{\pi}{2};$$

$$(16) \quad 0 < \gamma < \frac{2\omega_3}{i}, \quad a > 0, \quad 0 < s_0 < \pi;$$

$$(17) \quad \pi - 2z - s_0 + a \frac{\omega_3}{i\omega_1} = 0;$$

$$(18) \quad i \log \frac{\tau \left(\omega_3 + \frac{\gamma}{2i} - \frac{\omega_1}{\pi} s_0 \right)}{\tau \left(\omega_3 + \frac{\gamma}{2i} + \frac{\omega_1}{\pi} s_0 \right)} + \left(\frac{2\tau_1 \omega_1}{\pi} s_0 - a \right) \left(-\frac{\omega_3}{i\omega_1} + \frac{\gamma}{2\omega_1} \right) + \pi - z - \bar{z} = 0;$$

$$(19) \quad -2\omega_1 \zeta_1 \frac{\omega_1}{\pi} s_0 + \frac{2\tau_1 \omega_1}{\pi} s_0 - a < 0;$$

$$(20) \quad -2\omega_1 \zeta_1 \frac{\omega_1}{\pi} s_0 + \frac{2\tau_1 \omega_1}{\pi} s_0 - a > 0.$$

A ces conditions, il reste à joindre celle qui doit exprimer l'alignement des trois points A, D, C. On l'obtiendra évidemment en écrivant que la projection totale de la ligne de glissement λ sur un axe perpendiculaire à DC est nulle. En désignant par dl l'élément d'arc de cette ligne, et en se rappelant que la lame DC fait avec Ox l'angle $\alpha - \hat{z}$, on arrive ainsi à la relation cherchée, sous la forme

$$(21) \quad \int_{\lambda} \sin (\Theta - \alpha + \hat{z}) dl = 0.$$

Il est facile d'expliciter complètement cette équation, en notant que λ correspond à $Z = -\rho$ ($q < \rho < 1$), puis que l'on a

$$dl = |dz|,$$

d'où l'on tire, sur λ , d'après (5) :

$$\begin{aligned} dl = \frac{\omega_1}{\pi} e^a & \left\{ i \frac{\wp' \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log \rho - \frac{\gamma}{2i} + \omega_1 - \omega_3 \right) - \wp' \frac{\gamma}{i}}{\wp \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log \rho - \frac{\gamma}{2i} + \omega_1 - \omega_3 \right) - \wp \frac{\gamma}{i}} + i \frac{\wp' \left(\frac{\omega_1}{\pi} s_0 - \frac{\gamma}{2i} - \omega_3 \right) - \wp' \frac{\gamma}{i}}{\wp \left(\frac{\omega_1}{\pi} s_0 - \frac{\gamma}{2i} - \omega_3 \right) - \wp \frac{\gamma}{i}} \right\} \\ & \times \left\{ \wp \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log \rho + \frac{\gamma}{2i} + \omega_1 - \omega_3 \right) - \wp \left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log \rho - \frac{\gamma}{2i} + \omega_1 - \omega_3 \right) \right\} \frac{d\rho}{\rho}. \end{aligned}$$

Quant à l'angle Θ , il est alors donné par la relation (11), dans laquelle on sait que le logarithme du quotient des fonctions σ_1 a pour détermination celle qui est nulle pour $\rho = 1$.

Ceci posé, si l'on suppose écrites encore les deux égalités exprimant que les longueurs AB et AC sont données, on aura en tout cinq égalités (outre un certain nombre d'inégalités) entre les cinq constantes $\omega_1, \omega_3, \gamma, s_0, a$; quant à α et \hat{z} , ce sont des données de la question : elles précisent l'orientation donnée des deux lames.

La position et la grandeur des lames étant données, pour montrer si le problème est possible comme on vient de le poser, il suffit de faire voir si les conditions ci-dessus énoncées sont compatibles par rapport aux cinq inconnues mises en évidence, et si toutes les inégalités voulues sont satisfaites en même temps. Pour faire cette vérification, nous remplacerons la donnée des deux longueurs AB et AC, par celle des deux demi-périodes ω_1 et ω_3 ; les longueurs AB et AC seront ensuite déterminées *a posteriori* sans qu'aucune difficulté puisse s'introduire en cet endroit, car il est facile de voir que ces longueurs seront données par des intégrales où l'élément différentiel est essentiellement positif.

[7] Il suffit donc de porter pour l'instant l'attention sur les inconnues γ, s_0, a . Pour la commodité, nous poserons :

$$(22) \quad \frac{\omega_1}{\pi} s_0 = u,$$

$$(23) \quad \frac{a}{2\omega_1} = v.$$

L'égalité (17) et les deux inégalités (19) et (20) deviennent :

$$(24) \quad v = \frac{i}{2\omega_3} \left(\frac{\pi}{\omega_1} u + 2z - \pi \right);$$

$$(25) \quad v + \zeta_2 u - \frac{\tau_1}{\omega_1} u > 0,$$

$$(26) \quad v + \zeta_1 u - \frac{\tau_1}{\omega_1} u < 0.$$

Employons une représentation géométrique dans le plan uOv ; les deux dernières inégalités expriment que, si l'on construit dans ce plan, les deux courbes

$$v_1 = -\zeta_1 u + \frac{\tau_1}{\omega_1} u$$

et

$$v_2 = -\zeta_2 u + \frac{\tau_1}{\omega_1} u,$$

on doit avoir

$$(27) \quad v_2 < v < v_1.$$

Or, les courbes en question sont faciles à tracer. La variable u doit varier seulement entre 0 et ω_1 ; on constate sans peine que dans cet intervalle v_1 croît constamment de 0 à $+\infty$, la dérivée étant elle-même croissante à partir de la valeur positive $e_1 + \frac{\tau_1}{\omega_1}$ (cf. Tannery et Molk, *Fonctions elliptiques*, XXX, 1). En ce qui concerne v_2 , on a immédiatement

$$\frac{dv_2}{du} = p(u + \omega_2) + \frac{\tau_1}{\omega_1}.$$

Cette expression varie, en décroissant, depuis

$$e_2 + \frac{\tau_1}{\omega_1}$$

jusqu'à

$$e_3 + \frac{\tau_1}{\omega_1},$$

c'est-à-dire (Tannery et Molk, XXX, 2, 3) de

$$\frac{\pi^2}{2\omega_1^2} \sum_1^{\infty} \frac{4q^{2n-1}}{(1+q^{2n-1})^2}$$

à

$$-\frac{\pi^2}{2\omega_1^2} \sum_1^{\infty} \frac{4q^{2n-1}}{(1-q^{2n-1})^2};$$

v_2 part donc de zéro en croissant, puis décroît jusqu'à la valeur

$$-\zeta_2 \omega_1 + r_{11} = r_{11} + r_{12} - \zeta(\omega_1 + \omega_2) = 0$$

évidemment nulle. On peut donc tracer les deux courbes indiquées sur la figure.

