ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

A. BUHL

Sur les transformations et extensions de la formule de Stokes

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3e série, tome 5 (1913), p. 313-374

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1913_3_5__313_0>

SUR LES TRANSFORMATIONS ET EXTENSIONS

DE

LA FORMULE DE STOKES

PAR M. A. BUHL.

SECOND MÉMOIRE.

Ce Mémoire, le quatrième ici publié sur la formule de Stokes, est si manifestement la suite du précédent que, cette fois, je n'ai pas cru devoir changer de titre.

J'essaie toujours d'examiner si les immenses avantages dont la Physique mathématique a bénéficié, de par l'emploi des formules de Stokes et de Green, ne pourraient pas être transportés dans des domaines plus particulièrement analytiques ou géométriques.

Les résultats que j'ai obtenus jusqu'ici me semblent au moins encourageants et le parallélisme cherché est aussi naturel que possible.

On sait que les formules de Stokes et de Green ne jouent nullement un rôle indispensable en Physique mathématique. Les équations fondamentales de cette science ont d'abord été formées sans elles; elles n'ont apporté qu'après coup la simplicité, la symétrie et surtout l'uniformité dans les raisonnements. Si mes recherches pouvaient donner, si peu que ce soit, une impression analogue je serais amplement satisfait.

On trouvera, dans ce nouveau travail, des sujets plutôt disparates, déjà traités de différentes manières par divers géomètres, et cependant tous rattachés à des extensions de la formule de Stokes. Bien que, dans ces conditions, la nouveauté des résultats ne soit pas la chose essentielle, je pense cependant que quelques-uns d'entre eux ont peut-être un certain degré d'originalité. Je citerai particulièrement :

1° Les remarques sur la formule de Riemann (n° 5) conduisant à la construction d'intégrales doubles

$$\int\int_S \mu(x, y, p, q)(r + t)\,dx\,dy$$

invariantes quand la cloison S a toujours même contour, avec mêmes plans tangents le long de ce contour, et quand $\mu(x, y, p, q)$ est la partie réelle (ou imaginaire) d'une fonction de deux variables complexes $x + iy$, $q + ip$.

2° L'étude (n^{os} 8 et suivants) des relations intégrales

$$\int\int_\Gamma \Theta\,dx\,dy = \int_\gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz + S\,dp + T\,dq$$

qui, d'abord données avec des fonctions Θ, P, Q, R, S, T de x, y, z, p, q, ne peuvent exister sur une surface (laquelle surface dépend d'une équation de Monge-Ampère quelconque) sans donner lieu à des relations analogues, mais d'une construction plus générale pouvant notamment s'effectuer à l'aide de fonctions arbitraires. Ainsi, sur une surface développable où p est fonction de q, on a

$$0 = \int_\gamma p\,dq$$

et ceci entraîne

$$\int\int_\Gamma (p^2\Phi_{yy} - 2pq\Phi_{xy} + q^2\Phi_{xx})\,dx\,dy = \int_\gamma (q\Phi_x - p\Phi_y)\,dz + \Phi(p\,dq - q\,dp),$$

Φ étant fonction arbitraire de x et y.

3° Les expressions de la courbure géodésique, de la torsion géodésique, de la courbure normale de contours fermés au moyen d'intégrales doubles attachées aux surfaces cloisonnant ces contours (n^{os} 31 et suivants). Pour la courbure géodésique il n'y a là que la formule d'Ossian Bonnet, mais, pour la torsion géodésique et la courbure normale, les résultats analogues semblent d'une forme nouvelle.

4° L'emploi général de déterminants symboliques pour la construction de toutes les formules de Stokes généralisées.

Les résultats les plus saillants relatifs à ces différents points ont donné lieu à des Notes aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, Notes présentées les 2 février, 6 avril, 11 mai et 29 juin 1914; leur rôle est précisé au cours du Mémoire.

PRÉLIMINAIRES.

[**1**] La première partie de mon précédent Mémoire était principalement consacrée à une formule comparable à la formule de Stokes ordinaire, mais s'appliquant spécialement à des cloisons passant par un contour donné γ et *tangentes entre elles au contour*. Je vais d'abord redémontrer cette formule, ce qui n'étonnera probablement personne, étant données les très nombreuses démonstrations qui ont été publiées pour la formule de Stokes proprement dite.

De plus, je tiens encore à revenir sur un point sur lequel j'ai déjà grandement insisté. Toutes les transformations et extensions, originales ou non, que j'ai déjà examinées ne me semblent être que des transformations et des combinaisons répétées de l'égalité

$$\int\int_A dX\,dY = \int_C X\,dY, \tag{1}$$

laquelle exprime de deux manières l'aire plane A de contour C. Et, comme il n'y a guère là qu'une identité ou l'un des principes fondamentaux du Calcul intégral, on conçoit l'extrême variété des questions qu'on pourra toujours arriver à rattacher aux présentes considérations.

Pour l'instant, considérons une surface, d'équation $z=f(x, y)$, en chaque point de laquelle on aura des valeurs bien déterminées pour x, y, z, p, q. Les formules

$$X = X(x, y, z, p, q), \qquad Y = Y(x, y, z, p, q) \tag{2}$$

définissent une transformation à deux variables permettant de passer de l'aire plane A à une cloison Γ située sur la surface précédente, et inversement. En vertu de l'équation de cette surface, il n'y a en effet que deux variables, x et y, dans les seconds membres des formules (2). Si l'on veut effectuer le changement de variables dans l'intégrale double de (1), il faut y remplacer $dX\,dY$ par le produit de $dx\,dy$ et du déterminant

$$\begin{vmatrix} X_x + X_z p + X_p r + X_q s & X_y + X_z q + X_p s + X_q t \\ Y_x + Y_z p + Y_p r + Y_q s & Y_y + Y_z q + Y_p s + Y_q t \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Or celui-ci peut aussi bien s'écrire

$$\begin{vmatrix} r & s & 0 & -1 & 0 \\ s & t & 0 & 0 & -1 \\ -p & -q & 1 & 0 & 0 \\ X_x & X_y & X_z & X_p & X_q \\ Y_x & Y_y & Y_z & Y_p & Y_q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} r & s & 0 & -1 & 0 \\ s & t & 0 & 0 & -1 \\ -p & -q & 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{\partial}{\partial p} & \dfrac{\partial}{\partial q} \\ P & Q & R & S & T \end{vmatrix},$$

si l'on pose

$$(4) \qquad P = X\frac{\partial Y}{\partial x}, \qquad Q = X\frac{\partial Y}{\partial y}, \qquad R = X\frac{\partial Y}{\partial z}, \qquad S = X\frac{\partial Y}{\partial p}, \qquad T = X\frac{\partial Y}{\partial q}.$$

Dans ces conditions, l'égalité (1) devient :

$$(D) \qquad \int\!\!\int_\Gamma \begin{vmatrix} r & s & 0 & -1 & 0 \\ s & t & 0 & 0 & -1 \\ -p & -q & 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{\partial}{\partial p} & \dfrac{\partial}{\partial q} \\ P & Q & R & S & T \end{vmatrix} dx\,dy = \int_\gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz + S\,dp + T\,dq.$$

C'est bien la formule (D) de mon précédent Mémoire ; je compte encore la prendre pour base à peu près unique de tout ce qui suit.

On pourrait objecter, il est vrai, que la présente démonstration suppose à P, Q, R, S, T les formes particulières (4), mais il est bien aisé d'établir la généralité absolue. Pour $Y = x$, P est quelconque et Q, R, S, T sont nulles ; pour $Y = y$, Q est quelconque et P, R, S, T sont nulles ; etc. On a ainsi cinq formules (D) dont l'addition donne une nouvelle formule (D) où P, Q, R, S, T sont des fonctions tout à fait quelconques.

Ceci fait encore concevoir que le pseudo-déterminant du cinquième ordre qui figure dans le premier membre de (D) a non seulement un intérêt résultant de sa symétrie, mais encore un intérêt des plus utilitaires. De tels déterminants ne diffèrent jamais que par la dernière ligne et, par suite, leur addition se réduit à celle des dernières lignes.

Aucun procédé aussi immédiat n'apparaît si on laisse les déterminants sous la forme (3).

C'est encore là, d'ailleurs, un avantage bien connu pour la formule de Stokes ordinaire, formule qui peut se démontrer comme la précédente (Cf. *Sur la formule de Stokes dans l'hyperespace*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1911).

Enfin il est à peine utile de dire que, par fonctions P, Q, R, S, T *quelconques*, j'entends des fonctions qui, sur toutes les cloisons Γ possibles, ne peuvent avoir de singularités analogues à celles qui mettraient en défaut la formule de Stokes ordinaire.

[**2**] La formule (D) peut évidemment s'écrire aussi

$$\int\int_{\Gamma} \begin{vmatrix} s & t & 0 & 0 & -1 \\ r & s & 0 & -1 & 0 \\ p & q & -1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial p} & \frac{\partial}{\partial q} \\ P & Q & R & S & T \end{vmatrix} dx\,dy = \int_{\gamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz + S\,dp + T\,dq.$$

car cela revient à intervertir les deux premières lignes du déterminant et à changer le signe de la troisième. Nous retrouverons naturellement cette forme à l'aide des généralités exposées dans la troisième partie du présent travail; elle est encore un peu plus symétrique que la précédente. Dans la suite, les deux formes seront employées, ne serait-ce que pour être plus facilement d'accord avec la forme (D) seule utilisée dans le Mémoire précédent.

[**3**] Remarquons que, pour développer pratiquement le pseudo-déterminant Δ qui figure dans (D), on a

$$\Delta = K(rt - s^2) + Ar + Bs + Ct + D,$$

si l'on pose :

$$\text{(E)} \qquad \left\{ \begin{array}{c} T_p - S_q = K, \\ q(R_p - S_z) + Q_p - S_y = A, \\ -p(R_p - S_z) + q(R_q - T_z) + Q_q - T_y - (P_p - S_x) = B, \\ -p(R_q - T_z) - (P_q - T_x) = C, \\ -p(R_y - Q_z) - q(P_z - R_x) + Q_x - P_y = D. \end{array} \right.$$

Si $R = 0$ *et si* P, Q, S, T *ne contiennent pas explicitement* z, *la formule* (D) *se réduit à*

$$(\mathrm{D}_1) \qquad \int\int_{\Gamma} \begin{vmatrix} r & s & -1 & 0 \\ s & t & 0 & -1 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial p} & \frac{\partial}{\partial q} \\ P & Q & S & T \end{vmatrix} dx\,dy = \int_{\gamma} P\,dx + Q\,dy + S\,dp + T\,dq.$$

C'est ce que l'on voit immédiatement en observant que l'opérateur $\frac{\partial}{\partial z}$ annule, dans Δ, toutes les expressions auxquelles il s'applique; il joue ainsi le rôle d'un terme nul. Alors les formules (E) se réduisent à

$$(\mathrm{E}_1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{T}_p - \mathrm{S}_q &= \mathrm{K}, \\ \mathrm{Q}_p - \mathrm{S}_y &= \mathrm{A}, \\ \mathrm{Q}_q - \mathrm{T}_y - (\mathrm{P}_p - \mathrm{S}_x) &= \mathrm{B}, \\ \mathrm{T}_x - \mathrm{P}_q &= \mathrm{C}, \\ \mathrm{Q}_x - \mathrm{P}_y &= \mathrm{D}. \end{aligned} \right.$$

Ce cas est important en pratique; il existe notamment, sur les surfaces $z = f(x, y)$, beaucoup d'expressions, telles que la courbure ou la torsion géodésiques des lignes y tracées, qu'on exprime élémentairement en x, y, p, q sans intervention explicite de z.

[**4**] L'égalité (D_1) est encore un cas particulier de la formule

$$(\mathrm{D}_2) \qquad \iint_{\mathrm{S}} \begin{vmatrix} \frac{\partial x_3}{\partial x_1} & \frac{\partial x_3}{\partial x_2} & -1 & 0 \\ \frac{\partial x_4}{\partial x_1} & \frac{\partial x_4}{\partial x_2} & 0 & -1 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_4} \\ \mathrm{P}_1 & \mathrm{P}_2 & \mathrm{P}_3 & \mathrm{P}_4 \end{vmatrix} dx_1 dx_2 = \int_{\Sigma} \mathrm{P}_1 dx_1 + \mathrm{P}_2 dx_2 + \mathrm{P}_3 dx_3 + \mathrm{P}_4 dx_4$$

où Σ est, dans l'espace à quatre dimensions, un contour fermé par lequel passe la cloison à deux dimensions S ayant pour équations

$$x_3 = \varphi(x_1, x_2), \qquad x_4 = \psi(x_1, x_2).$$

J'ai démontré (D_2) dans mon Mémoire *Sur la formule de Stokes dans l'hyperespace* publié ici-même en 1911.

Il est clair que si x_1 et x_2 deviennent x et y et que si x_3 et x_4 deviennent p et q, hypothèse qui particularise x_3 et x_4, la formule (D_2) donne (D_1).

Le lecteur voit, sans doute, de lui-même, l'extrême généralité de toutes ces considérations. La formule (D), qui fait connaître une intégrale double invariante pour toutes les cloisons ayant même contour et mêmes plans tangents le long de ce contour, c'est-à-dire une intégrale analogue à la *courbure* d'une cloison d'étendue finie, permet de pénétrer dans la théorie des surfaces; c'est plus particulièrement la formule (D_1) qui, dans la seconde partie du présent Mémoire, permettra de développer cette idée.

D'autre part la formule (D_2), tout à fait analogue à (D_1), conduit au théorème de Poincaré qui, pour les fonctions de deux variables complexes, généralise le théorème de Cauchy. J'ai encore démontré cette assertion dans mon Mémoire *Sur la formule de Stokes dans l'hyperespace*, mentionné tout à l'heure.

En somme, la même formule, convenablement interprétée, conduit à la théorie des surfaces ou à celle des fonctions analytiques de deux variables.

[5] *Remarque sur la formule de Riemann.* — Dans le Mémoire que je viens de citer, j'ai démontré que le théorème de Poincaré revenait à la formule de Riemann

$$\int\int_S \left(\frac{\partial N}{\partial u} - \frac{\partial M}{\partial v}\right) du\,dv = \int_\Sigma M\,du + N\,dv$$

étendue, sans changement d'aspect, au cas où

$$u = x_1 + ix_2, \qquad v = x_3 + ix_4;$$

alors S désigne une variété à deux dimensions déformable dans l'espace à quatre mais passant toujours par un contour Σ qui est invariable. Cette variété S est définie analytiquement par quatre équations qui expriment x_1, x_2, x_3, x_4 en fonction de deux paramètres ou, si l'on veut, par

$$x_1 = x_1, \qquad x_2 = x_2, \qquad x_3 = \varphi(x_1, x_2), \qquad x_4 = \psi(x_1, x_2).$$

Or l'analogie, signalée au paragraphe précédent, entre les formules (D_1) et (D_2), porte à attribuer à la formule de Riemann une signification qui serait à la précédente ce que (D_1) est à (D_2). On doit pouvoir, dans la formule de Riemann, poser

$$u = x + iy, \qquad v = q + ip,$$

p et q désignant, comme dans (D_1), z_x et z_y. Alors Σ est un contour fermé ordinaire dans l'espace à trois dimensions, comme γ dans (D_1), et les cloisons S deviennent des cloisons qui passent par Σ en ayant toutes mêmes p et q le long de ce contour.

Voyons, d'une manière précise, ce que devient la formule de Riemann dans de telles conditions.

D'abord $du\,dv$ s'y remplace par le produit de $dx\,dy$ et du déterminant

$$\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & i \\ s + ir & t + is \end{vmatrix} = r + t$$

et, par suite, la formule devient :

$$\int\int_S \left(\frac{\partial N}{\partial u} - \frac{\partial M}{\partial v}\right)(r + t)\,dx\,dy = \int_\Sigma M\,d(x + iy) + N\,d(q + ip).$$

Or M et N étant fonctions de u et v, il en est de même de $N_u - M_v$, facteur qui, en fin de compte, prendra la forme

$$\mu(x, y, p, q) + i\nu(x, y, p, q).$$

Or si, dans la formule précédente, on sépare les termes réels des termes purement imaginaires, on aboutit au théorème suivant :

L'intégrale de surface, étendue à une cloison S,

$$\int\int_S \mu(x, y, p, q)\,(r + t)\,dx\,dy,$$

si $\mu(x, y, p, q)$ *représente la partie réelle* (ou le coefficient de i dans la partie purement imaginaire) *d'une fonction des deux variables complexes* $x + iy$ et $q + ip$, *est une intégrale invariante pour toutes les déformations de la cloison* S *qui en conservent le contour et les plans tangents le long de ce contour*. On sait d'ailleurs, par ce qui précède, exprimer cette intégrale double par une intégrale de ligne relative au contour en question.

N'oublions pas que ce théorème ne consiste, au fond, qu'en la petite formule de Riemann convenablement interprétée ; nous le retrouverons, au cours de ce Mémoire, par une voie différente (n° 26).

[**6**] Le premier membre de (D) étant de la forme

$$\text{(F)} \qquad \int\int_\Gamma [K(rt - s^2) + Ar + Bs + Ct + D]\,dx\,dy,$$

on peut partir d'une telle intégrale, où les coefficients K, A, B, C, D sont des fonctions de x, y, z, p, q, et chercher à quelles conditions elle peut se réduire au second membre de (D) et ne dépendre ainsi que des valeurs de x, y, z, p, q sur le contour γ de Γ.

Ces conditions, si l'on pose

$$X(\,) = \frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial z}, \qquad Y(\,) = \frac{\partial}{\partial y} + q\frac{\partial}{\partial z},$$

s'expriment par les cinq relations

$$(J_1) \qquad \left\{\begin{aligned}
&X^2(A) + XY(B) + Y^2(C) + D_z - X(D_p) - Y(D_q) = 0,\\
&X^2(K) + X(B_q - C_p) + Y(C_q) + 2C_z - D_{qq} = 0,\\
&-XY(K) + X(A_q) + Y(C_p) + B_z - D_{pq} = 0,\\
&Y^2(K) + Y(B_p - A_q) + X(A_p) + 2A_z - D_{pp} = 0,\\
&\frac{\partial}{\partial p}X(K) + \frac{\partial}{\partial q}Y(K) + K_z + B_{pq} - A_{qq} - C_{pp} = 0,
\end{aligned}\right.$$

que j'ai données dans mon précédent Mémoire en ignorant qu'elles avaient déjà été formées par M. E. Goursat, non à propos des points de départ ci-dessus, mais dans des recherches sur le « problème de Bäcklund » (*Sur quelques transformations des équations aux dérivées partielles du second ordre*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1902. — *Sur certaines extensions de la formule de Stokes*, Comptes rendus de l'Académie des Sciences, 5 janvier 1914). Je reviendrai plus loin sur la nature de cette coïncidence (n° 20).

Mais, en posant

$$\text{(H)}\qquad \begin{cases} M = B - \int A_q\,dp - \int C_p\,dq, \\ N = D - X\int A\,dp - Y\int C\,dq, \end{cases}$$

j'ai observé que le système (J_1) s'écrivait plus simplement :

$$\text{(J)}\qquad \begin{cases} XY(M) + N_z - X(N_p) - Y(N_q) = 0, \\ X^2(K) + X(M_q) - N_{qq} = 0, \\ -XY(K) + M_z - N_{pq} = 0, \\ Y^2(K) + Y(M_p) - N_{pp} = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial p}X(K) + \dfrac{\partial}{\partial q}Y(K) + K_z + M_{pq} = 0. \end{cases}$$

C'est surtout cette dernière forme qui interviendra dans ce qui suit.

[7] Le système (J) a, sur (J_1), l'avantage de pouvoir être vérifié beaucoup plus facilement par des expressions M et N dépendant de deux fonctions arbitraires.

