ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

L. ROUYER

Sur la déformation des quadriques et les surfaces conjuguées par rapport à un complexe du second degré

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3e série, tome 3 (1911), p. 377-434

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1911_3_3__377_0>

SUR LA DÉFORMATION DES QUADRIQUES

ET LES SURFACES CONJUGUÉES

PAR RAPPORT A UN COMPLEXE DU SECOND DEGRÉ,

PAR M. L. ROUYER,

Professeur au Lycée d'Alger.

PREMIÈRE PARTIE.

[**1**] Il existe sur deux surfaces applicables un réseau conjugué commun. M. Guichard (¹) a étudié d'une façon approfondie ces réseaux auxquels il a donné le nom de systèmes cycliques ou systèmes C. Il a, en particulier, établi les résultats suivants que nous envisagerons seulement dans l'espace à trois dimensions :

Tout réseau harmonique à une congruence O (congruence de normales) est C; il existe une infinité de congruences O, harmoniques à un réseau C.

Si on joint un point fixe O aux deux centres de courbure C_1 et C_2 d'une surface S, les deux droites OC_1 et OC_2 définissent un réseau point parallèle à une infinité de réseaux C; en d'autres termes, ces droites sont parallèles aux tangentes d'une infinité de réseaux C.

Soient X, Y, Z les coordonnées d'un point de S, c, c', c'' les cosinus directeurs de la normale, X_1, Y_1, Z_1 et X_2, Y_2, Z_2 les coordonnés des centres de courbure, R_1, R_2 les rayons de courbure principaux; nous poserons :

$$2q = X^2 + Y^2 + Z^2, \qquad p = cX + c'Y + c''Z.$$

(¹) *Sur les systèmes cycliques et les systèmes orthogonaux* (Annales de l'École Normale, 1897-1898-1903).

Le système

$$(1) \qquad \frac{\partial X}{\partial u} + R_1 \frac{\partial c}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial X}{\partial v} + R_2 \frac{\partial c}{\partial v} = 0$$

admet les quatre couples de solutions

$$(Xc), \quad (Yc'), \quad (Zc''). \quad (qp).$$

Soient, d'autre part, x, y, z les coordonnées d'un point d'un réseau C dont les tangentes sont parallèles à OC_1 et OC_2 (le point O étant pris pour origine); on a :

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\frac{\partial x}{\partial u}}{X_2} = \frac{\frac{\partial y}{\partial u}}{Y_2} = \frac{\frac{\partial z}{\partial u}}{Z_2}, \\ \frac{\frac{\partial x}{\partial v}}{X_1} = \frac{\frac{\partial y}{\partial v}}{Y_1} = \frac{\frac{\partial z}{\partial v}}{Z_1}. \end{aligned} \right.$$

On peut donc écrire :

$$(3) \qquad \frac{\partial x}{\partial u} = \lambda(X + cR_2), \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = \mu(X + cR_1);$$

en formant la condition d'intégrabilité, il vient

$$X\left(\frac{\partial \lambda}{\partial v} - \frac{\partial \mu}{\partial u}\right) + c\left[\frac{\partial}{\partial v}(\lambda R_2) - \frac{\partial}{\partial u}(\mu R_1)\right] = 0.$$

Cette équation doit subsister quand on y remplace X et c par Y et c' ou par Z et c'', elle doit donc être identique, et on voit alors que si dans les équations (3) on remplace X et c par un couple quelconque de solutions du système (1), la condition d'intégrabilité est toujours satisfaite.

D'après ce qui précède, on peut poser

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} \lambda &= \frac{\partial \theta}{\partial u}, & \mu &= \frac{\partial \theta}{\partial v}, \\ \lambda R_2 &= \frac{\partial \varphi}{\partial u}, & \mu R_1 &= \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \end{aligned} \right.$$

et il vient

$$\frac{\partial x}{\partial u} = X\frac{\partial \theta}{\partial u} + c\frac{\partial \varphi}{\partial u},$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = X\frac{\partial \theta}{\partial v} + c\frac{\partial \varphi}{\partial v},$$

d'où

$$dx = X d\theta + c d\varphi.$$

On a donc le système

$$(5)\qquad \begin{cases} dx = X d\theta + c\,d\varphi, \\ dy = Y d\theta + c'd\varphi, \\ dz = Z d\theta + c''d\varphi. \end{cases}$$

D'où on tire, en faisant la somme des carrés,

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\varphi^2 + 2(q\,d\theta + p\,d\varphi)\,d\theta.$$

On peut poser

$$(6)\qquad d\psi = 2(q\,d\theta + p\,d\varphi),$$

car, d'après ce qui a été dit plus haut, le second membre est une différentielle exacte; et on a :

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dy^2 + d\theta\,d\psi.$$

La forme de cette équation montre que l'on obtient un couple de surfaces applicables, ou, d'une façon plus précise, deux réseaux C applicables.

[**2**] On peut fonder sur ces remarques une méthode de recherche des surfaces applicables sur une surface donnée Σ en cherchant à déterminer la surface S de façon que le réseau point C correspondant soit parallèle à un réseau de Σ, qui sera nécessairement aussi un réseau C.

Supposons la surface Σ définie par son équation tangentielle

$$(7)\qquad P = f(U, V, W),$$

l'équation du plan tangent étant :

$$Ux + Vy + Wz - P = 0.$$

Les quatre coordonnées U, V, W, P vérifient une même équation de Laplace de la forme

$$\frac{\partial^2 U}{\partial u \partial v} + A\frac{\partial U}{\partial u} + B\frac{\partial U}{\partial v} + CU = 0.$$

Pour que cette équation admette quatre solutions liées par la relation (7), on doit avoir :

$$\Sigma\frac{\partial^2 f}{\partial U^2}\frac{\partial U}{\partial u}\frac{\partial U}{\partial v} + \Sigma\frac{\partial^2 f}{\partial V \partial W}\left(\frac{\partial V}{\partial u}\frac{\partial W}{\partial v} + \frac{\partial V}{\partial v}\frac{\partial W}{\partial u}\right) = 0.$$

En remarquant que la fonction f est homogène et du premier degré, on a des identités de la forme

$$U\frac{\partial^2 f}{\partial U^2} + V\frac{\partial^2 f}{\partial U \partial V} + W\frac{\partial^2 f}{\partial U \partial W} = 0$$

qui permettent d'éliminer $\frac{\partial^2 f}{\partial U^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial V^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial W^2}$ et l'équation précédente, s'écrit alors :

$$\Sigma U\left(V\frac{\partial W}{\partial u}-W\frac{\partial V}{\partial u}\right)\left(V\frac{\partial W}{\partial v}-W\frac{\partial V}{\partial v}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial V\,\partial W}=0. \tag{8}$$

Si le réseau tracé sur Σ est parallèle au réseau point OC_1, OC_2, le plan tangent à Σ est parallèle au plan OC_1C_2; on a donc :

$$\frac{U}{Y_1Z_2-Y_2Z_1}=\frac{V}{Z_1X_2-X_1Z_2}=\frac{W}{X_1Y_2-Y_1X_2}. \tag{9}$$

On a également :

$$UX_1+VY_1+WZ_1=0.$$

Différentions par rapport à u en tenant compte des équations (1) et en remarquant que l'on a

$$UX+VY+WZ=0,$$
$$Uc+Vc'+Wc''=0,$$

il vient

$$X_1\frac{\partial U}{\partial u}+Y_1\frac{\partial V}{\partial u}+Z_1\frac{\partial W}{\partial u}=0,$$

et, par suite,

$$\frac{X_1}{W\frac{\partial V}{\partial u}-V\frac{\partial W}{\partial u}}=\frac{Y_1}{U\frac{\partial W}{\partial u}-W\frac{\partial U}{\partial u}}=\frac{Z_1}{V\frac{\partial U}{\partial u}-U\frac{\partial V}{\partial u}},$$

et, de même,

$$\frac{X_2}{W\frac{\partial V}{\partial v}-V\frac{\partial W}{\partial v}}=\frac{Y_2}{U\frac{\partial W}{\partial v}-W\frac{\partial U}{\partial v}}=\frac{Z_2}{V\frac{\partial U}{\partial v}-U\frac{\partial V}{\partial v}}.$$

En vertu de ces relations et des équations (9), l'équation (8) s'écrit :

$$\Sigma X_1X_2(Y_1Z_2-Z_1Y_2)\frac{\partial^2 f}{\partial V\,\partial W}=0. \tag{10}$$

Les dérivées partielles étant homogènes, on peut y remplacer U, V, W par les valeurs proportionnelles tirées de (9). L'équation (10) est alors une relation homogène et symétrique par rapport aux coordonnées des deux centres de courbure principaux de S et peut servir à déterminer cette surface. Celle-ci étant connue, on obtiendra par de simples quadratures une surface applicable sur Σ. En effet, on connaît les coordonnées du plan tangent à Σ; on en déduit celles du point de contact x, y, z; alors les équations (5) et (6) déterminent les fonctions φ, θ, ψ qui définissent une surface Σ_1, applicable sur Σ.

Remarquons d'ailleurs que ces équations sont indépendantes du choix des variables; il n'est donc pas nécessaire d'avoir déterminé les lignes de courbure de S.

L'équation (10) étant homogène par rapport à chacun des groupes de variables X_1, Y_1, Z_1 et X_2, Y_2, Z_2 est encore vérifiée quand on remplace la surface S par une surface parallèle ou inverse par rapport à l'origine; ces transformations ne donnent pas de nouvelles solutions du problème.

Considérons d'abord une surface parallèle à S. Les nouvelles fonctions θ_1 et φ_1 doivent vérifier des équations de la forme

$$dx = (X + ch)d\theta_1 + c d\varphi_1,$$

h désignant une constante; on a donc

$$\theta_1 = \theta, \qquad \varphi_1 + h\theta_1 = \varphi,$$

ψ_1 est déterminée par l'équation

$$d\psi_1 = \Sigma(X + ch)^2 d\theta_1 + 2\Sigma c(X + ch)d\varphi_1 = d\psi + h^2 d\theta_1 + 2h d\varphi_1.$$

On a, par suite,

$$\theta_1 = \theta, \qquad \varphi_1 = \varphi - h\theta, \qquad \psi_1 = \psi - h^2\theta + 2h\varphi.$$

Cette transformation, qui n'altère pas la forme $\varphi^2 + \theta\psi$, équivaut à une rotation de Σ_1.

Remplaçons maintenant la surface S par une surface inverse; les formules de transformation sont :

$$X_1 = \frac{kX}{2q}, \qquad c_1 = c - \frac{p}{q}X,$$

$$q_1 = \frac{k^2}{4q}, \qquad p_1 = -\frac{kp}{2q}.$$

On déterminera φ_1 et θ_1 par des équations de la forme

$$dx = X_1 d\theta_1 + c_1 d\varphi_1$$

ou

$$dx = \frac{kX}{2q}d\theta_1 - \frac{p}{q}X d\varphi_1 + c d\varphi_1.$$

En identifiant avec les équations (5), on a :

$$k d\theta_1 - 2p d\varphi_1 = 2q d\theta, \qquad d\varphi_1 = d\varphi,$$

d'où

$$k d\theta_1 = 2q d\theta + 2p d\varphi = d\psi.$$

D'autre part,

$$d\psi_1 = \frac{k^2}{2q}d\theta_1 - \frac{kp}{q}d\varphi_1 = k d\theta.$$

En définitive, on a

$$\varphi_1 = \varphi, \qquad \theta_1 = \frac{\psi}{k}, \qquad \psi_1 = k\theta,$$

cette transformation n'est pas autre chose qu'une symétrie.

Aux systèmes plusieurs fois C correspondent des surfaces S ayant leurs centres de courbure principaux en perspective par rapport à l'origine, mais qui ne se déduisent pas l'une de l'autre par l'une des transformations précédentes.

Les normales correspondantes à deux de ces surfaces sont dans un même plan passant par l'origine et les développables se correspondent; le point d'intersection de ces deux normales décrit donc un réseau qui par suite est 2O.2O. On voit ainsi, comme l'a déjà établi M. Guichard, que la recherche des systèmes plusieurs fois C est équivalente à celle des réseaux 2O.2O.

Dans tous les cas, à une surface S correspond un réseau C et, par suite, une surface Σ_1 applicable sur Σ.

[**3**] La considération des réseaux C et des congruences O harmoniques peut également conduire à l'équation de M. Weingarten. Supposons connue la surface Σ_1 rapportée aux coordonnées φ, ψ, θ. La surface auxiliaire S est précisément celle à laquelle conduit la méthode de M. Weingarten pour la détermination des surfaces applicables sur Σ_1.

L'équation aux différentielles totales (6) montre que l'équation du plan tangent à Σ_1 est de la forme

$$\psi = 2q\theta + 2p\varphi + r,$$

r étant une fonction de p et q,

$$r = f(p, q);$$

cette dernière équation est l'équation tangentielle de Σ_1 dans le système de coordonnées adopté. Les courbes de paramètres u et v étant conjuguées, p, q et r vérifient une équation de la forme

$$\frac{\partial^2 p}{\partial u \partial v} + A\frac{\partial p}{\partial u} + B\frac{\partial p}{\partial v} = 0.$$

Pour que cette équation admette la solution r, il faut et il suffit que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial p}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial p \partial q}\left(\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial q}{\partial v} + \frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial q}{\partial u}\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial q^2}\frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial q}{\partial v} = 0.$$

Or,

$$\frac{\partial q}{\partial u} = -R_1\frac{\partial p}{\partial u}, \qquad \frac{\partial q}{\partial v} = -R_2\frac{\partial p}{\partial v}.$$

En substituant dans l'équation précédente, il vient :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} - (R_1 + R_2)\frac{\partial^2 f}{\partial p\,\partial q} + R_1 R_2 \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} = 0.$$

C'est l'équation de M. Weingarten à laquelle satisfait la surface S. La surface Σ, applicable sur Σ_1, se déduit des formules (5).

[**4**] Les formules établies aux paragraphes (1) et (2) permettent de résoudre différents problèmes relatifs aux réseaux C en cherchant les surfaces pour lesquelles ces réseaux jouissent de propriétés particulières.

Cherchons, par exemple, les surfaces sur lesquelles l'une des familles de courbes du réseau est formée des courbes de contact de cylindres circonscrits. Supposons que ce soient les courbes $u = \text{ct}^e$. On a :

$$\frac{\frac{\partial x}{\partial u}}{X_2} = \frac{\frac{\partial y}{\partial u}}{Y_2} = \frac{\frac{\partial z}{\partial u}}{Z_2}.$$

Ces équations définissent la tangente à la courbe $v = \text{ct}^e$; celle-ci conserve une direction fixe quand v varie seul; les rapports mutuels de X_2, Y_2, Z_2 restent donc constants. Comme le point C_2 ne décrit pas une droite passant par l'origine, il faut et il suffit que C_2 soit fixe. L'une des nappes de la surface focale de S se réduit à une courbe.

Si les deux familles du réseau possèdent la même propriété, les deux nappes focales de S se réduisent à des courbes qui sont des coniques. Les droites joignant l'origine aux centres de courbure décrivent des cônes qui peuvent se réduire à des plans.

Dans ce cas, l'équation du réseau conjugué est

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = 0$$

et la surface Σ est une surface de translation.

La discussion conduit à étudier la nature des points d'intersection des coniques focales avec le plan de l'infini. Soit γ l'un de ces coniques; si elle coupe le plan de l'infini en deux points distincts ou confondus non situés sur le cercle de l'infini, la surface S est une cyclide de Dupin.

Il y aurait lieu d'envisager également les cas suivants :

1° γ rencontre le plan de l'infini en deux points distincts, dont l'un est situé sur le cercle de l'infini;

2° γ est tangente au plan de l'infini en un point situé sur le cercle de l'infini;

3° γ est tangente au cercle de l'infini.

Sans entrer dans une discussion détaillée qui n'offre aucune difficulté, considérons le cas le plus général où la surface focale de S se réduit à une ellipse et une hyperbole focales l'une de l'autre.