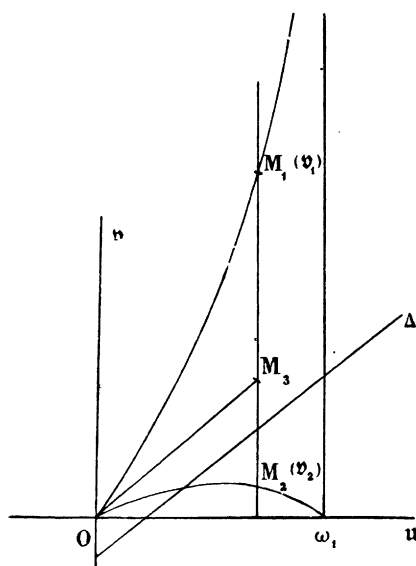


FIG. 6.

La courbe v_1 est d'ailleurs toute entière au-dessus de la courbe v_2 à cause des relations

$$v_1 - v_2 = \zeta_2 u - \zeta_1 u = \frac{1}{2} \frac{(e_2 - e_1) p' u}{(p u - e_1)(p u - e_2)} > 0.$$

[8] Cela étant, donnons-nous pour le moment une valeur de u (c'est-à-dire de s_u) entre les limites 0 et ω_1 , et voyons à quoi est assujettie la position du point M de coordonnées (u, v) sur la droite d'abscisse u . Ce point M devra être situé sur le segment $M_1 M_2$ de la figure, mais il ne saurait y être pris quelconque. Il faut en effet

tout d'abord que la droite Δ , menée par M, et de pente $\frac{i\pi}{2\omega_1\omega_3}$, ait pour ordonnée à l'origine une valeur négative $\frac{i}{2\omega_3}(2x - \pi)$, à cause de l'équation (24). Or, la droite parallèle à Δ , menée par M_1 , a certainement une ordonnée positive. Car si l'on place le point M en M_1 , cela revient, en se reportant aux calculs antérieurs, à faire en sorte que l'angle Θ sur la ligne λ , angle donné par la formule (11) en fonction de φ , soit décroissant lorsque φ croît. Comme les valeurs extrêmes de cet angle sont $x - \varepsilon$ et $\pi - x - \varepsilon$, on voit que cela exige

$$2x - \pi > 0,$$

ce qui légitime évidemment l'assertion susdite. Ce cas ne saurait donc convenir au problème actuel.

Au contraire, la droite parallèle à Δ menée par M_2 a une ordonnée à l'origine sûrement négative; car si l'on place le point M en M_2 , cela revient dans les calculs rappelés il y a un instant à faire en sorte que l'angle Θ le long de λ soit constamment croissant, et par suite le sens de l'inégalité précédente est renversé, ce qui correspond par suite à

$$2x - \pi < 0.$$

Si donc on mène par le point O une parallèle à Δ , cette parallèle rencontrera le segment M_1M_2 en un point M_3 , et seul le segment M_2M_3 donnera des positions acceptables pour le point M.

Or, pour M placé en M_2 , nous venons de le voir, l'angle Θ relatif à λ croît à partir de $x - \varepsilon$; cela correspond à une mise en place des éléments du mouvement, telle que l'indique la figure 7 :

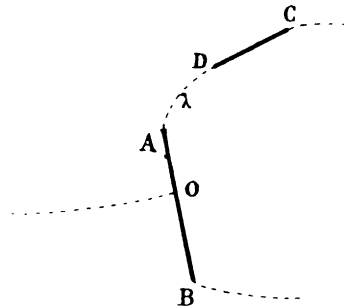


FIG. 7.

La lame DC prolongée ne rencontre certainement pas la lame AB, puisque la ligne de jet AD est convexe vers le liquide en mouvement, d'après les calculs du paragraphe 4; ajoutons ici, à titre d'indication secondaire, que le rayon de courbure de λ est infini au point D de raccordement avec DC. (Cela résulte d'un calcul semblable à celui qu'on trouvera dans le Mémoire cité, *Annales de l'École N. S.*, 1914.)

Si, au contraire, nous plaçons M en M_3 , la disposition correspondante sera telle que l'on ait $2\alpha - \pi = 0$; et comme l'angle des deux lames AB et DC est 2α , cela veut dire que ces deux lames seront alors parallèles, et l'on aura la disposition de la figure 8 :

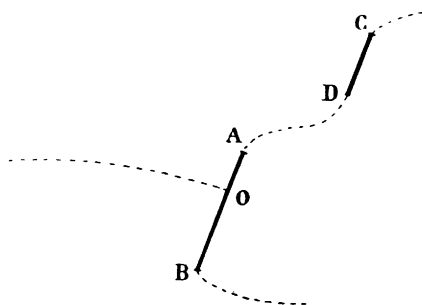


FIG. 8.

La tangente à la ligne AD , d'après les calculs antérieurs, fait en effet avec Ox un angle, d'abord décroissant, puis croissant.

Ceci posé, observons que si nous faisons décrire au point M , d'une façon continue, le segment M_1M_3 , c'est-à-dire que, u restant fixe, si nous faisons varier v dans les limites correspondantes, toutes choses étant égales d'ailleurs, nous aurons alors dans le plan du mouvement une configuration variable, dont la variation sera continue, ainsi qu'il résulte facilement du caractère des équations utilisées dans la théorie précédente, et les configurations initiale et finale répondront aux dessins tracés ci-dessus. Il est donc clair que dans la déformation continue qui fait passer d'une configuration à l'autre, il y a une situation intermédiaire pour laquelle la lame DC prolongée ira passer par le point A . Pour ce cas intermédiaire, l'intégrale (21) sera nulle.