Supposons d'abord K nul. Alors (J) se réduit à

$$\text{(I)}\qquad \begin{cases} XY(M) + N_z - X(N_p) - Y(N_q) = 0, \\ X(M_q) - N_{qq} = 0, \\ M_z - N_{pq} = 0, \\ Y(M_p) - N_{pp} = 0, \\ M_{pq} = 0. \end{cases}$$

On trouve sans peine que ce système est satisfait par

$$\text{(5)}\qquad \begin{cases} M = \varphi_p(x, y, z, p) + \psi_q(x, y, z, q), \\ N = Y(\varphi) + X(\psi), \end{cases}$$

φ ne contenant pas q et ψ ne contenant pas p, ce qui est d'ailleurs indiqué par la notation.

Si maintenant on revient au système (J), contenant K, il est aisé d'y satisfaire avec les formules (5) convenablement complétées. On a définitivement :

$$(6)\qquad \begin{cases} M = \varphi_p + \psi_q - \displaystyle\int X(K)\,dq - \int Y(K)\,dp - \int\!\!\int K_z\,dp\,dq, \\ N = Y(\varphi) + X(\psi) - XY \displaystyle\int\!\!\int K\,dp\,dq. \end{cases}$$

Il est entendu qu'on n'introduit pas, dans le calcul des intégrales, de termes purement additifs provenant des intégrations indéfinies; les termes arbitraires sont déjà représentés, dans M et N, par les expressions en φ et ψ.

On peut facilement vérifier le système (J) en y portant les valeurs (6). Pour la commodité de ce calcul, il est bon de rappeler les identités

$$XY = YX, \qquad \frac{\partial}{\partial q} X = X \frac{\partial}{\partial q}, \qquad \frac{\partial}{\partial p} Y = Y \frac{\partial}{\partial p},$$

$$\frac{\partial}{\partial q} Y - Y \frac{\partial}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial z}, \qquad \frac{\partial}{\partial p} X - X \frac{\partial}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial z}.$$

PREMIÈRE PARTIE.

Forme intégrale des équations de Monge-Ampère [1].

[**8**] *Toute équation de Monge-Ampère*

$$K(rt - s^2) + Ar + Bs + Ct + D = 0 \tag{1}$$

peut être mise sous la forme intégrale

$$\int\int_\Gamma \Theta\, dx\, dy = \int_\gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz + S\,dp + T\,dq, \tag{2}$$

γ désignant un contour fermé quelconque tracé sur une surface intégrale et y enfermant une aire Γ simplement connexe. Θ, P, Q, R, S, T sont des fonctions de x, y, z, p, q.

Avant de passer à la démonstration de ce théorème, je désire faire quelques remarques qui le montreront sous son véritable aspect et feront pressentir de nombreuses applications. Tout d'abord, *la réciproque du théorème est évidente*. En d'autres termes, si l'on se donne une équation (2) et si l'on cherche des surfaces sur lesquelles elle peut être réalisée, on ne peut trouver que les surfaces intégrales d'une certaine équation de Monge-Ampère du type (1). En effet, d'après la formule de Stokes généralisée (D), l'équation (2) peut s'écrire

$$\int\int_\Gamma (\Delta - \Theta)\, dx\, dy = 0,$$

Δ désignant le pseudo-déterminant qui figure dans (D). Et ceci doit avoir lieu pour n'importe quelle cloison Γ arbitrairement délimitée sur la surface cherchée. On doit donc avoir

$$\Delta - \Theta = 0, \tag{3}$$

ce qui est bien une équation de Monge-Ampère.

Les plus simples de ces équations proviennent de problèmes qui se traduisent immédiatement par une équation (2) et, à ce point de vue, l'équation intégrale pré-

---

[1] *Sur les extensions de la formule de Stokes, les équations de Monge-Ampère et les fonctions analytiques de deux variables* (Comptes rendus, 2 février 1914).

cède logiquement l'équation différentielle. Ainsi, sur les surfaces développables, p est, par définition, fonction de q; donc

$$o = \int_\gamma p\,dq.$$

Dans mon précédent Mémoire j'ai donné plusieurs exemples analogues (n^{os} 14, 15, 16) que l'on peut rattacher au *problème de Bäcklund*, tel que le pose M. Goursat (*Sur quelques transformations etc., loc. cit.*, p. 301). Ce problème revient à chercher des surfaces sur lesquelles on ait

$$(4)\qquad o = \int_\gamma p'dx' + q'dy',$$

x', y', p', q' étant des fonctions imposées à l'avance de x, y, z, p, q. Naturellement, en écrivant

$$(5)\qquad \begin{cases} dx' = \dfrac{\partial x'}{\partial x}dx + \dfrac{\partial x'}{\partial y}dy + \dfrac{\partial x'}{\partial z}dz + \dfrac{\partial x'}{\partial p}dp + \dfrac{\partial x'}{\partial q}dq, \\[2ex] dy' = \dfrac{\partial y'}{\partial x}dx + \dfrac{\partial y'}{\partial y}dy + \dfrac{\partial y'}{\partial z}dz + \dfrac{\partial y'}{\partial p}dp + \dfrac{\partial y'}{\partial q}dq, \end{cases}$$

on aura une équation (2) avec $\Theta = o$, c'est-à-dire, d'après (3), une équation $\Delta = o$.

[9] Y a-t-il des problèmes de géométrie se traduisant *immédiatement* par une équation (2) où Θ ne serait pas nul? Ils semblent plus malaisés à découvrir que les précédents, à moins qu'on ne cherche tout exprès des surfaces sur lesquelles l'intégrale double

$$\int\int_\Gamma \Theta\,dx\,dy,$$

à signification géométrique remarquable, doive s'exprimer par l'intégrale de ligne

$$(6)\qquad \int_\gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz + S\,dp + T\,dq$$

donnée à l'avance. On aurait ainsi des surfaces, non dépourvues d'intérêt, donnant des cloisons Γ auxquelles on pourrait attacher des aires, des volumes, etc., qu'on exprimerait finalement par de simples intégrales de lignes étendues au contour γ de Γ.

Ainsi, pour $\Theta = 1$, on a les surfaces, d'équation aux dérivées partielles $\Delta = 1$, sur lesquelles l'intégrale (6), prise le long d'un contour fermé γ, exprime l'aire contenue dans la projection de γ sur le plan Oxy.

Pour $\Theta = z$, on a les surfaces $\Delta = z$ sur lesquelles l'intégrale (6), étendue à un contour γ, exprime le volume cylindrique contenu entre Γ et la projection de cette cloison sur Oxy. Pour $\Theta = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$, on a les surfaces $\Delta = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$ sur lesquelles l'intégrale (6) exprime l'aire de la cloison Γ comprise dans le contour γ.

On pourrait trouver bien des exemples analogues qui se rattacheraient plutôt aux recherches développées dans mon Mémoire *Sur les applications géométriques de la formule de Stokes* publié ici-même en 1910.

Quant à la méthode générale de mise en équation dont je viens de donner une idée, il me semble qu'on ne peut mieux la comparer qu'à celle qui tire les équations de la Physique mathématique des formules de Stokes ou de Green ; pour transporter cette méthode en Géométrie, il fallait d'abord écrire une formule de Stokes convenable qui est la formule (D).

[10] Passons maintenant à une véritable démonstration du théorème énoncé en tête du paragraphe antéprécédent.

Rappelons d'abord qu'on doit avoir les conditions (J_1) pour que l'équation de Monge-Ampère (1) prenne la forme $\Delta = 0$, c'est-à-dire la forme (2) avec $\Theta = 0$. Plus généralement, on peut écrire ces conditions (J_1) après avoir multiplié l'équation (1) par un facteur $\mu(x, y, z, p, q)$; on a ainsi le système

$$(K)\quad \begin{cases} X^2(A\mu) + XY(B\mu) + Y^2(C\mu) + \dfrac{\partial(D\mu)}{\partial z} - X\dfrac{\partial(D\mu)}{\partial p} - Y\dfrac{\partial(D\mu)}{\partial q} = 0, \\[2mm] X^2(K\mu) + X\left[\dfrac{\partial(B\mu)}{\partial q} - \dfrac{\partial(C\mu)}{\partial p}\right] + Y\dfrac{\partial(C\mu)}{\partial q} + 2\dfrac{\partial(C\mu)}{\partial z} - \dfrac{\partial^2(D\mu)}{\partial q^2} = 0, \\[2mm] -XY(K\mu) + X\dfrac{\partial(A\mu)}{\partial q} + Y\dfrac{\partial(C\mu)}{\partial p} + \dfrac{\partial(B\mu)}{\partial z} - \dfrac{\partial^2(D\mu)}{\partial p\,\partial q} = 0, \\[2mm] Y^2(K\mu) + Y\left[\dfrac{\partial(B\mu)}{\partial p} - \dfrac{\partial(A\mu)}{\partial q}\right] + X\dfrac{\partial(A\mu)}{\partial p} + 2\dfrac{\partial(A\mu)}{\partial z} - \dfrac{\partial^2(D\mu)}{\partial p^2} = 0, \\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial p}X(K\mu) + \dfrac{\partial}{\partial q}Y(K\mu) + \dfrac{\partial(K\mu)}{\partial z} + \dfrac{\partial^2(B\mu)}{\partial p\,\partial q} - \dfrac{\partial^2(A\mu)}{\partial q^2} - \dfrac{\partial^2(C\mu)}{\partial p^2} = 0. \end{cases}$$

M. Goursat, sans écrire explicitement ce système, l'a cependant considéré au même titre que (J_1) (*loc. cit.*, pp. 310-312) ; l'éminent géomètre a désigné par λ le facteur que j'ai ensuite appelé μ pour rappeler son analogie avec un multiplicateur jacobien.

Naturellement (K) peut s'écrire sous la forme [Cf. forme (J), n° 6]

$$(J)\quad \begin{cases} XY(M) + N_z - X(N_p) - Y(N_q) = 0, \\ X^2(K\mu) + X(M_q) - N_{qq} = 0, \\ -XY(K\mu) + M_z - N_{pq} = 0, \\ Y^2(K\mu) + Y(M_p) - N_{pp} = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial p}X(K\mu) + \dfrac{\partial}{\partial q}Y(K\mu) + (K\mu)_z + M_{pq} = 0, \end{cases}$$

à condition de poser cette fois :

$$(7)\qquad \begin{cases} M = B\mu - \int (A\mu)_q\, dp - \int (C\mu)_p\, dq. \\ N = D\mu - X\int (A\mu)\, dp - Y\int (C\mu)\, dq. \end{cases}$$

Essayons d'attribuer à ces expressions M et N les formes

$$(8)\qquad \begin{cases} M = \varphi_p + \psi_q - \int X(K\mu)\, dq - \int Y(K\mu)\, dp - \int\int (K\mu)_z\, dp\, dq, \\ N = Y(\varphi) + X(\psi) - XY\int\int (K\mu)\, dp\, dq, \end{cases}$$

d'après lesquelles elles satisfairaient sûrement à (J) (n° 7). L'égalité des deux formes de M est toujours possible, car, en la dérivant par rapport à p et q, on voit que ce n'est autre chose que la cinquième équation (K) à laquelle on peut justement satisfaire par une solution μ à déterminer. Quant à l'égalité des N,

$$(9)\qquad D\mu = Y(\varphi) + X(\psi) + X\int (A\mu)\, dp + Y\int (C\mu)\, dq - XY\int\int (K\mu)\, dp\, dq,$$

il est clair qu'elle ne peut avoir lieu en général, puisque μ n'est plus arbitraire et que D a une expression donnée complètement indépendante du second membre de l'égalité.

Mais si l'on prend pour D précisément la valeur D_1 que donne (9), on a

$$\int\int_\Gamma \mu[K(rt - s^2) + Ar + Bs + Ct + D_1]\, dx\, dy$$
$$= \int_\gamma P\, dx + Q\, dy + R\, dz + S\, dp + T\, dq$$

puisqu'alors les conditions (J) sont satisfaites.

D'autre part, sur les surfaces intégrales de l'équation (1), on a identiquement :

$$\int\int_\Gamma \mu[K(rt - s^2) + Ar + Bs + Ct + D] = 0.$$

Par soustraction de ces deux dernières égalités, on obtient enfin :

$$(10)\qquad \int\int_\Gamma \mu(D_1 - D)\, dx\, dy = \int_\gamma P\, dx + Q\, dy + R\, dz + S\, dp + T\, dq.$$

C'est bien la forme intégrale (2) dont il fallait démontrer l'existence. On a :

$$(11)\qquad \Theta = \mu(D_1 - D).$$

[**11**] Reste maintenant à écrire pratiquement la formule (10), c'est-à-dire à déterminer encore P, Q, R, S, T. Tout d'abord on peut prendre $R=0$, car R non nul rentre dans P et Q en remplaçant dz par $p\,dx+q\,dy$. Ensuite, d'après des généralités exposées dans mon précédent Mémoire et relatives au développement du pseudo-déterminant Δ, on doit avoir :

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} T_p - S_q &= K\mu, \\ Q_p &= A\mu + Y(S), \\ Q_q - P_p &= B\mu + Y(T) - X(S), \\ -P_q &= C\mu - X(T), \\ X(Q) - Y(P) &= D_1\mu, \\ &= Y(\varphi) + X(\psi) + X\int A\mu.dp + Y\int C\mu.dq - XY\int\int K\mu.dp\,dq. \end{aligned}\right.$$

La première, la seconde et la quatrième équation de ce système sont vérifiées par

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} &S = -\frac{1}{2}\int K\mu.dq, \qquad T = \frac{1}{2}\int K\mu.dp, \\ &P = -\varphi - \int C\mu.dq + \frac{1}{2}X\int\int K\mu.dp\,dq, \\ &Q = \psi + \int A\mu.dp - \frac{1}{2}Y\int\int K\mu.dp\,dq. \end{aligned}\right.$$

Reste à voir si ces expressions de P, Q, S, T peuvent vérifier la troisième et la cinquième équation (12).

En portant dans la troisième, on a

$$\begin{aligned} Q_q - P_p = \psi_q &+ \int (A\mu)_q dp - \frac{1}{2}Y\int K\mu.dp - \frac{1}{2}\int\int (K\mu)_z\,dp\,dq \\ &+ \varphi_p + \int (C\mu)_p dq - \frac{1}{2}X\int K\mu.dq - \frac{1}{2}\int\int (K\mu)_z\,dp\,dq \\ &= B\mu + \frac{1}{2}Y\int K\mu.dp + \frac{1}{2}X\int K\mu.dq, \end{aligned}$$

ou bien

$$(14)\quad \begin{aligned} X\int K\mu.dq + Y\int K\mu.dp &+ \int\int (K\mu)_z\,dp\,dq \\ &+ B\mu - \int (A\mu)_q dp - \int (C\mu)_p dq = \psi_q + \varphi_p. \end{aligned}$$

En dérivant par rapport à p et q, on reconnaît la cinquième équation (K) que l'on s'est précisément arrangé à vérifier par un choix convenable de μ : mais notre dernière équation doit aussi être vérifiée sans dérivations. C'est donc ici qu'il faudra choisir convenablement les fonctions ψ et φ.

Enfin on vérifie immédiatement que les expressions (13) de P et Q satisfont identiquement à la cinquième équation (12).

[12] En résumé, *pour mettre l'équation de Monge-Ampère*

$$K(rt-s^2)+Ar+Bs+Ct+D=0 \tag{1}$$

sous la forme intégrale

$$\int\int_\Gamma \Theta\,dx\,dy=\int_\gamma P\,dx+Q\,dy+R\,dz+S\,dp+T\,dq, \tag{2}$$

on prendra d'abord une solution μ *de l'équation*

$$\frac{\partial}{\partial p}X(K\mu)+\frac{\partial}{\partial q}Y(K\mu)+\frac{\partial}{\partial z}(K\mu)+\frac{\partial^2(B\mu)}{\partial p\,\partial q}-\frac{\partial^2(A\mu)}{\partial q^2}-\frac{\partial^2(C\mu)}{\partial p^2}=0, \tag{α}$$

puis on déterminera des expressions $D_1(x,y,z,p,q)$, $\varphi(x,y,z,p)$, $\psi(x,y,z,q)$ *telles que l'on ait*

$$\varphi_p+\psi_q=X\int K\mu\,dq+Y\int K\mu\,dp+\int\int(K\mu)_z\,dp\,dq+B\mu-\int(A\mu)_q\,dp-\int(C\mu)_p\,dq,$$

$$\mu D_1=Y(\varphi)+X(\psi)+X\int A\mu\,dp+Y\int C\mu\,dq-XY\int\int K\mu\,dp\,dq.$$

On aura alors :

$$\Theta=\mu(D_1-D),$$

$$P=-\varphi-\int C\mu\,dq+\frac{1}{2}X\int\int K\mu\,dp\,dq,$$

$$Q=\psi+\int A\mu\,dp-\frac{1}{2}Y\int\int K\mu\,dp\,dq,$$

$$R=0,\qquad S=-\frac{1}{2}\int K\mu\,dq,\qquad T=\frac{1}{2}\int K\mu\,dp.$$

On voit que la transformation exige surtout la recherche d'une solution μ de l'équation (α); ensuite il n'y a plus que des quadratures, sans termes additifs rappelons-le (n° 7).

Or la solution μ de (α) peut avoir des degrés de généralité fort divers; elle peut ne rien contenir d'arbitraire tout comme elle peut contenir des constantes et même des fonctions arbitraires; dans ces conditions, *il y a une infinité d'équations intégrales* (2) *correspondant à une seule équation de Monge-Ampère* (1).

[**13**] On peut encore présenter ces résultats de la manière suivante :

Cherchons d'abord à déduire de la formule (D) une formule (2) qui aurait lieu identiquement sur toutes les cloisons Γ de même contour γ. Alors le premier membre de (2) serait une intégrale (F) où l'on chercherait à donner à la fonction D, de x, y, z, p, q, la forme la plus générale qui soit compatible avec K, A, B, C nuls. Le système (J_1) indique alors que D doit satisfaire aux équations

$$X(D_p) + Y(D_q) - D_z = 0, \qquad D_{qq} = 0, \qquad D_{pq} = 0, \qquad D_{pp} = 0.$$

D'après les trois dernières, D ne contient p et q qu'au premier degré : si l'on pose

$$D = -\alpha p - \beta q + \gamma,$$

la première se réduit à

$$\alpha_x + \beta_y + \gamma_z = 0$$

et la formule espérée n'est alors autre chose que la formule de Stokes ordinaire.

En dehors de ce cas tout à fait banal, *il n'y a point de formule* (2) *relative à des cloisons* Γ *tout à fait quelconques et limitées seulement à un contour commun* γ.

A elle seule, cette constatation suffirait à ce que l'on se demande si, à défaut de ces cloisons *quelconques*, on n'en pourrait trouver d'autres satisfaisant à de certaines conditions. On serait alors tout naturellement conduit aux cloisons prises sur les surfaces intégrales d'une équation de Monge-Ampère *aussi générale que possible*.

Si l'on prend une cloison de cette seconde nature, même bien déterminée, l'arbitraire qui a ainsi disparu est remplacé par un arbitraire de nature différente : la formule (2) peut contenir des éléments arbitraires, notamment les fonctions dont il a été question à la fin du paragraphe précédent. D'ailleurs les exemples des numéros suivants vont rapidement éclaircir tout ceci.

Le problème de Bäcklund, comme il a déjà été dit au numéro 8, correspond au cas particulier où $\Theta = 0$; il ne peut donner une équation de Monge-Ampère aussi générale que possible. Ce problème peut être traité directement, sans recourir à une équation intégrale telle que (2), car il suffit alors d'exprimer que

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz + S\,dp + T\,dq$$

est une différentielle exacte sur des surfaces à déterminer ; c'est ainsi que procède M. Goursat. Mais pour retrouver, par une voie analogue, l'équation *générale* de Monge-Ampère, l'équation (2) est peut-être indispensable ; quoi qu'il en soit, son rôle est bien simple et bien naturel, puisque la formule de Stokes généralisée (D) transforme immédiatement (2) en $\Delta - \Theta = 0$.