Les équations de ces deux courbes peuvent s'écrire :

$$z-\gamma=0, \qquad \frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}-1=0,$$

$$y-\beta=0, \qquad \frac{(x-\alpha)^2}{a^2-b^2}-\frac{(z-\gamma)^2}{b^2}-1=0.$$

Posons :

$$a'=\sqrt{a^2-b^2}.$$

On peut exprimer les coordonnées des centres de courbure par les formules

$$\begin{aligned} X_2&=\alpha+a\cos\rho_1, & X_1&=\alpha+a'\cos\rho_2,\\ Y_2&=\beta+b\sin\rho_1, & Y_1&=\beta,\\ Z_2&=\gamma, & Z_1&=\gamma+bi\sin\rho_2.\end{aligned}$$

Les rayons de courbure sont, à une constante près :

$$R_2=a'\cos\rho_1, \qquad R_1=a\cos\rho_2.$$

On a pour les coordonnées d'un point de Σ des équations de la forme

$$\frac{\partial x}{\partial\rho_1}=\lambda X_2, \qquad \frac{\partial x}{\partial\rho_2}=\mu X_1,$$

λ et μ sont donc respectivement des fonctions de ρ_1 et ρ_2 :

$$\lambda=F(\rho_1), \qquad \mu=\Phi(\rho_2),$$

et on peut écrire :

$$\begin{aligned} x&=\int(\alpha+a\cos\rho_1)F\,d\rho_1+\int(\alpha+a'\cos\rho_2)\Phi\,d\rho_2,\\ y&=\int(\beta+b\sin\rho_1)F\,d\rho_1+\beta\int\Phi\,d\rho_2,\\ z&=\gamma\int F\,d\rho_1\qquad\qquad+\int(\gamma+bi\sin\rho_2)\Phi\,d\rho_2.\end{aligned}$$

Ces formules déterminent la surface Σ. Pour obtenir la surface Σ_1 applicable sur Σ, reportons-nous aux équations (4) :

$$\frac{\partial\theta}{\partial\rho_1}=\lambda=F(\rho_1), \qquad \frac{\partial\theta}{\partial\rho_2}=\mu=\Phi(\rho_2),$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_1}=\lambda R_2=a'F(\rho_1)\cos\rho_1,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\rho_2}=\mu R_1=a\Phi(\rho_2)\cos\rho_2.$$

Pour calculer ψ, remarquons que l'on a

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\varphi^2 + d\theta\, d\psi;$$

en identifiant, on trouve immédiatement

$$\frac{\partial\psi}{\partial\rho_1} = (h + 2a\alpha\cos\rho_1 + 2b\beta\sin\rho_1)F(\rho_1),$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\rho_2} = (k + 2a'\alpha\cos\rho_2 + 2b'\gamma i\sin\rho_2)\Phi(\rho_2),$$

en posant

$$h = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + b^2, \qquad k = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - b^2.$$

On a alors :

$$\theta = \int F\, d\rho_1 + \int \Phi\, d\rho_2,$$

$$\varphi = a'\int F\cos\rho_1\, d\rho_1 + a\int \Phi\cos\rho_2\, d\rho_2,$$

$$\psi = \int (2a\alpha\cos\rho_1 + 2b\beta\sin\rho_1 + h)F\, d\rho_1 + \int (2a'\alpha\cos\rho_2 + 2b\gamma i\sin\rho_2 + k)\Phi\, d\rho_2.$$

Ces formules définissent une surface de translation Σ_1 applicable sur Σ.

On peut aisément faire disparaître les signes de quadrature en posant

$$u = \operatorname{tg}\frac{\rho_1}{2}, \qquad v = \operatorname{tg}\frac{\rho_2}{2};$$

$$F = U'''(1 + u^2)^2, \qquad \Phi = V'''(1 + v^2)^2,$$

U et V désignant des fonctions arbitraires de u et de v. On n'aura plus alors qu'à effectuer des quadratures de la forme

$$\int U'''\, du = U'',$$

$$\int uU'''\, du = uU'' - U',$$

$$\int u^2U'''\, du = u^2U'' - 2uU' + 2U.$$

On pourrait développer des calculs analogues quand les focales sont des paraboles. Nous montrerons plus loin que cette méthode fournit une infinité de surfaces applicables sur le paraboloïde quelconque.

Dans le même ordre d'idées, proposons-nous de chercher les surfaces sur lesquelles un système C est formé de lignes de longueur nulle, ce qui revient à la recherche des surfaces *minima* applicables les unes sur les autres.

Dans ce cas, les centres de courbure de S sont sur le cône isotrope, ayant pour sommet l'origine; les lieux des centres sont des sections du cône par des plans isotropes. Soit, en effet, γ l'une de ces courbes, si son plan n'est pas isotrope; γ est un cercle, le second lieu des centres est alors une droite et la surface ne répond pas à la question.

Donc γ doit être tangent au cercle de l'infini. Soit

$$x - iy = a$$

l'équation de son plan. Si on considère une sphère dont le centre décrit cette courbe, le plan de la deuxième courbe focale γ' a pour équation

$$(X - x)x'' + (Y - y)y'' + (Z - z)z'' + 1 - (x'^2 + y'^2 + z'^2) = 0$$

en prenant pour variable le rayon de la sphère (¹).

De l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

on tire par différentiation :

$$xx'' + yy'' + zz'' + x'^2 + y'^2 + z'^2 = 0.$$

L'équation de γ' s'écrit alors :

$$Xx'' + Yy'' + Zz'' + 1 = 0,$$

elle doit représenter un plan isotrope; on a donc

$$x''^2 + y''^2 + z''^2 = 0,$$

d'où

$$z'' = 0;$$

l'équation du plan est en définitive

$$Xx'' + Yy'' + 1 = 0$$

ou

$$X - iY + \frac{1}{x''} = 0,$$

et x'' doit être constant.

On peut donc prendre les équations des plans des deux focales sous la forme

$$X_2 - iY_2 = a,$$
$$X_1 - iY_1 = b.$$

Posons

$$Z_2 = au,$$

il vient :

$$X_2 + iY_2 = -au^2.$$

(¹) DARBOUX, *Leçons*.

D'où

$$X_2 = \frac{a}{2}(1 - u^2), \qquad Y_2 = \frac{ai}{2}(1 + u^2), \qquad Z_2 = au;$$

on aura de même :

$$X_1 = \frac{b}{2}(1 - v^2), \qquad Y_1 = \frac{bi}{2}(1 + v^2), \qquad Z_1 = bv.$$

La distance des deux centres est donnée par l'équation

$$d^2 = \Sigma(X_1 - X_2)^2 = ab(u - v)^2;$$

on peut donc prendre pour les rayons de courbure

$$R_2 = u\sqrt{ab}, \qquad R_1 = v\sqrt{ab}.$$

Les coordonnées d'un point de Σ sont données par des équations de la forme

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \lambda X_2, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = \mu X_1,$$

λ et μ sont respectivement des fonctions de u et v. Posons :

$$\lambda = \frac{1}{a}F(u), \qquad \mu = \frac{1}{b}G(v).$$

On obtient les formules connues qui expriment les coordonnées d'un point d'une surface *minima :*

$$(11) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int (1 - u^2)F(u)du + \dfrac{1}{2}\int (1 - v^2)G(v)dv, \\ y = \dfrac{i}{2}\displaystyle\int (1 + u^2)F(u)du + \dfrac{i}{2}\int (1 + v^2)G(v)dv, \\ z = \displaystyle\int uF(u)du \qquad + \int vG(v)dv. \end{cases}$$

Pour obtenir la surface Σ_1 applicable, remarquons, comme précédemment, que l'on a :

$$\frac{\partial \theta}{\partial u} = \lambda = \frac{1}{a}F(u), \qquad \frac{\partial \theta}{\partial v} = \mu = \frac{1}{b}G(v);$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \lambda R_2 = \sqrt{\frac{b}{a}}\,uF(u),$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} = \mu R_1 = \sqrt{\frac{a}{b}}\,vG(v).$$

On calcule ψ au moyen des équations

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 + \frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial u} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 + \frac{\partial\theta}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial v} = 0,$$

qui donnent :

$$\frac{\partial\psi}{\partial u} = -bu^2\mathrm{F}(u), \qquad \frac{\partial\psi}{\partial v} = -av^2\mathrm{G}(v).$$

Pour rapporter la surface à des coordonnées cartésiennes, posons :

$$x_1 - iy_1 = \sqrt{ab}\,\theta, \qquad x_1 + iy_1 = \frac{1}{\sqrt{ab}}\psi, \qquad z_1 = \varphi.$$

On a

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = \frac{1}{2}m(1-u^2)\mathrm{F}(u), \qquad \frac{\partial x_1}{\partial v} = \frac{1}{2m}(1-v^2)\mathrm{G}(v),$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial u} = \frac{i}{2}m(1+u^2)\mathrm{F}(u), \qquad \frac{\partial y_1}{\partial v} = \frac{i}{2m}(1+v^2)\mathrm{G}(v),$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial u} = mu\mathrm{F}(u), \qquad \frac{\partial z_1}{\partial v} = \frac{1}{m}v\mathrm{G}(v)$$

en posant $m = \sqrt{\frac{b}{a}}$.

On voit qu'on obtient les coordonnées d'un point de Σ_1 en remplaçant dans les formules (11) les fonctions $\mathrm{F}(u)$ et $\mathrm{G}(v)$, respectivement, par $m\mathrm{F}(u)$ et $\frac{1}{m}\mathrm{G}(v)$, où m désigne un paramètre arbitraire (1). Le réseau C est ici plusieurs fois C.

M. Guichard a déterminé les réseaux C dans lesquels les courbes d'une famille sont planes (2).

Supposons que ce soient les courbes $v = \mathrm{ct}^e$; on peut alors déterminer trois fonctions de v : A, B, C, telles que

$$\mathrm{A}\frac{\partial x}{\partial u} + \mathrm{B}\frac{\partial y}{\partial u} + \mathrm{C}\frac{\partial z}{\partial u} = 0;$$

cette équation exprime que la tangente à la courbe $v = \mathrm{ct}^e$ est parallèle à un plan fixe. D'après les relations (2), on a

$$\mathrm{AX}_2 + \mathrm{BY}_2 + \mathrm{CZ}_2 = 0,$$

(1) Darboux, *Leçons*, t. I.

(2) *Comptes rendus*, 27 mars 1911.

c'est-à-dire que, quand u varie seul, le centre C_2 décrit une courbe plane dont le plan passe par l'origine. Le problème revient donc à déterminer une surface telle que sur la surface focale une famille de géodésiques a pour conjuguées des courbes planes dont les plans passent par un point fixe.

On peut aisément obtenir des solutions particulières. Supposons que l'une des nappes de la surface focale se réduise à une courbe; l'autre nappe est un lieu de coniques; si on considère la surface comme l'enveloppe d'une sphère variable et si on désigne par x, y, z les coordonnées du centre en prenant pour variable indépendante le rayon, l'équation du plan d'une de ces coniques s'écrit :

$$(X-x)x'' + (Y-y)y'' + (Z-z)z'' + 1 - (x'^2 + y'^2 + z'^2) = 0.$$

Pour que ce plan passe par l'origine, on doit avoir

$$xx'' + yy'' + zz'' + x'^2 + y'^2 + z'^2 - 1 = 0,$$

d'où, en intégrant,

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 + 2aR + b;$$

en ajoutant à R une constante, on peut écrire :

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = \text{ct}^{\text{e}}.$$

La surface S est alors l'enveloppe d'une sphère qui coupe orthogonalement une sphère fixe.

Le réseau C correspondant contient une famille de courbes planes qui sont en même temps les courbes de contact de cylindres circonscrits.

On obtient également des solutions particulières en supposant la surface S engendrée par une courbe plane γ dont le plan P roule sur une développable D. Les normales à γ dans une de ses positions forment une développable réduite à un plan; ces normales touchent la développable D en des points situés sur une génératrice rectiligne; on peut donc regarder ces points comme situés dans un plan passant par l'origine.

[**5**] L'équation générale (10) est assez compliquée; on peut toutefois, en développant les calculs, l'obtenir sous une forme explicite relativement simple.

Écrivons l'équation tangentielle de la surface donnée Σ sous la forme

$$p = Wf\left(\frac{U-Vi}{W}, \frac{U+Vi}{W}\right)$$

et posons

$$\frac{U-Vi}{W} = u, \qquad \frac{U+Vi}{W} = v, \qquad W = w,$$

on a :

$$p = wf(u, v).$$

On obtient aisément les équations suivantes :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial U \partial V} = -\frac{i}{w}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial U \partial W} = -\frac{1}{w}\left[u\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + (u+v)\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + v\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right],$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial V \partial W} = \frac{i}{w}\left[u\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - (u-v)\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} - v\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right].$$

Portons ces valeurs dans l'équation (10), elle devient

$$iWZ_1Z_2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right) - iUX_1X_2\left[u\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - (u-v)\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} - v\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right]$$
$$+ VY_1Y_2\left[\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + (u+v)\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + v\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right] = 0,$$

ou en ordonnant, par rapport aux dérivées partielles et en tenant compte des valeurs de u et v :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}[U(U - Vi)X_1X_2 + iV(U - Vi)Y_1Y_2 - W^2Z_1Z_2]$$
$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}[-U(U + Vi)X_1X_2 + iV(U + Vi)Y_1Y_2 + W^2Z_1Z_2]$$
$$+ 2i\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(X_1X_2 + Y_1Y_2)UV = 0.$$

Remarquons que l'on a :

$$WZ_1 = -(UX_1 + VY_1),$$
$$WZ_2 = -(UX_2 + VY_2).$$

En substituant ces valeurs dans l'équation précédente, il vient, après réductions et en divisant par UV :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(X_1 - iY_1)(X_2 - iY_2) + \frac{\partial^2 f}{\partial v_2}(X_1 + iY_1)(X_2 + iY_2) - 2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(X_1X_2 + Y_1Y_2) = 0.$$

En employant les coordonnées symétriques (¹), on a :

$$X_1 - iY_1 = s + \sqrt{rt},$$
$$X_1 + iY_1 = -\alpha\beta(s + \sqrt{rt}) + \alpha p + \beta q - \xi,$$
$$X_2 - iY_2 = s - \sqrt{rt},$$
$$X_2 + iY_2 = -\alpha\beta(s - \sqrt{rt}) + \alpha p + \beta q - \xi.$$

(¹) Darboux, *Leçons*, I, p. 245.

Si on porte ces valeurs dans la dernière équation, les coefficients des dérivées partielles deviennent respectivement

$$s^2 - rt,$$

$$\begin{gathered}\alpha^2\beta^2(s^2 - rt) - 2\alpha\beta s(\alpha p + \beta q - \xi) + (\alpha p + \beta q - \xi)^2 \\ -2\alpha\beta(s^2 - rt) + 2s(\alpha p + \beta q - \xi),\end{gathered}$$

et l'équation s'écrit finalement :

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2\alpha\beta\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \alpha^2\beta^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)(s^2 - rt) \\ &- 2s(\alpha p + \beta q - \xi)\left(\alpha\beta\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\right) + (\alpha p + \beta q - \xi)^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 0.\end{aligned}\right.$$

Ainsi que nous allons le montrer, u et v sont indépendants de r, s, t, de sorte que cette équation est une équation de Monge-Ampère.

On a :

$$U = Y_1Z_2 - Z_1Y_2, \qquad V = Z_1X_2 - X_1Z_2, \qquad W = X_1Y_2 - Y_1X_2.$$

D'où

$$U - Vi = i[Z_2(X_1 - iY_1) - Z_1(X_2 - iY_2)] = -i(p+q)\sqrt{rt}.$$

De même,

$$U + Vi = i[(\alpha + \beta)(\alpha p + \beta q - \xi) - (p+q)\alpha\beta]\sqrt{rt}.$$

Enfin,

$$\begin{aligned} W &= \frac{i}{2}[(X_1 + iY_1)(X_2 - iY_2) - (X_1 - iY_1)(X_2 + iY_2)] \\ &= -i(\alpha p + \beta q - \xi)\sqrt{rt}.\end{aligned}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} u &= \frac{p+q}{\alpha p + \beta q - \xi}, \\ v &= \frac{\alpha\beta(p+q) - (\alpha+\beta)(\alpha p + \beta q - \xi)}{\alpha p + \beta q - \xi}.\end{aligned}$$

Appliquons à l'équation (12) la transformation de Legendre en remplaçant

α et β	par	p et q,
p et q	par	x et y,
$\alpha p + \beta q - \xi$	par	z.

