

A. BUHL

## Sur les applications géométriques de la formule de Stokes

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3<sup>e</sup> série*, tome 2, n° 1-2 (1910), p. 33-84

[http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_1910\\_3\\_2\\_1-2\\_33\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1910_3_2_1-2_33_0)

© Université Paul Sabatier, 1910, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

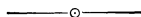
---

## SUR LES APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES

DE

# LA FORMULE DE STOKES,

PAR M. A. BUHL.



### INTRODUCTION.

Le premier objet de ce Mémoire a d'abord été d'évaluer des volumes à l'aide d'intégrales de ligne. Si l'on considère une cloison  $S$  jetée sur un contour fermé  $\Sigma$  et différents solides ayant  $S$  pour facette commune, mais complètement différents par ailleurs (par exemple des cônes ayant tous  $S$  pour base gauche, mais dont les sommets seraient différents), il est aisé de montrer (n° 1) que la connaissance du volume d'un seul de ces solides entraîne la détermination du volume d'un quelconque des autres au moyen d'une simple intégrale de ligne attachée au contour  $\Sigma$ . Cela ne dépend que d'applications très simples de la formule de Stokes. A ce propos, je tiens à signaler tout le parti que j'ai tiré de l'élégant Mémoire de M. G. Kœnigs : *Sur la détermination générale du volume engendré par un contour fermé gauche ou plan dans un mouvement quelconque* (Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1889). J'ai emprunté avec avantage un certain nombre de notions employées par cet excellent géomètre, notamment la notion d'axe aréolaire d'un contour fermé.

Mais, outre que les résultats qu'on trouve dans ce qui suit sont différents de ceux donnés par M. Kœnigs, je crois pouvoir faire remarquer qu'il y a aussi quelque différence de principe dans nos recherches respectives. Le Mémoire de M. Kœnigs relève à coup sûr de la Cinématique ; le mien ne relève que de la Géométrie.

Parmi les résultats géométriques obtenus, je puis signaler les élégantes propriétés de non-transcendance d'une infinité de volumes attachés à la courbe sphérique de Viviani, les relations entre les aires définies par des contours quelconques sur la

sphère ou sur les cylindres circulaires et les volumes attachés à ces portions de surfaces, les analogies entre les volumes et les moments d'inertie, analogies fondées sur un ancien Mémoire et une récente remarque de M. Darboux, etc...

Ces sujets constituent les deux premières parties de mon travail.

Dans une troisième partie j'étudie de curieuses transformations qui engendrent des volumes équivalents.

Tout au début de l'étude d'un tel sujet j'ai été amené à considérer la formule de Stokes comme résultant simplement d'un changement de variables dans la formule de Riemann :

$$\int_C M dX + N dY = \iint_A \left( \frac{\partial N}{\partial X} - \frac{\partial M}{\partial Y} \right) dX dY.$$

Que l'on pose, en effet,

$$P dx + Q dy + R dz \equiv M dX + N dY,$$

ce qui conduit à un cas très particulier du problème de Pfaff, et l'on définira ainsi la transformation en question. Il n'y a là, d'ailleurs, rien de nouveau; la transformation que je fais remonter à Pfaff remonte de même à Jacobi et Clebsch, qui remarquèrent qu'un tourbillon ne dépendait que de la donnée de deux fonctions (alors qu'il en faut trois pour définir un vecteur absolument quelconque) et bâtirent précisément sur cette remarque leurs recherches relatives aux mouvements tourbillonnaires.

Et même, dans un Mémoire *Sur la formule de Stokes dans l'hyperespace* que le présent Recueil publiera après celui-ci, nous verrons qu'on peut relier, par des changements de variables, la formule de Stokes et la simple identité

$$\int_C X dY = \iint_A dX dY.$$

Plus simplement encore, et d'une manière tout à fait intuitive, imaginons sur une surface une formule quelconque en  $x, y, z$ ; à l'aide de coordonnées curvilignes  $X, Y$ , prises sur cette surface, on pourra en faire une formule à deux variables.

Et si la première formule est celle de Stokes, que peut être la seconde, sinon celle de Riemann? Cette remarque intuitive est remplacée par une démonstration au n° 37.

Il y a peut-être là l'explication d'une contradiction, qui m'a toujours fort étonné, entre l'importance immense et toujours grandissante de la formule de Stokes en Physique <sup>(1)</sup> et le peu d'attrait qu'elle semble offrir aux géomètres sur le terrain purement mathématique. Sans doute, les géomètres n'y ont pas senti une formule

<sup>(1)</sup> M. H. BOUASSE, dans son *Cours de Physique* (t. III, p. 26), dit qu'on doit « mettre le théorème de Stokes au nombre des notions primordiales de la Physique qui ne se contente pas de phrases creuses et d'analogies vaines ». Il est à peine utile de dire que je suis entièrement de l'avis de mon éminent collègue.

franchement nouvelle, exprimant quelque chose de plus qu'une formule connue d'autre part, qui était celle de Riemann ou même la simple identité de tout à l'heure.

Et, à strictement parler, ils ont eu raison.

Mais combien cette raison stricte paraît grosse de torts, ne serait-ce qu'au point de vue pédagogique! Au lieu de démontrer la formule de Stokes en renvoyant ses applications à plus tard, en hydro ou en électrodynamique, combien il serait facile, par exemple, de l'employer à passer du volume classique

$$U_z = \iint_S z dx dy$$

aux volumes analogues  $U_x$  et  $U_y$ , définis à l'aide de projetantes cylindriques parallèles à  $Ox$  et à  $Oy$ , ce qui donne les formules éminemment simples

$$U_x - U_y = \int_z xy dz, \quad U_y - U_z = \int_x yz dx, \quad U_z - U_x = \int_y zx dy,$$

applicables elles-mêmes, de la manière la plus élégante et avec des calculs insignifiants, à de certaines courbes telles que la fenêtre sphérique de Viviani.

Pour ma part, je n'ai pas hésité à introduire de telles choses dans le Cours de Mathématiques générales que je professe à la Faculté des Sciences de Toulouse.

Toulouse, 31 mars 1911.

## CHAPITRE PREMIER.

### Volumes cylindriques.

[1] Il est aisé de montrer intuitivement comment un certain volume, exprimé par une intégrale double, peut ne dépendre que d'un certain contour et, dans ces conditions, devenir exprimable à l'aide d'une intégrale simple.

Soit un certain contour fermé  $\Sigma$  sur lequel nous jetterons une cloison  $S$  déformable, mais toujours nettement limitée par  $\Sigma$ . Soient maintenant deux solides limités tous deux par la même cloison  $S$  et par ailleurs de manières différentes et absolument quelconques. *La différence entre les volumes de ces solides est un volume qui ne dépend que du contour  $\Sigma$  et nullement de la forme de la cloison  $S$ .* En effet, déformer  $S$  c'est ajouter un certain onglet à chacun des volumes en question et, comme cet onglet est le même pour les deux volumes, il n'influe en rien sur leur différence.

La formule de Stokes servira d'abord à présenter avec plus de rigueur analytique ce raisonnement intuitif. De plus, elle conduira, dans les cas que nous allons examiner, à des formules et à des résultats d'une grande élégance.

Expliquons-nous d'abord une fois pour toutes sur les notations les plus couramment employées dans la suite.

La cloison S est une surface à laquelle nous supposons, de préférence, l'équation explicite

$$(1) \quad z = f(x, y).$$

Au point M(x, y, z) de cette surface l'élément d'aire est  $d\sigma$ . Par définition, on doit se représenter cet élément comme un quadrilatère curviligne se projetant sur le plan Oxy suivant le rectangle  $dx dy$ . Ceci conduit à prendre, pour cosinus directeurs de la normale en M, les expressions

$$\alpha = \frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \beta = \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

et à écrire  $\gamma d\sigma = dx dy$ . D'ailleurs, en projetant  $d\sigma$  sur les autres plans coordonnés, on a plus symétriquement les trois relations

$$(2) \quad \alpha d\sigma = -p dx dy, \quad \beta d\sigma = -q dx dy, \quad \gamma d\sigma = dx dy,$$

en posant suivant l'usage :

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

La formule de Stokes est commode à retenir sous la forme symbolique

$$(3) \quad \int_s P dx + Q dy + R dz = \iint_s \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} d\sigma,$$

le second membre n'étant, bien entendu, qu'une manière d'aider la mémoire pour écrire

$$\iint_s \left[ \alpha \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + \beta \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \gamma \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right] d\sigma.$$

Si l'on fait usage des relations (2), ce second membre se transforme en

$$(4) \quad \iint_s \left[ -p \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) - q \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right] dx dy.$$

Cette dernière forme du second membre sera souvent employée dans ce Mémoire ; je rappelle enfin qu'une expression

$$\iint_S (x F + y G + z H) d\tau = \iint_S (-p F - q G + H) dx dy$$

où  $F, G, H$  sont des fonctions données de  $x, y, z$  peut se mettre sous la forme (4) en posant :

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = F \\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = G \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = H \end{cases}$$

si  $F, G, H$  satisfont à la relation

$$(6) \quad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0.$$

D'ailleurs, bien qu'il ne s'agisse ici que de géométrie, nous abrégerons bien souvent en employant les termes physiques. C'est ainsi que les fonctions  $P, Q, R$  peuvent être considérées comme définissant un vecteur issu de  $M(x, y, z)$  et les fonctions  $F, G, H$  comme définissant un autre vecteur qui est le *tourbillon* du premier.

Lorsqu'on donne  $F, G, H$ , le calcul des fonctions  $P, Q, R$  satisfaisant aux relations (5) est un problème classique résolu, par exemple, dans le *Traité de Mécanique* de M. P. Appell (t. III, chap. xxviii) et dans le *Traité d'Analyse* de M. E. Picard (t. I, chap. iv).

Enfin, quant au sens positif dans lequel il faut parcourir le contour  $\Sigma$ , pour évaluer l'intégrale simple qui figure dans (3), c'est le sens habituel dans lequel un observateur placé debout en  $O$  verrait circuler un point pris sur la partie positive de  $Ox$ , si l'on faisait tourner cette partie d'un angle droit pour la rabattre sur la partie positive de  $Oy$ . Sur la figure 1, c'est le sens ABCA. Tout ceci est encore d'accord avec les indications du *Traité* de M. Appell (*loc. cit.*, p. 9).

[2] *Volumes cylindriques principaux* (1). — Soit le contour  $\Sigma$  par lequel passe la surface  $S$  d'équation (1). De tous les points de  $\Sigma$  et de la portion de surface  $S$  contenue dans ce contour nous pouvons abaisser des perpendiculaires sur  $Oxy$ . Nous formerons ainsi le volume cylindrique classique limité latéralement par le cylindre qui a  $\Sigma$  pour

---

(1) *Comptes rendus* (20 février 1911).

directrice et dont toutes les génératrices sont parallèles à Oz. La base de ce cylindre, dans le plan Oxy, est limitée par un contour C projection de  $\Sigma$ .