[9] De là va résulter l'existence de la solution annoncée antérieurement. Donnons-nous en effet des valeurs de u et de γ entre les limites respectives requises; d'après ce qui vient d'être dit, il existera une valeur de v correspondante pour laquelle la configuration répondra bien à la figure primitive 1; cette valeur de v pourra toujours d'ailleurs être calculée avec l'approximation qu'on voudra, par des calculs longs à la vérité, mais sans difficultés spéciales. Cela déterminera, dans la figure 6, un point M , de coordonnées u, v , par lequel nous mènerons une parallèle à la droite Δ ; cette parallèle rencontrera l'axe Ov en un point dont l'ordonnée, négative d'après ce qui précède, nous fournira la valeur correspondante de z .

Remarquons maintenant que, dans les calculs jusqu'ici effectués, z n'intervient nulle part explicitement, car, d'après l'expression (11) de l'angle Θ , z s'élimine dans la quantité $\Theta - \alpha + z$. Il reste alors, en profitant de l'équation (18), à calculer la

valeur de \hat{z} , valeur dont tout ce qui précède est resté indépendant. Or, on peut vérifier, et cela résulte d'ailleurs des calculs de mon Mémoire cité plus haut (n° I), que la quantité

$$i \log \frac{\sigma \left(\omega_3 + \frac{\gamma}{2i} - \frac{\omega_1}{\pi} s_0 \right)}{\sigma \left(\omega_3 + \frac{\gamma}{2i} + \frac{\omega_1}{\pi} s_0 \right)} + \left(\frac{2\tau_1 \omega_1}{\pi} s_0 - a \right) \left(-\frac{\omega_3}{i\omega_1} + \frac{\gamma}{2\omega_1} \right),$$

considérée comme fonction de γ , décroît, lorsque γ varie entre 0 et $\frac{2\omega_3}{i}$, depuis la valeur $2x - \pi$ jusqu'à la valeur $-\pi$. De sorte que, si γ est donné, la valeur tirée de l'équation (18), pour \hat{z} , satisfera aux deux inégalités

$$-\pi < x + \hat{z} - \pi < 2x - \pi, \quad \text{ou bien} \quad -x < \hat{z} < x,$$

c'est-à-dire justement aux inégalités voulues pour que \hat{z} soit acceptable, d'après la théorie précédente.

[10] Il reste toutefois une difficulté en suspens; nous avons admis implicitement, il y a un instant, que la valeur trouvée pour x , par la construction de la droite parallèle à Δ dont il a été question, était sûrement acceptable. Il en est effectivement bien ainsi, comme nous allons le faire voir. Cette valeur est déjà, nous le savons, inférieure à $\frac{\pi}{2}$; il faut encore (et il suffit) qu'elle soit positive. Comme il est évident que la valeur de x correspondant à un point M de la figure 6 diminue quand le point M décrit le segment M_3M_2 à partir de M_3 , il suffira de montrer que la valeur de x qui correspond à la position M_2 est positive pour qu'il en soit sûrement de même de celle qui nous occupe. Or, dans ce cas particulier, on a en même temps les deux équations

$$\begin{aligned} \pi - 2x - s_0 + a \frac{\omega_3}{i\omega_1} &= 0, \\ -2\omega_1 \frac{\gamma}{\pi} \frac{\omega_1}{\pi} s_0 + \frac{2\tau_1 \omega_1}{\pi} s_0 - a &= 0, \end{aligned}$$

desquelles nous tirons sans difficulté, en utilisant la condition connue

$$\tau_1 \omega_3 - \tau_3 \omega_1 = \frac{i\pi}{2},$$

la relation suivante :

$$(28) \quad x = -\frac{\omega_3}{i} \frac{\gamma}{\pi} \mathbf{u} + \frac{\tau_3}{i} \mathbf{u} + \frac{\pi}{2}.$$

On a, par suite,

$$\frac{dz}{du} = \frac{\omega_3}{i} \wp(u + \omega_3) + \frac{\eta_3}{i},$$

et la variation de z en fonction de u , dans l'intervalle $0, \omega_1$, en résulte aisément : la dérivée varie en effet, toujours en décroissant, de $\frac{\omega_3}{i} e_2 + \frac{\eta_3}{i}$ à $\frac{\omega_3}{i} e_3 + \frac{\eta_3}{i}$. Or, ces deux valeurs sont négatives. Pour nous en assurer, faisons la transformation

$$(29) \quad \omega'_1 = -i\omega_3, \quad \omega'_3 = i\omega_1$$

et posons

$$(30) \quad q' = e^{\frac{-\pi\omega'_3}{i\omega'_1}} = e^{-\pi \frac{i\omega_1}{\omega_3}} < 1.$$

On tire aisément des formules d'homogénéité les relations

$$(31) \quad \begin{cases} e_1 = -e'_3, & e_2 = -e'_2, & e_3 = -e'_1, \\ \tau_1 = \zeta(\omega_1|\omega_1\omega_3) = i\zeta(i\omega_1|\omega'_1\omega'_3) = i\zeta(\omega'_3|\omega'_1\omega'_3) = i\tau'_3, \\ \tau_3 = \zeta(\omega_3|\omega_1\omega_3) = i\zeta(i\omega_3|\omega'_1\omega'_3) = i\zeta(-\omega'_1|\omega'_1\omega'_3) = -i\tau'_1, \end{cases}$$

où l'accent désigne les quantités relatives aux fonctions elliptiques de demi-périodes ω'_1 et ω'_3 . Les valeurs limites de $\frac{dz}{du}$ prendront alors la forme

$$-\omega'_1 e'_2 - \tau'_1 \quad \text{et} \quad -\omega'_1 e'_1 - \tau'_1$$

ou bien (cf. Tannery et Molk, XXX, 1, 2)

$$-\frac{\pi^2}{2\omega'_1} \sum_1^{\infty} \frac{4q'^{2n-1}}{(1+q'^{2n-1})^3}$$

et

$$-\frac{\pi^2}{2\omega'_1} \left[\frac{1}{2} + \sum_1^{\infty} \frac{4q'^{2n}}{(1+q'^{2n})^3} \right],$$

dont le signe est évident.

Ceci posé, la valeur de z pour $u=0$ est visiblement $\frac{\pi}{2}$; pour $u=\omega_1$, sa valeur finale est

$$-\frac{\omega_3}{i} \zeta_2 \omega_1 + \frac{\eta_3}{i} \omega_1 + \frac{\pi}{2} = -\frac{\eta_1 \omega_3}{i} + \frac{\eta_3 \omega_1}{i} + \frac{\pi}{2},$$

c'est-à-dire zéro. Il en résulte donc bien que z , tiré de l'équation (28), est toujours positif, ce qu'il fallait démontrer.