L'équation prend la forme

$$(13) \quad z^2(rt-s^2)\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + 2z\left(pq\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\right)s - \left(p^2q^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + 2pq\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right) = 0,$$

où l'on a :

$$u = \frac{x+y}{z}, \qquad v = pq\frac{x+y}{z} - (p+q).$$

Si la surface Σ est un paraboloïde de révolution, f a la forme

$$f = auv.$$

Alors,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 0.$$

L'équation (13) se réduit à

$$sz - pq = 0$$

que l'on sait intégrer.

Supposons que f soit linéaire par rapport à v; la surface Σ est une surface réglée à plan directeur isotrope; on peut écrire

$$p = w[f(u) + v\varphi(u)]$$

et l'équation (13) devient

$$2(sz - pq)\varphi'(u) - f''(u) - v\varphi''(u) = 0,$$

c'est-à-dire

$$sz - pq - \mathrm{F}(u) - v\Phi(u) = 0.$$

Posons :

$$z_1 = \frac{x+y}{z}.$$

Il vient

$$u = z_1, \qquad v = p_1 q_1 \frac{(x+y)^2}{z_1^3} - \frac{1}{z_1},$$

$$sz - pq = -\frac{(x+y)^2}{z^4}(s_1 z_1 - p_1 q_1) - \frac{1}{z_1^2};$$

l'équation prend alors la forme

$$s_1 = p_1 q_1 \Phi_1(z_1) + \frac{\mathrm{F}(z_1)}{(x+y)^2}.$$

Enfin, en prenant pour fonction inconnue une fonction convenablement choisie de z_1, on fait disparaître le terme en pq et on ramène l'équation à la forme plus simple

$$s = \frac{f(z)}{(x+y)^2} \tag{14}$$

qui diffère par le changement de y en $-\frac{1}{y}$, de l'équation étudiée dans les *Leçons* de M. Darboux (¹).

[**6**] M. Darboux a déterminé la forme de f pour laquelle l'équation (14) est intégrable par sa méthode, en se bornant aux intégrales intermédiaires du second ordre. On peut se poser à ce sujet un problème analogue à celui que Sophus Lie a résolu pour l'équation

$$s = f(z)$$

et chercher si l'équation (14) peut admettre des intégrales intermédiaires d'ordre quelconque. Nous laisserons de côté le cas où la fonction f serait constante ou linéaire.

On constate facilement (²) que si $d\varphi$ est une combinaison intégrable de l'un des systèmes de caractéristiques, φ a l'une des deux formes :

$$\varphi(x, y, p_1, p_2, \ldots, p_n),$$
$$\varphi(x, y, q_1, q_2, \ldots, q_n).$$

Supposons que ce soit la première; $p_1, p_2, \ldots, p_n$ désignent les dérivées partielles de z par rapport à x seulement jusqu'à l'ordre n.

φ doit vérifier l'équation

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial p_1}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial p_1} + \frac{\partial p_2}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial p_2} + \ldots + \frac{\partial p_n}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial p_n} = 0, \tag{15}$$

où on suppose $\frac{\partial p_1}{\partial y}, \frac{\partial p_2}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial p_n}{\partial y}$ exprimées en fonction de $p_1, p_2, \ldots, p_n$ par les formules suivantes :

$$\frac{\partial p_1}{\partial y} = s = \frac{f(z)}{(x+y)^2},$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial y} = \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{p_1 f'(z)}{(x+y)^2} - 2\frac{f(z)}{(x+y)^3}.$$

(¹) T. IV, p. 324.
(²) Cf. Goursat, *Éq. aux dérivées partielles du second ordre II.*

D'une manière générale, on aura :

$$\frac{\partial p_k}{\partial y}=\frac{\partial^{k-1} s}{\partial x^{k-1}}=\frac{1}{(x+y)^2}\left[p_{k-1}f'(z)+\ldots-(-1)^k k!\frac{f(z)}{(x+y)^{k-1}}\right].$$

La parenthèse est linéaire par rapport à f et ses dérivées. Si on regarde $\frac{1}{x+y}$ comme étant de poids 1 et $p_1, p_2, \ldots, p_n$ comme affectés de poids respectivement égaux à leurs indices, on voit sans peine que la parenthèse est de poids $(k-1)$.

L'équation (15) est alors linéaire par rapport à f et ses n premières dérivées; elle a la forme

$$\text{(16)} \qquad A_n f^n + A_{n-1}f^{n-1}+\ldots+A_1 f' + A_0 f + \frac{\partial \varphi}{\partial y}=0,$$

où l'on a en particulier :

$$A_0=\frac{1}{(x+y)^2}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial p_1}-\frac{2}{x+y}\frac{\partial\varphi}{\partial p_2}+\ldots-(-1)^n\frac{n!}{(x+y)^{n-1}}\frac{\partial\varphi}{\partial p_n}\right].$$

Si dans l'équation (16) on donne à $x, y, p_1, \ldots, p_n$ des valeurs arbitraires, on obtient pour f une équation linéaire à coefficients constants; donc f est de la forme

$$f(z)=e^{az}\theta_1(z)+e^{bz}\theta_2(z)+\ldots+\alpha,$$

$\theta_1, \theta_2 \ldots$ désignant des polynomes entiers en z et $a, b, \ldots, \alpha$ des constantes.

Si on substitue cette valeur de f dans l'équation (16), on obtient une identité de la forme

$$e^{az}\Theta_1(z)+e^{bz}\Theta_2(z)+\ldots+A_0\alpha+\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0,$$

$\Theta_1, \Theta_2 \ldots$ désignent encore des polynomes entiers en z, mais qui renferment $x, y, p_1, \ldots, p_n$; si une telle identité existe, on a nécessairement :

$$A_0\alpha+\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0.$$

Supposons d'abord $\alpha=0$; on a alors

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0,$$

et l'équation (15) devient :

$$\text{(15 bis)} \qquad \frac{\partial p_1}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial p_1}+\frac{\partial p_2}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial p_2}+\ldots+\frac{\partial p_n}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial p_n}=0.$$

Le premier membre est un polynôme entier en $\frac{1}{x+y}$; comme φ et ses dérivées ne dépendent pas de y, les coefficients de ce polynôme sont tous nuls; le coefficient de $\frac{1}{(x+y)^{n-1}}$ est

$$\pm n!\frac{\partial\varphi}{\partial p_n}=0;$$

on verrait de proche en proche que toutes les dérivées partielles de φ sont nulles, sauf $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$; la seule combinaison intégrable est donc $dx=0$.

Supposons maintenant que α ne soit pas nul; on a

$$A_0\alpha+\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0,$$

c'est-à-dire

$$(17)\qquad X(\varphi)=\frac{(x+y)^2}{\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial p_1}-\frac{2}{x+y}\frac{\partial\varphi}{\partial p_2}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{n!}{(x+y)^{n-1}}\frac{\partial\varphi}{\partial p_n}=0,$$

équation que l'on peut joindre à l'équation (15) pour déterminer φ.

Multiplions l'équation (15) par $(x+y)^2$, l'équation (17) par f et retranchons membre à membre, les termes en f disparaissent, sauf dans le coefficient de $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$; il vient :

$$(x+y)^2\left(1-\frac{f}{\alpha}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y}+p_1f'\frac{\partial\varphi}{\partial p_2}+\sum_3^n(p_{k-1}f'+A_{k-1})\frac{\partial\varphi}{\partial p_k}=0;$$

la sommation étant étendue à l'indice k.

A_{k-1} est de poids $k-1$ et ne renferme que les dérivées partielles $p_1, p_2, \ldots, p_{k-2}$.

Posons

$$u=f-\alpha,$$

l'équation précédente s'écrit :

$$(18)\qquad \frac{-u(x+y)^2}{\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+u'p_1\frac{\partial\varphi}{\partial p_2}+\sum_3^n(u'p_{k-1}+A_{k-1})\frac{\partial\varphi}{\partial p_k}=0;$$

différentions par rapport à z :

$$\frac{-u'(x+y)^2}{\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+u''p_1\frac{\partial\varphi}{\partial p_2}+\sum_3^n\left(u''p_{k-1}+\frac{\partial A_{k-1}}{\partial z}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial p_k}=0.$$

Si $u'^2 - uu''$ n'est pas nul, on peut résoudre ces deux équations par rapport à $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ et $\frac{\partial\varphi}{\partial p_2}$; en éliminant $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, on a

$$Y(\varphi) = p_1\frac{\partial\varphi}{\partial p_2} + \sum_3^n (p_{k-1} + \alpha_{k-1})\frac{\partial\varphi}{\partial p_k} = 0,$$

où α_{k-1} est de poids $k-1$ et ne renferme que $p_1, p_2, \ldots, p_{k-2}, \frac{1}{x+y}$ et z.

A cette équation, joignons l'équation (17) et formons le crochet $X_1 = [YX]$:

$$X_1(\varphi) = \frac{\partial\varphi}{\partial p_2} + \beta_1\frac{\partial\varphi}{\partial p_3} + \ldots + \beta_{k-2}\frac{\partial\varphi}{\partial p_k} + \ldots = 0$$

où l'on a, d'une manière générale,

$$\beta_{k-2} = X(p_{k-1} + \alpha_{k-1});$$

cette expression est de poids $k-2$ et ne contient les dérivées partielles de z que jusqu'à l'ordre $k-2$.

Formons de même $X_2 = [YX_1]$:

$$X_2(\varphi) = \gamma_0\frac{\partial\varphi}{\partial p_3} + \gamma_1\frac{\partial\varphi}{\partial p_k} + \ldots + \gamma_{k-3}\frac{\partial\varphi}{\partial p_k} + \ldots = 0;$$

γ_{k-3} est de poids $k-3$ et ne renferme les dérivées partielles que jusqu'à l'ordre $k-3$.

Si on forme la suite d'équations

$$X_3 = [YX_2], \quad X_4 = [YX_3], \quad \ldots\ldots, \quad X_{h+1} = [YX_h] \ldots,$$

X_h sera de la forme

$$X_h(\varphi) = a_h\frac{\partial\varphi}{\partial p_{h+1}} + \left(b_h p_1 + \frac{c_h}{x+y}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial p_{h+2}} + \ldots = 0;$$

a_h est une constante, b_h et c_h ne renferment que z; on vérifie aisément cette loi de proche en proche; pour déterminer a_{h+1}, considérons $X_{h+1} = [YX_h]$:

$$a_{h+1} = Y\left(b_h p_1 + \frac{c_h}{x+y}\right) - X_h(p_{h+1} + \alpha_{h+1});$$

en remarquant que Y ne contient ni $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ ni $\frac{\partial\varphi}{\partial p_1}$, et que α_{h+1} ne renferme pas p_{h+1}, $p_{h+2}, \ldots, p_n$; on voit que

$$a_{h+1} = -X_h(p_{h+1}) = -a_h,$$

en appliquant sans aucune modification le raisonnement de Lie, on voit finalement que

$$X_{n-1}(\varphi) = (-1)^n\frac{\partial\varphi}{\partial p_n} = 0.$$

Par suite, φ ne dépend pas de p_n; de proche en proche, on en déduit que φ ne dépend pas de $p_2, p_3, \ldots, p_n$; l'équation (18) montre alors que φ est aussi indépendante de y et, d'après (17), φ ne renferme pas non plus p_1; φ dépend donc uniquement de x, la seule combinaison intégrable est $dx = 0$.

Si $u'^2 - uu''$ n'est pas nul, l'équation (14) ne peut être intégrée par la méthode de M. Darboux.

Supposons $u'^2 - uu'' = 0$, c'est-à-dire

$$f(z) = \mathrm{A}e^{az} + \alpha.$$

Sous cette forme, la fonction f n'est pas encore parfaitement déterminée; l'équation (14) s'écrit :

$$s = \frac{\mathrm{A}e^{az} + \alpha}{(x+y)^2}.$$

Posons

$$z = z' - \alpha \log(x+y),$$

il vient

$$s' = \frac{\mathrm{A}e^{az'}}{(x+y)^m} = \frac{\mathrm{F}(z')}{(x+y)^m},$$

en posant :

$$m = a\alpha + 2.$$

Si m n'est pas nul, cette équation est analogue à l'équation (14); on peut lui appliquer les considérations que nous venons de développer; il suffit de remarquer que

$$\frac{\partial p_k}{\partial y} = \frac{1}{(x+y)^m} \mathrm{P}_{k-1},$$

P_{k-1} étant de poids $k-1$ par rapport à $\frac{1}{x+y}$, $p_1, p_2, \ldots, p_{k-1}$. On sera alors dans le premier des deux cas que nous venons d'étudier; la fonction $\mathrm{F}(z')$ vérifie une équation linéaire à coefficients constants, *sans second membre*. S'il existe une intégrale intermédiaire, celle-ci ne dépendra pas de y, et en raisonnant comme pour l'équation (15 *bis*), on verra que la seule combinaison intégrable est $dx = 0$.

Il faut donc que $m = 0$ ou $\alpha = -\frac{2}{a}$; la fonction s' est déterminée par l'équation de Liouville. Par conséquent, pour que l'équation (14) puisse être intégrée par la méthode de M. Darboux, il faut, en supposant que f n'est ni constante ni linéaire, qu'elle ait la forme

$$f(z) = \mathrm{A}e^{az} - \frac{2}{a}.$$

[7] A la théorie des réseaux C de l'espace à trois dimensions se rattache immédiatement celle des réseaux de l'espace à quatre dimensions applicables sur un plan. M. Guichard leur a donné le nom de réseaux L et il a montré que tout réseau harmonique à une congruence isotrope est L; inversement, il existe deux congruences isotropes harmoniques à un réseau L.

Si on joint un point fixe aux deux foyers d'une congruence isotrope, on obtient un réseau point parallèle à une infinité de réseaux L. Ce résultat est d'ailleurs une conséquence immédiate du paragraphe 1.

Dans l'identité

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - d\varphi^2 = d\theta\, d\psi$$

posons :

$$i\varphi = t.$$

Le point $M(x, y, z, t)$ décrit un réseau L.

D'autre part, si on considère les deux points F_1 et F_2 ayant respectivement pour coordonnées

$$X_1, Y_1, Z_1, T_1 = iR_1, \qquad X_2, Y_2, Z_2, T_2 = iR_2,$$

on reconnaît facilement qu'ils décrivent les réseaux focaux d'une congruence isotrope et on a :

$$(19) \qquad \begin{cases} \dfrac{\frac{\partial x}{\partial u}}{X_2} = \dfrac{\frac{\partial y}{\partial u}}{Y_2} = \dfrac{\frac{\partial z}{\partial u}}{Z_2} = \dfrac{\frac{\partial t}{\partial u}}{T_2}, \\[2ex] \dfrac{\frac{\partial x}{\partial v}}{X_1} = \dfrac{\frac{\partial y}{\partial v}}{Y_1} = \dfrac{\frac{\partial z}{\partial v}}{Z_1} = \dfrac{\frac{\partial t}{\partial v}}{T_1}. \end{cases}$$

Le réseau L est donc parallèle au réseau point $OF_1 . OF_2$.

On peut aussi rattacher les réseaux L aux congruences de normales dans la géométrie de Cayley.