Le volume cylindrique que nous venons de définir sera désigné par  $U_z$ .

Si l'on avait projeté les points de S et de  $\Sigma$  non pas dans la direction de Oz, mais dans les directions Ox ou Oy, on aurait obtenu des volumes de même nature qui seront désignés respectivement par  $U_x$  et  $U_y$ .

On a manifestement :

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} U_x = \iint_S xz d\sigma = - \iint_S px dx dy, \\ U_y = \iint_S y\beta d\sigma = - \iint_S qy dx dy, \\ U_z = \iint_S z\gamma d\sigma = \iint_S z dx dy, \end{array} \right.$$

les troisièmes membres de ces égalités étant déduits des seconds au moyen des formules (2). Or, d'après la remarque fondamentale du début (n° 1), les différences de ces trois volumes U pris deux à deux doivent être exprimables par une simple intégrale de ligne attachée au contour  $\Sigma$ . Etudions par exemple :

$$(8) \quad U_x - U_y = - \iint_S (px - qy) dx dy.$$

Cette intégrale double est transformable par la formule de Stokes. Elle est en effet identique à (4) si l'on pose :

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = x, \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = -y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0.$$

Or, c'est là un système auquel on satisfait en posant

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad R = xy,$$

ce qui transforme (8) en

$$U_x - U_y = \int_{\Sigma} xy dz.$$

Par des raisonnements analogues ou, plus simplement, par permutations circulaires, on établirait le groupe des trois formules :

$$(9) \quad U_x - U_y = \int_{\Sigma} xy dz, \quad U_y - U_z = \int_{\Sigma} yz dx, \quad U_z - U_x = \int_{\Sigma} zx dy.$$

Celles-ci ne sont pas distinctes. Il faudra, en effet, supposer que  $x, y, z$  n'ont en général qu'une seule détermination sur le contour  $\Sigma$ . Alors l'addition des trois formules (9) donne l'identité  $0 = 0$ , l'intégrale obtenue dans l'addition portant sur une différentielle exacte  $d(xyz)$ .

[3] *Application à l'hippopède* <sup>(1)</sup>. — Soit la courbe sphérique bien connue sous le nom d'*hippopède* ou de *fenêtre de Viviani*. Elle est l'intersection d'une sphère de rayon  $R$  et de centre  $O$  avec un cylindre circulaire ayant pour diamètre de base le rayon  $OA$  de ladite sphère (*fig. 1*). Un point  $M$  de cette courbe se projetant en  $P$  sur  $Oxy$ , et  $\theta$  désignant l'angle  $AOP$ , on a pour coordonnées de  $M$  :

$$x = R \sin \theta \cos \theta, \quad y = R \cos^2 \theta, \quad z = R \sin \theta.$$

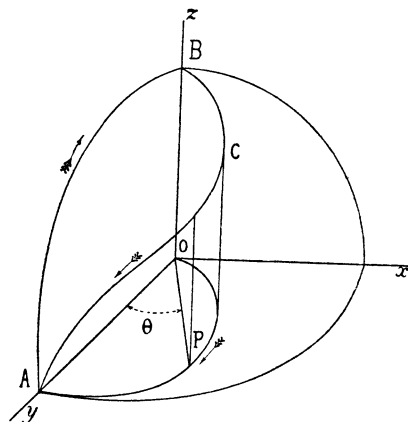


FIG. 1.

Les intégrales des formules (9) se forment alors avec une extrême facilité. On devra remarquer en outre que la partie de ces intégrales qui correspond au quart de cercle  $AB$  est nulle, le contour  $\Sigma$  étant formé ici par ce quart de cercle et par la portion de courbe  $BCA$ . On a

$$\begin{aligned} U_x - U_y &= -R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos^4 \theta d\theta = -R^3 \int_0^1 u^4 du = -\frac{1}{5} R^3, \\ U_y - U_z &= -R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos^2 \theta \cos 2\theta d\theta = R^3 \int_0^1 (u^3 - 2u^4) du = -\frac{1}{15} R^3, \\ U_z - U_x &= 2R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta \cos^2 \theta d\theta = 2R^3 \int_0^1 (u^3 - u^4) du = \frac{4}{15} R^3. \end{aligned}$$

Conformément à la remarque qui termine le numéro précédent, on vérifie immédiatement que la somme de ces trois expressions est nulle.

On sait que

$$U_z = \left( \frac{\pi}{6} - \frac{2}{9} \right) R^3$$

---

(1) Le mot d'*hippopède* est employé ici à cause de sa brièveté, qui le rend fort commode, bien qu'on appelle généralement ainsi l'intersection d'un cylindre circulaire avec une sphère tangente *quelconque*. Mais ici aucune confusion n'est à craindre.



et, dans ces conditions, on a immédiatement :

$$U_x = \left(\frac{\pi}{6} - \frac{22}{45}\right) R^3, \quad U_y = \left(\frac{\pi}{6} - \frac{13}{45}\right) R^3, \quad U_z = \left(\frac{\pi}{6} - \frac{2}{9}\right) R^3.$$

Retranchons ces volumes du huitième de sphère dans lequel ils sont situés et nous obtenons des différences qui sont respectivement

$$\frac{22}{45} R^3, \quad \frac{13}{45} R^3, \quad \frac{10}{45} R^3.$$

Le dernier de ces résultats, dont la rationalité fut autrefois si remarquée, ne va pas, on le voit, sans deux autres qui, quoique moins classiques, sont tout aussi intéressants. Pour l'heure actuelle, il n'est guère possible de leur attacher de l'importance *en tant que résultats*; mais, si l'on a égard à la méthode qui précède, on y voit une application de la formule de Stokes d'une élégance bien remarquable.

[4] *Surfaces remarquables.* — Reprenons la différence de volumes cylindriques exprimée par la formule (8). On aura continuellement

$$U_x = U_y$$

si

$$px - qy = 0.$$

C'est là une équation aux dérivées partielles dont l'intégration est immédiate et donne

$$(10) \quad xy = \varphi(z),$$

$\varphi$  étant une fonction arbitraire. Ces surfaces (10) sont engendrées par une hyperbole équilatère dont le plan est toujours parallèle à  $Oxy$ , cependant que le centre décrit  $Oz$ , les asymptotes de la courbe étant toujours dans les plans  $Ozx$  et  $Oyz$ , et cette courbe variant homothétiquement en s'appuyant toujours sur une courbe directrice donnée. Un contour fermé, simplement connexe, tracé sur de telles surfaces, donne toujours des volumes  $U_x$  et  $U_y$  égaux.

La surface

$$xyz = \text{const.}$$

qui appartient à la fois aux trois types

$$xy = \varphi(z), \quad yz = \psi(x), \quad zx = \chi(y)$$

donne, pour les contours qu'on y trace, des volumes  $U_x$ ,  $U_y$ ,  $U_z$  qui sont égaux.

Ces résultats sont bien connus et nous n'y insisterons pas davantage. Remarquons cependant qu'on serait arrivé aux mêmes conclusions en étudiant la première des formules (9); l'intégrale simple du second membre est nulle si  $xy$  est fonction finie et bien déterminée de  $z$  le long de  $\Sigma$ .

[5] *Volumes cylindriques généraux.* — Soit un plan  $\Pi$  passant toujours par l'origine  $O$  et que nous dirigerons en considérant le vecteur  $OP$  toujours normal audit plan et ayant  $\lambda, \mu, \nu$  pour cosinus directeurs (*fig. 2*). De tous les points du contour  $\Sigma$  et de la cloison  $S$  d'équation (1), abaissons des perpendiculaires sur le plan  $\Pi$ ; nous définirons ainsi un certain volume cylindrique  $U$  qui variera avec l'orientation du plan  $\Pi$ . Ce sont les variations de  $U$  que nous nous proposons d'étudier maintenant.

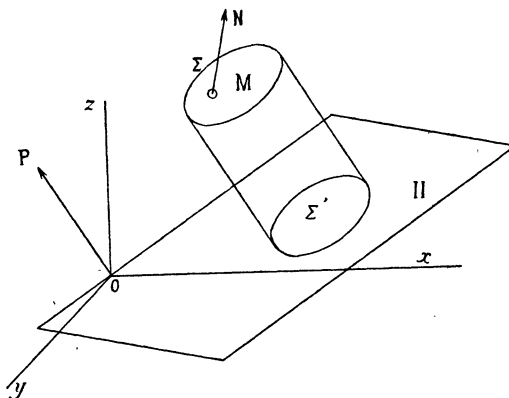


FIG. 2.

Au point  $M$  de la cloison  $S$  considérons l'élément d'aire  $d\sigma$  et la normale  $MN$  de cosinus directeurs  $\alpha, \beta, \gamma$ . L'angle de  $MN$  et de  $OP$  a pour cosinus

$$\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma;$$

l'élément  $d\sigma$  a pour projection sur  $\Pi$  un élément d'aire

$$(\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma)d\sigma$$

auquel correspond l'élément du volume  $U$

$$(\lambda x + \mu y + \nu z)(\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma)d\sigma.$$

On modifie cette dernière expression en tenant compte des formules (2) et il vient finalement :

$$U = \iint_S (\lambda x + \mu y + \nu z)(-\lambda p - \mu q + \nu) dx dy.$$

Une différence telle que

$$(11) \quad U - U_z = \iint_S [(\lambda x + \mu y + \nu z)(-\lambda p - \mu q + \nu) - z] dx dy$$

doit être transformable en une intégrale simple pour la formule de Stokes.