Le même fait pouvait du reste se prévoir sur la figure 6, sur laquelle on se rend compte que toute parallèle à Δ menée par un point M_z se trouve située au-dessus de la droite de même direction passant au point de coordonnées ω_1 et zéro. Or, cette dernière droite a pour équation

$$y = (u - \omega_1) \frac{i\pi}{2\omega_1\omega_3}$$

et son ordonnée à l'origine est $-\frac{i\pi}{2\omega_3}$. Si l'on égale cette expression à $\frac{i}{2\omega_3}(2z - \pi)$, on voit que la valeur de z correspondante est nulle. Les valeurs de z , correspondant aux droites issues des points M_z , sont donc nécessairement positives.

Finalement, donc, il résulte de tout ceci qu'il existe bien une solution, et acceptable, du problème tel que nous l'avons posé, la configuration correspondante étant celle qu'indique la figure 1.

[11] Il est maintenant facile de déduire de nos résultats la manière dont il faut concevoir la solution du problème de la résistance pour un obstacle donné, dont le contour présente un point anguleux, et dont l'orientation est variable sur le courant fluide.

Prenons l'obstacle type formé des deux lames AB et AC, et plaçons-le d'abord, la pointe en avant dans le courant, dans l'orientation qui convient au problème de T. Levi-Civita, c'est-à-dire telle que le point mort sur la face antérieure de l'obstacle coïncide avec le point A. (Cette orientation dépend du rapport des longueurs des deux lames.) Partant de cette position initiale (fig. 9), faisons tourner d'une façon continue l'obstacle autour du point A par exemple, dans le sens des aiguilles d'une montre.

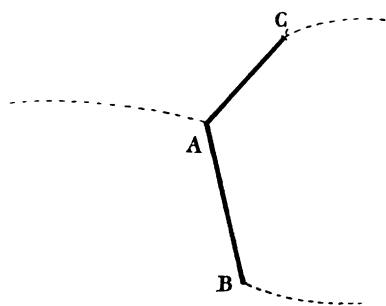


FIG. 9.

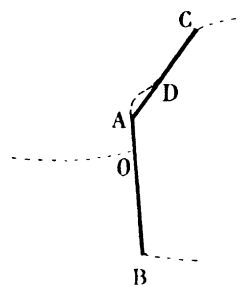


FIG. 10.

Une plage de fluide mort viendra prendre naissance (fig. 10) au voisinage du point A, le long de AD, et se développera de plus en plus à mesure que nous ferons tourner l'obstacle, la portion DC de la seconde lame, léchée par le courant, devenant

de plus en plus faible, jusqu'au moment (fig. 11) où la lame AC viendra disparaître toute entière dans le sillage de la lame AB. L'inclinaison limite correspondante sera très facile à déterminer, théoriquement au moins, avec l'approximation qu'on voudra : il suffira par exemple de tracer, pour la lame AB supposée seule, et dans différentes orientations, la solution du problème classique de lord Rayleigh et T. Levi-Civita, et, sur les dessins obtenus, de placer la lame AC qui complète notre obstacle actuel. On déterminera ainsi, d'abord par tâtonnements et ensuite en intercalant autant de figures qu'on voudra pour les orientations intermédiaires, la valeur de l'orientation pour laquelle l'extrémité de AC tombe exactement au bord du sillage supérieur produit par la lame AB supposée seule (fig. 11).

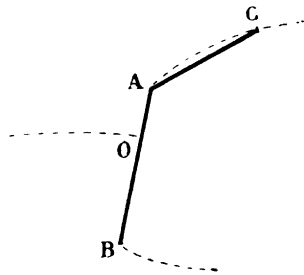


FIG. 11.

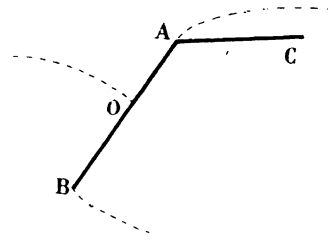


FIG. 12.

A partir de cette orientation, la lame AC reste dans le sillage de AB (fig. 12). Si l'on continue à faire tourner l'obstacle, il arrive un moment où AC viendra empiéter cette fois sur le bord inférieur du sillage (fig. 13). A partir de ce moment, par suite, la solution devra changer de caractère; les choses se passeront comme l'indique la figure 14, le creux limité par ABDA étant occupé par du fluide mort; l'étude de

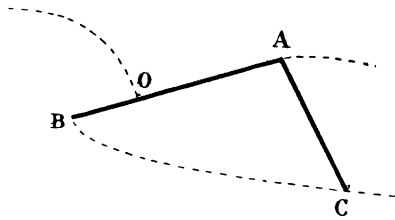


FIG. 13.

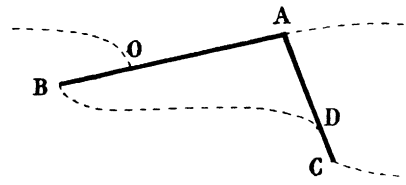


FIG. 14.

cette configuration est entièrement analogue à celle de la figure 1, qui a été exposée ci-dessus; nous laissons au lecteur le soin de s'assurer qu'on obtient la solution correspondante par des moyens tout semblables aux précédents, avec des modifications peu profondes.

L'inclinaison croissant encore, le point D s'avance du côté de A et la plage ABD diminue d'importance; en même temps, le point mort O s'avance vers le point B

jusqu'au moment où il quittera la face AB de la première lame pour venir se placer sur le côté opposé de la même lame. (Nous laissons provisoirement de côté le passage du point O d'un côté à l'autre de AB.)

Le point O étant situé sur la seconde face de AB, la configuration correspondante sera celle de la figure 15, pour laquelle les calculs ont été explicités dans mon Mémoire déjà cité, inséré aux *Annales de l'École Normale* (1914). Nous avons vu alors dans cette étude qu'il existait plusieurs solutions distinctes correspondant à ce cas de figure, et qu'on pouvait en édifier en admettant ou non la présence de la plage de fluide mort le long de EAD. Les considérations qui précèdent permettent de penser que la présence du fluide mort n'est nullement invraisemblable; il est au contraire naturel que, dans la déformation continue du mouvement par suite de la rotation de l'obstacle, cette plage morte provienne de celle indiquée dans la figure 14, où elle existe nécessairement. La solution, explicitement développée en l'endroit rappelé, pour laquelle la ligne de jet ED part de E avec un rayon de courbure infini, est celle dont l'existence paraît la plus probable.