[**14**] Ces dernières réflexions en contiennent certainement encore d'autres comme cas particuliers.

Ainsi M. O. Bolza (*Vorlesungen über Variationsrechnung*, S. 659) en étudiant les cloisons, de contour commun γ, minimant l'intégrale

$$J = \int\int_\Gamma f(x, y, z, p, q)\, dx\, dy$$

cherche s'il n'y a pas des formes de f pour lesquelles ces cloisons Γ seraient indéterminées.

Il montre que cela arrive quand J est l'intégrale double de la formule de Stokes ordinaire.

On cherche alors à ne pas tenir compte de l'équation de Lagrange (cas particulier d'une équation de Monge-Ampère) à laquelle d'ordinaire satisfont les surfaces extrémales.

Au début du numéro précédent, nous avons de même retrouvé la formule de Stokes en cherchant si (2) était possible sans qu'on ait à tenir compte de (1).

Enfin, dans mon précédent Mémoire (n° 24), j'ai déterminé les intégrales

$$\int\int_\Gamma K(rt - s^2)\, dx\, dy \tag{15}$$

les plus générales qui restent invariantes pour toutes les cloisons Γ ayant même contour et mêmes plans tangents le long de celui-ci. Il faut alors chercher la fonction $K(x, y, z, p, q)$ qui satisfait au système (J_1) quand A, B, C, D sont nuls, question tout à fait réciproque de celle résolue au début du numéro 13. La conclusion est d'ailleurs la même au fond puisque, comme nous l'avons vu, l'intégrale (15) se déduit, par la transformation de Legendre, de l'intégrale double qui figure dans la formule de Stokes.

[**15**] On pourrait encore donner des formes d'apparence plus générale au théorème du paragraphe 8. Soit $\mathcal{M}$ le premier membre d'une équation de Monge-Ampère absolument quelconque.

Les surfaces sur lesquelles on a partout

$$\int\int_\Gamma \mathcal{M}\, dx\, dy = \int_\gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz + S\,dp + T\,dq \tag{16}$$

sont surfaces intégrales de l'équation de Monge-Ampère $\mathcal{M} - \Delta = 0$.

Le raisonnement ne consiste encore qu'à appliquer la formule (D) au second membre de la relation intégrale donnée.

Ainsi les surfaces sur lesquelles toute cloison Γ a une courbure (totale ou moyenne) exprimable par une intégrale de ligne de forme donnée et analogue au second membre de (16) sont des surfaces intégrales d'une certaine équation de Monge-Ampère. Quand on aura formé cette dernière équation on pourra former, par le théorème du paragraphe 8 et par la voie indiquée au paragraphe 12, une équation intégrale du type (2) plus générale que celle d'où l'on est parti et qui aura aussi bien lieu sur les surfaces considérées.

Formes intégrales de quelques équations classiques.

[**16**] *Surfaces développables.* — Soit à chercher l'équation intégrale (2) qui corresponde au cas où (1) se réduit à l'équation des surfaces développables $rt - s^2 = 0$. On a :

$$K = 1, \qquad A = 0, \qquad B = 0, \qquad C = 0, \qquad D = 0.$$

L'équation (2) se réduit à

$$\frac{\partial}{\partial p} X(\mu) + \frac{\partial}{\partial q} Y(\mu) + \frac{\partial \mu}{\partial z} = 0. \tag{17}$$

Je prends pour solution, très particulière mais permettant des calculs explicites,

$$\mu = \Phi(x, y) + \Psi_{pq}(p, q). \tag{18}$$

Alors, des équations qui doivent déterminer φ, ψ, D_1, on tire aisément :

$$2\varphi = p^2\Phi_y, \qquad 2\psi = q^2\Phi_x,$$
$$2\Theta = 2\mu D_1 = p^2\Phi_{yy} - 2pq\Phi_{xy} + q^2\Phi_{xx}.$$

On a ensuite :

$$2P = -p^2\Phi_y + pq\Phi_x, \qquad 2Q = q^2\Phi_x - pq\Phi_y,$$
$$2S = -q\Phi - \Psi_p, \qquad 2T = p\Phi + \Psi_q.$$

L'équation intégrale cherchée est donc, en remplaçant $pdx + qdy$ par dz,

$$\int\int_\Gamma (p^2\Phi_{yy} - 2pq\Phi_{xy} + q^2\Phi_{xx})dxdy$$
$$= \int_\gamma (q\Phi_x - p\Phi_y)dz + \Phi(pdq - qdp) + \Psi_q dq - \Psi_p dp. \tag{19}$$

On vérifie facilement que la formule (D), appliquée au second membre de cette égalité, permet de remplacer l'intégrale de ligne par

$$\int\int_\Gamma [2(\Phi + \Psi_{pq})(rt - s^2) + p^2\Phi_{yy} - 2pq\Phi_{xy} + q^2\Phi_{xx}]\,dxdy.$$

Alors l'équation (19) se réduit bien à $rt - s^2 = 0$.

L'équation (19), si l'on remplace Φ et Ψ par des constantes, prend l'une des trois formes équivalentes :

$$o = \int_{\gamma} p\,dq - q\,dp, \qquad o = \int_{\gamma} p\,dq, \qquad o = \int_{\gamma} q\,dp.$$

C'est là l'expression du fait élémentaire d'après lequel p est fonction de q sur une surface développable. On voit qu'il y a, sur la surface, des relations intégrales, telles que (19), qui sont d'un aspect beaucoup plus général; il n'est même pas certain que ce soient *les plus générales* parce que nous avons pris pour solution de (17) une expression (18) qui, malgré les deux fonctions arbitraires qu'elle contient, n'est pas la plus générale. On pourrait encore donner des formules bien autrement indéterminées que (19) en se fondant, par exemple, sur l'existence, pour l'équation (17), de solutions de la forme

$$\Phi(x, y, z)\,\Psi(p, q)\,\Omega(z - px - qy),$$

solutions qui, très probablement, ne sont pas encore les plus générales.

Pour l'instant je ne m'y arrête point.

[**17**] *Surfaces applicables sur une surface donnée.* — Après les surfaces développables, applicables sur le plan, considérons les surfaces applicables sur une surface quelconque $z = f(x, y)$.

Dans les *Leçons sur la Théorie des surfaces*, de M. G. Darboux (t. III, p. 262), nous trouvons, pour équation aux dérivées partielles de ces surfaces, une équation de Monge-Ampère (1) ayant pour coefficients :

$$\begin{aligned}
K &= -(1 + f_x^2 + f_y^2),\\
A &= \quad f_{yy}\ (pf_x + qf_y),\\
B &= -2f_{xy}(pf_x + qf_y),\\
C &= \quad f_{xx}\ (pf_x + qf_y),\\
D &= (f_{xy}^2 - f_{xx}f_{yy})(p^2 + q^2 - 1).
\end{aligned}$$

Ici l'équation (2) est fort compliquée, mais elle est cependant immédiatement satisfaite si l'on prend pour μ une fonction de x et y seulement. Alors, si l'on pose, pour simplifier l'écriture,

$$\rho(x, y) = 1 + f_x^2 + f_y^2,$$

les formules du paragraphe 12 donnent :

$$2\varphi = p^2[\mu f_y f_{yy} - \mu\rho_y - (\mu\rho)_y],$$
$$2\psi = q^2[\mu f_x f_{xx} - \mu\rho_x - (\mu\rho)_x],$$
$$2\mu D_1 = \left\{\begin{aligned} & p^2\left[\frac{\partial}{\partial x}(\mu f_x f_{yy}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mu f_y f_{yy} - 2\mu\rho_y - \mu_y\rho)\right] \\ & + 2pq\left[\frac{\partial}{\partial x}(\mu f_y f_{yy}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mu f_x f_{xx}) + \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(\mu\rho)\right], \\ & + q^2\left[\frac{\partial}{\partial x}(\mu f_x f_{xx} - 2\mu\rho_x - \mu_x\rho) + \frac{\partial}{\partial y}(\mu f_y f_{xx})\right]\end{aligned}\right.$$
$$2P = -p^2[\mu f_y f_{yy} - \mu\rho_y - (\mu\rho)_y] - \mu f_{xx}(2pqf_x + q^2 f_y) - pq(\mu\rho)_x,$$
$$2Q = q^2[\mu f_x f_{xx} - \mu\rho_x - (\mu\rho)_x] + \mu f_{yy}(p^2 f_x + 2pqf_y) + pq(\mu\rho)_y,$$
$$R = 0, \qquad 2S = q\mu\rho, \qquad 2T = -p\mu\rho.$$

On simplifie facilement l'expression $P\,dx + Q\,dy$, en y remplaçant notamment $p\,dx + q\,dy$ par dz. L'équation intégrale cherchée est alors [1] :

$$\begin{aligned} & \iint_\Gamma p^2\left[\frac{\partial}{\partial x}(\mu f_x f_{yy}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mu f_y f_{yy} - 2\mu\rho_y - \mu_y\rho)\right] dx\,dy \\ & + 2\iint_\Gamma pq\left[\frac{\partial}{\partial x}(\mu f_y f_{yy}) + \frac{\partial}{\partial y}(\mu f_x f_{xx}) + \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(\mu\rho)\right] dx\,dy \\ & + \iint_\Gamma q^2\left[\frac{\partial}{\partial x}(\mu f_x f_{xx} - 2\mu\rho_x - \mu_x\rho) + \frac{\partial}{\partial y}(\mu f_y f_{xx})\right] dx\,dy \\ & + 2\iint_\Gamma \mu(f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2)(p^2 + q^2 - 1)\,dx\,dy \\ & = \int_\gamma [p(\mu\rho)_y - q(\mu\rho)_x]\,dz + \mu\rho(q\,dp - p\,dq) \\ & + \int_\gamma \mu[(p^2 f_{yy} - q^2 f_{xx})(f_y\,dx + f_x\,dy) + 2pq(f_y f_{yy}\,dy - f_x f_{xx}\,dx) + 2f_{xy}(p^2 f_x\,dx - q^2 f_y\,dy)].\end{aligned}$$

Uniquement pour m'assurer que cette formule ne contenait point de fautes de calcul, j'ai vérifié que la formule (D) transformait le second membre en l'intégrale double

$$\iint_\Gamma 2\mu[K(rt - s^2) + Ar + Bs + Ct + D_1]\,dx\,dy$$

où K, A, B, C, D_1 ont les valeurs indiquées dans le présent paragraphe; quant au premier membre, il est

$$\iint_\Gamma 2\mu(D_1 - D)\,dx\,dy,$$

---

[1] *Sur la forme intégrale des équations de Monge-Ampère* (Comptes rendus, 6 avril 1914).

et, de l'égalité de ces deux intégrales doubles, on déduit bien l'équation aux dérivées partielles primitive.

L'équation intégrale obtenue est surtout intéressante, dans le cas présent, à cause de la fonction arbitraire $\mu(x, y)$ qu'elle contient, mais il ne faut pas perdre de vue que μ n'est ainsi qu'une solution très particulière de l'équation (α); si l'on pouvait obtenir d'autres solutions de cette équation, on aboutirait vraisemblablement à d'autres formes de l'équation intégrale, formes dont la recherche semble pratiquement inextricable. Toutefois on peut aussi se demander si certaines solutions de (α), plus compliquées que μ, ne donneraient pas, par contre, une équation intégrale plus simple que la précédente.

Pour cette dernière, une vérification partielle est encore possible en revenant aux surfaces développables, c'est-à-dire applicables sur un plan quelconque correspondant à $f = ax + by + c$; alors $\rho = 1 + a^2 + b^2$. L'équation doit être indépendante de a et b et, en fait, elle se réduit à (19) où $\Phi = \mu$, $\Psi = 0$.

[**18**] *Surfaces extrémales cloisonnant un contour.* — Les considérations de ce Mémoire pourraient être, de diverses manières, rattachées au Calcul des variations. On sait notamment que si l'on cherche des surfaces Γ, cloisonnant un contour donné γ et rendant minimum l'intégrale

$$J = \int\int_\Gamma f(x, y, z, p, q)\, dx dy,$$

ces surfaces doivent satisfaire à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial}{\partial x} f_p + \frac{\partial}{\partial y} f_q = f_z$$

qui, convenablement développée, s'écrit :

$$f_{pp} r + 2 f_{pq} s + f_{qq} t + X(f_p) + Y(f_q) - f_z = 0.$$

C'est l'équation de Lagrange (O. Bolza, *Vorlesungen über Variationsrechnung*, S. 656).

Si on veut la mettre sous forme intégrale, on voit que l'équation (α) est

$$\frac{\partial^2}{\partial q^2}(f_{pp}\mu) + \frac{\partial^2}{\partial p^2}(f_{qq}\mu) = 2\frac{\partial^2}{\partial p \partial q}(f_{pq}\mu) \tag{20}$$

et qu'elle est satisfaite par une fonction $\mu(x, y, z)$ ne contenant ni p ni q.

Alors on peut prendre $\varphi = 0$, $\psi = 0$. On a ensuite

$$\begin{aligned}
\mu D_1 &= X(\mu f_p) + Y(\mu f_q),\\
\mu D &= \mu X(f_p) + \mu Y(f_q) - \mu f_z,\\
\Theta &= f_p X(\mu) + f_q Y(\mu) + f_z \mu,\\
P &= -\mu f_q, \qquad Q = \mu f_p,
\end{aligned}$$

et l'équation intégrale est :

$$(21)\qquad \int\int_{\Gamma} [f_p X(\mu) + f_q Y(\mu) + f_z \mu]\, dx\, dy = \int_{\gamma} \mu(f_p dy - f_q dx).$$

On voit que *les surfaces extrémales* Γ, *qui rendent minimum l'intégrale* J, *ont aussi la propriété de rendre exprimables, par une intégrale de ligne attachée au contour* γ, *une infinité d'intégrales doubles attachées aux mêmes extrémales.* Mais il faut reconnaître que cette infinité d'intégrales doubles n'est que fort imparfaitement représentée par le premier membre de (21); cette dernière équation a été construite, en effet, en partant d'une solution excessivement particulière de (20). Il resterait à trouver pour μ des expressions beaucoup plus générales par rapport à p et q; mais ceci ne semble pas possible si l'on ne consent pas à particulariser la fonction f. L'existence *implicite* de relations intégrales, analogues à (21), mais beaucoup plus générales, garde, malgré tout, un certain intérêt.

Le premier membre de (21) peut, dans certains cas, être considéré comme comprenant l'intégrale double J, dont la valeur minimum est alors exprimée par une intégrale simple.

Ceci arrive si f est homogène en z, p, q et si l'on prend $\mu = z$; alors le crochet de la formule (21) est

$$pf_p + qf_q + zf_z = mf,$$

m étant l'ordre d'homogénéité. On obtient finalement :

$$m\mathrm{J} = \int_{\gamma} z(f_p dy - f_q dx).$$

On pourrait, plus généralement, chercher les formes de f pour lesquelles J et le premier membre de (21) coïncident identiquement; la question dépend de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$X(\mu)\frac{\partial f}{\partial p} + Y(\mu)\frac{\partial f}{\partial q} + \mu\frac{\partial f}{\partial z} = f,$$

à laquelle il semble qu'on puisse trouver des solutions intéressantes bien qu'il faille encore regretter le manque de généralité de μ. Pour l'instant, je n'insiste pas sur ce point qui pourrait faire ouvrir une trop longue parenthèse et nécessiterait une étude spéciale dans le domaine du Calcul des variations.

[**19**] *Surfaces minima.* — Nous avons déjà remarqué plus haut que l'indétermination *formelle* de nos équations intégrales permettait à certaines surfaces d'avoir à la fois une équation (2) avec $\Theta = 0$ et une autre avec $\Theta \neq 0$. Les surfaces développables en ont fait foi. Les surfaces minima permettent de revoir la même chose de manière très simple.

Dans le cas des surfaces minima, la fonction f du paragraphe précédent est $\sqrt{1+p^2+q^2}$; si α, β, γ sont les cosinus directeurs de la normale, la formule (21) s'écrit alors :

$$\int\int_\Gamma [\alpha X(\mu) + \beta Y(\mu)]\, dx\, dy = \int_\gamma \mu(\alpha\, dy - \beta\, dx).$$

Si μ se réduit à une simple constante, le premier membre est nul et l'on retrouve le résultat classique d'après lequel $\alpha\, dy - \beta\, dx$ est différentielle exacte sur les surfaces en question, résultat qui est généralisé par la présente formule.

Si l'on prend μ successivement égal à x, y, z, on a notamment les relations :

$$\int\int_\Gamma \alpha\, dx\, dy = \int_\gamma x(\alpha\, dy - \beta\, dx),$$

$$\int\int_\Gamma \beta\, dx\, dy = \int_\gamma y(\alpha\, dy - \beta\, dx),$$

$$-\int\int_\Gamma d\sigma + \int\int_\Gamma \gamma\, dx\, dy = \int_\gamma z(\alpha\, dy - \beta\, dx).$$

L'une quelconque des trois pourrait servir de définition aux surfaces minima.

[**20**] *Sur le problème et sur certains types de transformations de Bäcklund.* — Les travaux classiques relatifs à ces sujets et dus à Bäcklund même sont réexposés dans leurs traits essentiels par M. Darboux (*Surfaces*, t. III, livre VII, chap. XII et XIII) et par M. Goursat (*Équations aux dérivées partielles du second ordre*, t. II, chap. IX). Les développements plus modernes sont surtout dus à M. J. Clairin qui, en 1902, publia une importante thèse *Sur les transformations de Bäcklund* (Annales de l'École Normale) et n'a cessé depuis d'y ajouter de nouveaux Mémoires. En 1902 également et peu après la Thèse de M. Clairin, M. Goursat publia un travail *Sur quelques transformations des équations aux dérivées partielles du second ordre* (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse) qui contenait déjà des résultats publiés dans mon précédent Mémoire et au sujet desquels l'éminent géomètre a élevé une réclamation de priorité (Comptes rendus, 5 janvier 1914).

M. Goursat, partant du système (7), écrit plus loin (n° 22), reprend le *problème de Bäcklund* qui consiste à rechercher à quelles surfaces Γ doit appartenir l'élément x, y, z, p, q pour que l'élément x', y', z', p', q' appartienne à des surfaces correspondantes Γ'.

L'équation de ce problème est

$$\int_\gamma p'\, dx' + q'\, dy' = 0; \tag{22}$$

c'est une équation de Monge-Ampère, somme de deux équations dont chacune, considérée isolément, aurait une intégrale intermédiaire (¹); cette équation est aussi générale que

$$(23) \qquad \int_\gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz + S\,dp + T\,dq = 0$$

mais point davantage. Les conditions pour qu'une équation de Monge-Ampère se ramène à l'une des deux formes précédentes sont donc les mêmes; elles forment le système (J_1) déjà décrit par M. Goursat sous une forme un peu différente mais équivalente.

Les surfaces Γ' peuvent exister sans être, comme Γ, surfaces intégrales d'une équation aux dérivées partielles du second ordre; il y a *transformation de Bäcklund* quand cela arrive tout de même. M. Goursat considère la réduction d'une équation (23) à la forme canonique (22) avec génération d'une transformation de Bäcklund, question difficile qu'il mène vraisemblablement aussi loin qu'elle peut l'être.

Je n'ai rien à ajouter d'essentiel à ces sujets ardus; je me borne à montrer que là, comme en beaucoup d'autres points d'origines fort diverses, la formule (D) peut jouer un rôle symétrique et intéressant; pour cela j'ai réexposé la question d'une manière particulièrement favorable, mais qui n'est pas la plus générale, ne serait-ce que parce que je ne puis considérer, à l'aide de (D), que des transformations entre équations de Monge-Ampère (²).