Nous avons en effet :

$$\begin{aligned} F &= \lambda(\lambda x + \mu y + \nu z) \\ G &= \mu(\lambda x + \mu y + \nu z) \\ H &= \nu(\lambda x + \mu y + \nu z) - z \end{aligned}$$

et l'on satisfait facilement aux relations (5) en prenant

$$\begin{aligned} P &= \mu \left[ z(\lambda x + \mu y) + \frac{\nu}{2}(z^2 - y^2) \right], \\ Q &= -\lambda \left[ z(\lambda x + \mu y) + \frac{\nu}{2}(z^2 - x^2) \right], \\ R &= 0. \end{aligned}$$

Alors (11) devient

$$(12) \quad U - U_z = \int_{\Sigma} P dx + Q dy.$$

Si l'on remplace P et Q par les valeurs ci-dessus, on a une combinaison linéaire d'intégrales simples qui ont toutes une signification remarquable. Posons :

$$(13) \quad \begin{cases} A_x = \int y dz = - \int z dy, \\ A_y = \int z dx = - \int x dz, \\ A_z = \int x dy = - \int y dx, \end{cases}$$

$$(14) \quad \begin{cases} A_x \eta_x = \int \frac{y^2}{2} dz = - \int yz dy, & A_x \eta_x = - \int \frac{z^2}{2} dy = \int zy dz, \\ A_y \zeta_y = \int \frac{z^2}{2} dx = - \int zx dz, & A_y \zeta_y = - \int \frac{x^2}{2} dz = \int xz dx, \\ A_z \xi_z = \int \frac{x^2}{2} dy = - \int xy dx, & A_z \eta_z = - \int \frac{y^2}{2} dx = \int yx dy, \end{cases}$$

toutes ces intégrales étant étendues au contour  $\Sigma$ . Si ce contour est tel qu'il donne pour projections sur les plans coordonnés des contours plans simples n'ayant ni boucles ni points multiples, les notations des tableaux (13) et (14) signifient que  $\Sigma$  a pour projection :

$$\begin{array}{ccccccc} \text{sur Oyz un contour d'aire } A_x & \text{et de centre de gravité } G_x(0, \eta_x, \zeta_x), \\ - Ozx & - & - & A_y & - & - & G_y(\xi_y, 0, \zeta_y), \\ - Oxy & - & - & A_z & - & - & G_z(\xi_z, \eta_z, 0). \end{array}$$

Et même si lesdites projections de  $\Sigma$  avaient des boucles distinctes ou se recouvrant partiellement, on pourrait encore conserver le langage précédent à condition de prendre la notion de centre de gravité un peu moins à l'étroit que dans la statique pratique.

Ainsi  $A_x, A_y, A_z$  sont des aires qui, pour des courbes à boucles, peuvent se composer de parties de signes divers. Il en est de même des expressions (14) où l'on peut toujours parler de centres de gravité si certains éléments d'aires sont traités comme ayant des masses négatives. Observons aussi que les premiers membres des égalités (14) peuvent parfaitement être différents de zéro même pour une aire  $A$  nulle; cela revient à se représenter une ou plusieurs des coordonnées  $\xi, \eta, \zeta$  comme étant infinies, mais c'est une conséquence toute naturelle des conventions généralisées qui précèdent (1).

Ces explications, utiles pour éviter des confusions, étant données, revenons à l'étude de l'égalité (12). Utilisant les formules (9) et (14), le second membre de (12) s'écrit maintenant

$$\mu\lambda A_y \xi_y + \mu^2(U_y - U_z) + \mu\nu A_y \zeta_y + \mu\nu A_z \eta_z + \lambda^2(U_x - U_z) + \lambda\mu A_x \eta_x + \lambda\nu A_x \zeta_x + \lambda\nu A_z \xi_z$$

et l'on a finalement la formule très symétrique

$$(15) \quad U = \lambda^2 U_x + \mu^2 U_y + \nu^2 U_z + \mu\nu(A_y \zeta_y + A_z \eta_z) + \nu\lambda(A_z \xi_z + A_x \zeta_x) + \lambda\mu(A_x \eta_x + A_y \xi_y).$$

On doit pouvoir y arriver en étudiant les différences  $U - U_x$  ou  $U - U_y$  aussi bien que la différence (11), ce qui a été vérifié; la reproduction de ces vérifications serait toutefois sans intérêt nouveau.

[6] La formule (15) est d'une très grande importance pour la suite. Pour abrégér, nous appelons *termes carrés* les trois premiers termes du second membre, lesquels contiennent  $\lambda^2, \mu^2, \nu^2$ ; les trois derniers termes en  $\mu\nu, \nu\lambda, \lambda\mu$  seront appelés *termes rectangles*.

*Si, le contour  $\Sigma$  étant toujours rigoureusement invariable, on modifie la cloison  $S$  passant par ce contour, les termes carrés varient, en général, mais les termes rectangles restent invariables.*

En effet, le changement de la cloison  $S$  modifie, en général, les volumes  $U_x, U_y, U_z$ , mais les termes rectangles ne dépendent que d'aires et de coordonnées de centres de gravité relatives aux projections du contour  $\Sigma$  sur les plans coordonnés. Ceci est même évident à la seule inspection de la formule (15), mais il était utile de bien mettre en évidence le théorème souligné à cause des conclusions que nous allons en tirer.

---

(1) C'est le cas de vecteurs parallèles se réduisant à un couple; le centre de ces vecteurs est alors rejeté à l'infini.

Si le contour  $\Sigma$  a des projections sur les plans coordonnés qui sont situées entièrement dans les premiers quadrants de ces plans, sans jamais être coupés par aucun des axes coordonnés, les termes rectangles de (15) ont une interprétation géométrique fort simple. En vertu de l'un des théorèmes de Guldin, ces aires tournant autour des axes coordonnés engendrent des volumes égaux respectivement à

$$\begin{array}{llllll} 2\pi A_y \zeta_y \text{ et } 2\pi A_z \eta_z & \text{pour } A_y \text{ et } A_z & \text{tournant autour de } O x, \\ 2\pi A_z \xi_z \text{ et } 2\pi A_x \zeta_x & = & A_z \text{ et } A_x & = & = & O y, \\ 2\pi A_x \eta_x \text{ et } 2\pi A_y \xi_y & = & A_x \text{ et } A_y & = & = & O z. \end{array}$$

[7] *Application de la formule (15) au quadrant d'hippopède.* — Le quadrant d'hippopède ABCA (*fig. 1*) est précisément dans le cas auquel nous venons de faire allusion. Ses projections sur les plans coordonnés sont des aires qui peuvent être limitées, mais non coupées par les axes.

Le contour ABCA se projette sur Ozy suivant une aire  $A_x$  comprise entre l'arc de cercle AB et un arc de parabole dont AO est axe et A sommet. A l'aide des formules (14) ou d'un des théorèmes de Guldin, on trouve sans peine :

$$A_x = R^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3} \right), \quad A_x \eta_x = \frac{R^3}{15}, \quad A_x \zeta_x = \frac{R^3}{12}.$$

Comme projection sur le plan Oxz, l'hippopède donne une lemniscate de Gerono et là encore on trouve sans peine :

$$A_y = \frac{R^2}{3}, \quad A_y \zeta_y = \frac{\pi R^3}{16}, \quad A_y \xi_y = \frac{R^3}{15}.$$

Enfin, par définition même, la projection sur Oxy est un demi-cercle pour lequel on a :

$$A_z = \frac{\pi R^2}{8}, \quad A_z \xi_z = \frac{R^3}{12}, \quad A_z \eta_z = \frac{\pi R^3}{16}.$$

La comparaison de ces résultats donne incidemment d'intéressantes propriétés de l'hippopède.

Les aires  $A_x$  et  $A_z$  tournant autour de Oy donnent des volumes égaux.

$$\begin{array}{llllll} - & A_y \text{ et } A_x & - & - & O z & - & - \\ - & A_z \text{ et } A_y & - & - & O x & - & - \end{array}$$

Utilisant les valeurs de  $U_x$ ,  $U_y$ ,  $U_z$  obtenues au n° 3, la formule (15) devient

$$U = R^3 \left[ \left( \frac{\pi}{6} - \frac{22}{45} \right) \lambda^2 + \left( \frac{\pi}{6} - \frac{13}{45} \right) \mu^2 + \left( \frac{\pi}{6} - \frac{10}{45} \right) \nu^2 + \frac{\pi}{8} \mu \nu + \frac{1}{6} \nu \lambda + \frac{2}{15} \lambda \mu \right].$$

On en tire :

$$\frac{\pi R^3}{6} - U = R^3 \left( \frac{22}{45} \lambda^2 + \frac{13}{45} \mu^2 + \frac{10}{45} \nu^2 - \frac{\pi}{8} \mu \nu - \frac{1}{6} \nu \lambda - \frac{2}{15} \lambda \mu \right).$$

On voit que la différence entre un huitième de sphère et le volume  $U$  n'est pas rationnelle *en général*, c'est-à-dire quelle que soit l'orientation du plan  $\Pi$ , mais cette différence, lorsque l'on a  $\mu = 0$  ou  $\nu = 0$ , ne contient pas d'autres irrationalités numériques que celles offertes par les cosinus directeurs  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ .

Pour  $\mu = 0$  le plan  $\Pi$  tourne autour de  $Oy$ , pour  $\nu = 0$  il tourne autour de  $Oz$ .

[8] *Remarque sur les contours  $\Sigma$ .* — Dans l'exemple qui précède, la cloison  $S$ , jetée sur le contour  $\Sigma$ , a, en tous ses points, une normale, faisant toujours des angles au plus égaux à un droit avec les axes coordonnés. Il est bien facile de s'affranchir de cette hypothèse. Une cloison  $S$  qui ne serait pas dans les conditions indiquées pourrait toujours être divisée en régions telles que dans chaque région les cosinus directeurs de la normale aient un signe invariable. On établirait ensuite autant de formules (15) qu'il y a de régions et on les ajouterait pour obtenir le volume  $U$  relatif à la cloison considérée. L'addition des termes carrés serait une addition de volumes pouvant avoir des signes différents, mais ces signes s'établiraient d'après les conventions générales auxquelles il n'y a rien à ajouter ici. Quant aux termes rectangles, *qui ne dépendent que du contour  $\Sigma$* , établis pour certaines portions du contour et ajoutés, ils donnent des termes de même forme relatifs au contour complet, ceci d'après les considérations les plus élémentaires relatives aux centres de gravité.

[9] *Application de la formule (15) à la boucle d'hippopède.* — Prenons la boucle d'hippopède qui serait formée sur la figure 1 par l'arc  $BCA$  et par son symétrique relativement au plan  $Oyz$ .

Nous avons alors :

$$U_x = 2 \left( \frac{\pi}{6} - \frac{22}{45} \right) R^3, \quad U_y = 2 \left( \frac{\pi}{6} - \frac{13}{45} \right) R^3, \quad U_z = 2 \left( \frac{\pi}{6} - \frac{2}{9} \right) R^3.$$

On a ensuite :

$$A_x = 0, \quad \xi_z = 0, \quad \xi_y = 0,$$

ce qui suffit à faire disparaître les deux derniers termes rectangles de (15). On a enfin

$$A_y \zeta_y = A_z \zeta_z = \frac{\pi R^3}{8}$$

et (15) devient :

$$U = 2R^3 \left[ \left( \frac{\pi}{6} - \frac{22}{45} \right) \lambda^2 + \left( \frac{\pi}{6} - \frac{13}{45} \right) \mu^2 + \left( \frac{\pi}{6} - \frac{2}{9} \right) \nu^2 + \frac{\pi}{8} \mu \nu \right].$$

Si l'on retranche ce volume de celui du quart de sphère, on a une différence quant à la rationalité de laquelle on peut faire des remarques analogues à celles qui terminent le n° 7.

[10] *Translation des coordonnées par rapport à un contour.* — Supposons que, dans une figure analogue à la figure 2, le plan  $\Pi$  passe par un point fixe  $O'$  de coordonnées  $a, b, c$ .