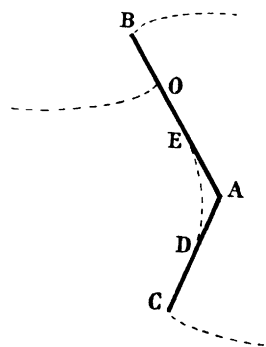


FIG. 15.

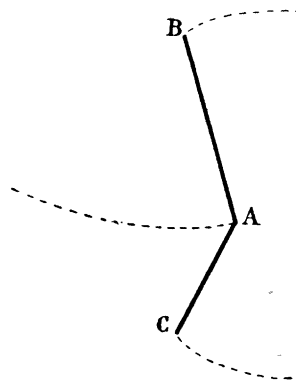


FIG. 16.

La rotation de l'obstacle continuant ensuite, le point O s'avancera de B vers A, et il finira par atteindre ce point, la plage morte venant s'y confondre (fig. 16) pour une valeur de l'inclinaison qu'on peut facilement calculer à l'avance, en appliquant les formules de M. T. Levi-Civita à l'obstacle formé de deux lames formant un angle se présentant au courant pointe en arrière (le point mort étant au sommet de l'angle dans les formules en question).

A partir de ce moment, si l'on fait continuer la rotation, le point mort O passe sur la lame AC, et l'on obtiendra des phénomènes analogues aux précédents, mais se présentant dans l'ordre contraire jusqu'à ce qu'on soit revenu à la position initiale primitivement choisie.

[12] Nous devons maintenant dire un mot d'une difficulté spéciale qui se présente pour le passage de la configuration 14 à la configuration 15, au moment où le point O se rapproche du point B. La solution cesse en effet d'être acceptable avant qu'on soit parvenu au point B. Il est facile de s'en rendre compte en considérant par exemple le cas de la figure 15.

Reportons-nous aux calculs du Mémoire indiqué; l'hypothèse limite $OB=0$ exige, avec les notations employées en cet endroit, que l'on ait $s_0=0$; il en résulte que les points M et P de la figure sont confondus avec l'origine, et par suite qu'on a $\alpha=\frac{\pi}{2}$; les deux lames sont donc en prolongement l'une de l'autre; on a ensuite (équation 8) $a=0$, et l'équation (9) donne alors $\beta=\frac{\pi}{2}$; par conséquent, la lame BAC est dans le sens du courant, le fluide s'écoule uniformément parallèlement à la lame, sans que la présence de celle-ci modifie en quoi que ce soit le mouvement. Les calculs en question ne conduisent donc pas, dans le cas limite, à une configuration qui réponde à la figure 15.

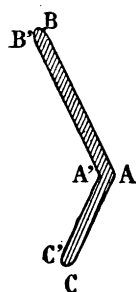


FIG. 17.

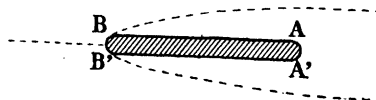


FIG. 18.

Il est facile de comprendre d'où provient cette difficulté : elle est causée par le fait que nous supposons la lame AB sans épaisseur, ce qui, du point de vue physique, n'a aucun sens. En pratique, cette lame a nécessairement une épaisseur, et si petite que soit celle-ci, cela modifie les calculs dès que le point O est voisin de B (mais d'ailleurs seulement dans ce cas); si, par exemple, on place la lame supposée seule parallèlement au courant, le front BB' de celle-ci, si petit soit-il, suffit pour engendrer un sillage dans lequel la lame entière se trouve enveloppée. Si l'on met en équation le problème actuel, en tenant compte du profil BB', on constate, par des procédés analogues à ceux qui ont été exposés, que le point O se déplace en suivant le profil BB' pour passer d'une face à l'autre de la lame ABB'A', ce qui permet à la jonction des cas représentés par les figures 14 et 15.

CHAPITRE II.

[13] Dans ce chapitre, nous allons exposer, comme se rattachant directement, pour ce qui concerne la méthode suivie, aux problèmes dont il a été question précédemment, un problème dont l'importance et la difficulté spéciales ont été mises en évidence par M. M. Brillouin, dans une Note des Comptes rendus (*Surfaces de glissement; généralisation de la théorie d'Helmholtz*, C. R., t. CLIII, 1911, p. 43).

Il s'agit du mouvement d'un courant fluide rencontrant un obstacle derrière lequel il s'en trouve un second. Le problème posé par M. M. Brillouin concerne deux lames rectilignes placées l'une derrière l'autre; nous envisagerons plus généralement deux dièdres placés l'un derrière l'autre, et nous expliciterons rapidement la solution de ce cas. Si les deux obstacles avaient des formes quelconques données, non formées de segments rectilignes, la solution s'édifierait exactement de même, en utilisant les procédés que j'ai décrits dans une Note des Comptes rendus, t. CLII, 1911, p. 1081. Nous supposerons les solides symétriques par rapport à une parallèle au courant général, et nous supposerons également, bien entendu, que l'obstacle arrière soit d'une envergure suffisante pour ne pas se trouver noyé dans le sillage de l'obstacle avant; la construction classique de la solution correspondant à un seul obstacle permet de s'assurer sans la moindre difficulté, s'il en est ainsi.

Avec les notations déjà usitées pour cet ordre de sujets, nous poserons $f = \varphi + i\psi$, φ et ψ étant le potentiel et la fonction de courant dans le plan $z = x + iy$, du mouvement; nous choisirons $\psi = 0$ le long de la ligne de courant OABCD et nous modifierons le potentiel φ , comme nous en avons toujours le droit, par l'addition d'une constante telle que, en désignant par $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ les valeurs de φ qui correspondent respectivement aux points B, C, D, on ait la relation

$$(32) \quad \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 0.$$

Ceci posé, faisons abstraction de la moitié inférieure du fluide, au-dessous de l'axe Ox, ce que nous réalisons en supposant l'existence, le long de OA, d'une paroi solide fictive s'étendant jusqu'à l'infini en amont. Puis utilisons les principes classiques, pour faire correspondre conformément le domaine du plan f , répondant au domaine fluide envisagé, à l'aire d'une demi-couronne circulaire. Laissant au lecteur le soin de vérifier les détails du calcul, j'énonce immédiatement les résultats :

