Annales de la faculté des sciences de Toulouse

Barré

Sur l'intégration d'une équation de Riccati

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3e série, tome 4 (1912), p. 411-428
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1912_3_4__411_0>

SUR

L'INTÉGRATION D'UNE ÉQUATION DE RICCATI

PAR LE CAPITAINE BARRÉ.

INTRODUCTION.

I. — Dans une note parue dans les *Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris,* le 13 mai 1912, nous avons établi la propriété suivante :

« Les seules surfaces admettant une famille d'asymptotiques constituée par des hélices indéformables sont des hélicoïdes engendrés par l'hélice représentée par les équations

$$x = \int_0^s \cos \chi(s)\, ds, \qquad y = \int_0^s \sin \chi(s)\, ds, \qquad z = ks, \tag{1}$$

dans lesquelles k représente une constante et χ une fonction de s déterminée par l'équation

$$\frac{\chi''}{\chi'^2}\left[\left(\frac{3k^2+2}{k}\right)\cos\chi - \mathrm{C}\right] + \sin\chi\left[2k + \frac{k^2+1}{k}\left(\frac{\chi''}{\chi'^3}\right)'\right] = 0 \tag{2}$$

(C, constante arbitraire). »

En posant

$$\frac{3k^2+2}{k^2+1} = b^2, \qquad \frac{\mathrm{C}k}{k^2+1} = c, \qquad \frac{2k^2}{k^2+1} = a^2, \qquad f(\chi) = \frac{c - b^2\cos\chi}{\sin\chi}, \tag{3}$$

et faisant le changement de variable défini par

$$\frac{1}{\chi'^2} = e^{\sigma}, \tag{4}$$

l'équation (2) devient :

$$\sigma'' + \frac{1}{2}\sigma'^2 - f(\chi)\sigma' = 2a^2 \qquad \left(\sigma'' = \frac{d^2\sigma}{as^2}, \quad \sigma' = \frac{d\sigma}{ds}\right). \tag{5}$$

Laissant de côté le développement géométrique concernant la détermination des hélicoïdes en question, nous nous occuperons dans ce qui suit de l'étude analytique de l'équation de Riccati :

$$y' + \alpha y^2 - \frac{a \cos x + b}{\sin x} y - 2k = 0 \tag{I}$$

(où a, b, k et α représentent des constantes quelconques) que nous nous proposons d'intégrer complètement et dont l'équation (5), lorsqu'on y considère σ' comme la fonction inconnue est un cas particulier.

II. — Notre travail comprendra trois parties : Dans la première, nous montrerons que *l'intégration de l'équation* (I) *est possible, en termes finis, au moyen des transcendantes élémentaires ou hypergéométriques;* dans la seconde, nous rechercherons une solution remarquable d'une famille particulière d'équations du type (I) et enfin, dans la troisième partie, nous étudierons sommairement une équation linéaire du second ordre dérivant de l'étude de l'équation (I). Des recherches exposées dans cette dernière partie, nous déduirons la détermination d'une infinité d'équations (I) dont une intégrale particulière s'exprime au moyen des fonctions trigonométriques et nous indiquerons cette intégrale. Il est entendu que nous laisserons de côté dans ce qui suit le cas d'intégrabilité banal où une des constantes k ou α serait nulle.

Dès lors, nous pourrons, sans diminuer la généralité de la question, supposer l'équation (I) ramenée à la forme canonique :

$$y' + \frac{1}{2} y^2 - \left(\frac{a \cos x + b}{\sin x}\right) y - 2k = 0. \tag{E}$$

(On le verrait immédiatement en faisant la substitution $y = \frac{z}{2\alpha}$).

PREMIÈRE PARTIE.

Intégration générale de l'équation (E).

[**1**] Posons

$$y = \frac{a \cos x + b}{\sin x} + u; \tag{1}$$

l'équation (E) devient

$$\frac{du}{dx} + \frac{1}{2} u^2 - \frac{1}{2} \left[\frac{a \cos^2 x + 2b(a+1) \cos x + 4k \sin^2 x + b^2 + 2a}{\sin^2 x} \right] = 0, \tag{2}$$

ou, en remplaçant $\sin^2 x$ et $\cos^2 x$ par leurs valeurs en fonction de $\cos 2x$:

$$\frac{du}{dx} + \frac{1}{2} u^2 - \frac{[(a - 4k) \cos 2x + 4b(a+1) \cos x + 5a + 4k + 2b^2]}{2(1 - \cos 2x)} = 0. \tag{3}$$

Par la substitution

$$u = 2 \frac{d \operatorname{Log} t}{dx} = \frac{2}{t} \frac{dx}{dt}, \tag{4}$$

l'équation (3) devient

$$4(1 - \cos 2x) \frac{d^2 t}{dx^2} - t[(a - 4k) \cos 2x + 4b(a+1) \cos x + 5a + 4k + 2b^2] = 0 \tag{5}$$

que l'on peut écrire par un simple changement de notations :

$$4(1 - \cos 2x) \frac{d^2 t}{dx^2} - t[\mathrm{A} \cos 2x + \mathrm{B} \cos x + \mathrm{C}] = 0, \tag{$\mathcal{E}$}$$

équation dans laquelle A, B, C sont des constantes.