Alors on voit immédiatement comment on doit modifier la formule (15). Le volume  $U$  relatif au plan  $\Pi$  a pour expression :

$$U = \lambda^3(U_x - aA_x) + \mu^3(U_y - bA_y) + \nu^3(U_z - cA_z) + \nu\lambda[A_y(\zeta_y - c) + A_z(\eta_z - b)] \\ + \nu\lambda[A_z(\xi_z - a) + A_x(\zeta_x - c)] + \lambda\mu[A_x(\eta_x - b) + A_y(\xi_y - a)].$$

Ceci montre immédiatement que, si l'on détermine  $a, b, c$  par les équations

$$(16) \quad \begin{cases} A_y(\zeta_y - c) + A_z(\eta_z - b) = 0, \\ A_z(\xi_z - a) + A_x(\zeta_x - c) = 0, \\ A_x(\eta_x - b) + A_y(\xi_y - a) = 0, \end{cases}$$

la nouvelle valeur de  $U$  n'a plus que des termes carrés. Ces équations donnent :

$$(17) \quad \begin{cases} 2a = \xi_y + \xi_z - A_x \left( \frac{\eta_z - \eta_x}{A_y} - \frac{\zeta_x - \zeta_y}{A_z} \right), \\ 2b = \eta_z + \eta_x - A_y \left( \frac{\zeta_x - \zeta_y}{A_z} - \frac{\xi_y - \xi_z}{A_x} \right), \\ 2c = \zeta_x + \zeta_y - A_z \left( \frac{\xi_y - \xi_z}{A_x} - \frac{\eta_z - \eta_x}{A_y} \right). \end{cases}$$

On voit qu'elles détermineront  $a, b, c$  en général. Mais ces formules de résolution ne s'appliquent plus si l'une des aires  $A_x, A_y, A_z$  est nulle. La discussion se fait d'une manière particulièrement simple et élégante sous la forme géométrique. Soit  $\omega$  le point de coordonnées  $a, b, c$  défini par les équations (16); si l'on considère  $a, b, c$  comme des coordonnées courantes, ces équations représentent trois plans qui, en général, n'ont en commun qu'un seul point  $\omega$ . Si l'aire  $A_x$  est nulle, les équations (16) se réduisent à

$$(18) \quad \begin{cases} A_y(\zeta_y - c) + A_z(\eta_z - b) = 0, \\ A_z(\xi_z - a) + A_x\zeta_x = 0, \\ A_x\eta_x + A_y(\xi_y - a) = 0. \end{cases}$$

Les deux derniers plans deviennent parallèles (parallèles d'ailleurs à celui des plans coordonnés qui contient l'aire  $A$  nulle) et le point  $\omega$  s'en va à l'infini. Ceci arrive notamment si le contour  $\Sigma$  est tracé, de manière à être simplement connexe, sur un cylindre de génératrices parallèles à  $Ox$ .

Supposons maintenant que l'on ait

$$(19) \quad A_y(A_x\zeta_x + A_z\xi_z) = A_z(A_x\eta_x + A_y\xi_y).$$

Alors les deux plans parallèles précédents sont confondus et nos trois plans ont une droite commune parallèle au plan coordonné qui contient l'aire A nulle. Ceci arrive en particulier si le contour cylindrique et simplement connexe dont nous venons de parler possède un plan de symétrie parallèle à Oyz. Un tel contour se projetant en raccourci complet sur Oyz, les intégrales (14) donnent identiquement zéro pour  $A_x \zeta_x$  et  $A_x \eta_x$ ; et l'existence du plan de symétrie entraîne  $\zeta_y = \zeta_z$  dans les deux dernières équations (18) qui se réduisent ainsi à une seule.

La *boucle* d'hippopède est dans ce cas. Les deux dernières équations (18) se réduisent à  $a = 0$  et la première à

$$\frac{\pi}{4}b + \frac{2}{3}c = \frac{\pi}{4}R.$$

Cette droite passe par A (*fig. 1*) et par un point de Oz d'ordonnée  $\frac{3\pi}{8}R$ ; ce point est donc situé au-dessus de B et la droite traverse la cloison sphérique. Tous les points de cette droite sont des points  $\omega$  par où l'on peut faire passer des plans  $\Pi$ , de cosinus directeurs  $\lambda, \mu, \nu$ , tels que les volumes U, attachés à la boucle et à la portion de surface sphérique qu'elle contient, aient pour expression :

$$U = \lambda^3 U_x + \mu^3 (U_y - b A_y) + \nu^3 (U_z - c A_z)$$

ou

$$U = 2 \left( \frac{\pi}{6} - \frac{22}{45} \right) R^3 \lambda^3 + \left[ 2 \left( \frac{\pi}{6} - \frac{13}{45} \right) R^3 - \frac{2}{3} R^3 b \right] \mu^3 + \left[ 2 \left( \frac{\pi}{6} - \frac{2}{9} \right) R^3 - \frac{\pi}{4} R^3 c \right] \nu^3.$$

Si nous considérons le point A, pour lequel  $c = 0$ , la différence entre le volume du quart de sphère et ce volume U ne contient, quelle que soit l'orientation du plan  $\Pi$ , d'autre irrationnalité que les irrationnalités quadratiques contenues dans  $\lambda, \mu, \nu$ .

[11] Considérons encore le cas où deux aires  $A_x, A_y, A_z$ , par exemple  $A_x$  et  $A_z$ , seraient nulles. Alors les équations (16) se réduisent à

$$(20) \quad \begin{cases} A_y(\zeta_y - c) + A_z \eta_z & = 0, \\ A_z \zeta_z & + A_x \zeta_x & = 0, \\ A_x \eta_x & + A_y(\zeta_y - a) & = 0. \end{cases}$$

Des trois plans qu'elles représentent, le second est complètement rejeté à l'infini; il en est donc de même du point  $\omega$ . Mais si la seconde des équations (20) a lieu identiquement, le lieu des points  $\omega$  est une droite parallèle aux plans coordonnés qui portent les aires A nulles. Ceci aurait lieu en particulier pour un contour  $\Sigma$  plan



et parallèle à l'un des plans coordonnés  $Oxz$ . Dans ce cas, d'ailleurs, les équations (20) se réduiraient à

$$c = \zeta_y, \quad a = \xi_y.$$

Ce sont là les équations d'une droite perpendiculaire au plan du contour  $\Sigma$  et passant par son centre de gravité. Ainsi soit un contour plan  $\Sigma$  perpendiculaire à  $Oy$ ; pour plus de simplicité, nous supposons précisément que son centre de gravité  $G$  soit sur  $Oy$  (*fig. 3*).

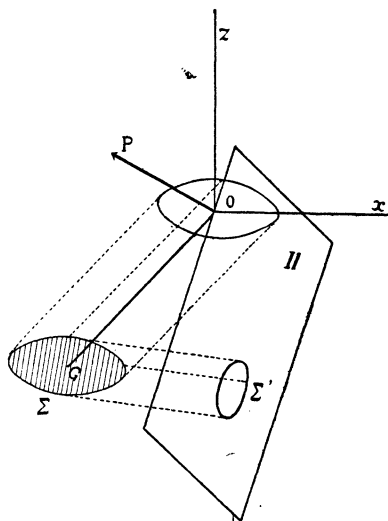


FIG. 3.

Enfin, par le contour  $\Sigma$ , faisons passer une cloison quelconque, ce qui ajoutera un onglet de volume  $\omega$  au volume du cylindre droit compris entre le plan de  $\Sigma$  et  $Oxz$ .

Considérons maintenant le plan  $\Pi$  passant par l'origine et perpendiculaire au vecteur  $OP(\lambda, \mu, \nu)$ . Le contour  $\Sigma$  donne sur  $\Pi$  une projection  $\Sigma'$ , ce qui, d'après les conventions générales, définit le volume :

$$U = \lambda^2 U_x + \mu^2 U_y + \nu^2 U_z,$$

le point  $\omega(a, b, c)$ , autour duquel  $\Pi$  peut tourner en ne donnant dans  $U$  que des termes carrés, étant ici l'origine. Or, dans le cas particulier que nous étudions, on a :

$$U_x = \omega, \quad U_y = \omega + A_y \cdot \overline{OG}, \quad U_z = \omega, \quad U = \omega + \mu^2 A_y \cdot \overline{OG}.$$

Il y a là dedans le théorème d'après lequel le volume d'un cylindre à bases planes non parallèles est égal au produit de l'aire d'une section droite par la distance des centres de gravité des bases. Et d'ailleurs la valeur de  $U$  se trouve sur la figure 3 par un raisonnement immédiat. Mais il importait précisément de retrouver un résultat à vérification directe simple, comme cas particulier des théories générales exposées dans les paragraphes précédents.

[12] *Cônes remarquables engendrés par le vecteur OP.* — Reprenons la formule (15), le contour  $\Sigma$  étant toujours bien déterminé et rigoureusement fixe par rapport aux axes coordonnés. Alors  $U$  n'est fonction que de  $\lambda, \mu, \nu$ . Il est clair que l'on peut imposer certaines conditions au volume  $U$  et chercher à quelles conditions correspondantes est alors astreint le vecteur  $OP$ . Ainsi on pourrait chercher pour quelles positions de  $OP$ , ou du plan  $\Pi$ , le volume  $U$  est maximum, minimum, constant, nul.

Pour obtenir des volumes  $U$  nuls, il faut que  $OP$  soit génératrice du cône :

$$0 = U_x X^2 + U_y Y^2 + U_z Z^2 + (A_y \xi_y + A_z \eta_z) YZ + (A_z \xi_z + A_x \zeta_x) ZX + (A_x \eta_x + A_y \xi_y) XY.$$

Par suite, le plan  $\Pi$  enveloppe aussi un cône de sommet  $O$ .

Tous les points de l'espace sont des sommets de cônes de même nature.

Le cône précédent peut être réel ou imaginaire. Il est imaginaire quand les volumes  $U$  nuls sont impossibles à obtenir, ce qui serait le cas, par exemple, avec le contour plan  $\Sigma$  de la figure 3 (n° 11) si l'onglet  $\omega$  était positif.

[13] *Quadriques lieux de points P.* — Jusqu'ici, le vecteur  $OP$  n'a joué de rôle que par sa direction. On peut faire jouer un rôle à sa longueur et, pour la représentation des volumes  $U$ , on a alors une représentation analogue à celle qui, en Mécanique, donne l'ellipsoïde d'inertie. Le vecteur  $OP$  correspondant à un volume  $U$ , déterminons sa longueur par la condition

$$\frac{1}{OP} = \sqrt{U}.$$

Si alors  $X, Y, Z$  sont les coordonnées de  $P$ , on a :

$$\lambda = \frac{X}{OP}, \quad \mu = \frac{Y}{OP}, \quad \nu = \frac{Z}{OP},$$

et l'équation (15) donne, pour lieu de  $P$ , une quadrique dont l'équation se déduit de celle du cône du paragraphe précédent en y remplaçant le membre 0 par 1. Cette quadrique (P) a donc l'origine pour centre et le cône précédent pour cône asymptote. Ce dernier pouvant être réel ou imaginaire, la quadrique (P) est plus quelconque qu'un ellipsoïde d'inertie, mais on peut se proposer, à son sujet, des questions à peu près analogues.