[**21**] Soient deux surfaces, Γ formée d'éléments x, y, z, p, q et Γ' formée d'éléments x', y', z', p', q'. On a évidemment,

sur Γ,

$$(\alpha_1) \qquad 0 = \int_\gamma p\,dx + q\,dy$$

ou, ce qui est la même identité,

$$(\beta_1) \qquad \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y}.$$

sur Γ',

$$(\alpha_2) \qquad 0 = \int_{\gamma'} p'\,dx' + q'\,dy'$$

ou, ce qui est la même identité,

$$(\beta_2) \qquad \frac{\partial q'}{\partial x'} = \frac{\partial p'}{\partial y'}.$$

(¹) Tout premier membre d'équation de Monge-Ampère peut être considéré comme la somme de deux premiers membres d'équations à intégrale intermédiaire *et de termes du premier ordre*. La chose ressort clairement du Mémoire de M. Goursat et peut d'ailleurs être vue de plusieurs manières; ici elle se rattache intimement au théorème du n° 8 qui met l'équation *générale* (2) sous la forme $\Delta - \Theta = 0$ alors que $\Delta = 0$ provient toujours, si l'on veut, d'un certain problème de Bäcklund. Mais cette décomposition de l'équation de Monge-Ampère, *sous la forme différentielle*, n'est pas cependant complètement équivalente à l'obtention de la forme intégrale (2) parce que cette dernière dépend d'éléments arbitraires qui peuvent ne plus laisser de traces dans l'équation $\Delta - \Theta = 0$. Ainsi l'équation (19) des surfaces développables dépend *formellement* de la fonction arbitraire $\Phi(x, y)$; par application de la formule (D) on retrouve, comme je l'ai montré ensuite, l'équation $rt - s^2 = 0$ qui n'a plus rien d'arbitraire.

(²) Dans l'ordre d'idées opposé, il faut signaler une récente Note de M. Clairin (*Comptes rendus*, 30 mars 1914) où sont formées d'une manière très simple des transformations de Bäcklund entre équations du second ordre autres que des équations de Monge-Ampère.

La première idée des transformations de Bäcklund semble pouvoir se ramener à une interversion parfaitement symétrique de ces notations, interversion qui conduit à se demander si l'on peut avoir,

sur Γ,

$$(\gamma_1) \qquad 0 = \int_\gamma p'dx' + q'dy'$$

ou

$$(\delta_1) \qquad \frac{\partial q'}{\partial x'} = \frac{\partial p'}{\partial y'}.$$

sur Γ',

$$(\gamma_2) \qquad 0 = \int_{\gamma'} pdx + qdy$$

ou

$$(\delta_2) \qquad \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y}.$$

La question a un sens, au moins dans le cas particulier où $x, y, p, q, x', y', p', q'$ sont liés par quatre relations où ne figurent explicitement ni z ni z'. Commençons par là. D'ailleurs nous retrouverons ce cas primitif aux paragraphes 28 et 49.

Exprimons, en effet, x', y', p', q' à l'aide de x, y, p, q.

L'équation (γ_1) devient, par la formule (D), une équation de Monge-Ampère relative à Γ.

Quant à (δ_1), elle exprime que dy' a, dans dp', le même coefficient que dx' dans dq'.

Si donc on exprime maintenant x, y, p, q en x', y', p', q', si l'on calcule, par différentiation,

$$dx, \quad dy, \quad rdx + sdy, \quad sdx + tdy$$

en fonctions linéaires de dx', dy', dp', dq', si l'on résout ce système par rapport à dx, dy, dp', dq', et si l'on écrit que dy' dans dp' a même coefficient que dx' dans dq', on a l'équation

$$(\varepsilon_1) \quad \begin{vmatrix} r & s & 1 & 0 \\ s & t & 0 & 1 \\ p_{p'} & q_{p'} & x_{p'} & y_{p'} \\ p_{x'} & q_{x'} & x_{x'} & y_{x'} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} r & s & 1 & 0 \\ s & t & 0 & 1 \\ p_{q'} & q_{q'} & x_{q'} & y_{q'} \\ p_{y'} & q_{y'} & x_{y'} & y_{y'} \end{vmatrix} = 0.$$

On peut exprimer les deux dernières lignes des déterminants en x, y, p, q et l'on a ainsi une équation de Monge-Ampère qui n'est autre que (γ_1), puisque l'on a déduit (ε_1) de (δ_1) qui doit exprimer la même chose que (γ_1).

Enfin x, y, p, q sont engagés seuls dans (ε_1) et x', y', p', q' seuls dans (γ_2); les quatre équations qui unissent $x, y, p, q, x', y', p', q'$ constituent une transformation de Bäcklund entre (γ_2) et (ε_1) ou, ce qui revient au même, entre (γ_2) et (γ_1).

Exprimons, en effet, x, y, p, q à l'aide de x', y', p', q'.

L'équation (γ_2) devient, par la formule (D), une équation de Monge-Ampère relative à Γ'.

Quant à (δ_2), elle exprime que dy a, dans dp, le même coefficient que dx dans dq.

Si donc on exprime maintenant x', y', p', q' en x, y, p, q, si l'on calcule, par differentiation,

$$dx', \quad dy', \quad r'dx' + s'dy', \quad s'dx' + t'dy'$$

en fonctions linéaires de dx, dy, dp, dq, si l'on résout ce système par rapport à dx', dy', dp, dq, et si l'on écrit que dy dans dp a même coefficient que dx dans dq, on a l'équation

$$(\varepsilon_2) \quad \begin{vmatrix} r' & s' & 1 & 0 \\ s' & t' & 0 & 1 \\ p'_p & q'_p & x'_p & y'_p \\ p'_x & q'_x & x'_x & y'_x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} r' & s' & 1 & 0 \\ s' & t' & 0 & 1 \\ p'_q & q'_q & x'_q & y'_q \\ p'_y & q'_y & x'_y & y'_y \end{vmatrix} = 0.$$

On peut exprimer les deux dernières lignes des déterminants en x', y', p', q' et l'on a ainsi une équation de Monge-Ampère qui n'est autre que (γ_2), puisque l'on a déduit (ε_2) de (δ_2) qui doit exprimer la même chose que (γ_2).

Enfin x', y', p', q' sont engagés seuls dans (ε_2) et x, y, p, q seuls dans (γ_1); les quatre équations qui unissent $x, y, p, q, x', y', p', q'$ constituent une transformation de Bäcklund entre (γ_1) et (ε_2) ou, ce qui revient au même, entre (γ_1) et (γ_2).

Les transformations de Bäcklund ainsi définies, bien qu'extrêmement particulières, offrent cependant un premier exemple que M. Clairin donne, au paragraphe 6 de sa Thèse, comme rentrant évidemment dans les transformations générales qu'il désigne par (B_3).

Ce qu'il importe de remarquer, dans ce premier cas, c'est que les équations de Monge-Ampère liées par la transformation de Bäcklund sont, à volonté, (γ_1) et (γ_2) ou bien (ε_1) et (ε_2), si bien qu'on peut tenter de fonder des généralisations sur des extensions du système (γ) ou sur des extensions du système (ε). Nous reviendrons sur cette idée dans la troisième partie de ce travail.

[**22**] Essayons maintenant de conserver *autant que possible* le point de vue précédent, mais dans des cas plus généraux. Plaçons-nous tout de suite au point de vue adopté par M. Goursat dans son Mémoire précité. Soient les quatre relations :

$$(\tau) \qquad \begin{cases} x' = x'(x, y, z, p, q), & y' = y'(x, y, z, p, q), \\ p' = p'(x, y, z, p, q), & q' = q'(x, y, z, p, q). \end{cases}$$

Rien n'empêche d'écrire (γ_1) en développant dx' et dy' comme il est indiqué ici à la fin du paragraphe 8. Transformant cette relation intégrale (γ_1) par la formule (D), on a l'ordinaire équation de Monge-Ampère

$$(\gamma'_1) \qquad \begin{vmatrix} s & t & 0 & 0 & -1 \\ r & s & 0 & -1 & 0 \\ p & q & -1 & 0 & 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{\partial}{\partial p} & \dfrac{\partial}{\partial q} \\ p'\dfrac{\partial x'}{\partial x} + q'\dfrac{\partial y'}{\partial x} & p'\dfrac{\partial x'}{\partial y} + q'\dfrac{\partial y'}{\partial y} & p'\dfrac{\partial x'}{\partial z} + q'\dfrac{\partial y'}{\partial z} & p'\dfrac{\partial x'}{\partial p} + q'\dfrac{\partial y'}{\partial p} & p'\dfrac{\partial x'}{\partial q} + q'\dfrac{\partial y'}{\partial q} \end{vmatrix} = 0$$

ou bien :

$$(\gamma'_1) \qquad \begin{vmatrix} s & t & 0 & 0 & -1 \\ r & s & 0 & -1 & 0 \\ p & q & -1 & 0 & 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{\partial}{\partial p} & \dfrac{\partial}{\partial q} \\ p'\dfrac{\partial x'}{\partial x} & p'\dfrac{\partial x'}{\partial y} & p'\dfrac{\partial x'}{\partial z} & p'\dfrac{\partial x'}{\partial p} & p'\dfrac{\partial x'}{\partial q} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} s & t & 0 & 0 & -1 \\ r & s & 0 & -1 & 0 \\ p & q & -1 & 0 & 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{\partial}{\partial p} & \dfrac{\partial}{\partial q} \\ q'\dfrac{\partial y'}{\partial x} & q'\dfrac{\partial y'}{\partial y} & q'\dfrac{\partial y'}{\partial z} & q'\dfrac{\partial y'}{\partial p} & q'\dfrac{\partial y'}{\partial q} \end{vmatrix} = 0.$$

Quant au raisonnement qui avait donné (ε_2), il est encore applicable et donne cette fois (Cf. G. Darboux, *Surfaces*, t. III, p. 440; E. Goursat, *loc. cit.*, p. 318.)

$$(\varepsilon_2') \qquad \begin{vmatrix} s' & t' & 0 & 1 \\ r' & s' & 1 & 0 \\ \dfrac{\partial p'}{\partial p} & \dfrac{\partial q'}{\partial p} & \dfrac{\partial x'}{\partial p} & \dfrac{\partial y'}{\partial p} \\ X(p') & X(q') & X(x') & X(y') \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} s' & t' & 0 & 1 \\ r' & s' & 1 & 0 \\ \dfrac{\partial p'}{\partial q} & \dfrac{\partial q'}{\partial q} & \dfrac{\partial x'}{\partial q} & \dfrac{\partial y'}{\partial q} \\ Y(p') & Y(q') & Y(x') & Y(y') \end{vmatrix} = 0,$$

X et Y désignant toujours les opérateurs dont la signification a été rappelée au paragraphe 6.

C'est seulement maintenant qu'apparaît une différence essentielle entre ces considérations et celles du numéro précédent. Dans (ε_2') les deux dernières lignes des déterminants sont composées de fonctions de x, y, z, p, q, si bien que les coefficients de l'équation ne sont plus forcément exprimables à l'aide des quatre fonctions x', y', p', q' imposées par le système (τ). Mais si cela arrive tout de même, l'équation (ε_2') définit des surfaces Γ', correspondant par la transformation (τ) aux surfaces Γ définies par l'équation (γ_1').

On voit que la forme symbolique donnée par la formule (D) à (γ_1') est assez remarquable; elle évite, sinon en fait du moins en pensée, de charger le raisonnement de développements encombrants; les valeurs esthétiques de (γ_1') et de (ε_2') me semblent d'ailleurs égales.

[**23**] *Exemple.* — Je prends un exemple qui rentrerait facilement dans ceux que donne M. Goursat (*loc. cit.*, nos 3 et 14).

Cherchons des transformations (τ) de la forme

$$x' = x, \qquad y' = y, \qquad p' = p'(x, y, z, p), \qquad q' = q'(x, y, z, q).$$

Les équations (γ_1') et (ε_2') sont

$$\begin{vmatrix} s & t & 0 & 0 & -1 \\ r & s & 0 & -1 & 0 \\ p & q & -1 & 0 & 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{\partial}{\partial p} & \dfrac{\partial}{\partial q} \\ p' & q' & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} s' & t' & 0 & 1 \\ r' & s' & 1 & 0 \\ \dfrac{\partial p'}{\partial p} & 0 & 0 & 0 \\ X(p') & X(q') & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} s' & t' & 0 & 1 \\ r' & s' & 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial q'}{\partial q} & 0 & 0 \\ Y(p') & Y(q') & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou bien :

$$\left(\frac{\partial p'}{\partial p}-\frac{\partial q'}{\partial q}\right)s=\left(\frac{\partial q'}{\partial x}+p\frac{\partial q'}{\partial z}\right)-\left(\frac{\partial p'}{\partial y}+q\frac{\partial p'}{\partial z}\right),$$

$$\left(\frac{\partial p'}{\partial p}-\frac{\partial q'}{\partial q}\right)s'=\frac{\partial p'}{\partial p}\left(\frac{\partial q'}{\partial x}+p\frac{\partial q'}{\partial z}\right)-\frac{\partial q'}{\partial q}\left(\frac{\partial p'}{\partial y}+q\frac{\partial p'}{\partial z}\right).$$

La première de ces deux équations ne contient que x, y, z, p, q, s; la seconde *ne doit contenir* que x', y', z', p', q', s' et, par suite, dans cette équation, le rapport du second membre à la parenthèse contenue dans le premier doit pouvoir s'exprimer rien qu'avec x', y', p', q', au moyen des équations de la transformation données au au début du paragraphe. La réalisation générale de cette condition est encore d'une étude fort difficile; bornons-nous à examiner le cas où les équations de la transformation seraient linéaires et homogènes en z, p, q, c'est-à-dire auraient la forme (a, b, α, β désignant des fonctions de x et y seulement)

$$(\tau_1)\qquad x'=x,\qquad y'=y,\qquad p'=ap+bz,\qquad q'=\alpha q+\beta z.$$

La condition en question s'écrit alors

$$a\left(q\frac{\partial\alpha}{\partial x}+z\frac{\partial\beta}{\partial x}+p\beta\right)-\alpha\left(p\frac{\partial a}{\partial y}+z\frac{\partial b}{\partial y}+qb\right)=(a-\alpha)[h(ap+bz)+k(\alpha q+\beta z)],$$

h et k ne devant dépendre aussi que de x et y. On la scinde en les trois suivantes :

$$a\beta-\alpha\frac{\partial a}{\partial y}=ha(a-\alpha),\quad a\frac{\partial\alpha}{\partial x}-\alpha b=k\alpha(a-\alpha),\quad a\frac{\partial\beta}{\partial x}-\alpha\frac{\partial b}{\partial y}=(a-\alpha)(hb+k\beta);$$

portant, dans la dernière, h et k tirés des deux premières, il reste une seule condition qui, comme le remarque M. Goursat, a la forme très simple

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{b}{a}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

Si φ désigne une fonction arbitraire de x et y, on peut donc prendre

$$b=a\frac{\partial\varphi}{\partial x},\qquad \beta=\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

et les équations de la transformation de Bäcklund sont définitivement :

$$(\tau_2)\qquad x'=x,\qquad y'=y,\qquad p'=a\left(p+\frac{\partial\varphi}{\partial x}z\right),\qquad q'=\alpha\left(q+\frac{\partial\varphi}{\partial y}z\right).$$

Les équations aux dérivées partielles qu'elle transforme l'une en l'autre sont :

$$(e)\quad\left\{\begin{aligned}&(a-\alpha)s=\left(\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial a}{\partial y}\right)p+\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}-a\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)q+\left[\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+(\alpha-a)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}\right]z,\\&\overline{(a-\alpha)}\,s'=\overline{\frac{\alpha}{a}\left(a\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial a}{\partial y}\right)}\,p'+\overline{\frac{a}{\alpha}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}-\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)}\,q';\end{aligned}\right.$$

dans la seconde, les traits surmontant les coefficients indiquent qu'il faut y remplacer x et y par x' et y' conformément aux deux premières équations de la transformation.

[24] Venons maintenant à une question fort intéressante. Des équations (τ_1) on peut tirer

$$(\tau_3) \qquad x = x', \qquad y = y', \qquad p = \frac{p'}{\bar{a}} - \overline{\left(\frac{\beta z}{\alpha}\right)}, \qquad q = \frac{q'}{\bar{\alpha}} - \overline{\left(\frac{bz}{\alpha}\right)},$$

$\bar{z}$ représentant, bien entendu, $z(x', y')$, ce qui est la même chose que $z(x, y)$ en vertu des deux premières équations. Il faut donc bien se garder de confondre $\bar{z}$ et z'.

Or les équations (τ_3) liant x, y, p, q et x', y', p', q', on peut se demander si la seconde équation (e) ne pourrait pas provenir tout simplement de (γ_2) tout comme dans le cas dégénéré du paragraphe 21. Il en est bien ainsi.

Tout d'abord l'équation de Monge-Ampère qui exprime (γ_2) sous la forme différentielle est tout à fait analogue à (γ_1'); on la déduirait de (γ_1') en désaccentuant toutes les lettres accentuées et en accentuant toutes les autres. Puis, en tenant compte des formes (τ_3) de x, y, z, p, q, on aurait :

$$\begin{vmatrix} s' & t' & 0 & -1 \\ r' & s' & -1 & 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial x'} & \dfrac{\partial}{\partial y'} & \dfrac{\partial}{\partial p'} & \dfrac{\partial}{\partial q'} \\ p & q & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Développant, il vient :

$$\overline{\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{a}\right)} s' = \overline{\frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial \alpha}{\partial x}} q' - \overline{\frac{1}{a^2}\frac{\partial a}{\partial y}} p' + \bar{z}\overline{\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\beta}{\alpha}\right)} + \overline{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)} p - \overline{\left(\frac{b}{a}\right)} q.$$

On peut observer maintenant que les deux dernières formules (τ_3) donnent p et q ou $\bar{p}$ et $\bar{q}$, car c'est la même chose d'après les deux premières. Dans ces conditions, l'équation précédente devient :

$$\overline{\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{a}\right)} s' = \overline{\frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial \alpha}{\partial x}} q' - \overline{\frac{1}{a^2}\frac{\partial a}{\partial y}} p' + \bar{z}\overline{\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{b}{a}\right)} + \overline{\left(\frac{\beta}{a\alpha}\right)} p' - \overline{\left(\frac{b}{a\alpha}\right)} q'.$$

Pour que ce soit une véritable équation aux dérivées partielles de z', il ne reste qu'à la débarrasser de $\bar{z}$. Or ceci exige :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{b}{a}\right).$$

C'est bien la même condition que celle trouvée par la méthode du paragraphe précédent. Si l'on reprend

$$b = a\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad \beta = \alpha\frac{\partial\varphi}{\partial y},$$

on retrouve immédiatement la seconde équation (e).

[25] A la méthode qui vient d'être exposée correspondent donc des équations de Monge-Ampère liées par transformation de Bäcklund et déduites toutes deux, par la formule de Stokes généralisée (D), d'équations intégrales telles que (γ_1) et (γ_2); ceci dans des cas plus généraux que le cas véritablement trop particulier du paragraphe 21.

Ces cas eux-mêmes ne seront jamais que très spéciaux par rapport au problème général, mais ils méritaient évidemment d'être signalés dans un Mémoire consacré aux applications de la formule (D); j'entrevois d'autres développements à leur égard, mais je ne puis m'arrêter plus sur ce sujet que sur tous les autres que je me borne à rattacher à (D).

[26] *Le système* (K) *et les fonctions de deux variables complexes.* — Reprenons le système (K) qui, *s'il a une solution* $\mu(x, y, z, p, q)$, permet de mettre l'équation de Monge-Ampère (1) sous la forme (2) avec $\Theta = 0$. Malgré les propriétés déjà données par M. Goursat et moi, l'étude de ce système me semble bien peu avancée; peut-être deviendra-t-il, dans l'avenir, l'un des systèmes les plus remarquables de l'Analyse.