Les trois nombres caractéristiques, e'_1, e'_2, e'_3 , racines de la dérivée \mathfrak{p}' de la fonction elliptique $\mathfrak{p}(\mathbf{u} | \omega'_1, \omega'_3)$, ($|\omega'_1, \omega'_3|$), étant respectivement égaux à z_3, z_2, z_1 , en posant

$$(33) \quad q = e^{\frac{-i\pi\omega'_1}{\omega'_3}},$$

la relation

$$(34) \quad f = \mathfrak{p} \left(\frac{\omega'_3}{i\pi} \log Z | \omega'_1 \omega'_3 \right)$$

fait correspondre les plans f et Z comme il suit :

paroi OA : $|Z| = 1, \quad Z = e^{is}, \quad 0 < s < s_0;$

paroi AB : $\text{id.} \quad \text{id.} \quad s_0 < s < \pi;$

ligne de jet BC : $-1 < Z < -q;$

paroi CD : $|Z| = q, \quad Z = q \cdot e^{is}, \quad 0 < s < \pi;$

ligne de jet DE : $q < Z < 1.$

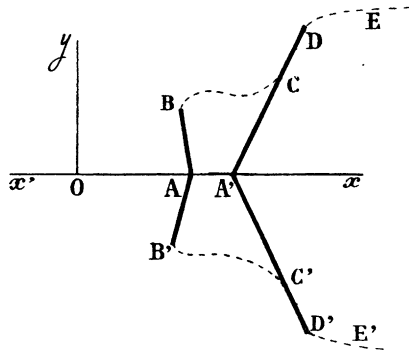


FIG. 19.

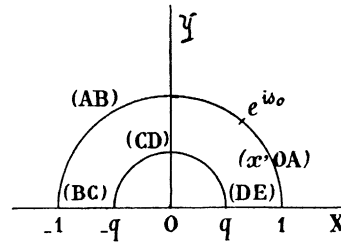


FIG. 20

Le long de la ligne de jet DE, la vitesse du courant doit être la vitesse à l'infini, que nous supposons égale à un; le long de BC, la vitesse doit être constante et inférieure à un; comme au paragraphe 3, nous poserons

$$a = -\log_e v_1,$$

en désignant par v_1 la vitesse en question (a est donc positif).

Dans ces conditions, en appelant $\Omega = \Theta + iT$, une certaine fonction de Z , celle qui joue le rôle analogue à la fonction Ω du chapitre I^{er}, régulière dans le domaine considéré, la liaison des plans z et Z sera réalisée par la relation

$$(35) \quad \frac{df}{dz} = e^{-ia} = e^T e^{-i\theta}.$$

Maintenant, en appelant α et β les angles (entre O et π) que font AB et CD avec Ox, on devra déterminer la fonction $\Omega(Z)$ par les conditions

$$\begin{array}{llll} \Theta = 0 & \text{pour} & Z = e^{is}, & 0 < s < s_0; \\ \Theta = \alpha & \text{»} & \text{»} & s_0 < s < \pi; \\ \Theta = \beta & \text{»} & Z = q \cdot e^{is}, & 0 < s < \pi; \\ T = 0 & \text{»} & q < Z < 1; \\ T = -a & \text{»} & -1 < Z < -q. \end{array}$$

[14] Il résulte immédiatement des résultats de mon *Mémoire Sur la résolution de certaines équations intégrales...* (Acta Mathematica, 1915), qu'une telle fonction $\Omega(Z)$ existe sous la condition

$$(36) \quad (\pi - s_0)\alpha = \left(\beta - a \frac{\omega_3}{i\omega_1}\right)\pi, \quad \text{en posant} \quad \begin{cases} \omega_3' = i\omega_1, \\ \omega_1' = \frac{\omega_3}{i}; \end{cases}$$

et les calculs développés dans mon *Mémoire Sur la détermination des problèmes d'hydrodynamique...*, déjà cité au n° I, permettent d'ailleurs de prévoir, sans effectuer de nouveaux calculs, que la fonction en question sera de la forme

$$(37) \quad \Omega(Z) = \frac{iz}{\pi} \log \frac{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} s_0 | \omega_1 \omega_3\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z + \frac{\omega_1}{\pi} s_0 | \omega_1 \omega_3\right)} + A_1 \log Z + B_1,$$

A_1 et B_1 désignant deux constantes, d'ailleurs réelles, et les conventions relatives à la détermination des logarithmes étant ici les mêmes qu'au n° 3. On est ainsi conduit, sans difficulté, après des calculs que je ne reproduis pas, à l'expression suivante de Ω :

$$(38) \quad \Omega(Z) = \frac{iz}{\pi} \log \frac{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z - \frac{\omega_1}{\pi} s_0\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi} \log Z + \frac{\omega_1}{\pi} s_0\right)} + \frac{1}{\pi} \left(\frac{2\pi\eta_1\omega_1 s_0}{\pi^2} - a\right) \log Z + \alpha.$$

Si maintenant on cherche à exprimer que la solution correspondante est valable et générale, on est conduit, par des calculs extrêmement semblables à ceux du chapitre I^r, à constater qu'il en est effectivement ainsi, moyennant les seules conditions restrictives :

$$(39) \quad -\frac{2\pi\omega_1}{\pi} \frac{\omega_1}{\pi} s_0 + \frac{2\pi\eta_1\omega_1}{\pi^2} s_0 - a < 0,$$

$$(40) \quad -\frac{2\pi\omega_1}{\pi} \frac{\omega_1}{\pi} s_0 + \frac{2\pi\eta_1\omega_1}{\pi^2} s_0 - a < 0.$$

Comme au n° 4, on constatera que l'angle Θ , le long de BC, ne descend pas au-dessous de la valeur zéro, et, par suite, le dessin correspond bien à la figure 21 et non à la figure 22, la ligne BC ne pouvant se recouper elle-même, ni venir couper l'axe AA'.

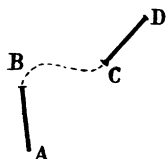


FIG. 21.

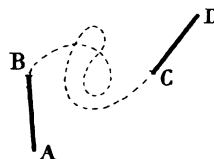


FIG. 22.

On a ainsi comme paramètres les quantités $\omega_1, \omega_3, a, s_0$, soumises aux conditions (36), (39), (40), jointes à

$$(41) \quad 0 < s_0 < \pi, \quad a > 0,$$

$$(42) \quad 0 < \alpha < \pi, \quad 0 < \beta < \pi.$$

Une seule d'entre elles, l'équation (36), est une relation d'égalité. Il reste donc finalement trois paramètres indépendants, lesquels seront déterminés par les conditions de la figure 19, c'est-à-dire, par exemple, par la donnée des longueurs AB, AA', A'D.