Ainsi (P) admet l'axe  $OX$  pour axe principal si

$$A_z \xi_z + A_x \zeta_x = 0, \quad A_x \eta_x + A_y \xi_y = 0,$$

c'est-à-dire si

$$\int_{\Sigma} (x^2 - z^2) dy = 0, \quad \int_{\Sigma} (y^2 - x^2) dz = 0.$$

En particulier, ces équations sont satisfaites si

$$x^2 - z^2 = \varphi(y), \quad y^2 - x^2 = \psi(z),$$

$\varphi$  et  $\psi$  étant des fonctions uniformes sur le contour  $\Sigma$ , n'ayant aucune singularité ni sur ce contour ni sur l'une des cloisons S; ainsi  $\varphi$  et  $\psi$  pourraient être des polynômes.

Il est facile de voir que c'est ce qui arrive pour la boucle d'hippopède. D'après les équations de cette courbe données au n° 3, on a :

$$x^2 - z^2 = -(R - y)^2, \quad R^2(y^2 - x^2) = (R^2 - z^2)(R^2 - 2z^2).$$

Ceci est parfaitement d'accord avec l'expression du volume U trouvée au n° 9.

[14] *Sur l'axe aréolaire de M. Kœnigs.* — Dans son Mémoire du *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (1889), M. G. Kœnigs introduit la notion d'axe aréolaire d'un contour fermé; il en tire un parti très intéressant et elle va également être fort utile ici. L'axe aréolaire du contour  $\Sigma$  est la droite portant le vecteur non localisé dont les projections sur les axes sont mesurées par les aires planes  $A_x, A_y, A_z$ .

Alors l'expression

$$\lambda A_x + \mu A_y + \nu A_z$$

est l'aire plane contenue dans la projection de  $\Sigma$  sur le plan II, cette aire plane pouvant être aussi mesurée par un vecteur projection du vecteur aréolaire sur une normale à II.

Quand on a

$$\lambda A_x + \mu A_y + \nu A_z = 0,$$

c'est que le plan II contient un des axes aréolaires de  $\Sigma$ .

Pour un contour plan toute perpendiculaire au plan du contour est axe aréolaire.

Ceci posé, reprenons l'expression générale du volume U donnée au début du n° 10; ce volume qui correspond au plan II, passant par le point  $(a, b, c)$  et dont la normale a  $\lambda, \mu, \nu$  pour cosinus directeurs, sera désigné maintenant, pour plus de précision, par la notation

$$U_{a, b, c}^{\lambda, \mu, \nu}.$$

Or, il est facile de vérifier que l'on peut écrire :

$$(21) \quad U_{a, b, c}^{\lambda, \mu, \nu} - U_{0, 0, 0}^{\lambda, \mu, \nu} = -(\lambda A_x + \mu A_y + \nu A_z)(\lambda a + \mu b + \nu c).$$

On peut donner à cette formule une signification géométrique évidente, car la différence des deux volumes du premier membre doit être le volume d'un cylindre droit à bases parallèles, la surface d'une des bases de ce cylindre étant l'aire contenue dans  $\Sigma'$  (*fig. 2*) et la hauteur étant la distance des plans parallèles considérés : c'est précisément ce qu'exprime le second membre. Mais l'aire contenue dans  $\Sigma'$  s'exprime aussi bien en projetant le vecteur aréolaire de  $\Sigma$  sur une normale aux plans considérés. On peut donc dire que *la différence des volumes cylindriques relatifs à deux plans parallèles est égale au produit de la distance de ces plans par la projection du vecteur aréolaire sur la distance en question*. Encore une fois, ceci peut être considéré

comme évident, mais il était nécessaire de formuler nettement cette proposition qui, dans la suite, devra être comparée avec des propositions analogues, mais moins évidentes, relatives à des volumes coniques et conoïdaux.

Remarquons que, si le plan II contient un axe aréolaire du contour  $\Sigma$ , le volume U est indépendant de l'axe aréolaire choisi, mais il dépend, bien entendu, de l'orientation du plan.

## CHAPITRE II.

### Volumes coniques, cylindro-coniques et conoïdaux.

[15] Considérons toujours le contour  $\Sigma$ , une cloison S jetée sur ce contour et, de plus, un point A( $a, b, c$ ) qui sera sommet d'un cône ayant  $\Sigma$  pour directrice. Soit  $V_A$  le volume conique ainsi enfermé. Ce volume est une intégrale de surface attachée à S, intégrale facile à former. L'élément  $d\sigma$  de la cloison S et le sommet A déterminent un volume conique élémentaire égal à

$$\frac{1}{3} \overline{AP} d\sigma$$

si  $\overline{AP}$  est la distance de A au plan tangent à S dans  $d\sigma$  (fig. 4). Mais

$$\gamma d\sigma = dx dy, \quad \overline{AP} = \gamma \cdot \overline{AN};$$

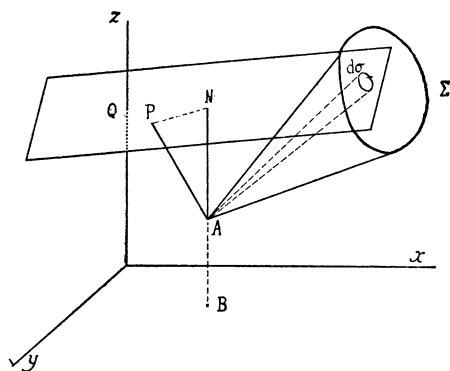


FIG. 4.

d'autre part, de l'équation du plan tangent à S

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y),$$

on déduit

$$\overline{AN} + c - z = p(a - x) + q(b - y),$$

d'où

$$\overline{AN} = -p(x - a) - q(y - b) + (z - c).$$

Tout ceci permet de transformer le volume conique élémentaire et d'écrire finalement :

$$(1) \quad V_A = \frac{1}{3} \iint_S [-p(x-a) - q(y-b) + (z-c)] dx dy.$$

Si le point A vient à l'origine des coordonnées, on a un autre volume conique :

$$(2) \quad V_o = \frac{1}{3} \iint_S (-px - qy + z) dx dy.$$

La différence

$$V_o - V_A = \frac{1}{3} \iint_S (-pa - qb + c) dx dy$$

doit être une intégrale double transformable par la formule de Stokes, d'après les généralités du n° 1. En fait, on satisfait immédiatement aux équations

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = a, \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = b, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = c$$

en prenant

$$P = -\frac{c}{2}y + bz, \quad Q = \frac{c}{2}x - az, \quad R = 0,$$

et, par suite,

$$(3) \quad 3(V_o - V_A) = \int_S (bz - \frac{c}{2}y) dx - (az - \frac{c}{2}x) dy.$$

Avec les notations du n° 5, il vient finalement :

$$(4) \quad 3(V_o - V_A) = aA_x + bA_y + cA_z.$$

On voit que le lieu des points A, pour lesquels le volume conique  $V_A$  est constant, est un plan perpendiculaire au vecteur aréolaire du contour  $\Sigma$ . En particulier, si  $V_A$  doit être continuellement égal à  $V_o$ , le point A décrit le plan

$$aA_x + bA_y + cA_z = 0.$$

Observons encore que les formules ci-dessus peuvent facilement être mises en relation avec celles du chapitre précédent. Ainsi (2) s'écrit immédiatement :

$$(5) \quad 3V_o = U_x + U_y + U_z.$$

Enfin, on peut donner du second membre de (4) une interprétation qui nous sera utile plus loin. Soit  $\theta$  l'angle du segment OA avec l'axe aréolaire du contour  $\Sigma$ . On a :

$$aA_x + bA_y + cA_z = \cos \theta \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}.$$

Donc

$$3(V_o - V_A) = \overline{OA} \times \text{proj. vecteur aréolaire sur OA}.$$

[16] *Volumes cylindro-coniques.* — Reprenons le volume cylindrique  $U_z$  attaché au contour  $\Sigma$  et proposons-nous d'étudier la différence

$$(6) \quad U_z - V_o = \frac{1}{3} \iint_S (px + qy + rz) dx dy.$$

C'est encore là une intégrale double qui doit être transformable par la formule de Stokes et, en fait, on trouve sans peine que le vecteur

$$F = -x, \quad G = -y, \quad H = rz$$

est le tourbillon de

$$P = -yz, \quad Q = xz, \quad R = 0.$$

Donc

$$U_z - V_o = \frac{1}{3} \int_C z(xdy - ydx).$$

Si l'on imagine que  $z$  est exprimé en fonction de  $x$  et  $y$ , cette intégrale est étendue, plus simplement, au contour  $C$  projection de  $\Sigma$  sur  $Oxy$ . On peut donc écrire

$$(7) \quad U_z - V_o = \frac{1}{3} \int_C z(xdy - ydx) = \frac{1}{3} \int_C z r^2 d\theta,$$

si  $r$  et  $\theta$  sont coordonnées polaires pour le point  $x, y$  du plan  $Oxy$ .

Cette formule peut être établie par un raisonnement direct qui servira de vérification à ce qui précède.

Soient (*fig. 5*)  $A', B'$ , deux points infiniment voisins du contour  $\Sigma$  se projetant en  $A$  et  $B$  sur  $C$ .

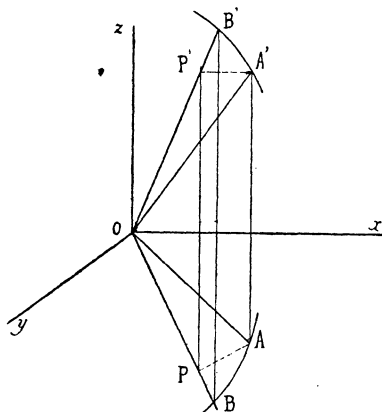


FIG. 5.

L'élément de volume  $OABB'A'O$  est évidemment celui de  $U_z - V_o$ . Or, si  $AP$  est un arc de cercle de centre  $O$ , l'infiniment petit que nous venons de considérer peut être remplacé par  $OAPP'A'O$ . Ce nouvel élément peut être considéré comme une pyramide dont la base  $APP'A'$  a pour aire  $\overline{AP} \cdot \overline{AA'} = r d\theta \cdot z$  et dont la hauteur est  $\overline{OA} = r$ .

Le volume de cette pyramide est donc  $\frac{1}{3} \int_C z r^2 d\theta$  et, en intégrant cette expression le long du contour C, on retrouve la formule (7).