Prenons pour absolu la quadrique dont l'équation est

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0.$$

Soient X, Y, Z, T les coordonnées d'un point M d'une surface S et $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ celles du plan tangent; nous supposerons :

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + T^2 = 1,$$
$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 1.$$

Les coordonnées des centres de courbure s'expriment par les formules

$$\begin{aligned} X_1 &= X \cos \rho_1 + \alpha \sin \rho_1, & X_2 &= X \cos \rho_2 + \alpha \sin \rho_2, \\ Y_1 &= Y \cos \rho_1 + \beta \sin \rho_1, & Y_2 &= Y \cos \rho_2 + \beta \sin \rho_2, \\ Z_1 &= Z \cos \rho_1 + \gamma \sin \rho_1, & Z_2 &= Z \cos \rho_2 + \gamma \sin \rho_2, \\ T_1 &= T \cos \rho_1 + \delta \sin \rho_1. & T_2 &= T \cos \rho_2 + \delta \sin \rho_2. \end{aligned}$$

Si u et v sont les paramètres des lignes de courbure, les formules d'O. Rodrigue généralisées s'écrivent :

$$\frac{\partial X}{\partial u}\cos\rho_1+\frac{\partial \alpha}{\partial u}\sin\rho_1=0, \qquad \frac{\partial X}{\partial v}\cos\rho_2+\frac{\partial \alpha}{\partial v}\sin\rho_2=0.$$

Posons :

$$\frac{\frac{\partial x}{\partial u}}{X_2}=\frac{\frac{\partial y}{\partial u}}{Y_2}=\frac{\frac{\partial z}{\partial u}}{Z_2}=\frac{\frac{\partial t}{\partial u}}{T_2}=\lambda,$$

$$\frac{\frac{\partial x}{\partial v}}{X_1}=\frac{\frac{\partial y}{\partial v}}{Y_1}=\frac{\frac{\partial z}{\partial v}}{Z_1}=\frac{\frac{\partial t}{\partial v}}{T_1}=\mu.$$

Écrivons la condition d'intégrabilité pour x :

$$\frac{\partial}{\partial v}[\lambda(X\cos\rho_2+\alpha\sin\rho_2)]=\frac{\partial}{\partial u}[\mu(X\cos\rho_1+\alpha\sin\rho_1)],$$

c'est-à-dire

$$X\left[\frac{\partial}{\partial v}(\lambda\cos\rho_2)-\frac{\partial}{\partial u}(\mu\cos\rho_1)\right]+\alpha\left[\frac{\partial}{\partial v}(\lambda\sin\rho_2)-\frac{\partial}{\partial u}(\mu\sin\rho_1)\right]=0.$$

Cette équation devant être satisfaite pour les quatre coordonnées, est identique; on doit donc avoir :

$$\frac{\partial}{\partial v}(\lambda\cos\rho_2)=\frac{\partial}{\partial u}(\mu\cos\rho_1),$$

$$\frac{\partial}{\partial v}(\lambda\sin\rho_2)=\frac{\partial}{\partial u}(\mu\sin\rho_1).$$

On peut choisir λ et μ, de manière que ces deux équations soient vérifiées, et on pourra alors poser

$$\lambda\cos\rho_2=\frac{\partial\xi}{\partial u}, \qquad \mu\cos\rho_1=\frac{\partial\xi}{\partial v},$$

$$\lambda\sin\rho_2=\frac{\partial\eta}{\partial u}, \qquad \mu\sin\rho_1=\frac{\partial\eta}{\partial v},$$

et on a des équations de la forme

$$\frac{\partial x}{\partial u}=X\frac{\partial\xi}{\partial u}+\alpha\frac{\partial\eta}{\partial u}, \qquad \frac{\partial x}{\partial v}=X\frac{\partial\xi}{\partial v}+\alpha\frac{\partial\eta}{\partial v},$$

d'où on tire :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}=X\frac{\partial^2\xi}{\partial u\,\partial v}+\alpha\frac{\partial^2\eta}{\partial u\,\partial v}.$$

On a des équations analogues pour y, z, t et, par suite, x, y, z, t, ξ, η vérifient une même équation de Laplace; le point (x, y, z, t) décrit donc un réseau.

D'autre part,

$$
\begin{aligned}
dx &= \mathrm{X}d\xi + \alpha d\eta,\\
dy &= \mathrm{Y}d\xi + \beta d\eta,\\
dz &= \mathrm{Z}d\xi + \gamma d\eta,\\
dt &= \mathrm{T}d\xi + \delta d\eta,
\end{aligned}
$$

en faisant la somme des carrés

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 + dt^2 = d\xi^2 + d\eta^2,$$

c'est-à-dire que le réseau est L.

[**8**] Le résultat précédent peut se déduire du paragraphe I par une transformation de contact qui conserve les lignes de courbure en passant de l'espace euclidien à l'espace non euclidien. Conservons les notations du paragraphe I et considérons les deux points F_1 et F_2 qui ont pour coordonnées

$$\frac{\mathrm{X}_1}{\mathrm{R}_1}, \frac{\mathrm{Y}_1}{\mathrm{R}_1}, \frac{\mathrm{Z}_1}{\mathrm{R}_1} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{X}_2}{\mathrm{R}_2}, \frac{\mathrm{Y}_2}{\mathrm{R}_2}, \frac{\mathrm{Z}_2}{\mathrm{R}_2}.$$

La droite $\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2$ engendre une congruence dont F_1 et F_2 sont les foyers et dont les plans focaux sont conjugués par rapport à la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0.$$

A la surface S, associons son inverse par rapport à l'origine. Soient M et M′ deux points inverses et μ et μ' les points correspondants des représentations sphériques des deux surfaces; la droite $\mu\mu'$ est parallèle à MM′, car les deux normales forment avec MM′ un triangle isocèle dont les côtés sont parallèles à ceux du triangle $\mathrm{O}\mu\mu'$.

Quand M se déplace sur une ligne de courbure, il en est de même de M′, et les tangentes aux trajectoires de μ et μ' sont parallèles à celles des lignes de courbure; elles sont donc dans un même plan et, par suite, $\mu\mu'$ engendre une développable. Soit G la congruence engendrée par $\mu\mu'$; les développables de G correspondent aux lignes de courbure de S et elles découpent sur la sphère un réseau conjugué; les plans focaux sont donc conjugués par rapport à cette sphère; autrement dit, la congruence G est une congruence de normales non euclidiennes, la sphère étant prise pour absolu.

D'autre part, les droites $\mu\mu'$ et la normale à S sont dans un même plan passant par l'origine O; comme les développables se correspondent, les foyers sont en perspective par rapport à O; si on désigne par F_1 et F_2 les foyers de $\mu\mu'$, on a immédiatement, par des triangles semblables,

$$\frac{OF_1}{OC_1} = \frac{O\mu}{C_1M}, \qquad OF_1 = \frac{OC_1}{R_1};$$

les coordonnées du point F_1 sont donc

$$\frac{X_1}{R_1}, \ \frac{Y_1}{R_1}, \ \frac{Z_1}{R_1},$$

de même celles du point F_2 :

$$\frac{X_2}{R_2}, \ \frac{Y_2}{R_2}, \ \frac{Z_2}{R_2};$$

c'est ce que nous voulions établir.

Si on adopte les coordonnées homogènes

$$X_1,\ Y_1,\ Z_1,\ T_1 = iR_1, \qquad X_2,\ Y_2,\ Z_2,\ T_2 = iR_2,$$

en posant, comme plus haut, $i\varphi = t$, on voit que l'équation homogène de la sphère est

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0$$

et les tangentes au réseau L vérifient les équations (19).

La transformation que nous venons de définir fait correspondre aux lignes de courbure euclidiennes des lignes de courbure non euclidiennes; nous allons montrer que c'est une transformation de contact.

Un point quelconque de $\mu\mu'$ a pour coordonnées

$$x = c + \rho X, \qquad y = c' + \rho Y, \qquad z = c'' + \rho Z.$$

Exprimons que ce point décrit une surface dont le plan tangent contient la conjuguée de $\mu\mu'$ par rapport à la sphère. Cette droite a pour équations :

$$\begin{aligned} \Sigma cx - 1 &= 0, \\ \Sigma Xx &= 0. \end{aligned}$$

Il faut exprimer que le point ayant pour coordonnées

$$x + \lambda dx, \qquad y + \lambda dy, \qquad z + \lambda dz$$

est sur cette droite; on a :

$$\begin{aligned} \Sigma cx - 1 + \lambda \Sigma cdx &= 0, \\ \Sigma Xx + \lambda \Sigma Xdx &= 0. \end{aligned}$$

Éliminons λ :

$$(\Sigma cx - 1)\Sigma Xdx - \Sigma cdx\,\Sigma Xx = 0.$$

Or,

$$\begin{aligned}\Sigma cx - 1 &= \rho\Sigma cX,\\ \Sigma Xx &= \rho\Sigma X^2 + \Sigma cX,\\ \Sigma X dx &= \rho\Sigma X dX + \Sigma X dc + \Sigma X^2 d\rho,\\ \Sigma c dx &= \Sigma cX d\rho.\end{aligned}$$

En substituant dans l'équation précédente, il vient :

$$\rho^2\Sigma X dX + \rho\Sigma X dc - \Sigma cX d\rho = 0,$$

$$\Sigma X dX + \frac{\rho\, d(\Sigma cX) - \Sigma cX d\rho}{\rho^2} = 0;$$

en intégrant et en désignant par a une constante :

$$\frac{1}{2}\Sigma X^2 + \frac{\Sigma cX}{\rho} = a.$$

D'où

$$\rho = -\frac{2\Sigma cX}{\Sigma X^2 - a}.$$

L'équation du plan tangent à la surface est

$$\Sigma(c + \mu X)x - 1 = 0.$$

Pour déterminer μ, exprimons que ce plan contient le point (x, y, z). On trouve immédiatement :

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\mu} + \frac{\Sigma X^2}{\Sigma cX} = 0.$$

D'où

$$\mu = -\frac{2\Sigma cX}{\Sigma X^2 + a}.$$

La forme des équations précédentes montre que les coordonnées d'un point de la nouvelle surface, ainsi que l'équation du plan tangent, ne dépendent que de l'élément de contact de S; par suite, si on regarde a comme fixe, la transformation est bien une transformation de contact; en faisant varier a, on obtient des surfaces non euclidiennes parallèles.

Des équations précédentes, on tire :

$$\begin{aligned}\Sigma x^2 - 1 &= a\rho^2,\\ 2\Sigma Xx &= \rho(\Sigma X^2 + a).\end{aligned}$$

En éliminant ρ, on obtient l'équation caractéristique de la transformation

$$(\Sigma X^2 + a)^2(\Sigma x^2 - 1) - 4a(\Sigma Xx)^2 = 0.$$

A tout point x, y, z correspondent deux sphères symétriques par rapport à l'origine; à tout point X, Y, Z correspond une quadrique circonscrite à la sphère (sphère cayleyienne).

DEUXIÈME PARTIE.

[**1**] Dans le cas où la surface Σ est une quadrique, l'équation (10) prend une forme remarquable qui s'établit immédiatement de la façon suivante : Soit

$$\varphi(x, y, z) + ax + by + cz + d = 0$$

l'équation de Σ ; $\varphi(x, y, z)$ étant homogène et du second degré. L'équation ponctuelle d'un réseau de Σ admet les quatre solutions x, y, z et φ. Pour qu'il en soit ainsi, on doit avoir

$$\Sigma \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \Sigma \frac{\partial^2\varphi}{\partial y \partial z}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\right) = 0;$$

en remplaçant $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}$ et $\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}$ par les quantités proportionnelles X_2, Y_2, Z_2 et X_1, Y_1, Z_1, cette équation devient

$$X_2\varphi'_{X_1} + Y_2\varphi'_{Y_1} + Z_2\varphi'_{Z_1} = 0. \tag{1}$$

Elle exprime que les centres de courbure de la surface auxiliaire S sont conjugués par rapport au cône asymptote de la quadrique. Ce dernier peut d'ailleurs dégénérer en deux plans.

Si la surface Σ est une sphère, on est conduit à la même équation que par la méthode de M. Weingarten :

$$X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 = 0.$$

[**2**] Supposons que Σ soit un paraboloïde de révolution

$$x^2 + y^2 - 2z = 0.$$

La surface auxiliaire S est définie par l'équation

$$X_1X_2 + Y_1Y_2 = 0. \tag{2}$$

Pour déterminer cette surface, nous emploierons les coordonnées symétriques en écrivant l'équation du plan tangent sous la forme

$$(\alpha + \beta)x + i(\beta - \alpha)y + (\alpha\beta - 1)z + \xi = 0.$$

D'après les formules connues (¹), on a :

$$2X_1 = -(p+q) + (\alpha+\beta)(s+\sqrt{rt}),$$
$$2iY_1 = \quad (p-q) + (\alpha-\beta)(s+\sqrt{rt});$$

X_2 et Y_2 s'obtiennent en changeant le signe du radical; p, q, r, s, t désignent les dérivées partielles de ξ par rapport à α et β.

L'équation (2) s'écrit alors :

$$\alpha\beta(rt - s^2) + (\alpha p + \beta q)s - pq = 0.$$

Cette équation est intégrable par la méthode de Monge; les caractéristiques sont déterminées par l'équation

$$\lambda^2 + (p\alpha + q\beta)\lambda + \alpha\beta pq = 0,$$

dont les racines sont

$$\lambda_1 = -p\alpha, \qquad \lambda_2 = -q\beta;$$

les équations des deux systèmes de caractéristiques sont alors :

$$\mathrm{I}\begin{cases} d\xi - p\,d\alpha - q\,d\beta = 0, \\ \alpha\,dp - q\,d\beta = 0, \\ \beta\,dq - p\,d\alpha = 0. \end{cases} \qquad \mathrm{II}\begin{cases} d\xi - p\,d\alpha - q\,d\beta = 0, \\ \beta\,dp - p\,d\beta = 0, \\ \alpha\,dq - q\,d\alpha = 0. \end{cases}$$

Le système I admet deux combinaisons intégrables :

$$d\xi - p\,d\alpha - \alpha\,dp = 0,$$
$$\alpha\,dp + p\,d\alpha - \beta\,dq - q\,d\beta - 0,$$

qui donnent les deux intégrales premières

$$\xi - p\alpha = \mathrm{ct^e}, \qquad \alpha p - \beta q = \mathrm{ct^e}.$$

Le système II admet manifestement les deux intégrales

$$\frac{p}{\beta} = \mathrm{ct^e}, \qquad \frac{q}{\alpha} = \mathrm{ct^e}.$$

Pour appliquer la méthode de Monge, posons :

$$\xi - p\alpha = u, \qquad p\alpha - q\beta = F(u),$$
$$p = v\beta, \qquad q = \alpha\Phi(v).$$

D'où

$$\alpha = \frac{1}{\beta}\frac{F}{v-\Phi}, \qquad \xi = u + \frac{vF}{v-\Phi}, \qquad q = \frac{1}{\beta}\frac{F\Phi}{v-\Phi}.$$

(¹) Darboux, *Leçons*, I, p. 246.

Portons ces valeurs dans l'équation

$$d\xi - p\,d\alpha - q\,d\beta = 0,$$

il vient :

$$\frac{du}{F} + \frac{dv}{v - \Phi} + \frac{d\beta}{\beta} = 0.$$

Si on pose

$$F = -\frac{f(u)}{f'(u)}, \qquad v - \Phi = \frac{\varphi(v)}{\varphi'(v)},$$

on a, en intégrant,

$$\beta = \frac{f(u)}{\varphi(v)},$$

et, d'autre part,

$$\alpha = -\frac{\varphi'}{f'}, \qquad p = \frac{vf}{\varphi}, \qquad q = \frac{\varphi - v\varphi'}{f'}, \qquad \xi = \frac{u\varphi f' - vf\varphi'}{\varphi f'}.$$

D'où

$$\alpha + \beta = \frac{ff' - \varphi\varphi'}{\varphi f'},$$

$$i(\beta - \alpha) = i\frac{ff' + \varphi\varphi'}{\varphi f'},$$

$$\alpha\beta - 1 = -\frac{\varphi f' + f\varphi'}{\varphi f'}.$$

L'équation du plan tangent à S est alors :

$$(ff' - \varphi\varphi')x + i(ff' + \varphi\varphi')y - (\varphi f' + f\varphi')z + u\varphi f' - vf\varphi' = 0.$$

Nous prendrons pour variables u et v, car, ainsi que nous l'avons remarqué, il n'est pas nécessaire de déterminer les lignes de courbure de S.