Pour édifier la solution, il est manifestement préférable de laisser indépendants les trois paramètres en question et de déterminer *a posteriori* les longueurs énoncées il y a un instant; aucune difficulté ne peut s'introduire dans le calcul de ces longueurs, calcul qui se réduit à celui d'intégrales définies à éléments positifs.

[15] On voit alors très aisément dans quelles limites le problème sera possible, le système de conditions actuel étant tout semblable au système (15-20) du chapitre précédent. En posant, comme ci-dessus,

$$(43) \quad \frac{\omega_1}{\pi} s_0 = u, \quad \frac{a}{2\omega_1} = v,$$

puis construisant les deux courbes

$$\frac{\pi}{\alpha} v_1 = -\zeta_1 u + \frac{r_{11}}{\omega_1} u,$$

$$\frac{\pi}{\alpha} v_2 = -\zeta_2 u + \frac{r_{12}}{\omega_1} u,$$

nous devons avoir :

$$(44) \quad v_1 < v < v_2.$$

L'équation (36), devenue

$$(45) \quad v = \frac{i}{2\omega_3} \left(\frac{\alpha}{\omega_1} u + \beta - \alpha \right).$$

exprimera, d'autre part, que la droite menée par le point de coordonnées u, v , parallèlement à la direction de pente $\frac{i\alpha}{2\omega_1\omega_3}$, sur la figure 23, a pour ordonnée à l'origine $\frac{i(\beta - \alpha)}{2\omega_3}$.

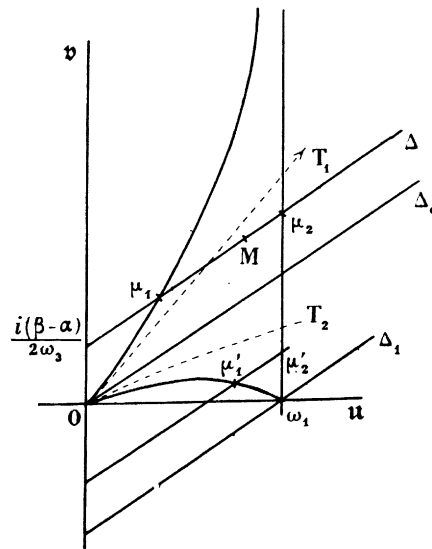


FIG. 23.

Par suite, si α et β sont donnés, on aperçoit quelle est la région, telle que $\mu_1\mu_2$ ou $\mu'_1\mu'_2$ suivant les cas, où l'on devra placer le point $M(u, v)$ pour que le problème puisse être résolu, sachant déjà que ce point doit nécessairement être situé dans l'aire comprise entre les deux courbes v_1 et v_2 de tout à l'heure, et l'asymptote verticale $u = \omega_1$.

Si l'on préfère, se donnant arbitrairement le point M dans l'aire en question, et se donnant également la valeur de l'angle α , la construction de la droite Δ de la figure 23 fera connaître *a posteriori* la valeur de l'angle β ; cette dernière, pour être valable, devra être comprise entre zéro et π ; la condition $\beta > 0$ n'introduit aucune restriction, car toute parallèle à Δ menée par un point de l'aire en question, se trouve placée au-dessus de la droite Δ_1 , à laquelle on constate de suite qu'il correspond à $\beta = 0$. La condition $\beta < \pi$, au contraire, limite en hauteur la position du point M .

[16] Si pour fixer les idées, on se place dans le cas du problème de M. M. Brillouin, pour lequel les lames sont parallèles et normales au courant, ou dans le cas plus général où elles sont simplement parallèles, on devra faire $\beta = \alpha$. Dans ces conditions, la droite Δ devra passer par le point O. Dans tout l'intervalle $O\omega_1$, de valeurs de u , les points de cette droite Δ_0 tomberont tous dans l'aire indiquée, et le problème sera toujours possible, en prenant le point M sur cette droite : en effet, les coefficients angulaires des tangentes OT_1 et OT_2 aux deux courbes \mathfrak{v}_1 et \mathfrak{v}_2 , sont respectivement $\frac{\alpha}{\pi} \left(\frac{\gamma_1}{\omega_1} + e_1 \right)$ et $\frac{\alpha}{\pi} \left(\frac{\gamma_1}{\omega_1} + e_2 \right)$, et l'on a les inégalités :

$$(46) \quad \frac{\alpha}{\pi} \left(\frac{\gamma_1}{\omega_1} + e_1 \right) > \frac{i\alpha\pi}{2\omega_1\omega_3} > \frac{\alpha}{\pi} \left(\frac{\gamma_1}{\omega_1} + e_2 \right).$$

Ces inégalités résultent au fond, implicitement, des raisonnements du n° 8 et du fait que le point M_3 de la figure 6 tombe toujours entre M_1 et M_2 comme on l'a démontré en cet endroit. On peut d'ailleurs les vérifier ici directement de la façon suivante : observons qu'à cause de la relation $\gamma_1\omega_3 - \gamma_3\omega_1 = \frac{i\pi}{2}$, déjà utilisée, ces inégalités peuvent s'écrire :

$$(47) \quad e_1 + \frac{\gamma_3}{\omega_3} > 0,$$

$$(48) \quad e_2 + \frac{\gamma_3}{\omega_3} < 0.$$

Puis passons des demi-périodes ω_1 et ω_3 aux demi-périodes ω'_1 et ω'_3 définies par (29); les conditions à vérifier deviendront (cf. n° 10)

$$e'_3 + \frac{\gamma'_1}{\omega'_1} < 0,$$

et

$$e'_2 + \frac{\gamma'_1}{\omega'_1} > 0,$$

ce qui est certainement vrai, puisqu'on a

$$e'_3 + \frac{\gamma'_1}{\omega'_1} = -\frac{\pi^2}{2\omega_1'^2} \sum_1^\infty \frac{4q'^{2n-1}}{(1 - q'^{2n-1})^3}$$

et

$$e'_2 + \frac{\gamma'_1}{\omega'_1} = \frac{\pi^2}{2\omega_1'^2} \sum_1^\infty \frac{4q'^{2n-1}}{(1 + q'^{2n-1})^3}.$$

CHAPITRE III.