L'équation $(\mathcal{E})$ et l'équation (5) sont d'ailleurs aussi générales l'une que l'autre; en effet (5) étant donnée, l'équation $(\mathcal{E})$ correspondante est définie par

$$\mathrm{A} = a - 4k, \qquad \mathrm{B} = 4b(a+1), \qquad \mathrm{C} = 5a + 4k + 2b^2; \tag{6}$$

inversement, si l'équation $(\mathcal{E})$ est donnée, il lui correspond une équation (5) au moins dont les constantes a, b, k sont définies par les relations (6).

On peut même voir qu'en général, à une équation $(\mathcal{E})$ dont les coefficients A, B, C sont donnés, correspondra trois équations (5) et, par suite, trois équations (E). La démonstration de ce fait ne présente aucune difficulté et nous n'y insisterons pas.

Toute la question revient donc à étudier l'équation $(\mathcal{E})$. Deux cas particuliers très intéressants sont ceux où l'on a, soit : $B=0$, soit $A+B\pm C=0$.

Dans ce dernier cas, l'équation $(\mathcal{E})$ contient en facteur $1\mp\cos x$ et dans l'un ou l'autre cas le problème de l'intégration de l'équation $(\mathcal{E})$ se ramène à celui de l'intégration de l'équation :

$$(\mathcal{E}_1)\qquad \frac{d^2x}{dt^2}(1+\varepsilon\cos x)-(\alpha\cos x+\beta)=0 \qquad (\varepsilon=\pm 1,\quad \alpha,\beta,\text{const.}).$$

Nous reviendrons ultérieurement sur l'étude détaillée de l'équation $(\mathcal{E}_1)$; nous nous bornerons dans la troisième partie de ce Mémoire à faire appel à l'une de ses propriétés que nous supposerons établie.

[2] Faisons maintenant le changement de variable défini par la formule

$$(7)\qquad \frac{x}{2}=\operatorname{arc\,tg} v \qquad \left(\text{ou } v=\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right),$$

l'équation $(\mathcal{E})$ devient

$$(8)\qquad \frac{d^2t}{dv^2}+\frac{2v}{1+v^2}\frac{dt}{dv}-\frac{t}{8}\left[\frac{(A+C-B)v^4-2v^2(3A-C)+A+B+C}{v^2(v^2+1)^2}\right]=0$$

que l'on peut écrire sous une forme plus condensée tout à fait équivalente :

$$(\mathcal{F})\qquad \frac{d^2t}{dv^2}+\frac{2v}{1+v^2}\frac{dt}{dv}-\frac{t}{8}\left[\frac{\mathcal{A}v^4+2\mathcal{B}v^2+\mathcal{C}}{v^2(v^2+1)^2}\right]=0 \qquad (\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C},\text{ constantes}).$$

A une équation $(\mathcal{E})$ dont les coefficients sont donnés, correspond une équation $(\mathcal{F})$ dont les coefficients sont définis par

$$(9)\qquad \mathcal{A}=A-B+C,\qquad \mathcal{B}=C-3A,\qquad \mathcal{C}=A+B+C.$$

Inversement à une équation $(\mathcal{F})$ correspond une équation $(\mathcal{E})$ déterminée par

$$(10)\qquad A=\frac{1}{4}\left[\frac{\mathcal{A}+\mathcal{C}}{2}-\mathcal{B}\right],\qquad B=\frac{1}{2}(\mathcal{C}-\mathcal{A}),\qquad C=\frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}(\mathcal{A}+\mathcal{C})+\mathcal{B}\right].$$

On peut toujours, d'autre part, déterminer des nombres n, q et p, tels que

$$(11)\qquad \mathcal{A}=8q(q-1),\qquad \mathcal{B}=4[n(n-1)+q(q-1)-4p^2,\qquad \mathcal{C}=8n(n-1),$$

ce qui permet d'écrire l'équation $(\mathcal{F})$ sous la forme :

$$(\mathcal{F}')\qquad \frac{d^2t}{dv^2}+\frac{2}{1+v^2}\frac{dt}{dv}-t\left\{\frac{q(q-1)v^4+[n(n-1)+q(q-1)-4p^2]v^2+n(n-1)}{v^2(v^2+1)^2}\right\}=0.$$

[**3**] En posant

$$(12)\qquad v^2 = -\rho,$$

l'équation ($\mathcal{F}'$) devient :

$$(\mathcal{F}_1)\quad \frac{d^2t}{d\rho^2} + \frac{3\rho - 1}{2\rho(\rho-1)}\frac{dt}{d\rho} - \frac{t}{4}\left\{\frac{q(q-1)\rho^2 + \{4p^2 - n(n-1) - q(q-1)\}\rho + n(n-1)}{\rho^2(\rho-1)^2}\right\} = 0.$$

Cette équation est réductible à une équation de Gauss [1]; nous allons d'ailleurs effectuer cette réduction, ce qui nous donnera l'expression de l'intégrale générale de l'équation (I) que nous avons en vue. L'une des racines de l'équation déterminante de ($\mathcal{F}_1$) pour le point zéro est $\frac{n}{2}$ et l'une de celles correspondant au point *un* est p; posons

$$(13)\qquad t = t_1 \rho^{\frac{n}{2}}(\rho - 1)^p,$$

l'équation ($\mathcal{F}_1$) se transforme en l'équation de Gauss

$$(\mathcal{G})\qquad \rho(1-\rho)\frac{d^2t_1}{d\rho^2} + \left[n + \frac{1}{2} - \left(p + n + \frac{3}{2}\right)\rho\right]\frac{dt_1}{d\rho} - \frac{(n^2 + n - q^2 + q + 4np + 2p + 4p^2)t_1}{4} = 0$$

du type général.