Il possède la propriété fort remarquable de contenir comme cas particulier le système de quatre équations auquel satisfait la partie réelle (ou la partie purement imaginaire) d'une fonction de deux variables complexes :

$$u = x + iy, \qquad v = q + ip.$$

Par suite, on pourra peut-être lui étendre certains progrès, faits ou à faire, par la théorie des fonctions analytiques de deux variables.

Cherchons, en effet, s'il peut exister un multiplicateur μ pour l'équation de Laplace

$$r + t = 0.$$

Pour $A = 1$, $C = 1$, $B = 0$, $D = 0$, $K = 0$, le système (K) se réduit à

$$\begin{gathered}
X^2(\mu) + Y^2(\mu) = 0, \\
-X\left(\frac{\partial\mu}{\partial p}\right) + Y\left(\frac{\partial\mu}{\partial q}\right) + 2\frac{\partial\mu}{\partial z} = 0, \\
X\left(\frac{\partial\mu}{\partial q}\right) + Y\left(\frac{\partial\mu}{\partial p}\right) = 0, \\
-Y\left(\frac{\partial\mu}{\partial q}\right) + X\left(\frac{\partial\mu}{\partial p}\right) + 2\frac{\partial\mu}{\partial z} = 0, \\
\frac{\partial^2\mu}{\partial q^2} + \frac{\partial^2\mu}{\partial p^2} = 0.
\end{gathered}$$

En ajoutant la seconde et la quatrième équation, on voit que $\mu_z = 0$, c'est-à-dire que μ ne peut contenir explicitement z. Dans ces conditions, il reste :

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial p} - \frac{\partial^2 \mu}{\partial y \partial q} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial x \partial q} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial y \partial p} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \mu}{\partial q^2} + \frac{\partial^2 \mu}{\partial p^2} = 0.$$

C'est bien là le système, qu'on trouvera dans le *Traité d'Analyse* de M. E. Picard (t. II, seconde édition, p. 256), vérifié par la partie réelle d'une fonction des variables u et v.

Observons que, pour le moment, ceci n'est pas encourageant quant à l'étude directe et profonde du système (K), puisqu'il contient comme cas très particulier un autre système dont l'étude directe n'a pas semblé jusqu'ici très abordable, ce que remarque encore M. Émile Picard (*loc. cit.*, p. 257).

Quoi qu'il en soit, le résultat précédent peut se traduire de plusieurs manières intéressantes. Tout d'abord il entraîne que, si μ est partie réelle d'une fonction de u et v, l'intégrale

$$\int\int_\Gamma \mu(x, y, p, q)(r + t)\,dx\,dy$$

doit s'exprimer par une intégrale de ligne en x, y, p, q uniquement relative au contour de Γ. On a donc là une intégrale double invariante pour toutes les déformations de la cloison Γ qui en conservent le contour et les plans tangents le long de celui-ci. On retrouve ainsi une proposition déjà signalée dans les préliminaires du présent Mémoire et déduite d'une transformation de la petite formule de Riemann.

Plus symétriquement, si l'on pose

$$f(u, v) = \Phi(x, y, q, p) + i\Psi(x, y, q, p),$$

on a :

$$(24)\qquad \begin{cases} -\displaystyle\int\int_\Gamma \substack{\Phi_q \\ \Psi_p}(r + t)\,dx\,dy = \int_\gamma \Phi\,dx - \Psi\,dy, \\ \displaystyle\int\int_\Gamma \substack{\Phi_p \\ -\Psi_q}(r + t)\,dx\,dy = \int_\gamma \Psi\,dx + \Phi\,dy. \end{cases}$$

Ce ne sont là que des cas particuliers, à formation immédiate, de la formule (D_1); les coefficients de $(r + t)$ écrits l'un sous l'autre sont des expressions identiquement égales.

On retrouve ainsi que, *sur les surfaces harmoniques* $r + t = 0$, *les expressions*

$$\Phi\,dx - \Psi\,dy, \qquad \Psi\,dx + \Phi\,dy$$

sont des différentielles exactes, tout comme sur le plan simple quand la fonction f ne dépend que de $u = x + iy$. D'ailleurs il est très simple de vérifier que l'on a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial x},$$

f contenant une ou deux variables complexes; dans ce dernier cas, la première relation s'écrit

$$\Phi_y + \Phi_q t + \Phi_p s = -\Psi_x - \Psi_q s - \Psi_p r,$$

ce qui est vérifié, puisque $\Phi_p = -\Psi_q$ et que $\Phi_q = \Psi_p$ avec $r = -t$. Il n'y a donc plus là que des résultats très élémentaires; l'intérêt est plutôt du côté des intégrales doubles précédentes à cause de leur invariance quant aux déformations de Γ déjà mentionnées.

[27] Il y a, comme le remarque encore M. Émile Picard, une très grande différence entre les fonctions Φ et Ψ, suivant qu'elles proviennent d'une fonction d'une seule variable complexe ou d'une fonction de deux variables; dans le premier cas, elles sont *solutions* de l'unique équation de Laplace; dans le second cas, elles sont *solutions* d'un système de quatre équations. Cette différence, profonde en effet, disparaît de façon curieuse si l'on se propose de considérer Φ et Ψ non plus comme des *solutions*, mais comme des *multiplicateurs* μ. Alors peu importe que Φ et Ψ proviennent d'une fonction d'une ou de deux variables complexes; ce sont toujours des multiplicateurs μ pour l'unique équation de Laplace $r + t = 0$.

[28] Voici encore une manière de présenter les mêmes choses. Si l'on pose

$$(\tau') \qquad \begin{cases} x' = x, & y' = y, \\ q' = \Phi(x, y, q, p), & p' = \Psi(x, y, q, p), \end{cases}$$

on définit ainsi une transformation qui laisse invariante l'équation de Laplace, c'est-à-dire qui change $r + t = 0$ en $r' + t' = 0$.

En effet, l'équation $r' + t' = 0$, pouvant s'écrire

$$\frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{\partial q'}{\partial y'} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0,$$

entraîne $r + t = 0$, comme on l'a vu à la fin du numéro 26. Et réciproquement.

On peut dire que les formules (τ') définissent une transformation de Bäcklund changeant l'équation de Laplace en elle-même ou, si l'on veut, changeant une surface harmonique en une autre surface harmonique. Il s'agit, bien entendu, d'une transformation dégénérée, c'est-à-dire du type étudié en premier lieu au numéro 21.

Alors la formule (γ_1) est

$$o = \int_\gamma \Psi\, dx + \Phi\, dy\,;$$

elle ne peut avoir lieu identiquement que sur les surfaces d'équation $r + t = o$, ceci d'après la seconde des formules (24). Quant à l'équation associée (ε_2), on la développe facilement et, en tenant compte des relations

$$\Phi_x = \Psi_y, \qquad \Phi_y = -\Psi_x, \qquad \Phi_q = \Psi_p, \qquad \Phi_p = -\Psi_q,$$

on voit qu'elle se réduit à $r' + t' = o$.

[**29**] *Solutions dérivant de solutions de* (J), (J_1), (K). — Reprenons, par exemple, le système (J_1) et supposons que l'on en connaisse une solution, c'est-à-dire un système de fonctions K, A, B, C, D y satisfaisant. Quelque particulières que soient ces fonctions, on pourra, en général, s'en servir pour former d'autres solutions pouvant dépendre de constantes et même de fonctions arbitraires, cela au moyen de considérations empruntées à la théorie générale des groupes et qu'il est fort simple de rappeler ici en quelques mots.

Le système (J_1) est construit linéairement à l'aide des seuls opérateurs

$$(25) \qquad \frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial z}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} + q\frac{\partial}{\partial z}, \qquad \frac{\partial}{\partial z}, \qquad \frac{\partial}{\partial p}, \qquad \frac{\partial}{\partial q};$$

qui définissent les transformations infinitésimales d'un groupe en x, y, z, p, q. Les opérateurs

$$(26) \qquad \frac{\partial}{\partial x}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}, \qquad \frac{\partial}{\partial z}, \qquad \frac{\partial}{\partial p} + x\frac{\partial}{\partial z}, \qquad \frac{\partial}{\partial q} + y\frac{\partial}{\partial z}$$

sont permutables avec chacun des précédents et définissent ce que Lie appelle le groupe réciproque du premier. Plus généralement, les e désignant des constantes, l'opérateur

$$E(\ ) = e_1\frac{\partial}{\partial x} + e_2\frac{\partial}{\partial y} + e_3\frac{\partial}{\partial z} + e_4\left(\frac{\partial}{\partial p} + x\frac{\partial}{\partial z}\right) + e_5\left(\frac{\partial}{\partial q} + y\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

est permutable avec tous ceux qui entrent dans la construction de (J_1). Si donc on l'applique aux premiers membres de ce système, on change la solution

$$K, \qquad A, \qquad B, \qquad C, \qquad D$$

en une autre solution

$$E(K), \qquad E(A), \qquad E(B), \qquad E(C), \qquad E(D)$$

ou, par réitération, en

$$E^m(K), \qquad E^m(A), \qquad E^m(B), \qquad E^m(C), \qquad E^m(D)$$

ou encore, le système étant linéaire, en

$$\sum \frac{E^m(K)}{m!}, \qquad \sum \frac{E^m(A)}{m!}, \qquad \sum \frac{E^m(B)}{m!}, \qquad \sum \frac{E^m(C)}{m!}, \qquad \sum \frac{E^m(D)}{m!}.$$

Or ce sont là les développements symboliques bien connus qui indiquent que l'on a soumis les fonctions K, A, B, C, D aux transformations finies du groupe ayant E pour transformation infinitésimale générale. Ces transformations finies consistent à remplacer x, y, z, p, q respectivement par

$$x+a, \qquad y+b, \qquad z+\alpha x+\beta y+\gamma, \qquad p+\alpha, \qquad q+\beta,$$

$a, b, \alpha, \beta, \gamma$ désignant cinq constantes arbitraires.

Imaginons maintenant le système (J_1) écrit avec des fonctions K, A, B, C, D ainsi transformées et dépendant, par suite, des cinq quantités $a, b, \alpha, \beta, \gamma$. On peut multiplier toutes les équations de (J_1) par une fonction arbitraire $\Omega(a, b, \alpha, \beta, \gamma)$ et par les éléments $da, db, d\alpha, d\beta, d\gamma$. Intégrant alors entre des limites constantes mais arbitraires, on s'élève à un système de solutions qui dépend de la fonction arbitraire Ω.

Ce qu'il y a de remarquable dans les systèmes de solutions ainsi construits, c'est qu'ils naissent uniquement d'une solution particulière de (J_1), sans intervention de propriétés caractéristiques de ce système (J_1); les transformations invoquées s'appliqueraient tout aussi bien à tout système d'équations construit linéairement avec les mêmes opérateurs que ceux qui interviennent dans la construction de (J_1).

[**30**] Les propriétés des groupes invoquées ici le sont à propos de groupes si simples qu'on peut apercevoir les résultats sans passer par les méthodes générales. Indiquons toutefois que la construction du groupe réciproque d'un groupe donné par ses transformations infinitésimales est traitée dans la *Theorie der Transformationsgruppen* de Sophus Lie (t. I, p. 378).

Le procédé méthodique consisterait ici à intégrer le système complet

$$\frac{\partial f}{\partial x}+p\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial x'}+p'\frac{\partial f}{\partial z'}=0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}+q\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial y'}+q'\frac{\partial f}{\partial z'}=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial z'}=0, \qquad \frac{\partial f}{\partial p}+\frac{\partial f}{\partial p'}=0, \qquad \frac{\partial f}{\partial q}+\frac{\partial f}{\partial q'}=0$$

auquel on trouve aisément les intégrales

$$x-x', \quad y-y', \quad z-z'-(p-p')x-(q-q')y, \quad p-p', \quad q-q'.$$

Égalant celles-ci à des constantes, on trouve les transformations finies données au paragraphe précédent et on en conclut immédiatement les transformations infinitésimales correspondantes.

Pour plus de détails, je me permets de renvoyer à mon Mémoire *Sur les équations linéaires aux dérivées partielles et la théorie des groupes continus* (Journal de Mathématiques pures et appliquées, 5e série, t. X, 1904), dans lequel j'ai étudié l'extension de solutions d'équations aux dérivées partielles par des procédés du genre précédent. Le système (J_1), qui n'est certainement pas créé exprès pour faire valoir le procédé, s'ajoute aux cas où celui-ci s'applique avec quelque intérêt. A propos de ces cas, on pourra aussi se reporter aux dernières pages du Mémoire *Sur les applications géométriques de la formule de Stokes* publié dans le présent Recueil en 1910.

DEUXIEME PARTIE.

La formule d'Ossian Bonnet et ses analogues.

---

[31] Dans mon précédent Mémoire, j'ai déjà remarqué que si l'on définissait la courbure d'une portion de surface, ou cloison Γ *d'étendue finie*, par une intégrale double étendue à Γ et devant rester constante lorsque la cloison se déforme en conservant le même contour γ et les mêmes plans tangents le long de celui-ci, les formules que l'on peut obtenir pour la représentation de cette courbure devaient naturellement rentrer dans (D).

A ce propos, j'ai déjà donné la suite d'égalités

$$(1) \qquad \int\int_\Gamma \frac{d\sigma}{\rho_1 \rho_2} = \int_\gamma \lambda d\,.\,\text{arc tang}\,\frac{\mu}{\nu} = \int_\gamma \mu d\,.\,\text{arc tang}\,\frac{\nu}{\lambda} = \int_\gamma \nu d\,.\,\text{arc tang}\,\frac{\lambda}{\mu}$$

qui porte le numéro 30 dans le travail précité. En un point quelconque de Γ, ρ_1 et ρ_2 sont les rayons de courbure principaux, alors que λ, μ, ν sont les cosinus directeurs de la normale.

J'ai indiqué que cette formule (1) ne pouvait guère être considérée comme distincte de celle d'Ossian Bonnet; mais j'ai renvoyé à plus tard le fait de tirer cette dernière de (D). C'est sur ce point que je reviens maintenant.

De plus, après avoir tiré de (D) la formule de Bonnet où intervient la *courbure géodésique*, je montrerai que la méthode peut donner des formules du même type, mais relatives à la *torsion géodésique* et à la *courbure normale*.

Toutefois, avant d'abandonner (1), remarquons que cette formule contient comme cas particulier une formule de quadrature relative aux aires sphériques. Soit la sphère de rayon a ayant son centre à l'origine. Au point $M(x, y, z)$, ou $M(\theta, r, z)$ en coordonnées semi-polaires, les cosinus directeurs de la normale sont

$$\lambda = \frac{x}{a}, \qquad \mu = \frac{y}{a}, \qquad \nu = \frac{z}{a},$$

et, comme $\rho_1 = \rho_2 = a$, on tire de (1), pour l'aire σ d'une cloison sphérique Γ,

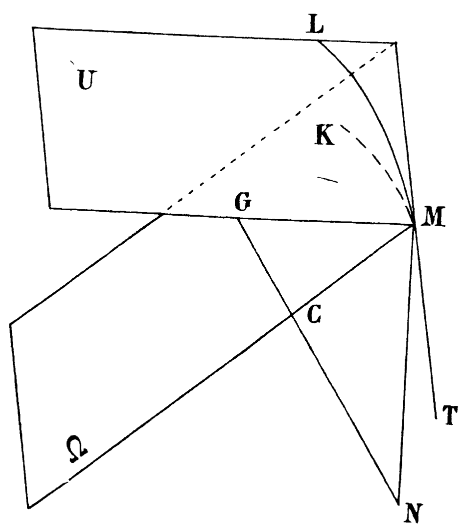
$$\sigma = a \int_\gamma z d\,.\,\text{arc tang}\,\frac{x}{y}.$$

C'est ce qu'il est aisé de vérifier. On a directement

$$\sigma = a \int\int_{\Gamma} \frac{r}{z}\, dr\, d\theta = a \int\int_{\Gamma} \frac{r\, dr}{\sqrt{a^2 - r^2}}\, d\theta = - a \int_{\gamma} \sqrt{a^2 - r^2}\, d\theta = - a \int_{\gamma} z\, d\theta,$$

ce qui coïncide bien avec la formule précédente. D'ailleurs l'égalité (1) se vérifie encore immédiatement dans le cas des surfaces développables.

[32] *Courbure géodésique.* — Rappelons brièvement l'une des définitions. Soit M un point d'une courbe MK tracée sur une surface, courbe dont le plan osculateur en M est Ω. En M, soient MT (cosinus directeurs α, β, γ) la tangente à la courbe K et U le plan tangent à la surface. MN(λ, μ, ν) est rayon de courbure pour la section normale TMN, C est centre de courbure en M pour la courbe KM et le plan CNM, normal à MT, nous donne GM(φ, χ, ψ), droite sur laquelle G, obtenu par prolongement de NC, est dit centre de courbure géodésique en M pour KM. Si l'on projette la courbe KM en LM sur le plan tangent U, le théorème de Meusnier, appliqué au cylindre projetant, nous montre que GM ou ρ_g est rayon de courbure en M pour la courbe plane LM.



Soit R le rayon de courbure MC(α', β', γ'). Si θ est l'angle CMN, on a :

$$R = \rho_g \sin\theta, \qquad \sin\theta = \alpha'\varphi + \beta'\chi + \gamma'\psi.$$

D'après les formules de Frenet

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\alpha'}{R}, \qquad \frac{d\beta}{ds} = \frac{\beta'}{R}, \qquad \frac{d\gamma}{ds} = \frac{\gamma'}{R},$$

on peut encore écrire

$$\frac{\sin\theta}{R}\, ds = \varphi\, d\alpha + \chi\, d\beta + \psi\, d\gamma$$

ou

$$(2) \qquad \frac{ds}{\rho_g} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ d\alpha & d\beta & d\gamma \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix} = \frac{\nu d\beta - \mu d\gamma}{\alpha} = \frac{\lambda d\gamma - \nu d\alpha}{\beta} = \frac{\mu d\alpha - \lambda d\beta}{\gamma}.$$

Soit maintenant $z = f(x, y)$ l'équation de la surface considérée. Quant à la courbe MK nous la supposons définie par sa projection $F(x, y) = 0$ sur le plan Oxy.