[17] *Aires sphériques.* — Dès que l'on connaîtra un volume cylindrique, tel que  $U_z$ , attaché au contour  $\Sigma$ , la formule (6) permettra l'évaluation du volume conique  $V_o$ , puis, par la formule (4), d'un volume conique  $V_A$ , tout ceci n'exigeant plus que le calcul d'une intégrale simple. Cette remarque permet de relier d'une manière remarquable le volume  $U_z$  attaché à un contour *sphérique*  $\Sigma$  et l'aire sphérique  $\sigma$  y contenue.

Partons d'une sphère de rayon R ayant l'origine pour centre. La formule (7) s'écrit :

$$(8) \quad U_z - \frac{R}{3} \sigma = \frac{1}{3} \int_C z r^2 d\theta.$$

Connaissant  $U_z$ , on obtient  $\sigma$  par une intégrale simple. Et réciproquement.

Appliquons (8) à l'hippopède dont les équations sont toujours celles du n° 3. Avec ces équations, il faut appeler  $\frac{\pi}{2} - \theta$  l'angle  $\theta$  de la formule précédente. Cette formule devient

$$\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right) R^2 - \sigma = R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos^2 \theta d\theta = R^2 \int_0^1 u^2 du = \frac{R^2}{3},$$

d'où

$$\sigma = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) R^2.$$

Cette aire retranchée du huitième de l'aire sphérique totale donne  $R^2$  pour différence, ce qui est le résultat classique bien connu.

[18] *Surfaces remarquables.* — Ces surfaces seront celles pour lesquelles on aura  $U_z = V_o$  quant à tous les contours fermés qu'on y pourra tracer. En partant de la formule (6) on peut d'abord conclure que ces surfaces ont pour équation aux dérivées partielles

$$(9) \quad px + qy + 2z = 0.$$

L'intégration est immédiate, mais on arrive au même résultat, d'une manière qui permet mieux la discussion, en partant de la formule (7) mise sous la forme

$$(10) \quad U_z - V_o = \frac{1}{3} \int_C z x^2 d\left(\frac{y}{x}\right).$$

Alors, si l'on a

$$(11) \quad zx^2 = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

l'intégrale de la formule précédente est nulle sous la seule condition que la fonction arbitraire  $f\left(\frac{y}{x}\right)$  soit finie et sans valeurs multiples sur le contour C ou dans l'aire plane y contenue. On vérifie immédiatement que (11) est l'intégrale générale de (9).

Comme application très simple, nous pouvons observer que les surfaces (11) contiennent en particulier la surface de révolution

$$z(x^2 + y^2) = \text{const.}$$

qui enserré asymptotiquement l'axe Oz. Tout contour fermé tracé sur cette surface et extérieur à Oz donne  $U_z - V_0 = 0$ ; mais, comme l'intégrale du second membre de (10) est ici  $0 = \text{arc tang } \frac{y}{x}$ , la nullité précédente ne peut plus avoir lieu si le contour fermé considéré est traversé par Oz.

L'équation (11) peut s'écrire

$$xyz = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

et, par suite, les surfaces remarquables ici considérées sont en relation simple avec celles du n° 4. Elles sont engendrées par la courbe plane

$$xyz = \text{const.}, \quad \frac{y}{x} = \text{const.}$$

En particulier, pour la surface  $xyz = \text{const.}$ , on a :

$$U_x = U_y = U_z = V_0,$$

ce qui est d'accord avec (5).

[19] On peut présenter le raisonnement précédent sous une autre forme qui, au fond, ne lui ajoute rien, mais permet de nouveaux aperçus géométriques.

Supposons que l'on ait, pour tous les points d'un contour gauche fermé,

$$(12) \quad xdy - ydx = r^2 d\theta = d \cdot \varphi(z)$$

et que  $z\varphi'(z)$  soit sans singularités le long de ce contour: alors les intégrales de (7) sont identiquement nulles. Quant aux contours fermés donnant lieu aux égalités (12), ils peuvent être définis par les équations

$$(13) \quad \varphi(z) = \psi(\theta), \quad r^2 = \psi'(\theta)$$

où les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  satisfont à de certaines conditions de périodicité.



Au fond, toute courbe (13) peut être tracée sur une surface (11), mais les résultats les plus simples ne sont pas les mêmes dans les deux méthodes. Soient

$$\varphi(z) = kz, \quad \psi(\theta) = a^2 \sin 2\theta;$$

nous aurons le contour gauche fermé

$$(14) \quad kz = a^2 \sin 2\theta, \quad r^2 = 2a^2 \cos 2\theta.$$

Ce contour se projette sur  $Oxy$  suivant une lemniscate de Bernoulli, mais il n'a, par lui-même, aucun point double, car, pour  $\theta = \pm \frac{\pi}{4}$ , on a  $kz = \pm a^2$ .

Comme on a  $z\varphi'(z) = kz$ , la formule (7) donne bien  $U_z - V_o = 0$ . La forme très symétrique du contour considéré permettait de prévoir ce résultat; le volume ici considéré est nul dans les mêmes conditions que l'aire totale de la lemniscate de Bernoulli quand on attribue un signe convenable à l'aire de chaque boucle.

La surface (11) sur laquelle on peut tracer (14) est

$$kzx^2 = 4a^2 \frac{u(1-u^2)}{(1+u^2)^3}, \quad \left(u = \frac{y}{x}\right).$$

La variable  $u$  n'arrivant jamais au voisinage de  $Oz$  qu'avec des valeurs laissant finie la précédente fraction rationnelle en  $u$ , on est encore bien d'accord avec la méthode du paragraphe précédent.

[20] Les résultats qui viennent d'être obtenus nous montrent la simplicité particulièrement remarquable des contours pour lesquels on a

$$(15) \quad xdy - ydx = kdz,$$

ou, en termes finis :

$$(16) \quad kz = \psi(\theta), \quad r^2 = \psi'(\theta).$$

Les courbes générales définies par (15) sont celles dont la tangente appartient à un complexe linéaire ayant  $Oz$  pour axe. Elles ont été étudiées, il y a déjà longtemps, par M. P. Appell (*Annales de l'École Normale*, 1876) et par M. E. Picard (*loc. cit.*, 1877). On sait aussi qu'on peut les considérer comme lignes asymptotiques de conoïdes droits, ce sur quoi j'ai eu l'occasion de revenir dans mes notes *Sur les surfaces dont les lignes asymptotiques se déterminent par quadratures* (Nouvelles Annales de Mathématiques, 1908, 1909, 1910).

L'équation (15) montre immédiatement que, quand ces courbes sont fermées, elles se projettent toujours sur  $Oxy$  suivant des courbes à aire nulle (comme la lemniscate de Bernoulli du paragraphe précédent). Or, l'intégrale de  $zdz$ , prise le long d'un contour fermé, est aussi bien nulle que celle de  $dz$ . Par suite, les courbes de M. Appell, quand elles sont fermées, sont de celles pour lesquelles on a de la manière la plus évidente  $U_z = V_o$ .

[21] *Volumes conoïdaux.* — Reprenons le contour fermé  $\Sigma$  et une droite  $OP$  passant toujours par  $O$  et ayant  $\lambda, \mu, \nu$  pour cosinus directeurs (*fig. 6*). Une cloison quelconque  $S$  est jetée sur  $\Sigma$  et, de tous les points de ce contour, on abaisse des perpendiculaires sur  $OP$ . On enferme ainsi un certain volume conoïdal  $W$  que nous nous proposons d'étudier. Soit toujours  $d\sigma$  l'élément d'aire sur  $S$ : l'élément du volume  $W$  est le volume conoïdal qui correspond au contour de  $d\sigma$ , de même que le volume conoïdal total correspond au contour  $\Sigma$ . Si  $d\sigma$  est relatif au point  $M(x, y, z)$  de  $S$ , si  $MP$  est la perpendiculaire abaissée de  $M$  sur  $OP$  et si  $MN$  est la normale en  $M$ , l'élément du volume  $W$  est

$$\frac{1}{2} \cdot \overline{PM} \cdot d\sigma \cos \widehat{PMQ} = \frac{1}{2} \cdot \overline{MQ} \cdot d\sigma,$$

$Q$  étant projection de  $P$  sur la normale  $MN$ .

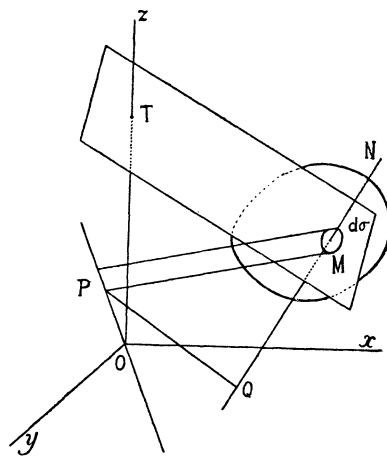


FIG. 6.

Or, sur la droite  $OP$ ,

$$\frac{X}{\lambda} = \frac{Y}{\mu} = \frac{Z}{\nu},$$

le point  $P$  appartient au plan

$$\lambda(X - x) + \mu(Y - y) + \nu(Z - z) = 0.$$

Par suite,  $P$  a pour coordonnées  $\lambda K, \mu K, \nu K$  si, pour abrégier l'écriture, on pose :

$$K = \lambda x + \mu y + \nu z.$$

Si, par  $P$ , nous menons un plan perpendiculaire à  $MQ$ , la distance  $\overline{MQ}$  sera la distance du point  $M$  à ce plan. On trouve ainsi :

$$\overline{MQ} = \alpha(x - \lambda K) + \beta(y - \mu K) + \gamma(z - \nu K).$$

Finalement

$${}_2W = \iint_S [x(x - \lambda K) + \beta(y - \mu K) + \gamma(z - \nu K)] d\tau.$$

Le volume cylindrique U, étudié au chapitre précédent et relatif à un vecteur OP (*fig. 2*) confondu avec la droite OP de la figure 6, a pour expression (n° 5) :

$$U = \iint_S K(x\lambda + \beta\mu + \gamma\nu) d\sigma.$$

Donc

$$(17) \quad {}_2W + U = \iint_S (xx + \beta y + \gamma z) d\tau = \iint_S (z - px - qy) dx dy.$$

Finalement, en utilisant les formules (7) du chapitre I et (5) du présent chapitre, il vient

$$(18) \quad {}_2W + U = U_x + U_y + U_z = 3V_o.$$

Il n'y a donc rien d'essentiellement nouveau dans l'étude des volumes W qui peuvent toujours s'exprimer par des combinaisons de volumes cylindriques ou coniques déjà considérés.

D'ailleurs, une comparaison purement géométrique des différents éléments de volume aurait pu conduire à la même conclusion.

[22] S'il n'y a rien d'essentiellement nouveau dans l'étude des volumes conoïdaux, leur introduction permet cependant de varier de manière intéressante des formules déjà obtenues.