Si on désigne par $G_1(\rho)$ et $G_2(\rho)$ deux intégrales indépendantes de cette équation ($\mathcal{G}$), son intégrale générale est évidemment donnée par la formule

$$(14)\qquad t_1 = \alpha_1 G_1(\rho) + \alpha_2 G_2(\rho) \qquad (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \text{const.},)$$

et l'on a

$$(15)\qquad \frac{d\,\mathrm{Log}\,t_1}{dx} = \frac{d\,\mathrm{Log}\,t_1}{dv}\frac{dv}{dx} = \frac{d\,\mathrm{Log}\,t_1}{d\rho}\frac{d\rho}{dv}\frac{dv}{dx}$$

ou

$$(16)\qquad \frac{d\,\mathrm{Log}\,t_1}{dx} = -\left(\frac{d\,\mathrm{Log}\,t_1}{d\rho}\right)\frac{\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} = -\frac{\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}\left[\frac{\alpha_1 G_1'\left(-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}\right) + \alpha_2 G_2'\left(-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}\right)}{\alpha_1 G_1\left(-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}\right) + \alpha_2 G_2\left(-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}\right)}\right].$$

---

[1] Cf. par exemple JORDAN, *Cours d'Analyse*, 2e édit., t. III, nº 178.

Des formules (7), (12) et (13) on tire

$$(17) \qquad t = (-1)^{\frac{n}{2}+p} \frac{\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^n}{\left(\cos\frac{x}{2}\right)^{2p}} t_1,$$

d'où

$$(18) \qquad \frac{d \operatorname{Log} t}{dx} = n \frac{d \operatorname{Log}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)}{dx} - 2p \frac{d \operatorname{Log}\cos\frac{x}{2}}{dx} + \frac{d \operatorname{Log} t_1}{dx}$$

$$= \frac{n}{\sin x} + p \operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{d(\operatorname{Log} t_1)}{dx}.$$

En rapprochant les formules (1), (4), (16) et (18) et rappelant par la notation $n(a, b, k)$, $p(a, b, k)$ que les nombres n et p sont définis en fonction de a, b, k par les relations (6), (9) et (11), *on trouve enfin l'expression de l'intégrale générale de l'équation* (E) :

$$(\mathrm{J}) \qquad y = \frac{a\cos x + b + 2n(a, b, k)}{\sin x} + 2p(a, b, k) \operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

$$- 2 \frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} \left[\frac{\alpha_1 G_1'(\rho) + \alpha_2 G_2'(\rho)}{\alpha_1 G_1(\rho) + \alpha_2 G_2(\rho)}\right] \qquad \rho = -\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}.$$

On voit que cette intégrale s'exprime bien en termes finis au moyen des transcendantes élémentaires ou hypergéométriques. Elle ne dépend en réalité, comme il fallait s'y attendre, que d'une constante arbitraire, le rapport $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$.

DEUXIÈME PARTIE.

Recherche d'une solution remarquable d'une famille d'équations du type (I).

[**1**] En principe, le problème de l'intégration de l'équation (E) est complètement résolu par ce qui précède. Toutefois il y a intérêt, étant donné la complication du résultat, à obtenir directement toutes les solutions simples que peut avoir l'équation (I) dans certains cas particuliers. *Dans cette deuxième partie nous rechercherons si certaines équations* (E) *peuvent admettre des solutions de la forme*

$$(1) \qquad y_0 = \frac{\lambda \cos x + \mu \sin x + \nu}{\sin x};$$

nous les déterminerons s'il y a lieu et nous formerons les solutions (y_0) *correspondantes*. Comme on possédera alors une intégrale particulière de l'équation (E), celle ci s'intégrera entièrement par quadratures en appliquant le procédé classique connu ; aussi ne nous arrêterons-nous pas à en rechercher l'intégrale générale.

La substitution de y_0 dans l'équation (I) donne la condition

$$(2) \qquad \begin{aligned} &(\mu^2 - 4k)\sin^2 x + 2\mu(\lambda - a)\sin x \cos x + \lambda(\lambda - 2a)\cos^2 x \\ &\quad + 2\mu(\nu - b)\sin x + 2\cos x\,[\nu(\lambda - a - 1) - \lambda b] + \nu(\nu - 2b) - 2\lambda \equiv 0, \end{aligned}$$

équivalente aux suivantes :

$$(3) \qquad \begin{cases} \mu^2 - 4k = \lambda(\lambda - 2a) = -\nu(\nu - 2b) + 2\lambda, \\ \mu(\lambda - a) = 0, \\ \mu(\nu - b) = 0, \qquad \nu(\lambda - a - 1) - b\lambda = 0. \end{cases}$$

Pour satisfaire à la troisième et à la quatrième égalités (3), il est loisible de prendre, soit $\lambda = a$, $\nu = b$; soit simplement $\mu = 0$.