On a alors

$$dz = p\,dx + q\,dy, \qquad F_x dx + F_y dy = 0,$$

d'où

$$-\frac{dx}{F_y} = \frac{dy}{F_x} = \frac{dz}{qF_x - pF_y} = \frac{ds}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + (qF_x - pF_y)^2}} = \frac{ds}{\Delta}.$$

Par suite,

$$\alpha = \frac{dx}{ds} = -\frac{F_y}{\Delta}, \qquad \beta = \frac{dy}{ds} = \frac{F_x}{\Delta}, \qquad \gamma = \frac{dz}{ds} = \frac{qF_x - pF_y}{\Delta}.$$

Comme, d'autre part,

$$\lambda = -\frac{p}{\delta}, \quad \mu = -\frac{q}{\delta}, \quad \nu = \frac{1}{\delta}, \qquad \text{si} \qquad \delta = \sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

on a maintenant $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu$ en fonction de x et y et l'on peut exprimer, à l'aide de ces deux variables, l'un des trois derniers membres du système (2). Après des réductions très simples, il vient finalement :

$$(3) \qquad \frac{ds}{\rho_g} = \frac{1}{\Delta^2 \delta}\left[(1 + p^2 + q^2)(F_x dF_y - F_y dF_x) + (pF_x + qF_y)(F_y dp - F_x dq)\right].$$

C'est là une expression

$$P\,dx + Q\,dy + S\,dp + T\,dq$$

si l'on pose :

$$(4) \qquad \begin{cases} P = \dfrac{\delta}{\Delta^2}(F_x F_{xy} - F_y F_{xx}), & Q = \dfrac{\delta}{\Delta^2}(F_x F_{yy} - F_y F_{xy}), \\ S = \dfrac{F_y}{\Delta^2 \delta}(pF_x + qF_y), & T = -\dfrac{F_x}{\Delta^2 \delta}(pF_x + qF_y). \end{cases}$$

[**33**] *Formule d'Ossian Bonnet.* — Supposons maintenant que la courbe KM soit un contour fermé γ, pour lequel on cherche à évaluer la courbure géodésique totale

$$(5) \qquad \int_\gamma \frac{ds}{\rho_g}.$$

Cette intégrale constitue un certain second membre pour la formule (D) ou, plus simplement, pour (D_1), puisque P, Q, S, T ne contiennent pas explicitement z et que R est nul. Transformons le dit second membre en l'intégrale double relative à la cloison Γ. En mettant les expressions (4) dans les formules (E_1) (n° 3), on obtient facilement K, A, B, C, D. On a d'abord :

$$\frac{\partial T}{\partial p} - \frac{\partial S}{\partial q} = -\delta^{-3},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial p} = \frac{\partial S}{\partial y}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial q} = \frac{\partial T}{\partial y}, \qquad \frac{\partial P}{\partial p} = \frac{\partial S}{\partial x}, \qquad \frac{\partial P}{\partial q} = \frac{\partial T}{\partial x}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

On pourrait énoncer ces résultats d'une manière parfaitement symétrique en considérant les deux dernières lignes du pseudo-déterminant de la formule (D_1), soit

$$\begin{array}{cccc} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial p} & \dfrac{\partial}{\partial q} \\ P & Q & S & T \end{array}$$

et en disant que tous les mineurs du second ordre contenus dans ce tableau sont nuls, sauf $T_p - S_q$. La formule d'Ossian Bonnet n'est autre chose que (D_1) dans les présentes conditions. Comme on a, d'après (E_1),

$$K = -\delta^{-3}, \qquad A = 0, \qquad B = 0, \qquad C = 0, \qquad D = 0,$$

la dite formule est

$$(6) \qquad \int_\gamma d\omega - \int_\gamma \frac{ds}{\rho_g} = \int\int_\Gamma \frac{rt - s^2}{\delta^3}\,dx\,dy = \int\int_\Gamma \frac{d\sigma}{\rho_1 \rho_2},$$

$d\omega$ étant une différentielle exacte en x, y, z, p, q qui, si l'intégrale (5) est singulière, doit être choisie de telle sorte que le premier membre de (6) ne soit pas singulier, car alors l'emploi de (D) serait critiquable. Or il arrive précisément ici que (5) est une intégrale singulière; si le contour γ vient tout entier dans le plan Oxy, elle devient

$$\int_\gamma \frac{ds}{\rho} = \int_\gamma d\alpha = 2\pi,$$

α étant l'angle de la tangente au contour avec une direction fixe telle que Ox. Et cette intégrale de contour fermé, portant sur une différentielle exacte $d\alpha$ et qui cependant n'est pas nulle, est bien singulière. Il faut donc que $d\omega$ devienne $d\alpha$ quand la cloison Γ devient plane et, par suite, $d\omega$ est, à une différentielle exacte non singulière près, l'angle élémentaire dont tourne la tangente MT dans le cas du contour γ quelconque. La formule d'Ossian Bonnet est définitivement retrouvée.

Il est à peine besoin de rappeler que la dite formule a été réétablie et réétudiée avec de grands développements par M. G. Darboux (*Surfaces*, t. III, livre VI, ch. VI).

La démonstration de M. Darboux provient d'une combinaison de la formule de Riemann avec l'une des formules de la théorie du trièdre mobile; la formule de Riemann est plus simple que (D), mais la théorie du trièdre mobile exige, en revanche, des développements qui lui sont propres. Toutefois cette comparaison n'est point ici l'objet essentiel; la présente démonstration est surtout construite pour montrer qu'elle peut donner des formules analogues à celle de Bonnet, mais relatives à la torsion géodésique et à la courbure normale.

[**34**] *Torsion géodésique.* — Reprenons la figure et toutes les notations du paragraphe 32.

Sur la courbe MK considérons un point M', infiniment voisin de M, et la normale à la surface en M'. Cette normale fait avec le plan TMN un angle $d\tau_g$ dit *angle de torsion géodésique de* MM' (G. Demartres, *Cours de Géométrie infinitésimale,* p. 261).

On a :

$$\sin d\tau_g = \varphi(\lambda + d\lambda) + \chi(\mu + d\mu) + \psi(\nu + d\nu),$$

$$d\tau_g = \varphi\, d\lambda + \chi\, d\mu + \psi\, d\nu,$$

$$d\tau_g = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ d\lambda & d\mu & d\nu \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix} = \frac{\beta\, d\nu - \gamma\, d\mu}{\lambda} = \frac{\gamma\, d\lambda - \alpha\, d\nu}{\mu} = \frac{\alpha\, d\mu - \beta\, d\lambda}{\nu},$$

$$d\lambda = -\frac{1}{\delta^3}[(1+q^2)\,dp - pq\,dq], \quad d\mu = \frac{1}{\delta^3}[pq\,dp - (1+p^2)\,dq], \quad d\nu = -\frac{1}{\delta^3}(p\,dp + q\,dq).$$

Avec les valeurs de α, β, γ, déjà calculées au paragraphe 32, on a définitivement :

$$d\tau_g = \frac{[(1+q^2)F_x - pqF_y]\,dp + [(1+p^2)F_y - pqF_x]\,dq}{\Delta\delta^2}. \tag{7}$$

Or, c'est encore là une expression

$$P\,dx + Q\,dy + S\,dp + T\,dq,$$

avec $P = 0$, $Q = 0$,

$$S = \frac{1}{\Delta\delta^2}[(1+q^2)F_x - pqF_y], \qquad T = \frac{1}{\Delta\delta^2}[(1+p^2)F_y - pqF_x]. \tag{8}$$

[**35**] Remarquons tout de suite que l'on a :

$$\frac{\partial T}{\partial p} = \frac{\partial S}{\partial q},$$

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{F_y}{\Delta^3}(F_yF_{xx} - F_xF_{xy}), \qquad \frac{\partial S}{\partial y} = \frac{F_y}{\Delta^3}(F_yF_{xy} - F_xF_{yy}),$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{F_x}{\Delta^3}(F_xF_{xy} - F_yF_{xx}), \qquad \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{F_x}{\Delta^3}(F_xF_{yy} - F_yF_{xy}).$$

Ces dérivées ne sont pas difficiles à calculer, le calcul des trois dernières se calquant aisément sur celui de la première; si, de plus, on remarque que les numérateurs des résultats sont finalement indépendants de p et q, on arrive même au but, de manière presque immédiate, en annulant habilement p et q au cours des dérivations.

D'ailleurs, si l'on pose $\Phi^2 = F_x^2 + F_y^2$ et

$$\xi = \frac{F_x}{\Phi}, \qquad \zeta = \frac{F_y}{\Phi},$$

ce qui fait que ξ et ζ sont des cosinus directeurs pour la normale au contour plan $F = 0$, on peut encore écrire plus simplement :

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \left(\frac{\Phi}{\Delta}\right)^3 \frac{\partial \xi}{\partial x}, \qquad \frac{\partial S}{\partial y} = \left(\frac{\Phi}{\Delta}\right)^3 \frac{\partial \xi}{\partial y},$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \left(\frac{\Phi}{\Delta}\right)^3 \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \qquad \frac{\partial T}{\partial y} = \left(\frac{\Phi}{\Delta}\right)^3 \frac{\partial \zeta}{\partial y}.$$

[**36**] *Formule analogue à celle de Bonnet, mais concernant la torsion géodésique* (1). — Reprenons le contour fermé γ et cherchons à en évaluer la torsion géodésique totale

$$\int_\gamma d\tau_g$$

au moyen d'une intégrale double étendue à la cloison Γ limitée par γ.

Nous avons là une intégrale simple analogue à (5) et transformable de la même manière. Les formules (E_1) donnent, en s'appuyant sur les résultats du paragraphe précédent, $K = 0$, $D = 0$ et

$$A = -\left(\frac{\Phi}{\Delta}\right)^3 \frac{\partial \xi}{\partial y}, \qquad B = \left(\frac{\Phi}{\Delta}\right)^3 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right), \qquad C = \left(\frac{\Phi}{\Delta}\right)^3 \frac{\partial \zeta}{\partial x}.$$

Dans ces conditions, (D_1) peut s'écrire :

$$(9) \qquad \iint_\Gamma \begin{vmatrix} r & s & -1 & 0 \\ s & t & 0 & -1 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi & \zeta \end{vmatrix} \left(\frac{\Phi}{\Delta}\right)^3 dx\,dy = \int_\gamma d\tau_g.$$

Telle est, pour la torsion géodésique d'un contour fermé, la formule que l'on doit considérer comme absolument analogue à (6); non seulement les deux formules proviennent de (D_1), mais elles en proviennent à l'aide de raisonnements identiques.

---

(1) *Sur la torsion géodésique des contours fermés* (Comptes rendus, 11 mai 1914).

[37] La formule (9) est susceptible d'être mise d'accord avec des résultats connus et très simples qui en fourniront des vérifications partielles.

Reprenons d'abord l'expression (7) de $d\tau_g$. En l'égalant à zéro, on a l'équation

$$[(1+q^2)F_x - pqF_y](r\,dx + s\,dy) + [(1+p^2)F_y - pqF_x](s\,dx + t\,dy) = 0$$

qui, si l'on remplace $-\frac{F_x}{F_y}$ par $\frac{dy}{dx}$, devient l'équation différentielle de la projection, sur le plan Oxy, des lignes de courbure de la surface $z=f(x,y)$.

Si, au contraire, on y remplace $\frac{dy}{dx}$ par $-\frac{F_x}{F_y}$, on a l'équation aux dérivées partielles

$$(10)\qquad rF_y[(1+q^2)F_x - pqF_y] + s[(1+p^2)F_y^2 - (1+q^2)F_x^2] + tF_x[pqF_x - (1+p^2)F_y] = 0$$

qui est celle des surfaces dont les lignes de courbure d'un système se projettent, sur Oxy, suivant la famille de courbes $F(x,y) = \text{const}^{\text{e}}$.

Supposons maintenant que les lignes de courbure de ce système soient *fermées* et *cloisonnées* par les surfaces sur lesquelles elles sont tracées, c'est-à-dire réductibles à un point, sur ces surfaces, par déformation continue. Comme $d\tau_g$ est nul en chaque point de telles lignes, il en est de même du second membre de la formule (9) et, d'après le premier, les surfaces considérées doivent satisfaire non seulement à l'équation aux dérivées partielles (10), mais aussi à celle que l'on obtient en annulant le pseudo-déterminant du premier membre de (9). Cette nouvelle équation aux dérivées partielle est

$$(11)\qquad rF_y(F_xF_{yy} - F_yF_{xy}) + s(F_y^2F_{xx} - F_x^2F_{yy}) + tF_x(F_xF_{xy} - F_yF_{xx}) = 0.$$

Dans le cas de lignes de courbure situées sur la famille de cylindres

$$F = x^2 + y^2 = \text{const}^{\text{e}},$$

les équations (10) et (11) deviennent respectivement :

$$(12_1)\qquad ry[(1+q^2)x - pqy] + s[(1+p^2)y^2 - (1+q^2)x^2] + tx[pqx - (1+p^2)y] = 0,$$

$$(12_2)\qquad xy(r-t) - (x^2-y^2)s = 0.$$

Les surfaces de révolution $z=\varphi(u)$, si $u = x^2+y^2$, possèdent des parallèles qui sont lignes de courbure à la fois fermées et situées sur la famille de cylindres $x^2+y^2 = \text{const}^{\text{e}}$. Par suite, la fonction $\varphi(u)$ doit vérifier les deux équations aux dérivées partielles (12_1) et (12_2). C'est bien ce qui a lieu.

L'équation (11), considérée seule, définit des surfaces sur lesquelles des contours fermés, se projetant sur la famille de courbes fermées $F(x,y) = \text{const}^{\text{e}}$, ont une torsion géodésique *totale* nulle, sans que cette torsion soit forcément nulle en chaque point comme il arrive le long des lignes de courbure.

Ces considérations peuvent être rapprochées d'autres déjà développées par M. G. Darboux à propos de la courbure géodésique. Des polygones géodésiques ou des lignes géodésiques fermées ont, en chaque point, une courbure géodésique nulle; d'autres contours fermés peuvent avoir une courbure géodésique *totale* nulle sans qu'elle soit nulle en chaque point (Cf. G. Darboux, *Surfaces*, t. III, p. 138).

On peut encore se demander si l'intégrale double de la formule (9) ne doit pas être nulle pour une cloison *sphérique* de contour γ quelconque, car ce contour quelconque est ligne de courbure sur la sphère et, par suite, $d\tau_g$ est nul en tous ses points. Or cette dernière vérification ne semble pas avoir lieu, mais il n'y a là nulle contradiction. Les calculs faits avec l'expression (7) de $d\tau_g$ supposent évidemment qu'elle contienne F_x et F_y comme il est indiqué. C'est justement ce qui n'a pas lieu dans le cas de la sphère où il faudrait commencer par écrire un $d\tau_g$ identiquement nul sans intervention de F_x, F_y; c'est d'ailleurs là le raisonnement élémentaire qui sert à prouver que tous les points de la sphère sont des ombilics.

[**38**] *Courbure normale.* — Toujours avec la même figure, nous avons le théorème de Meusnier

$$\mathrm{MC} = \mathrm{MN} \cos\theta \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{R} = \mathrm{R}_n \cos\theta.$$

L'expression

$$\frac{ds}{\mathrm{R}_n} = \frac{\cos\theta}{\mathrm{R}}\, ds$$

est, en M, l'angle élémentaire de courbure normale. On établit facilement la formule d'ailleurs bien connue (E. Picard, *Traité d'Analyse*, 2e édition, t. I, p. 406)

$$\frac{ds}{\mathrm{R}_n} = \frac{\alpha\, dp + \beta\, dq}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

On a donc encore

$$\frac{ds}{\mathrm{R}_n} = \mathrm{P}\, dx + \mathrm{Q}\, dy + \mathrm{S}\, dp + \mathrm{T}\, dq$$

avec $\mathrm{P} = 0$, $\mathrm{Q} = 0$ et

$$\mathrm{S} = -\frac{\mathrm{F}}{\Delta\delta}, \qquad \mathrm{T} = \frac{\mathrm{F}_x}{\Delta\delta}. \tag{13}$$

Remarquons tout de suite que

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p} - \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial q} = -\frac{1}{\Delta\delta^3}(p\mathrm{F}_x + q\mathrm{F}_y),$$

$$\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial x} = \frac{1}{\delta\Delta^3}(\mathrm{F}_y\mathrm{F}_{xx} - \mathrm{F}_x\mathrm{F}_{xy})[(1+q^2)\mathrm{F}_x - pq\mathrm{F}_y], \qquad \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial y} = \frac{1}{\delta\Delta^3}(\mathrm{F}_y\mathrm{F}_{xy} - \mathrm{F}_x\mathrm{F}_{yy})[(1+q^2)\mathrm{F}_x - pq\mathrm{F}_y],$$

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x} = \frac{1}{\delta\Delta^3}(\mathrm{F}_y\mathrm{F}_{xx} - \mathrm{F}_x\mathrm{F}_{xy})[(1+p^2)\mathrm{F}_y - pq\mathrm{F}_x], \qquad \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y} = \frac{1}{\delta\Delta^3}(\mathrm{F}_y\mathrm{F}_{xy} - \mathrm{F}_x\mathrm{F}_{yy})[(1+p^2)\mathrm{F}_y - pq\mathrm{F}_x].$$

Ces expressions sont susceptibles d'être simplifiées si l'on se reporte aux expressions obtenues pour les courbure et torsion géodésiques élémentaires. Posons

$$\begin{aligned} \frac{ds}{\rho_g} &= P_1 dx + Q_1 dy + S_1 dp + T_1 dq, \\ d\tau_g &= \qquad\qquad\quad S_2 dp + T_2 dq, \\ \frac{ds}{R_n} &= \qquad\qquad\quad S_3 dp + T_3 dq, \end{aligned}$$

P_1, Q_1, S_1, T_1 désignant les expressions (4), S_2 et T_2 les expressions (8), S_3 et T_3 les expressions (13).

Posons encore :

$$\Omega = \frac{S_1}{S_3} = \frac{T_1}{T_3} = -\frac{1}{\Delta}(pF_x + qF_y).$$

On a alors :

$$\frac{\partial T}{\partial p} - \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\Omega}{\delta^3},$$

$$\frac{\partial S}{\partial x} = -P_1 S_2, \qquad \frac{\partial S}{\partial y} = -Q_1 S_2,$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -P_1 T_2, \qquad \frac{\partial T}{\partial y} = -Q_1 T_2.$$

[39] *Formule analogue à celle de Bonnet, mais concernant la courbure normale* (¹). — Reprenons le contour fermé γ et cherchons à en évaluer la courbure normale totale

$$\int_\gamma \frac{ds}{R_n}$$

au moyen d'une intégrale double étendue à la cloison Γ limitée par γ.

Nous avons encore là une intégrale analogue à (5) et transformable de la même manière au moyen de la formule (D_1). Les formules (E_1) donnent ici

$$K = \frac{\Omega}{\delta^3}, \qquad A = Q_1 S_2, \qquad B = Q_1 T_2 - P_1 S_2, \qquad C = -P_1 T_2, \qquad D = 0$$

en profitant, bien entendu, des résultats du paragraphe précédent. Alors la formule (D_1) devient :

$$\int_\gamma \frac{ds}{R_n} = \int\int_\Gamma \Omega \frac{rt - s^2}{\delta^3} dx\,dy + \int\int_\Gamma [Q_1 S_2 r + (Q_1 T_2 - P_1 S_2)s - P_1 T_2 t]\,dx\,dy.$$

(¹) *Sur la courbure normale des contours fermés* (Comptes rendus, 29 juin 1914).

On peut la rendre encore plus symétrique en introduisant, dans la première intégrale double, les éléments de la courbure superficielle totale ainsi que cela est fait dans la formule (6) d'Ossian Bonnet; quant au crochet de la seconde intégrale double, il s'exprime par un déterminant qu'il vaudrait peut-être mieux ne pas écrire s'il s'agissait d'un calcul pratique de l'intégrale, mais qui conserve une forme manifestement héritée de (D_1) et d'une symétrie fort remarquable.

Finalement on peut écrire :

$$(14) \qquad \int_\gamma \frac{ds}{R_n} = \int\int_\Gamma \frac{\Omega\, d\sigma}{\rho_1\rho_2} - \int\int_\Gamma \begin{vmatrix} r & s & -1 & 0 \\ s & t & 0 & -1 \\ P_1 & Q_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_2 & T_2 \end{vmatrix} dx\,dy.$$

Telle est, pour la courbure normale d'un contour formé, la formule que l'on doit considérer comme absolument analogue à (6) et à (9). La formule (6) était bien connue mais (9) et (14) révèlent des invariants intégraux superficiels comparables à l'invariant de Gauss et dont l'expression, par une intégrale de contour, est tout aussi simple.

TROISIÈME PARTIE.

Rôles respectifs de diverses extensions.

[**40**] La formule de Stokes ordinaire, développée sous la forme habituelle, suggère immédiatement la formule plus générale

$$\int_\gamma \sum_1^n X_i dx_i = \frac{1}{2}\int\int_\Gamma \sum_1^n{}_r \sum_1^n{}_s \left(\frac{\partial X_r}{\partial x_s} - \frac{\partial X_s}{\partial x_r}\right)\frac{d(x_s, x_r)}{d(u, v)} du dv$$

à laquelle M. V. Volterra a donné une nouvelle importance en l'étendant au cas d'une infinité de variables (Société mathématique de France, séance du 14 février 1911, *Leçons sur les fonctions de lignes*, p. 44). M. Volterra considère d'ailleurs le secours qu'une telle formule peut apporter dans l'étude des équations aux dérivées partielles du premier ordre, notamment quant aux théories de Lie et Mayer ainsi qu'à leurs extensions.