En tenant compte des valeurs de p et q, les coordonnées d'un point de S sont définies par les équations

$$X + iY = -\frac{\varphi[\varphi - (u + v)\varphi']}{\Delta},$$

$$X - iY = \frac{f[f - (u + v)f']}{\Delta},$$

$$Z = \frac{u\varphi f' + vf\varphi' - f\varphi}{\Delta},$$

où l'on a posé :

$$\Delta = \varphi f' - f\varphi'.$$

Les cosinus directeurs de la normale sont :

$$c = \frac{ff' - \varphi\varphi'}{\Delta}, \qquad c' = i\frac{ff' + \varphi\varphi'}{\Delta}, \qquad c'' = -\frac{f\varphi' + \varphi f'}{\Delta}.$$

Il faut maintenant considérer le plan qui passe par l'origine et la normale, et mener au paraboloïde un plan tangent parallèle; l'équation de ce plan est

$$UX + VY + WZ = 0,$$

en posant :

$$U = c''Y - c'Z, \qquad V = cZ - c''X, \qquad W = c'X - cY.$$

On trouve facilement :

$$U + Vi = -i\frac{\varphi[\varphi + (u-v)\varphi']}{\Delta},$$

$$U - Vi = \quad i\frac{f[f + (v-u)f']}{\Delta},$$

$$W = -i\frac{f\varphi}{\Delta}.$$

Les coordonnées du point de contact du paraboloïde avec un plan tangent parallèle sont données par les équations

$$\frac{x}{U} = \frac{y}{V} = \frac{-1}{W}.$$

D'où

$$x + iy = -\frac{U + Vi}{W} = -\frac{\varphi + (u-v)\varphi'}{f},$$

$$x - iy = -\frac{U - Vi}{W} = \quad \frac{f + (v-u)f'}{\varphi},$$

$$z = \frac{(x+iy)(x-iy)}{2} = -\frac{[f + (v-u)f'][\varphi + (u-v)\varphi']}{2f\varphi}.$$

Nous avons maintenant tous les éléments pour former les équations aux différentielles totales (5) (1[re] Partie); des deux premières, on tire :

$$d(x + iy) = (X + iY)d\theta + (c + ic')d\rho,$$

$$d(x - iy) = (X - iY)d\theta + (c - ic')d\rho.$$

(Nous y remplaçons φ par ρ pour éviter une confusion avec la fonction φ déjà introduite).

Ces deux équations permettent de calculer $d\theta$ et $d\rho$:

$$d\theta = \left[(u-v)\left(\frac{f''\varphi'}{f\varphi} - \frac{\varphi' f'^2}{\varphi f^2}\right) + \frac{f'\varphi'}{f\varphi} - \frac{f'^2}{f^2}\right] du,$$
$$+ \left[(u-v)\left(\frac{\varphi'' f'}{f\varphi} - \frac{f'\varphi'^2}{f\varphi^2}\right) + \frac{\varphi'^2}{\varphi^2} - \frac{f'\varphi'}{f\varphi}\right] dv.$$

Le second membre est une différentielle exacte :

$$\theta = (u-v)\frac{f'\varphi'}{f\varphi} - \int \frac{f'^2}{f^2} du + \int \frac{\varphi'^2}{\varphi^2} dv.$$

Posons pour simplifier :

$$\log f = \mathrm{F}, \qquad \log \varphi = \Phi;$$

$$\theta = (u-v)\,\mathrm{F}'\Phi' - \int \mathrm{F}'^2 du + \int \Phi'^2 dv.$$

Avec ces nouvelles notations, on a

$$2\,d\rho = [(v-u)\mathrm{F}'' + (u^2-v^2)\mathrm{F}''\Phi' + \mathrm{F}' - \Phi' + 2u\mathrm{F}'\Phi' - 2u\mathrm{F}'^2]\,du$$
$$+ [(v-u)\Phi'' + (u^2-v^2)\mathrm{F}'\Phi'' + \mathrm{F}' - \Phi' - 2v\mathrm{F}'\Phi' + 2v\Phi'^2]\,dv,$$

et, en intégrant :

$$2\rho = (v-u)(\mathrm{F}' + \Phi') + (u^2-v^2)\mathrm{F}'\Phi' + 2(\mathrm{F} - \Phi) - 2\int u\mathrm{F}'^2 du + 2\int v\Phi'^2 dv.$$

On a enfin

$$d\psi = \Sigma \mathrm{X}^2 d\theta + 2\Sigma c\mathrm{X} d\rho,$$

$$\Sigma \mathrm{X}^2 = \frac{u^2\mathrm{F}' - v^2\Phi' - (u-v)}{\mathrm{F}' - \Phi'},$$

$$\Sigma c\mathrm{X} = -\frac{u\mathrm{F}' - v\Phi'}{\mathrm{F}' - \Phi'},$$

et, par suite,

$$d\psi = [uv(v-u)\mathrm{F}''\Phi' + (2u-v)\mathrm{F}' + u(u-v)\mathrm{F}'' + v\Phi' + (v^2-2uv)\mathrm{F}'\Phi' + u^2\mathrm{F}'^2]\,du$$
$$+ [uv(v-u)\mathrm{F}'\Phi'' - (2v-u)\Phi' + v(u-v)\Phi'' - u\mathrm{F}' - (u^2-2uv)\mathrm{F}'\Phi' - v^2\Phi'^2]\,dv,$$

d'où, en intégrant :

$$\psi = (u-v)(u\mathrm{F}' + v\Phi' - uv\mathrm{F}'\Phi') - 2\int u\mathrm{F}' du + 2\int v\Phi' dv + \int u^2\mathrm{F}'^2 du - \int v^2\Phi'^2 dv.$$

On détermine ainsi les trois fonctions ρ, θ, ψ vérifiant l'identité

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\rho^2 + d\theta\, d\psi.$$

En remplaçant F et Φ par les dérivées de deux nouvelles fonctions arbitraires f et φ, on fera disparaître les quadratures $\int u\mathrm{F}'du$ et $\int v\Phi'dv$ en remarquant que

$$\int uf''du = uf' - f,$$

et on a finalement :

$$\theta = (u-v)f''\varphi'' - \int f'''^2 du + \int \varphi'''^2 dv,$$

$$2\rho = (u^2-v^2)f''\varphi'' - (u-v)(f''+\varphi'') + 2(f'-\varphi') - 2\int uf'''^2 du + 2\int v\varphi'''^2 dv,$$

$$\psi = (u-v)(uf''+v\varphi''-uvf''\varphi'') - 2uf' + 2v\varphi' + 2(f-\varphi) + \int u^2f'''^2du - \int v^2\varphi'''^2dv.$$

On n'a plus dans ces formules que les quadratures suivantes :

$$\int f'''^2 du, \qquad \int uf'''^2 du, \qquad \int u^2 f'''^2 du,$$

et des quadratures analogues en v.

Pour faire disparaître toutes les quadratures, il faudrait pouvoir trouver des fonctions U et V, telles que

$$\mathrm{U}''' = f''^2, \qquad \mathrm{V}''' = \varphi''^2.$$

On voit qu'il est possible d'obtenir une infinité de surfaces algébriques en prenant pour f et φ des polynomes ou des fonctions rationnelles.

Les formules précédentes, où u et v sont les paramètres des lignes asymptotiques, ne diffèrent que par un simple changement de notation des formules connues.

[**3**] La méthode que nous venons d'employer conduit également à la détermination des surfaces applicables sur les paraboloïdes ayant un plan directeur isotrope.

Considérons d'abord le paraboloïde

$$z(x-iy) - k(x+iy) = 0,$$

dont le point de contact avec le cercle de l'infini est aussi le point de contact avec le plan de l'infini.

La surface auxiliaire S est définie par l'équation

$$\mathrm{Z}_1(\mathrm{X}_2 - i\mathrm{Y}_2) + \mathrm{Z}_2(\mathrm{X}_1 - i\mathrm{Y}_1) = 0.$$

Si on adopte le système de coordonnées symétriques obtenu en changeant β en $\frac{1}{\beta}$ dans celui que nous venons d'employer, cette équation s'écrit

$$(\alpha+\beta)(rt-s^2) + (p+q)s = 0.$$

et, par la transformation de Legendre,

$$(\alpha' + \beta')s' - (p' + q') = 0,$$

équation analogue à celle des surfaces *minima*. Cette équation peut être intégrée par la méthode de Laplace; son intégrale générale est :

$$\xi' = (\alpha' + \beta')[F'(\alpha') + \Phi'(\beta')] - 2[F(\alpha') + \Phi(\beta')].$$

Pour obtenir l'intégrale de l'équation primitive, posons

$$\alpha' = u, \qquad \beta' = v;$$

on a :

$$\begin{aligned}
&\alpha = p' = (u+v)F'' - (F' - \Phi'),\\
&\beta = q' = (u+v)\Phi'' + F' - \Phi',\\
&\xi = p'\alpha' + q'\beta' - \xi' = (u+v)(uF'' + v\Phi'') - 2uF' - 2v\Phi' - 2(F + \Phi),\\
&p = u, \qquad q = v.
\end{aligned}$$

Ces équations déterminent S et la suite du calcul n'exige plus que des quadratures.

Envisageons maintenant le paraboloïde

$$x(x - iy) - kz = 0,$$

dont les points de contact avec le plan et le cercle de l'infini sont différents. S est définie par l'équation

$$X_1(X_2 - iY_2) + X_2(X_1 - iY_1) = 0:$$

en coordonnées symétriques, cette équation s'écrit

$$(\alpha\beta - 1)(rt - s^2) + (\alpha p + \beta q - \xi)s = 0,$$

et, par la transformation de Legendre,

$$s'\xi' = p'q' - 1,$$

équation qui se ramène à celle de Liouville et dont l'intégrale générale est :

$$\xi' = \frac{F(\alpha') + \Phi(\beta')}{\sqrt{F'\Phi'}}.$$

La surface S se détermine donc sans quadratures et on peut obtenir, par de simples quadratures, les surfaces applicables sur le paraboloïde considéré.

[**4**] Si la quadrique est un paraboloïde quelconque ou une quadrique à centre, l'équation (1) n'est plus intégrable, mais on peut obtenir des solutions particulières;

de plus, la considération des congruences de normales, dont les foyers sont conjugués par rapport au cône directeur, conduit à une méthode de transformation des surfaces applicables sur une quadrique donnée, permettant de déduire d'une de ces surfaces une infinité d'autres dépendant d'un nombre illimité de paramètres.

Pour obtenir des solutions particulières, supposons que l'une des nappes focales de S se réduise à une courbe. Soit

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0,$$

l'équation du cône directeur de la quadrique.

La surface S est l'enveloppe d'une sphère dépendant d'un paramètre. Prenons le rayon R comme variable et soient x, y, z les coordonnées du centre. Le centre O_1 de la sphère est l'un des centres de courbure, l'autre est situé sur une conique dont le plan a pour équation :

$$(X - x)x'' + (Y - y)y'' + (Z - z)z'' + 1 - (x'^2 + y'^2 + z'^2) = 0.$$

Ce plan doit être le plan polaire de O_1 par rapport au cône; ce plan a pour équation

$$AXx + BYy + CZz = 0;$$

en identifiant les deux équations, il vient

$$\frac{x''}{Ax} = \frac{y''}{By} = \frac{z''}{Cz},$$

$$xx'' + yy'' + zz'' + x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1;$$

en intégrant cette dernière relation

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 + 2kR + h,$$

h et k désignant des constantes.

On a donc à intégrer le système

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{x''}{Ax} = \frac{y''}{By} = \frac{z''}{Cz}, \\ &x^2 + y^2 + z^2 = R^2 + 2kR + h. \end{aligned} \right.$$

Si la quadrique est un paraboloïde, nous supposerons, par exemple, $A = 0$; on a alors $x'' = 0$, c'est-à-dire

$$x = \alpha R + \beta.$$

On peut remplacer la surface S par une surface parallèle et lui imprimer une translation parallèle à ox, de façon que

$$\beta = k = 0.$$

Le système (3) s'écrit alors :

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 + h^2,$$
$$\frac{y''}{By} = \frac{z''}{Cz},$$
$$x = \alpha R.$$

Éliminons x, il vient :

$$y^2 + z^2 = (1 - \alpha^2) R^2 + h^2.$$

Posons

$$y = \frac{hu}{\cos\varphi}, \qquad z = \frac{hv}{\cos\varphi}, \qquad R = \frac{h}{\sqrt{1-\alpha^2}} \operatorname{tg}\varphi,$$

et prenons φ comme variable indépendante :

$$\frac{d^2 y}{dR^2} = (1 - \alpha^2)(u + u'')\frac{\cos^3\varphi}{h},$$
$$\frac{d^2 z}{dR^2} = (1 - \alpha^2)(v + v'')\frac{\cos^3\varphi}{h}.$$

On obtient alors le système :

$$u^2 + v^2 = 1,$$
$$\frac{u'' + u}{Bu} = \frac{v'' + v}{Cv}.$$

Posons enfin

$$u = \cos\theta, \qquad v = \sin\theta,$$

la dernière équation donne :

$$\frac{(1 - \theta'^2)\cos\theta - \theta''\sin\theta}{B\cos\theta} = \frac{(1 - \theta'^2)\sin\theta + \theta''\cos\theta}{C\sin\theta}.$$

D'où

$$\frac{\theta'\theta''}{(C - B)(1 - \theta'^2)} = \frac{\theta'}{C\operatorname{tg}\theta + B\operatorname{cotg}\theta},$$

et en intégrant :

$$\frac{1}{2(B - C)}\log(1 - \theta'^2) = \int\frac{d\theta}{C\operatorname{tg}\theta + B\operatorname{cotg}\theta} + \text{ct}^{e}.$$

L'intégrale du second membre s'écrit :

$$\int\frac{\sin 2\theta\, d\theta}{(B - C)\cos 2\theta + B + C} = \frac{-1}{2(B - C)}\log\left(\cos 2\theta + \frac{B + C}{B - C}\right)$$

en portant cette valeur dans l'équation précédente et en désignant par γ une constante :

$$1 - \theta'^2 = \frac{\gamma}{\cos 2\theta + \frac{B+C}{B-C}}.$$

D'où on tire

$$\theta' = \sqrt{\frac{\cos 2\theta + n}{\cos 2\theta + m}}$$

en posant :

$$m = \frac{B+C}{B-C}, \qquad n = m - \gamma.$$

Par une deuxième quadrature, on aura :

$$\varphi = \int \sqrt{\frac{\cos 2\theta + n}{\cos 2\theta + m}}\, d\theta.$$

Enfin, par le changement de variable,

$$\cos 2\theta = t,$$

$$\varphi = \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{t+n}}{\sqrt{(1-t^2)(t+m)}}\, dt.$$

Cette intégrale dégénère si $n = \pm 1$, c'est-à-dire

$$\gamma = \frac{2B}{B-C} \quad \text{ou} \quad \gamma = \frac{2C}{B-C}.$$

On obtient une solution particulièrement simple en supposant $z = 0$; on a alors :

$$x^2 + y^2 = R^2 + h^2.$$
$$x = \alpha R.$$

Le lieu du centre est une conique.

Si on considère deux coniques focales l'une de l'autre et situées respectivement dans le plan des zx et dans celui des xy, les points de ces deux coniques sont conjugués par rapport aux plans directeurs; elles constituent donc les deux nappes focales d'une surface S. Supposons que ce soient une ellipse et une hyperbole et appliquons les calculs du paragraphe 4 (1re Partie). Soit

$$By^2 + Cz^2 - 2x = 0,$$

l'équation du paraboloïde; celles des deux coniques sont :

$$z = 0, \qquad \frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

$$y = 0, \qquad \frac{(x-\alpha)^2}{a'^2} - \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0$$

en posant $a'^2 = a^2 - b^2$.