[**2**] *Première série de solutions.* — Prenons d'abord

$$(4) \qquad \lambda = a, \qquad \nu = b;$$

les autres égalités (3) donnent alors, pour définir μ,

$$(5) \qquad \mu^2 = 4k - a^2,$$

et, entre a et b, les équations

(6) $$b(a+1)=0, \qquad a^2+b^2+2a=0,$$

qui particularisent l'équation (E) dont il s'agit.

Pour satisfaire aux équations (6), on peut d'abord faire :

(7) $$b=0 \quad \text{avec} \quad a=0 \quad \text{ou} \quad a=-2.$$

La solution $a=b=0$ donne pour l'équation (E) une équation immédiatement intégrable par séparation de variables; la solution y_0 correspondante se réduirait à $y_0=\sqrt{k}$.

En prenant $a=-2$, $b=0$, on est conduit à l'équation

(E_a) $$y'+\frac{1}{2}y^2+2\frac{\cos x}{\sin x}y-2k=0$$

dont la solution y_0 est :

(8) $$y_0=2\left(\sqrt{k-1}-\frac{\cos x}{\sin x}\right).$$

Mais les équations (6) admettent encore les solutions définies par

(9) $$a=-1, \qquad b=\varepsilon \quad (\varepsilon=\pm 1);$$

l'équation correspondante est

(E_b) $$y'+\frac{1}{2}y^2+\left(\frac{\cos x-\varepsilon}{\sin x}\right)y-2k=0,$$

dont la solution y_0 est :

(10) $$y_0=-\frac{-\cos x+\sqrt{4k-1}\sin x+\varepsilon}{\sin x}.$$

[**3**] *Deuxième série de solutions.* — On prend $\mu=0$; deux des équations (3) sont alors satisfaites et les autres deviennent :

(11) $$\begin{cases} -4k=\lambda(\lambda-2a)=-\nu(\nu-2b)+2\lambda, \\ \nu(\lambda-a-1)-b\lambda=0. \end{cases}$$

Laissons d'abord de côté le cas où $\lambda=a+1$; des équations (11), on tire

(12) $$\nu=\frac{b\lambda}{\lambda-a-1},$$

et, en portant cette valeur de ν dans les premières équations (11), on obtient :

(13) $$\begin{cases} \lambda^2-2a\lambda+4k=0, \\ \lambda^2(b^2-4)+2\lambda[(a+1)^2-b^2(a+1)-8k]+4k[(a+1)^2-4k]=0. \end{cases}$$

L'élimination de λ entre les équations (13) donne, entre les coefficients de l'équation (I), la condition

(14) $$(k+a+1)[b^4+2b^2(4k-a^2-1)+(4k-a^2+1)^2]=0,$$

qui se décompose en

(15) $$k + a + 1 = 0$$

et

(16) $$b^4 + 2b^2(4k - a^2 - 1) + (4k - a^2 + 1)^2 = 0.$$

Si on écarte le cas, que nous envisagerons plus tard, où les équations (13) ont deux racines communes, la valeur de λ satisfaisant aux deux équations (13) est donnée par :

(17) $$\lambda[(a+1)^2 - b^2(a+1) - bk + a(b^2-4)] + 2k[(a+1)^2 - 4k - b^2 + 4] = 0.$$

Première solution. — On prend conformément à l'équation (15) :

$$k = -(a+1).$$

On trouve alors — en laissant de côté l'hypothèse où $b^2 = (a+3)^2$ qui conduit à deux racines communes pour les équations (13) — sans aucune difficulté l'équation

(E_c) $$y' + \frac{1}{2}y^2 - \frac{(a\cos x + b)}{\sin x}y + 2(a+1) = 0$$

et la solution correspondante :

$$y_0 = 2\left[\frac{(a+1)\cos x + b}{\sin x}\right].$$

Seconde solution. — On prend a et k arbitraires et on choisit pour b l'une des valeurs données par l'équation (16).

On a ainsi :

(18) $$b^2 = -4k + (a^2+1) \pm 2\sqrt{a^2 - 4k}.$$

Un léger changement de notation conduit à des résultats beaucoup plus simples. Posons en effet

(19) $$4k = a^2 - h^2,$$

nous trouvons pour b^2 :

(20) $$b^2 = (h \pm 1)^2,$$

et nous obtenons ainsi, après suppression d'un double signe qui n'ajoute rien à la généralité du résultat, l'équation

(E_d) $$y' + \frac{1}{2}y^2 - \left[\frac{a\cos x + (h+\varepsilon)}{\sin x}\right]y - \frac{a^2 - h^2}{2} = 0$$

(a, h, constantes arbitraires; $\varepsilon = \pm 1$),

dont la solution y_0 est donnée par [1] :

$$y_0 = (a - h\varepsilon)\left(\frac{1 - \varepsilon\cos x}{\sin x}\right).$$

---

[1] Abstraction faite de certains cas particuliers rentrant dans l'une des trois catégories suivantes : $a + k + 1 = 0$ étudiée ci-dessus, $\lambda = a + 1$ et deux racines communes pour les équations (13), étudiées ci-après.