Soient  $W_x, W_y, W_z$  les volumes W correspondant à une directrice OP successivement confondue avec les axes Ox, Oy, Oz. La formule (18) donnera immédiatement :

$$\begin{aligned} {}_2W_x &= U_y + U_z, & {}_2W_y &= U_z + U_x, & {}_2W_z &= U_x + U_y, \\ W_x + W_y + W_z &= U_x + U_y + U_z = 3V_o, \\ U_x &= W_y + W_z - W_x, \\ U_y &= W_z + W_x - W_y, \\ U_z &= W_x + W_y - W_z. \end{aligned}$$

Dans ces conditions, la formule (15) du chapitre I devient

$${}_2W = 2\lambda^2 W_x + 2\mu^2 W_y + 2\nu^2 W_z - \mu\nu(A_y \zeta_y + A_z \gamma_z) - \nu\lambda(A_z \zeta_z + A_x \zeta_x) - \lambda\mu(A_x \gamma_x + A_y \zeta_y).$$

Par addition de cette formule avec (15) du chapitre I on retrouve bien (18) du paragraphe précédent.

Dans U et dans  ${}_2W$ , les termes rectangles sont les mêmes (au signe près), si bien que tout point  $\omega$  pour lequel U n'a que des termes carrés permet une réduction com-

plètement identique pour  $W$ . Si, dans la figure 6, on représente le volume  $W$  par un vecteur issu de  $O$  et porté sur  $OP$ , conformément à la convention du n° 13, le lieu de l'extrémité libre de ce vecteur est encore une quadrique, etc.

[23] Remarquons brièvement que si l'on voulait obtenir directement  $2W$  on retomberait identiquement sur les calculs du n° 5. Les volumes conoïdaux étant aussi simples que les volumes cylindriques, on aurait pu, à l'inverse de ce que nous avons fait et sans plus de peine, écrire d'abord un chapitre, analogue au chapitre I, sur les volumes  $W$ , pour passer ensuite aux volumes  $U$ .

Partons de

$$2W_z = \iint_S (zx + \beta y) d\sigma$$

et retranchons de cette égalité l'expression de  $2W$  par l'intégrale double du n° 21. On a

$$2(W_z - W) = \iint_S [z\lambda K + \beta\mu K + \gamma(\nu K - z)] d\sigma.$$

Cette nouvelle intégrale double doit être transformable par la formule de Stokes et, en fait, le vecteur

$$F = \lambda K, \quad G = \mu K, \quad H = \nu K - z,$$

qui est le même que celui du n° 5, est le tourbillon d'un vecteur  $P, Q, R$  également connu. Alors  $2(W_z - W)$  est égal à l'intégrale simple de la formule (12) du chapitre I.

Si l'on s'appuie, d'une part, sur les formules

$$2(W_x - W_y) = U_y - U_x = - \int_z xy dz,$$

$$2(W_y - W_z) = U_z - U_y = - \int_x yz dx,$$

$$2(W_z - W_x) = U_x - U_z = - \int_x zx dy,$$

d'autre part sur les formules (14) du chapitre I, on a facilement

$$\begin{aligned} 2(W_z - W) = & \mu\lambda A_y \xi_y + 2\mu^2(W_z - W_y) + \mu\nu(A_y \xi_y + A_z \eta_z) + 2\lambda^2(W_z - W_x) \\ & + \lambda\mu A_x \eta_x + \lambda\nu(A_x \xi_x + A_z \xi_z), \end{aligned}$$

d'où l'expression précédemment trouvée pour  $2W$ .

[24] Reprenons cette expression générale et cherchons à exprimer le volume conoïdal

$$W_{a, b, c}^{\lambda, \mu, \nu}$$

défini comme  $W$ , mais par rapport à une droite passant par un point  $(a, b, c)$ .

Si l'on tient compte des formules

$${}_2W_x = U_y + U_z, \quad {}_2W_y = U_z + U_x, \quad {}_2W_z = U_x + U_y,$$

l'expression de  ${}_2W$  se transforme aisément en

$$\begin{aligned} {}_2W_{a,b,c}^{\lambda,\mu,\nu} = & \lambda^2({}_2W_x - bA_y - cA_z) + \mu^2({}_2W_y - cA_z - aA_x) + \nu^2({}_2W_z - aA_x - bA_y) \\ & - \mu\nu[A_y(\zeta_y - c) + A_z(\eta_z - b)] - \nu\lambda[A_z(\xi_z - a) + A_x(\zeta_x - c)] \\ & - \lambda\mu[A_x(\eta_x - b) + A_y(\xi_y - a)]. \end{aligned}$$

Or, si nous posons :

$$L = b\nu - c\mu, \quad M = c\lambda - a\nu, \quad N = a\mu - b\lambda,$$

cette formule assez encombrante prend la forme très simple

$$(19) \quad W_{a,b,c}^{\lambda,\mu,\nu} - W_{0,0,0}^{\lambda,\mu,\nu} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ L & M & N \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix}.$$

Elle est ainsi l'analogue de la formule (21) du chapitre I, mais ne semble pas avoir le même degré d'évidence. Remarquons que la formule (19) donne

$${}_2(W_{0,0,0}^{0,0,1} - W_{a,0,0}^{0,0,1}) = aA_x,$$

ce qui montre que *la différence des doubles des volumes conoïdaux relatifs à deux droites parallèles est égale à la distance de ces droites multipliée par l'aire contenue dans la projection du contour  $\Sigma$  sur un plan normal à ladite distance, ou bien encore à la distance de ces droites multipliée par la projection du vecteur aréolaire de  $\Sigma$  sur ladite distance.*

On pourrait établir directement ce théorème en considérant deux droites  $D_1$  et  $D_2$  et des plans  $P_1$ ,  $P_2$  passant par elles perpendiculairement au plan  $D_1D_2$ . Alors le double du volume conoïdal relatif à  $D_1$  est la somme des volumes cylindriques relatifs aux plans  $P_1$  et  $D_1D_2$ ; le double du volume conoïdal relatif à  $D_2$  est la somme des volumes cylindriques relatifs aux plans  $P_2$  et  $D_1D_2$ ; la différence de ces volumes est alors un tronc cylindrique droit dont les bases sont les projections de  $\Sigma$  sur  $P_1$  et  $P_2$ , dont la hauteur est la distance des deux mêmes plans.

[25] *Complexe des droites correspondant à un volume conoïdal constant.* — Le contour  $\Sigma$  et la cloison  $S$  étant invariables, le volume  $W_{a,b,c}^{\lambda,\mu,\nu}$  est déterminé dès que l'on connaît la droite qui sert de directrice au conoïde. Suivant une expression que nous empruntons encore à M. G. Koenigs, ce volume est une *fonction de droite*. La formule (19) l'exprime en fonction de

$$\lambda, \mu, \nu, L, M, N,$$

c'est-à-dire en fonction des coordonnées pluckériennes de la droite mobile.

L'ensemble de ces droites pour lesquelles le volume en litige est constant est un complexe du second ordre et l'équation pluckérienne de ce complexe s'obtient immédiatement en remplaçant le premier terme du premier membre de (19) par une constante (que l'on peut d'ailleurs multiplier, si l'on veut assurer l'homogénéité, par  $1 = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2$ ).

Les volumes cylindriques sont des *fonctions de plan*.

Quant aux volumes coniques attachés au contour  $\Sigma$  et à la cloison  $S$ , ils sont déterminés dès que l'on se donne le sommet du cône; ce sont des *fonctions de point* donnant lieu aux considérations les plus élémentaires.

Relativement à ces trois sortes de volumes, les formules (21) du chapitre I et (4) et (19) du présent chapitre sont à rapprocher.

[26] Il est intéressant de considérer les cas dans lesquels la formule (19) donne

$$W_{a, b, c}^{\lambda, \mu, \nu} = W_{0, 0, 0}^{\lambda, \mu, \nu}.$$

Ceci se produit d'abord quand on a

$$\frac{A_x}{L} = \frac{A_y}{M} = \frac{A_z}{N},$$

égalités qui équivalent aux deux suivantes :

$$aA_x + bA_y + cA_z = 0, \quad \lambda A_x + \mu A_y + \nu A_z = 0.$$

Celles-ci expriment que la directrice du conoïde est astreinte à se mouvoir dans un plan normal à l'axe aréolaire de  $\Sigma$ . Ceci prend une signification évidente si le contour  $\Sigma$  devient plan; tout plan parallèle au sien peut contenir la droite mobile.

En second lieu, le second membre de (19) est encore nul si l'on a

$$\frac{A_x}{\lambda} = \frac{A_y}{\mu} = \frac{A_z}{\nu},$$

c'est-à-dire si la directrice du conoïde se meut parallèlement à l'axe aréolaire de  $\Sigma$ . Ce cas est l'analogie de celui traité à la fin du n° 14 pour les volumes cylindriques. On peut, en effet, par la directrice du conoïde, mener deux plans rectangulaires ayant toujours même orientation; le volume conoïdal est la demi-somme des volumes cylindriques relatifs à ces plans, lesquels volumes sont invariants dans la translation desdits plans, puisque ces derniers contiennent toujours des axes aréolaires de  $\Sigma$ .

Enfin, le second membre de (19) sera encore nul si l'on a

$$\frac{L}{\lambda} = \frac{M}{\mu} = \frac{N}{\nu} \quad \text{ou} \quad L = M = N = 0.$$

Dans ce cas, la droite qui doit passer par  $(a, b, c)$  doit également passer par l'origine; c'est évidemment comme si elle n'avait jamais cessé de contenir ce dernier point.

[27] *Invariants.* — La formule (18) montre que, le contour  $\Sigma$  et l'origine  $O$  étant fixes, les volumes cylindriques  $U$  relatifs à trois plans rectangulaires quelconques passant par  $O$  ont une somme invariante  $3V_0$ . Il en est de même pour la somme du volume  $U$  relatif au plan  $\Pi$  (*fig. 2*) et du double du volume conoïdal  $W$  relatif à la droite  $OP$  prise comme directrice du conoïde.

$V_0$  est le volume du cône défini par le contour  $\Sigma$  et le sommet  $O$ .

Or, il existe, pour l'invariant  $3V_0$ , une autre interprétation tout aussi simple où intervient le segment  $OT$  (*fig. 6*),  $T$  étant le point où le plan tangent en  $M$  à la cloison  $S$  rencontre  $Oz$ . Ce segment  $OT$  jouera d'ailleurs dans la suite du Mémoire un rôle beaucoup plus important qu'à présent. On a

$$\overline{OT} = z - px - qy.$$

Donc

$$(20) \quad 3V_0 = \iint_S \overline{OT} \cdot dx dy.$$

Imaginons que, par le point  $M$  (*fig. 6*), on mène une ordonnée  $O'T'$  telle que le quadrilatère  $TOO'T'$  soit un rectangle. Le lieu du point  $T'$  sera une surface  $(T')$ . Alors  $3V_0$  est le volume cylindrique compris entre  $(T')$ , le plan  $Oxy$  et le cylindre, de génératrices parallèles à  $Oz$ , dont  $\Sigma$  est directrice. Dans ce même cylindre, d'après (18), le volume compris entre  $S$  et  $(T')$  est égal à  $2W_z$ .