Je me place ici à un point de vue différent; j'étudie les extensions de la formule de Stokes en partant toujours et uniquement de l'identité (2) ci-dessous.

On obtient alors des formules qui peuvent être utilisées dans l'étude d'équations aux dérivées partielles d'ordre quelconque et qui, d'ailleurs, sont manifestement appropriées à des sujets tels que ceux déjà traités.

De plus, l'extension de la formule précédente semble malaisée pour les variétés à k dimensions dans l'espace à n dimensions. Au contraire, l'identité (2) s'étend immédiatement dans tous les espaces et s'y laisse toujours transformer par des raisonnements analogues au suivant. A ce sujet on se reportera au paragraphe 52.

[**41**] Pour fixer les idées, prenons d'abord la cloison d'équations suivantes, laquelle a deux dimensions dans l'espace à six :

$$(1) \qquad x = x, \quad y = y, \quad z_1 = z_1(x, y), \quad z_2 = z_2(x, y), \quad z_3 = z_3(x, y), \quad z_4 = z_4(x, y).$$

Partons toujours de l'identité

$$(2) \qquad \int\int_{A} d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y} = \int_{C} \mathrm{X}\,d\mathrm{Y}$$

et de la transformation

$$\mathrm{X} = \mathrm{X}(x, y, z_1, z_2, z_3, z_4), \qquad \mathrm{Y} = \mathrm{Y}(x, y, z_1, z_2, z_3, z_4)$$

qui fait correspondre l'aire A du plan YOX à une certaine cloison Γ, de contour γ, située sur la variété précédente. L'intégrale double de (2) se transforme en une autre qui contient le produit de $dx dy$ et du déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial z_1}\frac{\partial z_1}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial z_2}\frac{\partial z_2}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial z_3}\frac{\partial z_3}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial z_4}\frac{\partial z_4}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial z_1}\frac{\partial z_1}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial z_2}\frac{\partial z_2}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial z_3}\frac{\partial z_3}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial z_4}\frac{\partial z_4}{\partial y} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial z_1}\frac{\partial z_1}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial z_2}\frac{\partial z_2}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial z_3}\frac{\partial z_3}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial z_4}\frac{\partial z_4}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial z_1}\frac{\partial z_1}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial z_2}\frac{\partial z_2}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial z_3}\frac{\partial z_3}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial z_4}\frac{\partial z_4}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

Or, celui-ci peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial z_4}{\partial x} & \frac{\partial z_4}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \frac{\partial z_3}{\partial x} & \frac{\partial z_3}{\partial y} & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \frac{\partial z_2}{\partial x} & \frac{\partial z_2}{\partial y} & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial z_1}{\partial x} & \frac{\partial z_1}{\partial y} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial X}{\partial z_1} & \frac{\partial X}{\partial z_2} & \frac{\partial X}{\partial z_3} & \frac{\partial X}{\partial z_4} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} & \frac{\partial Y}{\partial z_1} & \frac{\partial Y}{\partial z_2} & \frac{\partial Y}{\partial z_3} & \frac{\partial Y}{\partial z_4} \end{vmatrix}$$

et les deux dernières lignes peuvent être remplacées par

$$\begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z_1} & \frac{\partial}{\partial z_2} & \frac{\partial}{\partial z_3} & \frac{\partial}{\partial z_4} \\ P & Q & R_1 & R_2 & R_3 & R_4 \end{matrix}$$

si l'on pose :

$$P = X\frac{\partial Y}{\partial x}, \quad Q = X\frac{\partial Y}{\partial y}, \quad R_1 = X\frac{\partial Y}{\partial z_1}, \quad R_2 = X\frac{\partial Y}{\partial z_2}, \quad R_3 = X\frac{\partial Y}{\partial z_3}, \quad R_4 = X\frac{\partial Y}{\partial z_4}.$$

L'égalité (2) est donc transformée en la formule

$$
(\mathrm{S}_4)\quad
\left\{
\begin{aligned}
&\int_\gamma \mathrm{P}dx + \mathrm{Q}dy + \mathrm{R}_1 dz_1 + \mathrm{R}_2 dz_2 + \mathrm{R}_3 dz_3 + \mathrm{R}_4 dz_4 \\
&= \iint_\Gamma
\begin{vmatrix}
\frac{\partial z_4}{\partial x} & \frac{\partial z_4}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & -1 \\
\frac{\partial z_3}{\partial x} & \frac{\partial z_3}{\partial y} & 0 & 0 & -1 & 0 \\
\frac{\partial z_2}{\partial x} & \frac{\partial z_2}{\partial y} & 0 & -1 & 0 & 0 \\
\frac{\partial z_1}{\partial x} & \frac{\partial z_1}{\partial y} & -1 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z_1} & \frac{\partial}{\partial z_2} & \frac{\partial}{\partial z_3} & \frac{\partial}{\partial z_4} \\
\mathrm{P} & \mathrm{Q} & \mathrm{R}_1 & \mathrm{R}_2 & \mathrm{R}_3 & \mathrm{R}_4
\end{vmatrix}
dx\,dy.
\end{aligned}
\right.
$$

Tous les raisonnements sont les mêmes qu'au paragraphe 1. On prouverait notamment de la même manière que $\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2, \mathrm{R}_3, \mathrm{R}_4$ peuvent chacune être considérées comme fonctions quelconques de x, y, z_1, z_2, z_3, z_4.

[**42**] Il est facile de retrouver dans (S_4) des formules plus simples. Ainsi, si $z_4 = 0$, la cloison Γ n'est plus que dans l'espace à cinq dimensions et a pour équations :

$$
(3)\qquad x = x, \quad y = y, \quad z_1 = z_1(x, y), \quad z_2 = z_2(x, y), \quad z_3 = z_3(x, y).
$$

La formule (S_3) correspondante est

$$
(\mathrm{S}_3)\quad
\left\{
\begin{aligned}
&\int_\gamma \mathrm{P}dx + \mathrm{Q}dy + \mathrm{R}_1 dz_1 + \mathrm{R}_2 dz_2 + \mathrm{R}_3 dz_3 \\
&= \iint_\Gamma
\begin{vmatrix}
\frac{\partial z_3}{\partial x} & \frac{\partial z_3}{\partial y} & 0 & 0 & -1 \\
\frac{\partial z_2}{\partial x} & \frac{\partial z_2}{\partial y} & 0 & -1 & 0 \\
\frac{\partial z_1}{\partial x} & \frac{\partial z_1}{\partial y} & -1 & 0 & 0 \\
\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z_1} & \frac{\partial}{\partial z_2} & \frac{\partial}{\partial z_3} \\
\mathrm{P} & \mathrm{Q} & \mathrm{R}_1 & \mathrm{R}_2 & \mathrm{R}_3
\end{vmatrix}
dx\,dy
\end{aligned}
\right.
$$

ce qu'il eût été inutile d'écrire en détail si nous n'allions retrouver, pour cette formule, un sens des plus tangibles dans l'espace à trois dimensions. Supposons que z_1 se réduise à l'ordonnée $z = z(x, y)$ d'une surface ordinaire et que $z_2 = p$, $z_3 = q$.

Alors (S_3) peut s'écrire :

$$(D)\quad \int_\gamma \mathrm{P}dx + \mathrm{Q}dy + \mathrm{R}dz + \mathrm{S}dp + \mathrm{T}dq = \int\int_\Gamma \begin{vmatrix} s & t & 0 & 0 & -1 \\ r & s & 0 & -1 & 0 \\ p & q & -1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial p} & \frac{\partial}{\partial q} \\ \mathrm{P} & \mathrm{Q} & \mathrm{R} & \mathrm{S} & \mathrm{T} \end{vmatrix} dx\,dy.$$

Ce n'est autre chose que la formule (D) avec une insignifiante transposition dans le pseudo-déterminant. Elle a d'ailleurs été déjà écrite sous cette forme au paragraphe 2.

[**43**] Soit maintenant la variété

$$(4)\qquad x = x, \quad y = y, \quad z_1 = z_1(x, y), \quad z_2 = z_2(x, y)$$

déduite de (3) en faisant $z_3 = 0$. La formule (S_2) correspondante est :

$$(S_2)\quad \int_\gamma \mathrm{P}dx + \mathrm{Q}dy + \mathrm{R}_1 dz_1 + \mathrm{R}_2 dz_2 = -\int\int_\Gamma \begin{vmatrix} \frac{\partial z_2}{\partial x} & \frac{\partial z_2}{\partial y} & 0 & -1 \\ \frac{\partial z_1}{\partial x} & \frac{\partial z_1}{\partial y} & -1 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z_1} & \frac{\partial}{\partial z_2} \\ \mathrm{P} & \mathrm{Q} & \mathrm{R}_1 & \mathrm{R}_2 \end{vmatrix} dx\,dy.$$

C'est la formule (D_2) rappelée ici au paragraphe 4 et déjà établie dans un précédent Mémoire. Comme je l'ai déjà remarqué, elle peut servir de base au théorème de Cauchy-Poincaré dans la théorie des fonctions de deux variables complexes et elle a aussi un sens géométrique dans l'espace à trois dimensions si, dans les formules (4), on suppose $z_1 = p$, $z_2 = q$; on retrouve alors la formule (D_1) sur laquelle roule toute la seconde partie du présent travail.

Enfin si, dans les formules (4), on fait $z_2 = 0$, la formule correspondante (S_1) est

$$(S_1)\quad \int_\gamma \mathrm{P}dx + \mathrm{Q}dy + \mathrm{R}dz = -\int\int_\Gamma \begin{vmatrix} p & q & -1 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \mathrm{P} & \mathrm{Q} & \mathrm{R} \end{vmatrix} dx\,dy.$$

C'est la formule de Stokes ordinaire. En supposant encore z nul, on retrouve la petite formule de Riemann qui peut alors être désignée par (S_0).

[**44**] *Formule générale* (S_n). — Le raisonnement fait pour établir (S_4) a évidemment un caractère général qui permet d'écrire la formule

$$(S_n)\qquad \int_\gamma \left(P\,dx + Q\,dy + \sum R_i\,dz_i\right) = \pm \int\!\!\int_\Gamma \begin{vmatrix} \frac{\partial z_n}{\partial x} & \frac{\partial z_n}{\partial y} & 0 & \vdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial z_1}{\partial x} & \frac{\partial z_1}{\partial y} & -1 & \vdots & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z_1} & \vdots & \frac{\partial}{\partial z_n} \\ P & Q & R_1 & \vdots & R_n \end{vmatrix} dx\,dy.$$

Celle-ci est relative à une cloison Γ, à deux dimensions, représentée, dans l'espace à $n+2$ dimensions, par les équations

$$x = x, \qquad y = y, \qquad z_1 = z_1(x, y), \qquad \dots, \qquad z_n = z_n(x, y).$$

Dans le second membre de la formule, il faut prendre :

le signe $+$ pour $n = \quad 3, 4, \dots, 4m-1, 4m,$

$\quad -$ pour $n = 1, 2, \quad , \dots, \quad , 4m+1, 4m+2.$

[**45**] *Cloisons de l'espace ordinaire en contact du second ordre tout le long de leur contour.* — La formule (S_n) gagne en importance du fait de pouvoir s'interpréter dans des espaces ayant moins de $n+2$ dimensions et même dans l'espace ordinaire. Construisons-la d'abord pour $n=6$, puis faisons

$$z_1 = z, \qquad z_2 = p, \qquad z_3 = q, \qquad z_4 = r, \qquad z_5 = s, \qquad z_6 = t,$$

z désignant l'ordonnée $z(x, y)$ d'une surface ordinaire et p, q, r, s, t les dérivées partielles habituelles. On a ainsi la formule

$$(D')\qquad \begin{aligned} &\int_\gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz + S\,dp + T\,dq + U\,dr + V\,ds + W\,dt \\ &= -\int\!\!\int_\Gamma \begin{vmatrix} t_x & t_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ s_x & s_y & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ r_x & r_y & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ s & t & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ r & s & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p & q & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial p} & \frac{\partial}{\partial q} & \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial s} & \frac{\partial}{\partial t} \\ P & Q & R & S & T & U & V & W \end{vmatrix} dx\,dy \end{aligned}$$

qui semble être d'un grand intérêt. P, Q, R, S, T, U, V, W sont des fonctions dont chacune contient x, y, z, p, q, r, s, t et cependant le second membre de la formule, d'après le premier, ne dépend que des valeurs de ces six dernières quantités sur le contour γ des cloisons Γ. Dans ces conditions, si les cloisons Γ ont toutes mêmes valeurs de x, y, z, p, q, r, s, t sur leur contour γ (ce qu'on peut exprimer en disant qu'elles ont un contact du second ordre tout le long de γ), elles peuvent être déformées par ailleurs de manière quelconque et (D') est analogue, pour ces cloisons, à la formule de Stokes ordinaire ou à la formule (D) pour le cas où le contact se réduirait au premier ordre.

D'ailleurs il est fort aisé de retrouver (D) dans (D'). Si (D') ne doit plus dépendre de r, s, t sur γ, il faut, dans le premier membre de la formule, supposer P, Q, R, S, T indépendants de r, s, t et U, V, W nuls. Dans le second membre, les opérateurs $\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t}$, agissant sur des termes qui ne contiennent plus r, s, t, jouent le rôle de facteurs nuls et, par suite, dans le pseudo-déterminant, les trois derniers termes des deux dernières lignes sont à remplacer par des zéros. Dans ces conditions, on voit immédiatement que (D') se réduit à (D). Et, comme (D) se réduit à la formule de Stokes ordinaire lorsqu'on abandonne toute condition de contact au contour pour les cloisons Γ, on a bien ainsi un ensemble de trois formules unies par une intime analogie.

La formule (D') est celle dont j'ai signalé l'existence au paragraphe 11 de mon précédent Mémoire, mais sans entrer dans aucun détail de construction effective.

On voit maintenant comment la chose pourrait être indéfiniment généralisée pour des cloisons ayant, le long d'un contour commun, un contact d'ordre quelconque.

[**46**] *Cloisons de l'espace à quatre dimensions en contact du premier ordre tout le long de leur contour.* — On peut, pour ces cloisons, écrire encore une nouvelle variante de la formule (S_6). Supposons les dites cloisons représentées par les formules

$$x = x, \qquad y = y, \qquad z = z(x, y), \qquad z_1 = z_1(x, y)$$

et, dans (S_6), posons

$$z_1 = z, \qquad z_2 = p, \qquad z_3 = q, \qquad z_4 = z_1, \qquad z_5 = p_1, \qquad z_6 = q_1;$$

de plus, r, s, t désignant, comme à l'ordinaire, les dérivées partielles de p et q, désignons par r_1, s_1, t_1 les dérivées correspondantes de p_1, q_1. On a la formule

$$
(\mathrm{D}'')\quad
\left\{
\begin{aligned}
&\int_\gamma \mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy + \mathrm{R}\,dz + \mathrm{S}\,dp + \mathrm{T}\,dq + \mathrm{R}_1\,dz_1 + \mathrm{S}_1\,dp_1 + \mathrm{T}_1\,dq_1 \\
&= -\iint_\Gamma
\begin{vmatrix}
s_1 & t_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
r_1 & s_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
p_1 & q_1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
s & t & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
r & s & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
p & q & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{\partial}{\partial p} & \dfrac{\partial}{\partial q} & \dfrac{\partial}{\partial z_1} & \dfrac{\partial}{\partial p_1} & \dfrac{\partial}{\partial q_1} \\
\mathrm{P} & \mathrm{Q} & \mathrm{R} & \mathrm{S} & \mathrm{T} & \mathrm{R}_1 & \mathrm{S}_1 & \mathrm{T}_1
\end{vmatrix}
dx\,dy.
\end{aligned}
\right.
$$

Ainsi écrite en détail, on peut immédiatement y reconnaître des formules plus simples.

Supposons d'abord que la cloison Γ ne sorte point de l'espace à trois dimensions, ce qu'on peut exprimer par $z_1 = 0$ et ce qui entraîne la nullité de p_1, q_1, r_1, s_1, t_1. Alors (D'') se réduit à (D); on aurait un résultat analogue en partant de $z = 0$.

Prenons ensuite le cas où les cloisons Γ sont toujours dans l'espace à quatre dimensions, mais passent par γ sans aucune condition de contact le long de ce contour. Alors $\mathrm{S}, \mathrm{T}, \mathrm{S}_1, \mathrm{T}_1$ doivent être considérés comme nuls et $\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}, \mathrm{R}_1$ ne doivent plus contenir p, q, p_1, q_1; dans ces conditions, les opérateurs $\dfrac{\partial}{\partial p}, \dfrac{\partial}{\partial q}, \dfrac{\partial}{\partial p_1}, \dfrac{\partial}{\partial q_1}$ sont à considérer aussi comme des facteurs nuls et la formule se réduit à (S_2).

[**47**] *Généralisations diverses de l'équation de Monge-Ampère.* — On peut, au moyen des extensions précédentes de la formule de Stokes, reconstruire, de manière particulièrement élégante, des équations ou systèmes d'équations déjà proposées sous des formes diverses comme extensions de l'équation de Monge-Ampère.

Si j'égale à zéro le pseudo-déterminant qui figure dans la formule de Stokes ordinaire (S_1), j'ai une équation en p et q, linéaire, sur toute surface intégrale de laquelle j'ai

$$\int_\gamma \mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy + \mathrm{R}\,dz = 0.$$

Toute équation linéaire et du premier ordre, multipliée au besoin par un multiplicateur jacobien μ rentre dans ce type. L'extension à n variables est aussi bien connue.

Si j'égale à zéro le pseudo-déterminant de la formule (D), j'ai une équation de Monge-Ampère sur toute surface intégrale de laquelle j'ai

$$\int_\gamma \mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy + \mathrm{R}\,dz + \mathrm{S}\,dp + \mathrm{T}\,dq = 0.$$

Cette fois, je sais que, même avec introduction d'un multiplicateur généralisé μ, cette équation de Monge-Ampère n'a pas des coefficients absolument généraux, mais elle n'en donne pas moins l'idée immédiate d'une équation récrite de manière analogue avec des coefficients quelconques et pour laquelle, de plus, l'équation intégrale qui précède se conservera à condition de remplacer le zéro du second membre par une expression de la forme

$$\int\int_\Gamma \Theta(x, y, z, p, q)\,dx\,dy.$$

Prenons maintenant la formule (D'). Son pseudo-déterminant, égalé à zéro, donne une équation du troisième ordre sur toute surface intégrale de laquelle

$$\int_\gamma \mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy + \mathrm{R}\,dz + \mathrm{S}\,dp + \mathrm{T}\,dq + \mathrm{U}\,dr + \mathrm{V}\,ds + \mathrm{W}\,dt = 0.$$

Une telle équation du troisième ordre où les coefficients seraient remplacés par des fonctions quelconques de x, y, z, p, q, r, s, t peut être considérée comme l'analogue des équations de Monge-Ampère dans le monde des équations du troisième ordre. Comment la généralisation des coefficients modifie-t-elle la dernière équation intégrale? Voilà une question fort intéressante, mais plus difficile que la question analogue résolue pour le second ordre. Je me bornerai à faire remarquer que l'équation intégrale

$$\int_\gamma \mathrm{P}\,dx + \mathrm{Q}\,dy + \mathrm{R}\,dz + \mathrm{S}\,dp + \mathrm{T}\,dq + \mathrm{U}\,dr + \mathrm{V}\,ds + \mathrm{W}\,dt$$
$$= \int\int_\Gamma \Theta(x, y, z, p, q, r, s, t)\,dx\,dy$$

correspond sûrement à une équation aux dérivées partielles du troisième ordre rentrant dans le type général que je viens de définir. Ceci est absolument immédiat en vertu de la formule (D'), l'équation aux dérivées partielles en question étant

$$\Delta' + \Theta(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0,$$

si Δ' désigne le pseudo-déterminant qui figure dans (D').