Cas où les équations (13) *ont deux racines communes.* — Les conditions à réaliser sont :

$$(21)\qquad \frac{b^2-4}{1}=\frac{8k+b^2(a+1)-(a+1)^2}{a}=(a+1)^2-4k,$$

ou, tous calculs faits :

$$(22)\qquad \begin{cases} b=\varepsilon(a+3), \\ k=-(a+1). \end{cases}$$

Les valeurs correspondantes de λ et de ν sont :

$$\lambda_1=2(a+1),\qquad \nu_1=2\varepsilon(a+3),$$
$$\lambda_2=2\varepsilon(a+3),\qquad \nu_2=2\varepsilon,$$

étant laissé de côté le cas où $\lambda+1$ est nul, hypothèse qui donne $k=0$ et celui où $a+3$ est nul, qui rentre dans une étude que nous allons présenter ci-après $(\lambda=a+1)$.

On obtient ainsi l'équation

$$(E_e)\qquad y'+\frac{1}{2}y^2-\left[\frac{a\cos x+\varepsilon(a+3)}{\sin x}\right]y+2(a+1)=0,$$

dont on connaît deux solutions du type y_0 :

$$y_{01}=\frac{2(a+1)\cos x+2\varepsilon(a+3)}{\sin x},$$
$$y_{02}=\frac{2\varepsilon'-2\cos x}{\sin x}\qquad (\varepsilon=\pm 1,\quad \varepsilon'=\pm 1).$$

L'équation E_e possédant deux intégrales connues y_{01} et y_{02}, son intégration est immédiatement réductible à une quadrature.

Cas où $\lambda-a-1=0$. — La formule (12) est en défaut si $\lambda-a-1=0$; les équations du problème sont alors :

$$(23)\qquad \begin{cases} \mu=0,\quad \lambda=a+1,\quad b\lambda=0, \\ -4k=\lambda(\lambda-2a)=-\nu(\nu-2b)+2\lambda; \end{cases}$$

si on laisse de côté la solution $\lambda=a+1=0$ qui entraîne $k=0$, on trouve l'équation

$$(I_f)\qquad y'+\frac{1}{2}y^2-\frac{a\cos x}{\sin x}y-\frac{(a^2-1)}{2}=0$$

pour laquelle

$$y_0=(a+1)\frac{\cos x+\varepsilon}{\sin x}\qquad (\varepsilon=\pm 1).$$

TROISIÈME PARTIE.

Étude sommaire de l'équation $(\mathcal{E})$.

[**1**] L'équation linéaire

$$(\mathcal{E}) \qquad 4\frac{d^2t}{dx^2}(1-\cos 2x) - t(A\cos 2x + B\cos x + C) = 0,$$

à coefficients pairs et périodiques de période 2π admet en général pour singularités les points :

$$0, \ \pi, \ 2\pi, \ \ldots, \ n\pi, \ \ldots.$$

Il y a exception lorsque $A \pm B + C$ est nul.

L'équation $\mathcal{E}$ se réduit alors au type $(\mathcal{E}_1)$ que nous étudierons en détail dans un mémoire ultérieur. Nous supposerons donc désormais :

$$(1) \qquad (A+C)^2 - B^2 \neq 0.$$

L'équation $\mathcal{E}$ est à intégrales régulières pour tous ses points singuliers. Nous ne nous arrêterons pas à rechercher leur développement en série de puissances autour de chaque singularité. C'est toutefois un exercice intéressant.

Dans l'intervalle ouvert $0, \pi$, l'équation $(\mathcal{E})$ admet une intégrale générale qui, *dans cet intervalle,* peut être développée soit en série de sinus, soit en série de cosinus, chacun de ces développements étant unique et n'étant valable *a priori que dans l'intervalle* $0, \pi$.

On démontre sans aucune difficulté que le développement en question représente dans tout intervalle, exception possible faite pour les points $x = h\pi$ (h entier), une intégrale périodique de l'équation $\mathcal{E}$. Si la série des dérivées secondes de ce développement est elle-même uniformément convergente, il est possible d'en déterminer les coefficients par voie de récurrence comme pour les développements en séries de puissances. On observera, en effet, que la substitution dans le premier membre de $(\mathcal{E})$ de la fonction t et de sa dérivée seconde donne dans ce membre une série de Fourier qui, devant être nulle dans l'intervalle $-\pi, +\pi$, doit avoir tous ses coefficients nuls. Arrêtons-nous au cas d'un développement en série de cosinus :

$$(2) \qquad y = \alpha_0 + \alpha_1 \cos x + \ldots + \alpha_n \cos nx + \ldots;$$