Les coordonnées des centres de courbure O_1 et O_2 sont :

$$X_2 = \alpha + a\cos\rho_1, \qquad X_1 = \alpha + a'\cos\rho_2,$$
$$Y_2 = b\sin\rho_1, \qquad Y_1 = 0,$$
$$Z_2 = 0, \qquad Z_1 = bi\sin\rho_2,$$

et les rayons de courbure sont, à une constante près :

$$R_2 = a'\cos\rho_1, \qquad R_1 = a\cos\rho_2.$$

Cherchons sur le paraboloïde le point de contact M du plan tangent parallèle à OO_1O_2; ce dernier a pour équation :

$$Y_2Z_1x - X_2Z_1y - Y_2X_1z = 0.$$

Les coordonnées de M sont définies par les relations

$$\frac{By}{X_2Z_1} = \frac{Cz}{Y_2X_1} = \frac{1}{Y_2Z_1},$$

d'où

$$y = \frac{\alpha + a\cos\rho_1}{Bb\sin\rho_1}, \qquad z = \frac{\alpha + a'\cos\rho_2}{Cbi\sin\rho_2}.$$

On a, d'autre part,

$$\frac{\partial y}{\partial\rho_1} = \lambda Y_2, \qquad \frac{\partial z}{\partial\rho_2} = \mu Z_1,$$

et, par suite :

$$\lambda = -\frac{a + \alpha\cos\rho_1}{Bb^2\sin^3\rho_1}, \qquad \mu = \frac{a' + \alpha\cos\rho_2}{Cb^2\sin^3\rho_2}.$$

On obtient ainsi les fonctions F et Φ introduites au paragraphe 4 de la première Partie; en portant ces valeurs dans les formules générales, il vient :

$$\theta = -\int \frac{a + \alpha\cos\rho_1}{Bb^2\sin^3\rho_1}\,d\rho_1 + \int \frac{a' + \alpha\cos\rho_2}{Cb^2\sin^3\rho_2}\,d\rho_2,$$

$$\varphi = -\int \frac{a'(a + \alpha\cos\rho_1)\cos\rho_1}{Bb^2\sin^3\rho_1}\,d\rho_1 + \int \frac{a(a' + \alpha\cos\rho_2)\cos\rho_2}{Cb^2\sin^3\rho_2}\,d\rho_2,$$

$$\psi = -\int \frac{(\alpha^2 + b^2 + 2a\alpha\cos\rho_1)(a + \alpha\cos\rho_1)}{Bb^2\sin^3\rho_1}\,d\rho_1 + \int \frac{(\alpha^2 - b^2 + 2a'\alpha\cos\rho_2)(a' + \alpha\cos\rho_2)}{Cb^2\sin^3\rho_2}\,d\rho_2.$$

Ces formules définissent une surface de translation applicable sur le paraboloïde;

elles ne renferment en réalité que deux paramètres arbitraires. On effectue sans peine les quadratures qui ont l'une des formes suivantes :

$$\int \frac{d\omega}{\sin\omega} = \log \operatorname{tg} \frac{\omega}{2},$$

$$\int \frac{d\omega}{\sin^3\omega} = \frac{1}{2} \log \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} - \frac{\cos\omega}{2\sin^2\omega},$$

$$\int \frac{\cos\omega}{\sin^3\omega}\, d\omega = -\frac{1}{2\sin^2\omega}.$$

Faisons, par exemple, $\alpha = 0$, les formules deviennent :

$$\theta = -\frac{a}{Bb^2}\int \frac{d\rho_1}{\sin^3\rho_1} + \frac{a'}{Cb^2}\int \frac{d\rho_2}{\sin^3\rho_2},$$

$$\varphi = -\frac{aa'}{Bb^2}\int \frac{\cos\rho_1\, d\rho_1}{\sin^3\rho_1} + \frac{aa'}{Cb^2}\int \frac{\cos\rho_2\, d\rho_2}{\sin^3\rho_2},$$

$$\psi = -\frac{a}{B}\int \frac{d\rho_1}{\sin^3\rho_1} - \frac{a'}{C}\int \frac{d\rho_2}{\sin^3\rho_2}.$$

Rapportons la surface à des coordonnées cartésiennes en posant

$$b\theta = y - iz, \qquad \frac{\psi}{b} = y + iz, \qquad \varphi = x;$$

il vient, en effectuant les intégrations :

$$x = \frac{aa'}{2b^2}\left(\frac{1}{B\sin^2\rho_1} - \frac{1}{C\sin^2\rho_2}\right),$$

$$y = \frac{-a}{2Bb}\left(\log \operatorname{tg}\frac{\rho_1}{2} - \frac{\cos\rho_1}{\sin^2\rho_1}\right),$$

$$z = \frac{a'i}{2Cb}\left(\log \operatorname{tg}\frac{\rho_2}{2} - \frac{\cos\rho_2}{\sin^2\rho_2}\right).$$

Les surfaces ainsi définies dépendent d'un paramètre arbitraire.

Bien que ces formules renferment des imaginaires, on peut néanmoins choisir les paramètres de façon à obtenir des surfaces réelles. Posons

$$\operatorname{tg}\frac{\rho_2}{2} = e^{it}.$$

On a :

$$\sin\rho_2 = \frac{2e^{it}}{1 + e^{2it}} = \frac{2}{e^{it} + e^{-it}} = \frac{1}{\cos t},$$

$$\cos\rho_2 = \frac{1 - e^{2it}}{1 + e^{2it}} = -\frac{e^{it} - e^{-it}}{e^{it} + e^{-it}} = -i \operatorname{tg} t.$$

Les formules précédentes s'écrivent alors :

$$x = \frac{aa'}{2b^2}\left(\frac{1}{\mathrm{B}\sin^2\rho_1} - \frac{1}{\mathrm{C}}\cos^2 t\right),$$

$$y = \frac{-a}{2\mathrm{B}b}\left(\log \operatorname{tg}\frac{\rho_1}{2} - \frac{\cos\rho_1}{\sin^2\rho_1}\right),$$

$$z = \frac{-a'}{2\mathrm{C}b}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right).$$

Si a, a' et b sont réels, ces formules définissent une surface réelle applicable sur le paraboloïde.

Remarquons que, dans tous les cas, les courbes du système conjugué commun sont planes; sur le paraboloïde, ce sont des paraboles.

On obtiendrait des solutions analogues en prenant pour coniques focales des paraboles.

[**5**] Si la surface Σ est une quadrique à centre, le système (3) s'écrit en remplaçant la surface S par une surface parallèle :

$$(4)\qquad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \mathrm{R}^2 + h^2, \\ \dfrac{x''}{\mathrm{A}x} = \dfrac{y''}{\mathrm{B}y} = \dfrac{z''}{\mathrm{C}z} = \lambda. \end{cases}$$

D'où

$$x'' = \lambda \mathrm{A}x, \qquad y'' = \lambda \mathrm{B}y, \qquad z'' = \lambda \mathrm{C}z.$$

Substituons ces valeurs dans l'équation

$$\Sigma x x'' + \Sigma x'^2 = 1,$$

on a

$$(5)\qquad \lambda \Sigma \mathrm{A}x^2 + \Sigma x'^2 = 1,$$

d'où en différentiant

$$2\lambda\Sigma \mathrm{A}xx' + \lambda'\Sigma \mathrm{A}x^2 + 2\Sigma x'x'' = 0$$

et en remplaçant les dérivées secondes par leurs valeurs

$$\lambda'\Sigma \mathrm{A}x^2 + 4\lambda\Sigma \mathrm{A}xx' = 0,$$

$$\lambda = \frac{k}{(\Sigma \mathrm{A}x^2)^2}, \qquad k = \mathrm{ct^e}.$$

On a une intégrale première par l'équation (5)

$$\Sigma x'^2 = 1 - \frac{k}{\Sigma \mathrm{A}x^2}.$$

Posons, comme précédemment,

$$x=\frac{hu}{\cos\varphi},\qquad y=\frac{hv}{\cos\varphi},\qquad z=\frac{hw}{\cos\varphi},\qquad \mathrm{R}=h\operatorname{tg}\varphi;$$

en prenant φ pour variable, le système (4) s'écrit :

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{u''+u}{\mathrm{A}u}=\dfrac{v''+v}{\mathrm{B}v}=\dfrac{w''+w}{\mathrm{C}w}=\mu, \\ u^2+v^2+w^2=1. \end{cases}$$

Un calcul analogue au précédent donne

$$\mu=\frac{k}{(\Sigma \mathrm{A}u^2)^2}$$

et on a l'intégrale première :

$$\Sigma u'^2=1-\frac{k}{\Sigma \mathrm{A}u^2}.$$

Le système (6) peut être intégré par quadratures dans certains cas particuliers.

Si, par exemple, on prend $x=0$, c'est-à-dire $u=0$, on retrouve les mêmes équations que pour le paraboloïde.

Supposons la quadrique de révolution et soit, par exemple, $\mathrm{A}=\mathrm{B}$. On a :

$$\mathrm{A}(u^2+v^2)+\mathrm{C}w^2=\sqrt{\frac{k}{\mu}},$$
$$u^2+v^2+w^2=1.$$

D'où, en éliminant u^2+v^2,

$$(7)\qquad \mu=\frac{k}{[(\mathrm{C}-\mathrm{A})w^2+\mathrm{A}]^2},$$

ou, d'après les équations (6),

$$w''+w=\frac{k\mathrm{C}w}{[(\mathrm{C}-\mathrm{A})w^2+\mathrm{A}]^2},$$

et en intégrant

$$(8)\qquad w'^2+w^2=-\frac{k\mathrm{C}}{\mathrm{C}-\mathrm{A}}\,\frac{1}{(\mathrm{C}-\mathrm{A})\,w^2+\mathrm{A}}+m,$$

cette équation est de la forme

$$w'^2=-\frac{w^4+aw^2+b}{w^2+c}.$$

D'où

$$i\varphi=\int\frac{\sqrt{w^2+c}}{\sqrt{w^4+aw^2+b}}\,dw,$$

et en posant $w^2 = t$,

$$i\varphi = \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{t+c}}{\sqrt{t(t^2+at+b)}}\,dt,$$

on est ramené aux quadratures elliptiques qui peuvent d'ailleurs dégénérer pour certaines valeurs des constantes.

w étant connu, on calcule aisément u et v.

D'après les équations (6), on a :

$$vu'' - uv'' = 0,$$
$$vu' - uv' = \text{ct}^e.$$

La constante n'est pas arbitraire; on a, en effet,

$$\begin{aligned}(vu' - uv')^2 &= (u^2+v^2)(u'^2+v'^2) - (uu'+vv')^2 \\ &= (1-w^2)(1-w'^2-\sqrt{k\mu}) - w^2w'^2 \\ &= 1 - w^2 - w'^2 - (1-w^2)\sqrt{k\mu}\end{aligned}$$

en remplaçant $\sqrt{\mu}$ et $w^2 + w'^2$ par leurs valeurs tirées de (7) et (8),

$$(vu' - uv')^2 = 1 + \frac{k}{C-A} - m.$$

Désignons par p^2 le second membre; on a :

$$\frac{vu'-uv'}{u^2+v^2} = \frac{p}{1-w^2},$$

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{u}{v} = \int \frac{p\,d\varphi}{1-w^2} = \frac{p}{i}\int \frac{\sqrt{w^2+c}}{(1-w^2)\sqrt{w^4+aw^2+b}}\,dw.$$

Comme on connaît u^2+v^2, on aura u et v.

Dans le cas que nous venons d'étudier, les courbes de l'une des familles du système C sont les courbes de contact de cylindres circonscrits à la quadrique; elles sont donc planes, et on sait que, par suite, sur la surface applicable, les courbes de l'autre famille sont aussi planes.

La méthode précédente conduit aisément aux surfaces de révolution applicables sur la sphère ou sur une quadrique de révolution : il suffit de supposer $z = 0$.

[**6**] Nous avons vu qu'un système de coniques focales conduit à une infinité de surfaces applicables sur le paraboloïde quelconque.

Considérons de la même manière deux quadriques homofocales :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} - 1 = 0.$$

Elles constituent les deux nappes focales d'une congruence de normales; les deux foyers situés sur une tangente commune aux deux quadriques vérifient les deux équations :

$$\frac{X_1X_2}{a^2}+\frac{Y_1Y_2}{b^2}+\frac{Z_1Z_2}{c^2}-1=0,$$

$$\frac{X_1X_2}{a^2+\lambda}+\frac{Y_1Y_2}{b^2+\lambda}+\frac{Z_1Z_2}{c^2+\lambda}-1=0.$$

D'où, en retranchant membre à membre :

$$\frac{X_1X_2}{a^2(a^2+\lambda)}+\frac{Y_1Y_2}{b^2(b^2+\lambda)}+\frac{Z_1Z_2}{c^2(c^2+\lambda)}=0.$$

Si on prend

$$\frac{a^2(a^2+\lambda)}{A}=\frac{b^2(b^2+\lambda)}{B}=\frac{c^2(c^2+\lambda)}{C}=k, \tag{9}$$

on voit que les centres de courbure sont conjugués par rapport au cône

$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}=0;$$

on en déduit une déformée de la quadrique Σ :

$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}-1=0.$$

En résolvant les équations (9) par rapport à a^2, b^2, c^2, on pourra attribuer à k une valeur quelconque; mais on n'a en réalité qu'un seul paramètre λ. On pourra donc ainsi déterminer une infinité de surfaces applicables sur Σ.

Si on suppose que Σ est une sphère, on prendra par exemple $a^2=b^2$, et les deux quadriques homofocales sont de révolution. M. Guichard a déjà indiqué qu'on peut déduire de la surface de Liouville des déformées des quadriques (¹). Dans le cas où les quadriques sont de révolution, il a énoncé le théorème suivant : *Les surfaces dont les deux nappes de la surface focale sont des quadriques homofocales de révolution ont même représentation sphérique de leurs lignes de courbure que des surfaces à courbure constante; les surfaces à courbure constante que l'on obtient ainsi sont des hélicoïdes.*

La méthode que nous venons d'indiquer conduit à des surfaces à courbure constante différentes.

On peut prendre les équations des deux quadriques homofocales sous la forme :

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}-1=0,$$

$$\frac{x^2+y^2}{b^2}-\frac{z^2}{a^2}-1=0.$$

(¹) *Comptes rendus*, 7 juin 1909, 10 janvier, 13 février 1911.