On pourrait évidemment continuer dans cette voie pour obtenir des équations d'ordre quelconque analogues à l'équation de Monge-Ampère. Le procédé, s'il équivaut à d'autres, au fond, a peut-être quelque avantage, dans la forme, à cause de la manière *immédiate* dont on élève l'ordre des équations dès que l'on a saisi la structure générale du pseudo-déterminant figurant dans la formule de Stokes (S_n).

[**48**] Il y a des remarques encore complètement analogues à faire quant aux systèmes d'équations.

En égalant à zéro le pseudo-déterminant de la formule (D″) on définit une équation à deux fonctions inconnues $z(x, y)$ et $z_1(x, y)$, ce qui correspond à des variétés intégrales ayant deux dimensions dans l'espace à quatre. Sur de telles variétés, le premier membre de (D″) est identiquement nul. Si l'on considère à la fois deux telles équations aux fonctions inconnues z et z_1, on peut naturellement proposer de considérer un tel système comme généralisant l'équation de Monge-Ampère à une seule fonction inconnue. Mais il n'est pas évident que les deux équations ainsi assemblées seront toujours compatibles et l'étude d'une telle compatibilité rentrerait vraisemblablement dans bien d'autres travaux, notamment dans ceux de M. Ch. Riquier sur les systèmes généraux d'équations aux dérivées partielles.

[**49**] *Généralisations diverses des transformations de Bäcklund.* — Nous restons toujours dans le cas d'équations ou de systèmes d'équations à deux variables x et y; en d'autres termes, toutes les variétés à étudier n'ont toujours que deux dimensions, mais elles doivent pouvoir être dans l'espace à $n+2$ dimensions. On pourrait présenter ce qui suit avec des notations générales pour n quelconque, mais, vu la complication du sujet, je préfère m'en tenir d'abord au cas de l'espace à quatre dimensions. On concevra ensuite, au moins théoriquement, la possibilité d'une nouvelle extension.

Soient donc deux variétés Γ et Γ',

Γ formée d'éléments $x, y, z, p, q, z_1, p_1, q_1$ et ayant pour équations

$$z = z(x, y), \qquad z_1 = z_1(x, y).$$

Naturellement, on a sur Γ

$$(\alpha_1) \qquad \lambda \int_\gamma p\,dx + q\,dy + \lambda_1 \int_\gamma p_1\,dx + q_1\,dy = 0,$$

Γ' formée d'éléments $x', y', z', p', q', z'_1, p'_1, q'_1$ et ayant pour équations

$$z' = z'(x', y'), \qquad z'_1 = z'_1(x', y').$$

Naturellement, on a sur Γ'

$$(\alpha_2) \qquad \lambda' \int_{\gamma'} p'\,dx' + q'\,dy' + \lambda'_1 \int_{\gamma'} p'_1\,dx' + q'_1\,dy' = 0,$$

les λ étant quatre constantes quelconques. La généralisation à considérer consiste à se demander si l'on peut avoir,

sur Γ,

$$(\gamma_1) \qquad \lambda' \int_\gamma p'\,dx' + q'\,dy' + \lambda'_1 \int_\gamma p'_1\,dx' + q'_1\,dy' = 0.$$

sur Γ',

$$(\gamma_2) \qquad \lambda \int_{\gamma'} p\,dx + q\,dy + \lambda_1 \int_{\gamma'} p_1\,dx + q_1\,dy = 0.$$

La question a un sens si l'on établit *six* relations

$$\varphi_i(x, y, p, q, p_1, q_1; x', y', p', q', p_1', q_1') = 0$$
$$(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

dans lesquelles, tout d'abord, z, z_1, z', z_1' ne figurent pas explicitement.

En tirant de ces relations

$x', \ldots, q_1'$ en fonction de $x, \ldots, q_1$, l'équation (γ_1) devient, en vertu de (D''), une équation aux dérivées partielles à deux fonctions inconnues z et z_1.	$x, \ldots, q_1$ en fonction de $x', \ldots, q_1'$, l'équation (γ_2) devient, en vertu de (D''), une équation aux dérivées partielles à deux fonctions inconnues z' et z_1'.

Il est clair qu'on établit ainsi entre ces équations un mode de correspondance qui généralise celui du paragraphe 21; c'est même pour être plus clair à présent que j'ai développé ce paragraphe 21 avec des détails peu utiles en eux-mêmes. Il faudrait maintenant chercher à introduire z, z_1, z', z_1' dans les relations $\varphi = 0$; ce serait la véritable difficulté de la question.

Il est bien intéressant aussi de se demander si celle-ci peut être rendue indépendante des λ, en d'autres termes si l'on peut avoir,

sur Γ, $\begin{cases} 0 = \int_\gamma p'dx' + q'dy', \\ 0 = \int_\gamma p_1'dx' + q_1'dy'. \end{cases}$	sur Γ', $\begin{cases} 0 = \int_{\gamma'} pdx + qdy, \\ 0 = \int_{\gamma'} p_1dx + q_1dy. \end{cases}$

Alors, de par la formule (D''), on a, dans chaque colonne, un système de deux équations aux dérivées partielles à deux fonctions inconnues z et z_1. Mais le fait d'avoir, dans chaque système, autant d'inconnues que d'équations ne prouve pas forcément l'existence de ces fonctions inconnues. Ici s'introduirait donc une question de compatibilité analogue à celle signalée au paragraphe précédent.

Enfin on pourrait proposer, dans l'espace ordinaire et à propos de surfaces ordinaires, des problèmes tout à fait analogues.

Soient deux surfaces ordinaires $\Gamma(x, y, z, p, q, r, s, t)$ et $\Gamma'(x', y', z', p', q', r', s', t')$.

Peut-on avoir sur Γ

$$\lambda_1' \int_\gamma p'dx' + q'dy' + \lambda_2' \int_\gamma r'dx' + s'dy' + \lambda_3' \int_\gamma s'dx' + t'dy'$$

et sur Γ'

$$\lambda_1 \int_{\gamma'} pdx + qdy + \lambda_2 \int_{\gamma'} rdx + sdy + \lambda_3 \int_{\gamma'} sdx + tdy?$$

La question aurait au moins un sens si l'on établissait *sept* relations entre x, y, p, q, r, s, t et $x', y', p', q', r', s', t'$. Cela permettrait de donner, à l'expression relative à Γ, la forme du premier membre de la formule (D') et la surface Γ satisfairait à une équation aux dérivées partielles du troisième ordre du type obtenu en égalant à zéro le pseudo-déterminant du second membre de (D'). Il en serait de même pour Γ' et les deux équations aux dérivées partielles seraient bien associées comme le sont deux équations de Monge-Ampère liées par transformation de Bäcklund.

Pour l'instant je me borne à signaler ces questions, mais en faisant remarquer que derrière le point de vue, d'abord si particulier, du paragraphe 21 semblent se dessiner des généralisations extrêmement étendues *et de natures fort diverses*. Plus étudiées, elles offriraient certainement de forts beaux champs d'application pour les extensions de la formule de Stokes, car, sans la symétrie et le symbolisme de celle-ci, on serait conduit à écrire des formules d'une apparence inextricable.

[**50**] Bien que ces extensions des transformations de Bäcklund ne soient que grossièrement ébauchées, on peut se demander cependant si de tels projets n'ont pas déjà été examinés sous des formes plus ou moins analogues. A cet égard, il semble qu'on doive attacher une très grande importance a une Note de M. P.-E. Gau, *Sur les transformations les plus générales des équations aux dérivées partielles du second ordre* (Comptes rendus, 13 janvier 1913). M. Gau définit ces transformations en écrivant *a priori* des systèmes d'équations tels que le système $\varphi_i = 0$ du paragraphe 49. Il les compare lui-même aux transformations de Bäcklund, mais en insistant sur leur caractère plus général.

[**51**] *Autres extensions.* — La formule (S_n) ne s'applique évidemment qu'aux variétés Γ à deux dimensions. Quelles seraient les formules analogues pour les variétés à k dimensions dans l'espace à n dimensions? A cette question, je crois avoir donné un important commencement de réponse dans mon précédent Mémoire en y écrivant la formule (L) du paragraphe 27. Alors $k = 3$ et $n = 4$. Dans le cas général, la formule semble toujours susceptible d'être construite à l'aide d'un pseudo-déterminant comparable à celui qui figure dans (S_n), mais il y a alors k premières colonnes formées de dérivées partielles ordinaires et k dernières lignes dans lesquelles s'étagent des symboles de dérivations partielles, comme dans la formule (L) citée, ou des lignes de fonctions arbitraires, comme dans la formule (M) écrite plus loin.

Raisonnant sur de telles formules comme sur (S_n) on obtiendrait des résultats relatifs aux équations aux dérivées partielles d'ordre quelconque et à un nombre quelconque de variables; sur les variétés intégrales on connaîtrait des expressions généralisant les différentielles exactes précédemment étudiées, etc. Ceci se rattacherait à des travaux dus à Henri Poincaré et qui, pour lui, relevaient surtout de la théorie des invariants intégraux. Ce point de vue doit naturellement être conservé pour toutes ces intégrales multiples qui restent invariantes quant aux déformations des champs d'intégration; j'espère seulement apporter, dans leur construction, une modeste contribution d'élégance et de symétrie.

[**52**] *Sur la formule* (L) *du précédent Mémoire.* — Cette formule a été obtenue en partant de l'identité

$$(5) \qquad \int\int_s X\,dY\,dZ = \int\int\int_v dX\,dY\,dZ$$

relative à un volume v enfermé dans une surface fermée s. On considérait ensuite la transformation

$$X = X(x, y, z, u), \qquad Y = Y(x, y, z, u), \qquad Z = Z(x, y, z, u)$$

qui permet de passer de l'espace ordinaire à une variété en x, y, z, u n'ayant que trois dimensions dans l'espace à quatre. Le changement de variables s'effectue dans (5) au moyen de raisonnements et de calculs sur lesquels il n'y a nullement lieu de revenir et l'on obtient alors la nouvelle égalité

$$(6) \qquad \int\int_\Sigma \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial u} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} & \frac{\partial G}{\partial u} \\ X\frac{\partial Y}{\partial x} & X\frac{\partial Y}{\partial y} & X\frac{\partial Y}{\partial z} & X\frac{\partial Y}{\partial u} \\ \frac{\partial Z}{\partial x} & \frac{\partial Z}{\partial y} & \frac{\partial Z}{\partial z} & \frac{\partial Z}{\partial u} \end{vmatrix} \frac{dx\,dy}{(P)} = -\int\int\int_V \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial u} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial u} \\ X\frac{\partial Y}{\partial x} & X\frac{\partial Y}{\partial y} & X\frac{\partial Y}{\partial z} & X\frac{\partial Y}{\partial u} \\ \frac{\partial Z}{\partial x} & \frac{\partial Z}{\partial y} & \frac{\partial Z}{\partial z} & \frac{\partial Z}{\partial u} \end{vmatrix} \frac{dx\,dy\,dz}{\frac{\partial F}{\partial u}}.$$

La variété V, à trois dimensions, est déformable dans l'espace à quatre en passant toujours par la variété Σ qui n'a que deux dimensions et est invariable.

Σ a pour équations

$$F(x, y, z, u) = 0, \qquad G(x, y, z, u) = 0$$

et $F = 0$, considérée seule, est l'équation de V. On a en outre :

$$(P) = \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial z}.$$

Dans mon précédent Mémoire j'ai commencé par montrer que les dernières lignes des déterminants de (6) pouvaient être remplacées par des fonctions P, Q, R, S quelconques.

C'est dans ce sens qu'il est possible d'aller plus loin.

Tout d'abord, devant les dérivées partielles de Z, je puis écrire des facteurs U analogues aux X de la troisième ligne; c'est remplacer, dans la formule (6), la fonction *arbitraire* X par UX. Ensuite je puis donner, à la fonction *arbitraire* Y, successivement les valeurs x, y, z, u d'où quatre formules que j'écrirai avec quatre valeurs différentes de X, soient X, Y, Z, U; leur addition me donnera une formule analogue à (6), mais où les troisièmes lignes des déterminants seront remplacées par

$$X, \; Y, \; Z, \; U.$$

Par un raisonnement complètement analogue, on arrive à remplacer les quatrièmes lignes par

$$P, \; Q, \; R, \; S$$

et l'on obtient finalement :

$$(M) \qquad \iint_\Sigma \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial u} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} & \frac{\partial G}{\partial u} \\ X & Y & Z & U \\ P & Q & R & S \end{vmatrix} \frac{dx\,dy}{(P)} = -\iiint_V \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial u} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial u} \\ X & Y & Z & U \\ P & Q & R & S \end{vmatrix} \frac{dx\,dy\,dz}{\frac{\partial F}{\partial u}}$$

Dans la formule (L) du précédent Mémoire, les troisièmes lignes des déterminants étaient

$$X\frac{\partial}{\partial x}, \quad X\frac{\partial}{\partial y}, \quad X\frac{\partial}{\partial z}, \quad X\frac{\partial}{\partial u};$$

on peut dire que ces opérateurs définissent, dans l'espace à quatre dimensions, un vecteur *symbolique* remplacé maintenant, dans le même espace, par le vecteur ordinaire

$$X, \; Y, \; Z, \; U.$$

La notion de tels vecteurs symboliques, ainsi que leurs relations avec les vecteurs ordinaires dans un espace à quatre dimensions qui peut être l'univers espace-temps de Minkowski, ont été étudiés, au moyen du calcul vectoriel et à un point de vue plus spécialement physique, par divers savants étrangers, notamment par M. A. Sommerfeld. On trouvera, à ce sujet, un exposé bref et clair, ainsi que de nombreuses références dans l'admirable ouvrage du professeur M. Laue (de Zurich), *Das Relativitäts prinzip* (Braunschweig, 1913, un vol. de XII-272 pages; voir particulièrement pp. 84-87).

[53] *Le théorème de Poynting.* — Considérons la formule (M) dans le cas où la variété Σ vient toute entière dans l'espace à trois dimensions, sans qu'il en soit de même de son contenu V; c'est exactement comme si le contour d'une cloison ordinaire devenait plan, mais sans qu'il en soit de même de la cloison.

Dans (M) il n'y a qu'à faire $F = u$ et la formule devient :

$$\int\int_{\Sigma} \begin{vmatrix} \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \\ X & Y & Z \\ P & Q & R \end{vmatrix} \frac{dx\,dy}{\frac{\partial G}{\partial z}} = \int\int\int_{V} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \\ P & Q & R \end{vmatrix} dx\,dy\,dz.$$

Alors Σ est une surface fermée ordinaire d'équation $G(x, y, z) = 0$; en vertu de

$$\frac{\partial G}{\partial x} : \frac{\partial G}{\partial z} = -p, \qquad \frac{\partial G}{\partial y} : \frac{\partial G}{\partial z} = -q,$$

$$-p\,dx\,dy = \alpha\,d\sigma, \qquad -q\,dx\,dy = \beta\,d\sigma, \qquad dx\,dy = \gamma\,d\sigma,$$

on peut écrire définitivement

$$(7) \qquad \int\int_{\Sigma} \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ X & Y & Z \\ P & Q & R \end{vmatrix} d\sigma = \int\int\int_{V} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \\ P & Q & R \end{vmatrix} dx\,dy\,dz,$$

α, β, γ étant les cosinus directeurs de la normale en l'élément $d\sigma$ de la surface fermée Σ. X, Y, Z, P, Q, R restent, bien entendu, des fonctions de x, y, z, u.

Or, dans l'intégrale double, on reconnaît immédiatement le flux, au travers de Σ, du vecteur radiant de Poynting (Cf. H. Bouasse, *Cours de Physique*, tome V, p. 8).

D'ailleurs le pseudo-déterminant qui figure dans l'intégrale triple de (7) donne

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P & Q & R \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

et, si l'on a recours aux équations fondamentales de l'électroptique,

$$K\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \qquad -\mu\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z},$$

$$K\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}, \qquad -\mu\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x},$$

$$K\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}, \qquad -\mu\frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y},$$

le pseudo-déterminant en question devient

$$K\left(P\frac{\partial P}{\partial t}+Q\frac{\partial Q}{\partial t}+R\frac{\partial R}{\partial t}\right)+\mu\left(X\frac{\partial X}{\partial t}+Y\frac{\partial Y}{\partial t}+Z\frac{\partial Z}{\partial t}\right)$$

d'où

$$2\int\int_{\Sigma}\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ X & Y & Z\\ P & Q & R\end{vmatrix}d\sigma=\frac{\partial}{\partial t}\int\int\int_{V}[K(P^2+Q^2+R^2)+\mu(X^2+Y^2+Z^2)]\,dx\,dy\,dz.$$

C'est le théorème de Poynting lui-même (Cf. H. Bouasse, *loc. cit.*). Dans un ordre d'idées analogue et en utilisant plus particulièrement les invariants intégraux au sens d'Henri Poincaré, MM. Th. De Donder et O. De Ketelaere ont publié une très importante Note dans les *Comptes rendus* du 6 juillet 1914.

[**54**] On pourrait faire, à propos de ces résultats, des remarques complètement analogues à celles faites aux paragraphes 28 et 29 du précédent Mémoire.

Ainsi la formule (7), si X, Y, Z, P, Q, R ne contiennent que x, y, z, mais non u, n'est autre chose que la formule de Green ordinaire que l'on retrouve en posant

$$F=RY-QZ,\qquad G=PZ-RX,\qquad H=QX-PY.$$

D'autre part, si l'on considère le second membre de la formule (M), on a une intégrale triple invariante pour les déformations de V qui conservent la variété limite Σ; cette intégrale triple doit alors être assujettie à la condition de Poincaré qui, en l'occurrence, s'écrit :

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial u}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial u}\\ X & Y & Z & U\\ P & Q & R & S\end{vmatrix}=0.$$

Or, en développant le premier membre de cette égalité, on voit sans peine qu'il est identiquement nul; il n'y a même point besoin de développer, un tel déterminant symbolique étant nul, à cause de la similitude de ses deux premières lignes, tout comme un déterminant ordinaire.

On pourrait évidemment généraliser la formule (M) et ses conséquences dans les hyperespaces à plus de quatre dimensions conformément à ce qui a été dit au paragraphe 51.

Ici j'attache surtout de l'importance au point de départ signalé tout au début du Mémoire, point de départ qui consiste à tout tirer d'identités telles que (2) ou (5); le lecteur attentif remarquera que je ne m'en suis jamais éloigné beaucoup.

NOTE.

Ce Mémoire, terminé en juillet 1914, a eu son impression retardée de plus d'un semestre par la guerre qui a éclaté au début d'août. Pendant ce temps j'ai accumulé de nouveaux résultats qui me permettent d'annoncer la publication d'un travail faisant suite à celui-ci et qui aura plus particulièrement trait aux fonctions de plusieurs variables complexes ; une Note préliminaire *Sur l'intervention des formules de Riemann, Stokes, Green dans les extensions du théorème d'Abel* a été insérée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (28 décembre 1914).

*
* *

Qu'il me soit permis d'ajouter encore quelques mots qui se rapportent à la guerre d'une manière particulièrement étroite et douloureuse. Mon sympathique collègue, M. Jean Clairin, professeur à la Faculté des Sciences de Lille, dont il a été question dans les pages précédentes, aurait été blessé au combat et serait alors tombé au pouvoir de l'ennemi. Les dernières nouvelles manquent de précision. Souhaitons d'en recevoir d'autres, de moins en moins alarmantes, pour voir promptement revenir sur le terrain scientifique l'un de ceux qui pouvaient croire ce terrain défendable par la seule puissance de la pensée et qui cependant durent recourir aux armes pour maintenir l'ensemble du glorieux patrimoine de la France.

Le même espoir est exprimé par M. L. Mangin, professeur au Museum d'Histoire naturelle, à qui je dois, en dernière heure, une confirmation de ces lignes.

A. B.

Toulouse, le 12 février 1915.