on obtient ainsi la loi de récurrence définie par les formules

$$(3)\qquad \begin{cases} 8\alpha_2 = C\alpha_0 + A\dfrac{\alpha_2}{2} + B\dfrac{\alpha_1}{2}, \\[2mm] 2(9\alpha_3 - \alpha_1) = A\left(\dfrac{\alpha_1+\alpha_3}{2}\right) + B\left(\alpha_0 + \dfrac{\alpha_2}{2}\right) + C\alpha_1. \\[2mm] 16(2\alpha_4 - \alpha_2) = A\left(\alpha_0 + \dfrac{\alpha_4}{2}\right) + B\left(\dfrac{\alpha_1+\alpha_3}{2}\right) + C\alpha_2. \end{cases}$$

et, lorsque $n \geqslant 3$:

$$(4)\qquad \left[2(n+2)^2 - \frac{A}{2}\right]\alpha_{n+2} - \frac{B}{2}\alpha_{n+1} - (C + 4n^2)\alpha_n - \frac{B}{2}\alpha_{n-1} + \left[2(n-2)^2 - \frac{A}{2}\right]\alpha_{n-2} = 0.$$

Si $A \neq 4p^2$ (p entier), la détermination des α se fait sans difficulté en fonction linéaire et homogène de α_0 et de α_1. Malheureusement, ainsi que nous pourrons le constater sur un exemple, nous nous trouvons, et cela très vraisemblablement dans le cas général, en face de difficultés analogues à celles que l'on trouve en étudiant les développements des intégrales irrégulières en séries de puissances (1); la série définie par la formule (2) peut d'ailleurs ici être uniformément convergente sans que celle de ses dérivées secondes le soit.

La fonction définie par la formule (2) est-elle dans ce cas une intégrale de l'équation ($\mathcal{E}$)? Pour résoudre la question une étude spéciale s'impose. Nous limiterons au cas particulier suivant (2) l'examen de ces développements en série. Ce cas particulier présente précisément l'intérêt de conduire à un développement uniformément convergent pour t et divergent pour la série des dérivées secondes.

[2] *Cas où* $A = B = C = 0$. — L'équation ($\mathcal{E}$) se réduit alors à :

$$(5)\qquad 4\frac{d^2t}{dx^2}(1 - \cos 2x) = 0.$$

La fonction t se réduit à une fonction linéaire de x. Or, l'application directe de la méthode de récurrence indiquée ci-dessus donne :

$$(6)\qquad t = \alpha_0 + \alpha_1\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{9} + \ldots + \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} + \ldots\right).$$

---

(1) Cf. Picard, *Traité d'Analyse*, t. III, 1re édition, pp. 279 et suiv.

(2) Nous réservons pour un Mémoire ultérieur l'examen de ces délicates questions. Ce qui précède suffit pour montrer l'ampleur et l'intérêt que peut prendre l'étude un peu approfondie de l'équation ($\mathcal{E}$) qui peut d'ailleurs servir de type pour celle d'équations analogues. Nous avons cru devoir amorcer ici cette recherche pour montrer sur un exemple simple de quelles précautions il faut s'entourer dans l'emploi des séries de fonctions dès qu'on quitte le domaine des séries de puissances, si l'on veut éviter des erreurs grossières.

Mais, si on tient compte de la forme du développement de x en série de cosinus dans l'intervalle o, π et de l'égalité

$$\sum \frac{1}{(9k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \tag{7}$$

la formule (6) devient, dans l'intervalle, o, π :

$$t = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{\pi^2}{8} - \alpha_1 x. \tag{8}$$

Ce résultat s'étend sans peine, *mutatis mutandis*, à tout intervalle. Ainsi, *la loi de récurrence fournit une série uniformément convergente qui est bien une intégrale de l'équation* ($\mathcal{E}$), *bien que l'emploi de la méthode paraisse illusoire, la série des dérivées secondes étant visiblement divergente.*

[**3**] Proposons-nous maintenant de rechercher *dans quels cas l'équation* ($\mathcal{E}$) *admet une solution de la forme*

$$t = \alpha_0 + \alpha_1 \cos x + \ldots + \alpha_n \cos nx + \ldots + \alpha_{p-1} \cos(p-1)x + \alpha_p \cos px \tag{9}$$
$$(p \text{ entier}).$$

On emploiera ici sans la moindre difficulté la méthode de substitution décrite dans le paragraphe (1). Le résultat trouvé dans le premier membre de l'équation ($\mathcal{E}$) s'arrête de lui-même aux termes en $\cos(p+2)x$ inclus. Les équations du problème sont encore les équations (3) et (4) sous la réserve de donner à n une valeur inférieure ou égale à $p+2$ et de remplacer par zéro tous les coefficients d'indice supérieur à p. Si on remarque que, α_p désignant le dernier coefficient du développement de y, il n'y a pas l'eu de le supposer nul [1]; la dernière des équations obtenues se réduit à :

$$A = 4p^2. \tag{10}$$

On donnera à A cette valeur dans les autres équations; celles-ci sont au nombre de $p+2$, linéaires et homogènes, entre $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \alpha_p$.

Ces paramètres ne devant pas être tous nuls, leur élimination conduit à deux équations déterminant la valeur de chacun des paramètres B et C correspondant à la valeur de A définie par l'équation (10).

Nous ne formerons pas ces équations dans le cas général; leur complication rend illusoire l'intérêt de les écrire. Toutefois nous signalerons quelques propriétés des solutions trouvées.