Soient

$$x = \alpha z + p,$$
$$y = \beta z + q,$$

les équations d'une tangente commune D. En exprimant que cette droite est tangente aux deux quadriques, on a :

$$(\alpha q - \beta p)^2 - a^2(\alpha^2 + \beta^2) - \frac{a^2}{b^2}(p^2 + q^2) + \frac{a^4}{b^2} = 0,$$

$$(\alpha q - \beta p)^2 - b^2(\alpha^2 + \beta^2) - \frac{b^2}{a^2}(p^2 + q^2) + \frac{b^4}{a^2} = 0.$$

D'où on tire aisément les relations suivantes qui nous seront utiles :

(10) $$(\alpha q - \beta p)^2 + p^2 + q^2 = a^2 + b^2,$$

(11) $$\alpha^2 + \beta^2 + 1 = \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2}(\alpha q - \beta p)^2,$$

(12) $$\frac{(\alpha p + \beta q)^2}{\alpha^2 + \beta^2 + 1} = p^2 + q^2 + \frac{a^2 b^2}{p^2 + q^2 - a^2 - b^2}.$$

Pour déterminer la surface S normale aux droites de la congruence, il faut intégrer l'équation

(13) $$d(z\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 1}) + \frac{\alpha\, dp + \beta\, dq}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 1}} = 0$$

où le second terme est nécessairement une différentielle exacte. Posons :

$$z\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 1} = \rho.$$

Les cosinus directeurs de la droite sont :

$$c = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 1}}, \qquad c' = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 1}}, \qquad c'' = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 1}}.$$

Les coordonnées d'un point de la surface S sont alors :

$$X = p + c\rho, \qquad Y = q + c'\rho, \qquad Z = c''\rho.$$

Le plan passant par l'origine et la normale D a pour équation :

$$-qx + py + (\alpha q - \beta p)z = 0.$$

Considérons alors la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2$$

et menons à cette sphère un plan tangent parallèle au précédent; en vertu de l'équation (10), les coordonnées du point de contact sont :

$$x = -q, \qquad y = p, \qquad z = \alpha q - \beta p.$$

Formons alors les équations

$$dx = \mathrm{X}d\theta + cd\varphi,$$
$$dy = \mathrm{Y}d\theta + c'd\varphi;$$

elles s'écrivent :

$$-dq = (p + c\rho)\,d\theta + cd\varphi,$$
$$dp = (q + c'\rho)\,d\theta + c'd\varphi.$$

D'où

$$(cq - c'p)\,d\theta = cdp + c'dq,$$

en remplaçant c et c' par leurs valeurs

$$\frac{\alpha q - \beta p}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 1}}\,d\theta = \frac{\alpha dp + \beta dq}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 1}},$$

c'est-à-dire d'après les équations (11) et (13) :

$$\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,d\theta = -\,d\rho,$$

$$\theta = -\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{ab}\,\rho.$$

D'autre part,

$$(c'p - cq)\,d\varphi = (p + c\rho)\,dp + (q + c'\rho)\,dq = pdp + qdq + \rho(cdp + c'dq),$$

ou en tenant compte des équations précédentes :

$$\frac{-ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,d\varphi = \frac{1}{2}\,d(p^2 + q^2 - \rho^2),$$

$$\varphi = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2ab}\,(\rho^2 - p^2 - q^2).$$

Enfin, on aura ψ par l'équation

$$d\psi = \Sigma \mathrm{X}^2 d\theta + 2\Sigma c\mathrm{X}\,d\varphi.$$

Or,

$$\Sigma \mathrm{X}^2 = \rho^2 + 2\rho(cp + c'q) + p^2 + q^2,$$
$$\Sigma c\mathrm{X} = \rho + cp + c'q.$$

En portant ces valeurs dans l'expression de $d\psi$, il vient :

$$\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,d\psi = d\left[\frac{\rho^3}{3} - \rho(p^2 + q^2)\right] - 2(cp + c'q)(pdp + qdq).$$

Le second membre est nécessairement une différentielle exacte; on a

$$cp + c'q = \frac{\alpha p + \beta q}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 1}},$$

c'est-à-dire, d'après l'équation (12) :

$$cp + c'q = \sqrt{p^2 + q^2 + \frac{a^2 b^2}{p^2 + q^2 - a^2 - b^2}}.$$

Posons :

$$p^2 + q^2 = u.$$

On a

$$cp + c'q = \sqrt{\frac{(u - a^2)(u - b^2)}{u - a^2 - b^2}},$$

et alors

$$\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} d\psi = d\left(\frac{\rho^3}{3} - \rho u\right) - \sqrt{\frac{(u - a^2)(u - b^2)}{u - a^2 - b^2}} du.$$

Il n'est pas nécessaire de calculer ρ explicitement; les formules précédentes ne renferment en effet que les deux variables u et ρ. On a donc une infinité de surfaces définies par les équations suivantes et dont la courbure totale est constante et égale à $\frac{1}{a^2 + b^2}$:

$$\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \theta = -\rho,$$

$$\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \varphi = \frac{\rho^2 - u}{2},$$

$$\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \psi = \frac{\rho^3}{3} - \rho u - \int \sqrt{\frac{(u - a^2)(u - b^2)}{u - a^2 - b^2}} du;$$

les deux paramètres a et b doivent vérifier la relation

$$a^2 + b^2 = \text{ct}^{\text{e}}.$$

Les courbes $u = \text{ct}^{\text{e}}$ sont des cubiques; les courbes correspondantes sur la sphère sont des cercles, car on a :

$$x^2 + y^2 = p^2 + q^2 = u.$$

[7] On peut tirer de l'équation (1) une méthode de transformation des surfaces applicables sur une quadrique quelconque.

Considérons d'abord un paraboloïde défini par l'équation

$$By^2 + Cz^2 - 2x = 0$$

et la surface auxiliaire dont les centres de courbure vérifient la relation

$$BY_1Y_2 + CZ_1Z_2 = 0.$$

Formons les surfaces parallèles à S et leurs inverses par rapport à l'origine; si on imprime à ces dernières une translation arbitraire parallèlement à ox, on obtient ∞^2, surfaces satisfaisant encore à la même condition et auxquelles correspondent ∞^2, surfaces applicables sur le paraboloïde. Cette transformation est identique à celle que M. Guichard a indiquée pour une quadrique quelconque (1).

Considérons, en effet, une surface S et une autre surface S′ qui s'en déduit par translation; deux normales G et G′ correspondantes sont parallèles. Par ces deux normales et l'origine, on fait passer deux plans et on mène au paraboloïde des plans tangents parallèles; soient M et M′ les points de contact; les plans tangents se coupent suivant une parallèle à G et G′ qui engendre une congruence O et les deux points M et M′ décrivent des réseaux C harmoniques à cette congruence. En considérant les ∞^2 surfaces S définies plus haut, on aura ∞^1 familles de congruences parallèles harmoniques à des réseaux C du paraboloïde. Cette transformation peut être répétée indéfiniment pour chacune des nouvelles surfaces S et n'exige que des quadratures.

Supposons maintenant que Σ soit une quadrique à centre :

$$A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2 - 1 = 0.$$

Une transformation par polaires réciproques relativement à la quadrique Q définie par l'équation

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1,$$

échange le cercle de l'infini et le cône asymptote de Σ.

Toute congruence de normales dont les foyers sont conjugués par rapport à ce cône se transforme en en une congruence de même nature et fournit par suite une nouvelle solution du problème.

On peut d'ailleurs remplacer la surface S normale aux droites de la congruence par les inverses des surfaces parallèles; on obtient ainsi ∞^1 congruences de normales qui, transformées par polaires réciproques, donnent des solutions nouvelles différentes et dépendant d'un paramètre arbitraire.

Les congruences nouvelles ainsi obtenues sont des congruences parallèles, car deux droites correspondantes sont les conjuguées de deux droites situées dans un même plan passant par l'origine.

La transformation n'exige que des quadratures et peut être répétée indéfiniment.

Soient X, Y, Z les coordonnées d'un point de S, c, c', c'' les cosinus directeurs de la normale, X_1, Y_1, Z_1 et X_2, Y_2, Z_2 les coordonnées des centres de courbure, O_1 et O_2, R_1 et R_2 les rayons de courbure; posons :

$$2q = \Sigma X^2, \qquad p = \Sigma cX.$$

(1) *Comptes rendus*, 26 octobre 1897, 2 janvier 1906.

Soient x, y, z les coordonnées du point M de Σ, où le plan tangent est parallèle à OO_1O_2; il existe une surface Σ_1 applicable sur Σ définie par les équations :

$$\begin{aligned} dx &= X d\theta + c d\varphi, \\ dy &= Y d\theta + c' d\varphi, \\ dz &= Z d\theta + c'' d\varphi, \\ d\psi &= 2q d\theta + 2p d\varphi. \end{aligned}$$

Soit G une normale à S et G' sa conjuguée par rapport à Q; G' est normale à une surface S' de même nature que S; le plan passant par l'origine et par G' a pour équation

$$Acx + Bc'y + Cc''z = 0;$$

menons à Σ un plan tangent parallèle; les coordonnées du point de contact M' sont :

$$(14) \qquad x' = -\frac{c}{A}, \qquad y' = -\frac{c'}{B}, \qquad z' = -\frac{c''}{C}.$$

Ce point décrit un réseau C. D'autre part, d'après les formules (3) et (4) (1re Partie),

$$c = -\frac{X_1 - X_2}{R_1 - R_2} = -\frac{D(x, \theta)}{D(\varphi, \theta)},$$

en désignant par D un déterminant fonctionnel.

D'où

$$x' = \frac{1}{A}\frac{D(x, \theta)}{D(\varphi, \theta)}, \qquad y' = \frac{1}{B}\frac{D(y, \theta)}{D(\varphi, \theta)}, \qquad z' = \frac{1}{C}\frac{D(z, \theta)}{D(\varphi, \theta)}.$$

Pour déterminer la surface applicable Σ'_1 qui correspond à ce nouveau système C, il faut d'abord chercher la surface S' normale à G'. Les plans principaux de S' sont les plans polaires de O_1 et O_2; ils ont pour équations :

$$\Sigma A \frac{\partial x}{\partial u} X' - \frac{\partial \theta}{\partial u} = 0,$$

$$\Sigma A \frac{\partial x}{\partial v} X' - \frac{\partial \theta}{\partial v} = 0;$$

on en conclut immédiatement que S' est l'enveloppe du plan

$$\Sigma A x X' - \theta = 0,$$

les cosinus directeurs de la normale sont :

$$\gamma = Ax, \qquad \gamma' = By, \qquad \gamma'' = Cz.$$

La surface S′ est déterminée sans quadrature; les coordonnées X′, Y′, Z′ d'un point s'obtiennent en résolvant les trois équations précédentes. La surface Σ'_1 applicable sur Σ est définie par trois fonctions θ', φ', ψ' analogues à θ, φ, ψ, et il est évident, par symétrie, que le plan tangent à S a pour équation :

$$\Sigma c X - \theta' = 0.$$

D'où

$$\theta' = p.$$

Calculons maintenant φ'. On a trois équations de la forme

$$dx' = X' d\theta' + \gamma d\varphi',$$

et, par suite,

$$\Sigma\gamma dx' = \Sigma A x dx' = \Sigma A x X' d\theta' + d\varphi',$$

ou

$$\Sigma A x dx' = \theta d\theta' + d\varphi'.$$

De même, par symétrie,

$$\Sigma A x' dx = \theta' d\theta + d\varphi,$$

en ajoutant membre à membre et en intégrant

$$\Sigma A x x' = \theta\theta' + \varphi + \varphi'; \tag{15}$$

φ' est donc déterminé sans quadrature; remarquons que l'on a :

$$\Sigma A x x' = \Sigma x \frac{D(x, \theta)}{D(\varphi, \theta)} = \frac{1}{2} \frac{D(\Sigma x^2, \theta)}{D(\varphi, \theta)}.$$

Des deux équations

$$\frac{\partial\psi}{\partial u} = 2q \frac{\partial\theta}{\partial u} + 2p \frac{\partial\varphi}{\partial u},$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial v} = 2q \frac{\partial\theta}{\partial v} + 2p \frac{\partial\varphi}{\partial v},$$

on tire :

$$\theta' = p = \frac{1}{2} \frac{D(\psi, \theta)}{D(\varphi, \theta)}. \tag{16}$$

Portons ces valeurs de $\Sigma A x x'$ et θ' dans l'équation (14), il vient en posant

$$\rho = \Sigma x^2 - \varphi^2 - \theta\psi,$$

$$\varphi' = \frac{1}{2} \frac{D(\rho, \theta)}{D(\varphi, \theta)},$$

θ' et φ' étant connus, on aura :

$$d\psi' = \Sigma X'^2 d\theta' + 2\Sigma\gamma X' d\varphi'.$$

Pour calculer $\Sigma X'^2$, posons

$$e = \Sigma A^2 \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2, \qquad g = \Sigma A^2 \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2,$$

et écrivons sous la forme suivante les équations qui déterminent X′, Y′, Z′ :

$$\frac{1}{\sqrt{e}} \Sigma A \frac{\partial x}{\partial u} X' = \frac{1}{\sqrt{e}} \frac{\partial \theta}{\partial u},$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \Sigma A \frac{\partial x}{\partial v} X' = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \theta}{\partial v},$$

$$\Sigma A x X' = \theta;$$

le déterminant du système est celui d'une substitution orthogonale; en faisant la somme des carrés, on a :

$$\Sigma X'^2 = \theta^2 + \frac{1}{e}\left(\frac{\partial \theta}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{g}\left(\frac{\partial \theta}{\partial v}\right)^2.$$

Si on considère le ds^2 défini par la formule

$$ds^2 = \Sigma A^2 dx^2,$$

c'est celui d'une sphère de rayon 1; le paramètre différentiel du premier ordre $\Delta(\theta)$ a pour valeur

$$\Delta(\theta) = \frac{1}{e}\left(\frac{\partial \theta}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{g}\left(\frac{\partial \theta}{\partial v}\right)^2;$$

on peut donc écrire, quelles que soient les variables :

$$\Sigma X'^2 = \theta^2 + \Delta(\theta).$$

Remarquons que $d\psi'$ s'écrit

$$d\psi' = \Sigma X'^2 d\theta' + 2\theta\, d\varphi',$$

c'est-à-dire

$$d\psi' = [\theta^2 + \Delta(\theta)]\, d\theta' + 2\theta\, d\varphi'.$$

La seule quadrature est celle qui détermine ψ'.

Si on substitue à S la surface inverse d'une des surfaces parallèles, ceci revient à effectuer sur θ, φ, ψ la transformation

$$\psi_1 = \theta, \qquad \varphi_1 = \varphi - h\theta, \qquad \theta_1 = \psi + 2h\varphi - h^2\theta;$$

on introduit ainsi un paramètre arbitraire h; en répétant la transformation, on pourra, par de simples quadratures, introduire un nombre illimité de paramètres.

[8] Dans le cas des surfaces à courbure constante, la transformation peut recevoir une forme remarquable; c'est une transformation de Bäcklund [1].

Considérons une telle surface Σ définie par les coordonnées θ, φ, ψ que nous remplacerons par x, y, z; soient x', y', z' les coordonnées d'un point de la surface Σ' qui se déduit de Σ par la transformation précédente.

Désignons par p et q les dérivées partielles de z par rapport à x et y, et par p' et q' celles de z' par rapport à x' et y'. Comme les formules établies plus haut sont indépendantes du choix des variables, l'équation (16) donne :

$$x' = \frac{1}{2} q.$$

D'autre part, l'équation (15) se réduit dans le cas de la sphère à

$$\theta\theta' + \varphi + \varphi' = 0,$$

c'est-à-dire avec les nouvelles notations

$$xx' + y + y' = 0.$$

Enfin, le ds^2 considéré plus haut est ici identique à celui de Σ :

$$ds^2 = dy^2 + dx\,dz = p\,dx^2 + q\,dx\,dy + dy^2,$$

et on a

$$\Delta(x) = \frac{1}{p - \frac{q^2}{4}};$$

z' est alors déterminé par l'équation

$$dz' = \left(x^2 + \frac{1}{p - \frac{q^2}{4}}\right) dx' + 2x\,dy', \tag{17}$$

et par suite :

$$q' = 2x,$$

$$p' = x^2 + \frac{1}{p - \frac{q^2}{4}} = \frac{q'^2}{4} + \frac{1}{p - \frac{q^2}{4}}.$$

On voit donc que les fonctions z, z' et leurs dérivées partielles vérifient les quatre équations

$$\left\{\begin{array}{l} xx' + y + y' = 0, \\ 2x - q' = 0, \qquad 2x' - q = 0, \\ \left(p - \frac{q^2}{4}\right)\left(p' - \frac{q'^2}{4}\right) = 1. \end{array}\right. \tag{18}$$

---

[1] *Comptes rendus*, 28 mai 1912.

Ces équations définissent une transformation de Bäcklund qui fait correspondre à une surface à courbure totale constante et égale à 1 une autre surface de même nature.

Cette transformation est différente de celle de Ribeaucour; celle-ci renferme en effet une relation finie entre les coordonnées de deux points correspondants exprimant que la distance de ces deux points est constante et qui diffère complètement de l'équation

$$xx' + y + y' = 0.$$

La transformation des surfaces applicables sur une quadrique est donc aussi différente de celles de MM. Guichard (1) et Bianchi (2) qui, dans le cas des surfaces à courbure constante, se réduisent à celle de Ribeaucour.

Revenons à la transformation définie par les équations (18). Intégrons par parties l'équation (17) :

$$\int x^2 dx' + 2x dy' = x^2 x' + 2xy' - 2\int (xx' + y')dx,$$

c'est-à-dire d'après la première équation (18) :

$$x^2 x' + 2xy' + 2\int y dx.$$

Donc

$$z' = x^2 x' + 2xy' + 2\int \frac{dq}{4p - q^2} + y dx.$$

En écrivant la condition d'intégrabilité de la différentielle sous le signe $\int$, on trouve

$$\frac{4(s^2 - rt)}{(4p - q^2)^2} = 1,$$

r, s, t désignant les dérivées partielles du second ordre de z. Cette équation est précisément celle des surfaces à courbure constante égale à 1 dans le système de coordonnées adopté.

Si on remarque qu'on peut effectuer sur x, y, z un changement de coordonnées, c'est-à-dire une transformation linéaire qui n'altère pas la forme $y^2 + zx$, on obtient une infinité de surfaces différentes dépendant d'un paramètre arbitraire.