[17] Par une application presque immédiate de ce qui précède, nous allons obtenir un important résultat relativement à une propriété générale concernant les mouvements glissants des fluides. On sait que, dans la considération de tels mouvements, les sillages que l'on est amené à admettre à l'arrière des obstacles solides sont ouverts à l'arrière et s'étendent indéfiniment dans la direction aval. Cette propriété est-elle absolument inhérente à la théorie même ou bien ne pourrait-on pas s'en affranchir? Pour ce qui concerne le cas du fluide indéfini, M. M. Brillouin, dans son *Mémoire du Journal de Chimie et Physique* (1911), a montré que l'hypothèse en question était inéluctable. Mais il est permis de se demander si, pour un fluide

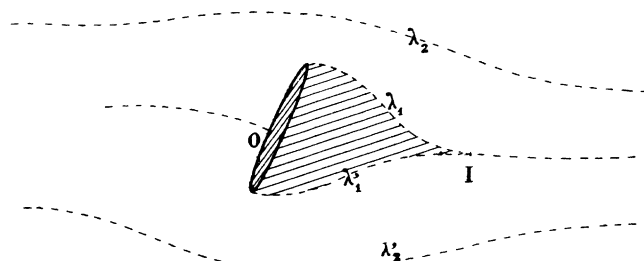


FIG. 24.

limité, des mouvements tels que l'indique la figure 24 ne seraient pas possibles : le long des lignes de jet λ_2 et λ_2' qui limitent le fluide, la vitesse serait constante et égale à la vitesse à l'infini; le long des lignes λ_1 , λ_1' , qui limitent le sillage arrière, la vitesse v_1 serait également constante. Il faudrait que l'on ait $v_1 < 1$ si l'on voulait

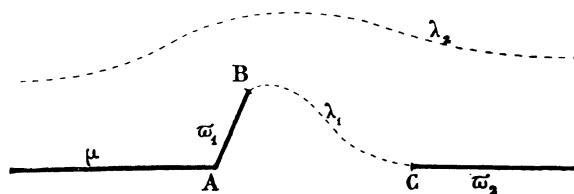


FIG. 25.

que le mouvement soit général et corresponde à une pression quelconque à l'infini; mais nous allons voir dans un moment que, même dans l'hypothèse $v_1 > 1$, la configuration que nous cherchons à réaliser est impossible. Nous écrirons, comme antérieurement, $-\log_e v_1 = a$, sans rien supposer *a priori* sur a .

Si le mouvement tel qu'on l'a figuré était possible, il le serait notamment dans le cas où il existe un axe de symétrie parallèle au courant à l'infini. Par l'adjonction de deux parois fictives rectilignes, μ et ω_1 , on pourra dans ce cas ne considérer que la moitié du fluide en mouvement. Posant alors, en gardant toutes les notations usitées plus haut,

$$(49) \quad f = -\frac{\psi_0}{\pi} \log (F - F_0) + i\psi_0,$$

ψ_0 désignant la valeur de la fonction de courant (supposée nulle sur ABC) sur la ligne λ_1 . Si F_1 et F_2 sont les valeurs de F qui correspondent aux points B et C, on pourra toujours, en profitant du fait que le potentiel φ n'est défini qu'à une constante près, s'arranger pour avoir

$$F_0 + F_1 + F_2 = 0.$$

Posant ensuite

$$(50) \quad F = \varphi \left(\frac{\omega_3'}{i\pi} \log Z | \omega_1' \omega_3' \right)$$

avec $e_1' = F_0$, $e_2' = F_1$, $e_3' = F_2$, on est ramené, dans le plan Z , au même domaine que dans le chapitre II, et la fonction $\Omega(Z)$ qu'il s'agit d'y déterminer est *la même* que dans ce même chapitre, dans le cas d'un obstacle AB rectiligne, à condition de supposer dans les formules antérieures $\beta = 0$.

Je dis maintenant que le problème ainsi posé est impossible.

En effet, tout d'abord la condition d'existence (36) pour la fonction $\Omega(Z)$ devient ici, avec les notations déjà employées,

$$(51) \quad \mathfrak{v} = \frac{ix}{2\omega_1\omega_3} \mathfrak{u} - \frac{ix}{2\omega_3};$$

puis l'allure de la ligne de jet λ_1 , qui doit nécessairement posséder un point d'inflexion, exige encore les deux inégalités

$$(52) \quad \mathfrak{v} > \mathfrak{v}_1 = \frac{\alpha}{\pi} \left(-\zeta_1 \mathfrak{u} + \frac{\eta_1}{\omega_1} \mathfrak{u} \right),$$

$$(53) \quad \mathfrak{v} < \mathfrak{v}_1 = \frac{\alpha}{\pi} \left(-\zeta_1 \mathfrak{u} + \frac{\eta_1}{\omega_1} \mathfrak{u} \right).$$

Par suite, sur la figure du plan $\mathfrak{u}O\mathfrak{v}$, le point $M(\mathfrak{u}, \mathfrak{v})$ doit nécessairement être placé entre les deux courbes \mathfrak{v}_1 et \mathfrak{v}_2 , ce qui entraîne $\mathfrak{v} > 0$, et par suite exige que α soit lui-même positif. Dans ces conditions, la relation (51), pour laquelle \mathfrak{u} est inférieur à ω_1 et x positif, est visiblement impossible, ce qui légitime notre assertion.

D'ailleurs, dans les mêmes conditions, il est facile de faire voir que les inégalités (52) et (53) entraînent

$$-\frac{\alpha\omega_1}{\pi}z_3u + \frac{\alpha\gamma_1}{\pi}u - \omega_1v < 0,$$

$$-\frac{\alpha\omega_1}{\pi}z_1u + \frac{\alpha\gamma_1}{\pi}u - \omega_1v < 0,$$

et ces inégalités elles-mêmes permettent de conclure, comme on s'en assurera sans peine, que l'angle avec AC, de la tangente à la ligne λ_1 , varie toujours dans le même sens, ce qui est visiblement incompatible avec les hypothèses : la vitesse du courant étant en effet la même à l'infini en amont et en aval, la largeur asymptotique à droite et à gauche, du fluide en mouvement au-dessus de AC, est la même, ce qui exige que λ_1 possède au moins deux points d'inflexion.

L'existence d'un sillage fermé à l'arrière de l'obstacle est donc impossible dans ces conditions; on démontrerait le même fait, dans le cas où le fluide est limité par des parois solides au lieu des lignes de glissement λ_1 et λ'_2 ; je laisse de côté la démonstration de ce fait, démonstration analogue à la précédente, mais beaucoup plus simple, et que le lecteur rétablira sans peine s'il le désire.