---

[1] La solution banale $y = 0$ étant écartée.

1° *Il existe toujours une série de solutions correspondant à la valeur zéro du paramètre* B (1).

En effet, si on fait $B=0$, les coefficients des termes de la parité de p sont tous reliés entre eux par des équations indépendantes des autres. En écrivant qu'ils ne sont pas tous nuls, α_p étant différent de zéro, on aura une relation de condition déterminant C et formant avec l'équation $B=0$ la seconde du système dont il a été question ci-dessus. Quant aux relations ne contenant que des termes de parité différente de celle de p, on y satisfera en faisant nuls tous les coefficients dont l'indice a cette parité.

2° *La solution* $B=0$ *étant écartée et* C *étant éliminé, on obtient une équation en* B. *Cette équation ne contient que des puissances paires de* B.

Il suffit, pour le voir, de remarquer que si le système des équations entre $\alpha_0, \ldots, \alpha_p$ admet pour un couple de valeurs B, C ($A=4p^2$), la solution $(\alpha_0)_0, \ldots, (\alpha_p)_0$, il admettra pour le système $(-B)$, C, la solution

$$(\alpha_0)_0,\quad -(\alpha_1)_0,\quad (\alpha_2)_0,\quad \ldots,\quad (\alpha_{2k})_0,\quad -(\alpha_{2k+1})_0,\quad \ldots,\quad (-1)^p(\alpha_p)_0.$$

3° *Parmi les solutions dont il est question dans le paragraphe ci-dessus, il y en a* $2p$ *satisfaisant à la relation*

$$\pm B + C + 4p^2 = 0. \tag{11}$$

Cela tient au fait suivant :

On démontre qu'il existe $2p$ équations $(\mathcal{E}_1)$ admettant une solution du type (9). Donc parmi les solutions trouvées doivent se rencontrer les $2p$ équations $(\mathcal{E}_1)$ en question qui peuvent toujours s'écrire sous la forme $(\mathcal{E})$ en multipliant par $1-\varepsilon\cos x$ leur premier membre. Mais les coefficients A, B, C de ces équations doivent satisfaire à la relation

$$A \pm B + C = 0, \tag{12}$$

c'est-à-dire, ici, à l'équation (11), ce qui justifie notre proposition. On vérifie d'ailleurs qu'elles ne correspondent pas à $B=0$ (2).

---

(1) L'une de ces équations se réduit à $\dfrac{d^2t}{dx^2} + p^2 t = 0$. (Cf. note suivante.)

(2) L'équation (11) donnerait en effet $C = -4p^2$ et l'équation $(\mathcal{E})$ se réduirait à

$$\frac{d^2t}{dx^2} + p^2 = 0,$$

qui admet bien une solution du type demandé et est une dégénérescence de $(\mathcal{E}_1)$. Mais les $2p$ équations $(\mathcal{E}_1)$ dont il est question dans le texte ne sont pas des équations dégénérées.

[**4**] Applications. — I. *Équations* ($\mathcal{E}$) *admettant une solution :*

$$t = \alpha_0 + \alpha_1 \cos x. \tag{13}$$

On doit avoir ici : $A = 4$.

1° $B = 0$. On trouve l'équation

$$\frac{d^2 t}{dx^2} + t = 0, \tag{14}$$

avec la solution

$$t = \alpha_1 \cos x; \tag{15}$$

2° $B = 8\varepsilon (\varepsilon = \pm 1)$, $C = 4$. On trouve l'équation

$$\frac{d^2 t}{dx^2}(1 - \cos 2x) - y(1 + 2\varepsilon \cos x + \cos 2x) = 0 \qquad (\varepsilon = \pm 1). \tag{16}$$

avec la solution

$$y = \alpha_0(1 - \varepsilon \cos x) \tag{17}$$

L'équation (16), unique solution de la question générale posée ci-dessus lorsque $p = 1$, est réductible au type ($\mathcal{E}_1$). On peut, en effet, l'écrire sans difficulté :

$$\frac{d^2 t}{dx^2}(1 - \varepsilon \cos x) - \varepsilon y \cos x = 0 \qquad (\varepsilon = \pm 1). \tag{16 bis}$$

II. *Équations* ($\mathcal{E}$) *admettant une solution du type* (9) *avec* $p = 2$.

On doit alors prendre : $A = 16$.

1° $B = 0$. On trouve, outre la dégénérescence à coefficients constants, l'équation

$$\frac{d^2 t}{dx^2}(1 - \cos 2x) - 4 \cos 2x . t = 0 \tag{18}$$

admettant la solution

$$t = \alpha_0(1 - \cos 2x).$$

2° Quatre équations :

$$\frac{d^2 t}{dx^2}(1 - \cos 2x) - 4(\cos 2x + 3\varepsilon \cos x + 2) = 0 \qquad (\varepsilon = \pm 1) \tag{19}$$

et

$$\frac{d^2 t}{dx^2}(1 - \cos 2x) - 2(2 \cos 2x + \varepsilon \cos x - 1) = 0 \qquad (\varepsilon = \pm 1) \tag{20}$$