---

(1) Guichard, *Comptes rendus*, octobre 1897, janvier 1906.

(2) Bianchi, *Idem*, 5 mars, 29 octobre 1906.

La transformation la plus générale est une combinaison des suivantes :

$$\mathrm{I}\ \begin{cases} x = x_1 + 2hy_1 - h^2 z_1, \\ y = y_1 - hz_1, \\ z = z_1; \end{cases} \qquad \mathrm{II}\ \begin{cases} x = x_1, \\ y = y_1 + kx_1, \\ z = z_1 - 2ky_1 - k^2 x_1; \end{cases} \qquad \mathrm{III}\ \begin{cases} x = mx_1, \\ y = y_1, \\ z = \dfrac{z_1}{m}, \end{cases}$$

auxquelles on peut adjoindre

$$x = x_1, \qquad y = -y_1, \qquad z = z_1.$$

Cette dernière est une symétrie qui change simplement les signes de x', y', z'.

Les transformations II et III ne donnent pas des surfaces différentes de Σ'.

Considérons, par exemple, la transformation II, p et q sont transformés par les formules

$$p_1 = p + kq + k^2, \qquad q_1 = q + 2k.$$

D'où

$$x'_1 = x' + k.$$

L'équation

$$x_1 x'_1 + y_1 + y'_1 = 0$$

devient

$$xx' + y + y'_1 = 0,$$

et, par suite,

$$y'_1 = y'.$$

Enfin,

$$x_1^2 + \frac{4}{4p_1 - q_1^2} = x^2 + \frac{4}{4p - q^2}.$$

Donc

$$dz'_1 = dz'.$$

La surface Σ'_1 est identique à Σ'.

On fait aisément une vérification analogue pour la transformation III.

Il n'y a donc à considérer que la transformation I, dont les équations résolues par rapport à x_1, y_1, z_1 s'écrivent

$$\begin{aligned} x_1 &= x - 2hy - h^2 z, \\ y_1 &= y + hz, \\ z_1 &= z, \end{aligned}$$

et on a :

$$p_1 = \frac{p}{1 + qh + ph^2}, \qquad q_1 = \frac{q + 2hp}{1 + qh + ph^2}.$$

On obtient une surface Σ'_1 dont les deux premières coordonnées sont définies par les équations

$$x'_1 = \frac{q_1}{2} = \frac{1}{2}\,\frac{q + 2hp}{1 + qh + ph^2},$$

$$y'_1 = -(x_1 x'_1 + y_1) = -\frac{qx + 2y + 2h(px + z) + h^2(qz - 2py)}{2(1 + qh + ph^2)}.$$

Pour obtenir z'_1, il faudra calculer l'intégrale

$$\xi_1 = \int \frac{dq_1}{4p_1 - q_1^2} + y_1 dx_1.$$

Calculons séparément les deux termes

$$\frac{dq_1}{4p_1 - q_1^2} = \frac{dq + 2h\,dp + h^2(q\,dp - p\,dq)}{4p - q^2},$$

$$y_1 dx_1 = -2hy\,dy + h(z\,dx + x\,dz) - 2h^2(z\,dy + y\,dz)$$
$$- h^3 z\,dz + y\,dx - hx\,dz + h^2 y\,dz.$$

En laissant de côté les termes immédiatement intégrables, il reste la différentielle

$$\frac{dq}{4p - q^2} + y\,dx + h\left(\frac{2dp}{4p - q^2} - x\,dz\right) + h^2\left(\frac{q\,dp - p\,dq}{4p - q^2} + y\,dz\right)$$

qui est nécessairement une différentielle exacte, quelle que soit la constante h; on vérifie d'ailleurs immédiatement que les trois termes sont des différentielles exactes en vertu de l'équation

$$\frac{4(s^2 - rt)}{(4p - q^2)^2} = 1.$$

Il suffira donc, quel que soit h, d'effectuer les trois quadratures

$$\xi = \int \frac{dq}{4p - q^2} + y\,dx,$$

$$\eta = \int \frac{2\,dp}{4p - q^2} - x\,dz,$$

$$\zeta = \int \frac{q\,dp - p\,dq}{4p - q^2} + y\,dz,$$

et on aura :

$$z'_1 = x_1^2 x'_1 + 2x_1 y'_1 - 2h(y^2 - zx) - 4h^2 yz - h^3 z^2 + \xi + h\eta + h^2\zeta.$$

En remplaçant les lettres accentuées par leurs valeurs, on obtiendra pour z'_1 une fonction rationnelle de h ayant pour dénominateur $1 + qh + ph^2$ et dont le numérateur est du quatrième degré.

On a ainsi par trois quadratures une infinité de surfaces nouvelles dépendant d'un paramètre arbitraire.

Si on veut poursuivre l'application de la méthode aux nouvelles surfaces, il semble que l'on aura pour chacune d'elles trois quadratures nouvelles; ces trois quadratures se réduisent à une seule.

Soit Σ' une de ces surfaces. On peut toujours supposer, par un choix convenable des coordonnées, qu'elle est définie par les équations (18). Considérons alors les trois fonctions ξ', η', ζ' analogues à ξ, η, ζ.

En vertu de la réciprocité des équations (17), on a :

$$z = x'^2 x + y x' + 2\xi'.$$

D'autre part,

$$d\eta' = \frac{2dp'}{4p' - q'^2} - x' dz';$$

en remplaçant les lettres accentuées par leurs valeurs, on vérifie aisément que l'on a

$$d\eta + d\eta' = d\left(\frac{q^2 x^2}{8}\right)$$

ou

$$\eta + \eta' = \frac{x^2 x'^2}{2};$$

ξ' et η' sont donc déterminés sans quadratures; la seule quadrature nouvelle est donc :

$$\zeta' = \int \frac{q\,dp' - p\,dq'}{4p' - q'^2} + y' dz'.$$

Chaque quadrature donne une infinité de surfaces nouvelles.

[9] La transformation par polaires réciproques que nous venons d'utiliser peut conduire également à la transformation de Ribeaucour.

Pour cela, remarquons que si on applique à la recherche des surfaces à courbure constante la méthode de M. Weingarten, on est conduit à déterminer une surface auxiliaire S dont les centres de courbure sont conjugués par rapport au cône isotrope (1).

Conservons pour la surface S les notations générales du paragraphe 1 (1re Partie). Soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées d'un point de la surface à courbure constante Σ_1 que donne la méthode de M. Weingarten, On a :

$$dx_1 = \mathrm{X}d\left(\frac{\partial\lambda}{\partial q}\right) + c''d\left(\frac{\partial\lambda}{\partial p}\right),$$

$$dy_1 = \mathrm{Y}d\left(\frac{\partial\lambda}{\partial q}\right) + c'd\left(\frac{\partial\lambda}{\partial p}\right),$$

$$dz_1 = \mathrm{Z}d\left(\frac{\partial\lambda}{\partial q}\right) + c''d\left(\frac{\partial\lambda}{\partial p}\right)$$

en posant

$$\lambda = \sqrt{p^2 - 2q}.$$

(1) Darboux, *Leçons*, t. IV.

Les rayons de courbure de S vérifient la relation

$$(p + R_1)(p + R_2) = p^2 - 2q.$$

On voit aisément que si u et v sont les paramètres des lignes de courbure, on a :

$$(19) \qquad \begin{cases} \dfrac{\dfrac{\partial x_1}{\partial u}}{X_2} = \dfrac{\dfrac{\partial y_1}{\partial u}}{Y_2} = \dfrac{\dfrac{\partial z_1}{\partial u}}{Z_2} = -\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1}{\lambda}\right), \\ \dfrac{\dfrac{\partial x_1}{\partial v}}{X_1} = \dfrac{\dfrac{\partial y_1}{\partial v}}{Y_1} = \dfrac{\dfrac{\partial z_1}{\partial v}}{Z_1} = -\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{1}{\lambda}\right). \end{cases}$$

Sur la surface Σ_1, le réseau des lignes de courbure est parallèle au réseau point OO_1, OO_2.

La méthode exposée dans la première Partie donne une autre surface à courbure constante Σ définie par les équations

$$(20) \qquad \begin{cases} dx = X\,d\theta + c\,d\varphi, \\ dy = Y\,d\theta + c'\,d\varphi, \\ dz = Z\,d\theta + c''\,d\varphi, \\ d\psi = 2q\,d\theta + 2p\,d\varphi. \end{cases}$$

Le point x, y, z décrit un réseau C de la sphère, qui est la représentation sphérique des lignes de courbure de Σ_1. Les deux surfaces Σ et Σ_1 sont différentes ; le réseau des lignes de courbure de chacune d'elles a pour représentation sphérique le réseau de la sphère applicable sur les lignes de courbure de l'autre ; il en résulte que les rayons de courbure de Σ et Σ_1 sont égaux et intervertis.

Transformons par polaires réciproques relativement à la sphère, les normales à S ; on obtient les normales à une autre surface S' ; à celle-ci correspond par la méthode de M. Weingarten une autre surface à courbure constante Σ'_1 qui se déduit de Σ_1 par la transformation de M. Bianchi.

Les centres de courbure de S' sont les pôles des plans principaux de S ; ils ont pour coordonnées :

$$X'_2 = \frac{\dfrac{\partial c}{\partial u}}{\dfrac{\partial p}{\partial u}}, \qquad Y'_2 = \frac{\dfrac{\partial c'}{\partial u}}{\dfrac{\partial p}{\partial u}}, \qquad Z'_2 = \frac{\dfrac{\partial c''}{\partial u}}{\dfrac{\partial p}{\partial u}},$$

$$X'_1 = \frac{\dfrac{\partial c}{\partial v}}{\dfrac{\partial p}{\partial v}}, \qquad Y'_1 = \frac{\dfrac{\partial c'}{\partial v}}{\dfrac{\partial p}{\partial v}}, \qquad Z'_1 = \frac{\dfrac{\partial c''}{\partial v}}{\dfrac{\partial p}{\partial v}}.$$

On a, d'autre part,

$$(p^2 - 2q)(p'^2 - 2q') = 1,$$

car $2q - p^2$ et $2q' - p'^2$ sont les carrés des distances du centre de la sphère à deux droites conjuguées.

En appliquant aux coordonnées x'_1, y'_1, z'_1 d'un point M'_1 de la nouvelle surface, les formules (19), on a

$$\frac{\partial x'_1}{\partial u} = -X'_2 \frac{\partial \lambda}{\partial u} = -\frac{\frac{\partial c}{\partial u}}{\frac{\partial p}{\partial u}} \frac{\partial \lambda}{\partial u} = -\frac{p + R_1}{\sqrt{p^2 - 2q}} \frac{\partial c}{\partial u}$$

ou enfin :

$$\frac{\partial x'_1}{\partial u} = \frac{\frac{\partial X}{\partial u} - p\frac{\partial c}{\partial u}}{\sqrt{p^2 - 2q}}. \tag{21}$$

De même,

$$\frac{\partial x'_1}{\partial v} = \frac{\frac{\partial X}{\partial v} - p\frac{\partial c}{\partial v}}{\sqrt{p^2 - 2q}}, \tag{22}$$

et, par suite,

$$dx'_1 = \frac{dX - p\,dc}{\sqrt{p^2 - 2q}}.$$

Or,

$$dx_1 = c\,d\frac{p}{\sqrt{p^2 - 2q}} - X d\frac{1}{\sqrt{p^2 - 2q}} = d\left(\frac{cp - X}{\sqrt{p^2 - 2q}}\right) - \frac{p\,dc - dX}{\sqrt{p^2 - 2q}},$$

c'est-à-dire

$$d(x'_1 - x_1) = d\left(\frac{X - cp}{\sqrt{p^2 - 2q}}\right).$$

En intégrant, on a les trois équations analogues :

$$x'_1 - x_1 = \frac{X - cp}{\sqrt{p^2 - 2q}},$$

$$y'_1 - y_1 = \frac{Y - c'p}{\sqrt{p^2 - 2q}},$$

$$z'_1 - z_1 = \frac{Z - c''p}{\sqrt{p^2 - 2q}}.$$

Le vecteur M_1M_1' est parallèle à la perpendiculaire abaissée de O sur la normale à S; il est égal à $\sqrt{-1}$. Ce vecteur est donc situé dans le plan tangent à Σ_1, ainsi que dans le plan tangent à Σ_1'; et si on remarque que Σ_1 a sa courbure totale positive et égale à 1, on retrouve la transformation de Ribeaucour. On obtiendra toutes les surfaces déduites de Σ_1 en remplaçant S par les inverses des surfaces parallèles. On voit que si on connaît la surface S et la surface à courbure constante Σ_1 qui s'en déduit, l'application de la méthode de M. Bianchi n'exige aucune quadrature. Si, de plus, on connaît la surface Σ dont les coordonnées θ, φ, ψ sont déterminées par les équations (20), nous avons vu que la surface S' se détermine sans quadrature (§ 7). On pourra donc appliquer de nouveau, sans aucune quadrature, la transformation de M. Bianchi à toutes les surfaces Σ_1' déduites de Σ_1.

Si on considère la surface Σ_1, il existe une famille de congruences harmoniques au réseau des lignes de courbures et parallèles aux normales de S. Soit G l'une des congruences. Si par tout point de Σ_1 on mène une perpendiculaire à la droite correspondante de G, il résulte de ce qui précède que ces perpendiculaires forment une congruence de normales dont la surface focale se compose de Σ_1 et d'une autre surface à courbure constante.

[**10**] Si on se propose de déterminer les surfaces déformables avec conservation des lignes de courbure, ces dernières constituent un réseau C orthogonal. La surface auxiliaire S est donc la même que dans la déformation de la sphère. A chaque surface S correspondent une infinité de surfaces ayant pour représentation sphérique de leurs lignes de courbure un réseau C de la sphère. La surface auxiliaire S, en particulier, possède cette propriété. En effet, si on se reporte aux formules (14) en y faisant

$$A = B = C = 1,$$

on voit que la représentation sphérique des lignes de courbure de S est un réseau C de la sphère; ces surfaces ont donc même représentation sphérique de leurs lignes de courbure que les surfaces à courbure constante; ce résultat est d'ailleurs mis en évidence par les formules (21) et (22) qui s'écrivent :

$$\frac{\partial x_1'}{\partial u} = -\frac{p + R_1}{\sqrt{p^2 - 2q}} \frac{\partial c}{\partial u},$$
$$\frac{\partial x_1'}{\partial v} = -\frac{p + R_2}{\sqrt{p^2 - 2q}} \frac{\partial c}{\partial v}.$$

Les deux surfaces S et Σ_1' ont donc même représentation sphérique.

Les surfaces à courbure moyenne constante peuvent également être déformées avec conservation des lignes de courbure. Considérons les deux surfaces Σ et Σ_1 envisagées au paragraphe précédent, et telles que les lignes de courbure de l'une sont applicables sur la représentation sphérique de l'autre; soient x, y, z et x_1, y_1, z_1 les coordonnées de deux points correspondants, c, c', c'' et c_1, c'_1, c''_1 les cosinus directeurs des normales.

Les deux points M et M' ayant pour coordonnées

$$X = x + c, \qquad Y = y + c', \qquad Z = z + c'',$$
$$X_1 = x_1 + c_1, \qquad Y_1 = y_1 + c'_1, \qquad Z_1 = z_1 + c''_1,$$

décrivent des surfaces à courbure moyenne constante applicables l'une sur l'autre. En effet, les surfaces Σ et Σ_1 ont leurs rayons de courbure égaux; il en est de même des surfaces à courbure moyenne constante qui s'en déduisent par les formules ci-dessus; ces deux surfaces sont donc applicables l'une sur l'autre avec conservation des lignes de courbure et des rayons de courbure (Bonnet).

Il en serait de même pour les deux surfaces définies par les équations

$$X = x - c, \qquad Y = y - c', \qquad Z = z - c'',$$
$$X_1 = x_1 - c_1, \qquad Y_1 = y_1 - c'_1, \qquad Z_1 = z_1 - c'',$$

qui ont aussi leur courbure moyenne constante.