réductibles l'une et l'autre aux formes suivantes du type $(\mathcal{E}_1)$,

$$(\varepsilon - \cos x)\frac{d^2 t}{dx^2} - 2(2\cos x + \varepsilon) = 0 \tag{19 bis}$$

admettant la solution

$$t = \alpha_0\left(1 - \frac{4}{3}\varepsilon\cos x + \frac{1}{3}\cos 2x\right) \tag{21}$$

et

$$(\varepsilon - \cos x)\frac{d^2 t}{dx^2} - 2(4\cos x - 3\varepsilon) = 0, \tag{20 bis}$$

admettant la solution

$$t = \alpha_0(1 - 2\varepsilon\cos x - 3\alpha_0\cos 2x). \tag{22}$$

III. *Équations admettant des solutions du type* (9) *avec* $p = 3$.

1° $B = 0$. Ici encore, outre l'équation dégénérée, on ne trouve qu'une équation répondant à la question

$$\frac{d^2 t}{dx^2}(1 - \cos 2x) - t(9\cos 2x - 5) = 0, \tag{23}$$

admettant la solution

$$t = \alpha_1(\cos x - \cos 3x); \tag{24}$$

2° Supposons $B \neq 0$. Reprenons rapidement sur cet exemple la formation du système d'équations dont il a été question dans l'étude générale. En effectuant dans l'équation $(\mathcal{E})$ la substitution

$$y = \alpha_0 + \alpha_1\cos x + \alpha_2\cos 2x + \alpha_3\cos 3x, \tag{9 bis}$$

le premier membre de cette substitution devient une somme d'un terme constant et de termes en $\cos x$, ..., $\cos 5x$. En annulant les divers coefficients de cette somme, on trouve le système d'équations :

$$\left\{\begin{array}{l} C\alpha_0 + \frac{B}{2}\alpha_1 + 10\alpha_2 = 0, \\ B\alpha_0 + (C + 20)\alpha_1 + \frac{B}{2}\alpha_2 = 0, \\ 36\alpha_0 + \frac{B}{2}\alpha_1 + (C + 16)\alpha_2 + \frac{B}{2}\alpha_3 = 0, \\ (C + 36)\alpha_3 + \frac{B}{2}\alpha_2 + 16\alpha_1 = 0, \\ \frac{B}{2}\alpha_3 + 10\alpha_2 = 0. \end{array}\right. \tag{25}$$

Ce système peut facilement être remplacé par le suivant :

(26) $$\alpha_3 = -\frac{20}{B}\alpha_2,$$

(27) $$\left\{\begin{aligned} &(C-4)\alpha_2 - (C-36)\alpha_0 = 0,\\ &\left[10(C+20) - \frac{B^2}{4}\right]\alpha_2 + \left[C(C+20) - \frac{B^2}{2}\right]\alpha_0 = 0,\\ &\left[10(C+52) - \frac{B^2}{4}\right]\alpha_2 + 16C\alpha_0 = 0,\end{aligned}\right.$$

(28) $$\alpha_1 = -\frac{2}{B}(C\alpha_0 + 10\alpha_2).$$

L'une au moins des équations (27) permettra d'exprimer α_2 en fonction linéaire et homogène de α_0; les équations (26) et (28) donneront alors pour α_1 et α_3 des fonctions de α_0 de même forme. D'autre part, en portant la valeur trouvée pour α_2 dans les deux autres équations (27) et éloignant la solution sans intérêt $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, on obtient deux équations de condition qui sont :

(29) $$\left\{\begin{aligned} &C(C-4)(C+20) + 10(C-36)(C+20) - \frac{B^2}{4}(3C-44) = 0,\\ &16C(C-4) + 10(C+52)(C-36) - \frac{B^2}{4}(C-36) = 0.\end{aligned}\right.$$

De l'une d'elles on tire B^2 en fonction de C qui est donnée par l'équation résultant de l'élimination de $\frac{B^2}{4}$ entre les équations (29) :

(30) $$C^4 - 88C^3 - 320C^2 + 61.824C - 36 \times 15.680 = 0.$$

Cette équation donne quatre valeurs de C auxquelles correspondent huit valeurs de B deux à deux symétriques. On obtient ainsi huit équations ($\mathcal{E}$) du type étudié. Les couples de valeurs sont :

(31) $$\left\{\begin{aligned} &C_1 = 84, && B_1 = \pm 120;\\ &C_2 = 12, && B_2 = \pm 48;\\ &C_3 = -28, && B_3 = \pm 8;\\ &C_4 = 20, && B_4 = \pm 40.\end{aligned}\right.$$

Les six équations correspondant aux couples (B_1, C_1), (B_2, C_2), (B_3, C_3) appartiennent au type $(\mathcal{E}_1)$. Nous nous dispenserons de les écrire ainsi que leurs solutions, ce qui ne présenterait aucune difficulté. Nous effectuerons le calcul par le couple $(B_4 = 40, C_4)$. L'équation ($\mathcal{E}$) correspondante, après division par le facteur 4, est

(32) $$\frac{d^2t}{dx^2}(1 - \cos 2x) - t(9\cos 2x + 10\cos x + 5) = 0$$