L'invariant  $3V_0$  est nul pour les surfaces définies par l'équation aux dérivées partielles

$$z - px - qy = 0,$$

c'est-à-dire pour les cônes de sommet  $O$ .

[28] *Surfaces de M. V. Jamet.* — Ces surfaces sont celles pour lesquelles le segment  $OT$  est une fonction donnée de  $z$ . Leur auteur les a considérées comme types remarquables de surfaces dont les lignes asymptotiques se déterminent par quadratures (E. Picard, *Traité d'Analyse*, t. I, 2<sup>e</sup> édit., p. 433).

Celles de ces surfaces pour lesquelles on a simplement

$$\overline{OT} = mz \quad \text{ou} \quad px + qy = (1 - m)z, \quad (m = \text{const.})$$

peuvent jouer ici un rôle intéressant. Leur équation finie est

$$(21) \quad zy^{m-1} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

La formule (20) donne alors

$$(22) \quad 3V_0 = mU_z.$$

Si  $m = 3$ , on retrouve la surface (11). Pour que la propriété (22) ait lieu sûrement, pour la portion d'une surface (21) comprise dans un certain contour fermé  $\Sigma$  tracé sur cette surface, il faut que, pour  $M$  dans cette portion,  $T$  n'aille jamais à l'infini. Autrement il ne serait pas certain, en général, que l'intégrale double de (20) conservât un sens.

[28 bis] *Aires cylindriques.* — On a vu, au n° 17, qu'une aire sphérique et le volume  $U_z$  correspondant pouvaient se rattacher par l'intermédiaire d'une intégrale de ligne. En s'appuyant sur la théorie des volumes conoïdaux, il est aisé de donner un résultat analogue pour les aires cylindriques enfermées dans un contour  $\Sigma$  quand ce dernier est tracé sur un cylindre *circulaire*. Soient  $Ox$  l'axe du cylindre,  $R$  son rayon et  $\sigma$  l'aire enfermée dans  $\Sigma$ . Si on projette tous les points de  $\sigma$  sur  $Ox$ , toutes ces projetantes sont enfermées dans un volume conoïdal dont le double est  $R\sigma$ . Donc

$$R\sigma = U_y + U_z.$$

D'autre part, on sait que [n° 2, formules (9)]

$$U_y = U_z + \int_{\Sigma} yz dx.$$

Donc

$$R\sigma = 2U_z + \int_{\Sigma} yz dx.$$

Telle est la relation générale que nous voulions établir entre l'aire  $\sigma$  et le volume correspondant  $U_z$ . Elle est comparable à la formule (8) du n° 17.

Faisons une application. Coupons le cylindre précédent par un cylindre identique dont l'axe serait  $Oz$ . La courbe intersection est une ellipse d'équations

$$x = R \cos \theta, \quad y = R \sin \theta, \quad z = R \cos \theta.$$

Considérons uniquement le premier trièdre des axes coordonnés. Alors les plans  $Ozx$ ,  $Oyz$  et le second cylindre déterminent sur le premier une sorte de triangle pour lequel, en s'appuyant sur la développabilité du cylindre, on trouve immédiatement l'aire  $\sigma = R^2$ .

D'autre part, l'intégrale de  $yz dx$  est nulle sur les côtés du triangle qui sont dans les plans  $z = 0$ ,  $x = 0$ . Il vient donc simplement

$$\int_{\Sigma} yz dx = -R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \cos \theta d\theta = -R^2 \int_0^1 u^2 du = -\frac{R^2}{3}.$$

La relation générale entre  $\sigma$  et  $U_z$  donne alors

$$U_z = \frac{2}{3} R^2,$$

ce qui est un résultat classique bien connu, mais obtenu d'ordinaire par un calcul d'intégrale double qu'on trouvera, par exemple, dans le *Recueil d'Exercices* de F. Frenet (5<sup>e</sup> édit., probl. 501).



[29] *Application d'une méthode générale de M. Darboux aux volumes considérés comme paramètres de points, de droites et de plans.* — Dans la Note XXII qui termine le tome II du *Cours de Mécanique* de Despeyroux, M. G. Darboux relie d'une manière extrêmement ingénieuse et intéressante la théorie des moments d'inertie et celle des quadriques homofocales centrées. L'idée fondamentale consiste à considérer, comme paramètre d'un point, d'une droite ou d'un plan, le moment d'inertie de ce point, de cette droite ou de ce plan par rapport à un solide fixe, puis à étudier les ensembles de points, de droites et de plans ayant mêmes paramètres.

Or, les résultats déjà établis dans le présent Mémoire peuvent conduire à des résultats analogues à ceux de M. Darboux, mais relatifs à des quadriques du type parabolique.

Au fond, ceci résulte du fait que des volumes peuvent toujours être considérés comme moments d'inertie de couches superficielles convenablement constituées (n° 34 bis), mais comme les volumes sont des êtres géométriques simples, que l'on définit généralement pour eux-mêmes, sans passer d'abord par la définition des moments d'inertie, il reste peut-être encore un léger intérêt dans le fait d'attacher uniquement des volumes comme paramètres à de certains ensembles de points, de droites ou de plans.

Soit  $\Sigma$  un contour fermé et S une cloison fixe jetée sur ce contour; le paramètre d'un point sera le triple du volume du cône ayant ce point pour sommet et S pour base gauche; le paramètre d'une droite sera le double du volume conoïdal défini par S et par cette droite; le paramètre d'un plan sera le volume cylindrique défini par S et par ce plan.

Alors, des comparaisons déjà effectuées entre ces différents volumes, on déduit les théorèmes suivants :

*Le paramètre d'un point quelconque est égal à la somme des paramètres de trois plans rectangulaires quelconques se coupant en ce point.*

*Le paramètre d'une droite quelconque est égal à la somme des paramètres de deux plans rectangulaires quelconques se coupant suivant cette droite.*

*Le paramètre du point d'intersection d'un plan et d'une droite perpendiculaire est égal à la somme des paramètres de la droite et du plan.*

Ces théorèmes sont exactement semblables à ceux de la théorie des moments d'inertie.

Demandons-nous maintenant comment varient nos paramètres lorsqu'on passe d'un point à un autre, d'une droite à une droite parallèle ou d'un plan à un plan parallèle. A cet égard, il suffit de rapprocher les théorèmes des n°s 15, 24, 14, lesquels se réunissent en l'unique énoncé suivant :

*La différence des paramètres de deux points (ou de deux droites parallèles, ou de deux plans parallèles) est égale à leur distance multipliée par la projection du vecteur aréolaire de  $\Sigma$  sur la distance en question.*

Les théorèmes analogues que l'on obtient pour les moments d'inertie reposent sur la considération du centre de gravité; l'élément qui joue ici un rôle simplificateur analogue est un vecteur *non localisé*. Et remarquons encore une fois que ce vecteur est relatif au contour  $\Sigma$  et nullement à la cloison  $S$ . Nous verrons, au paragraphe 34 *bis*, comment ceci peut s'expliquer par la considération d'un centre de gravité rejeté à l'infini.

[30] Reprenons l'ellipsoïde des volumes cylindriques

$$U_x X^2 + U_y Y^2 + U_z Z^2 + (A_y \zeta_y + A_z \eta_z) YZ + (A_z \xi_z + A_x \zeta_x) ZX + (A_x \eta_x + A_y \xi_y) XY = 1.$$

Nous savons que, si l'on y considère un rayon vecteur  $OP$ , l'expression  $\overline{OP}^{-2}$  représente le volume cylindrique  $U$  défini par projection de tous les points de  $S$  sur un plan  $\Pi$  passant par  $O$  normalement à  $OP$ .

Par un changement convenable dans l'orientation des axes nous pouvons ramener l'équation précédente à la forme

$$S_1 X^2 + S_2 Y^2 + S_3 Z^2 = 1.$$

Alors le vecteur aréolaire de  $\Sigma$ , qui avait, sur les anciens axes, des projections  $A_x, A_y, A_z$ , a maintenant, sur les nouveaux axes, des projections que nous appellerons  $a_x, a_y, a_z$ .

Le volume cylindrique, relatif au plan passant par  $O$ ,

$$ux + vy + wz = 0,$$

est

$$\frac{S_1 u^2 + S_2 v^2 + S_3 w^2}{u^2 + v^2 + w^2}.$$

Ecrivant que ce paramètre, relatif au plan précédent, a une valeur *constante*  $p$ , il vient

$$(S_1 - p)u^2 + (S_2 - p)v^2 + (S_3 - p)w^2 = 0.$$

C'est là l'équation tangentielle des cônes enveloppés par le plan considéré; quand  $p$  varie on a une famille de cônes homofocaux.

Quant à la droite  $OP$  constamment normale à l'un des plans précédents, elle doit avoir aussi un paramètre constant, d'après le troisième théorème du n° 29. Cette droite engendre un cône et *tous ces cônes sont homocycliques quand  $p$  varie*. Il est inutile de développer davantage ces assertions, car il faudrait pour cela refaire exactement les raisonnements de M. Darboux.

[31] Soit maintenant le plan quelconque

$$ux + vy + wz + 1 = 0.$$

Sa distance à l'origine est

$$\frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}};$$

la projection du vecteur aréolaire  $(a_x, a_y, a_z)$  sur cette distance est

$$\frac{a_x u + a_y v + a_z w}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}$$

et, par suite, le paramètre du plan précédent est

$$\frac{S_1 u^2 + S_2 v^2 + S_3 w^2}{u^2 + v^2 + w^2} - \frac{a_x u + a_y v + a_z w}{u^2 + v^2 + w^2}.$$

Ecrivons que ce paramètre est constant et nous aurons

$$(S_1 - p)u^2 + (S_2 - p)v^2 + (S_3 - p)w^2 - (a_x u + a_y v + a_z w) = 0,$$

ce qui, lorsque  $p$  varie, est l'équation tangentielle d'une famille triplement orthogonale de paraboloides homofocaux. *L'axe commun à tous ces paraboloides est axe aréolaire du contour  $\Sigma$ .*

[32] Considérons trois des paraboloides homofocaux précédents respectivement relatifs aux paramètres  $p_1, p_2, p_3$  et un point M quelconque. Tous les plans passant par M et de paramètres  $p_1, p_2, p_3$  sont respectivement tangents à ces paraboloides. Or, nous savons que de tels plans enveloppent des cônes homofocaux. Donc les cônes de même sommet circonscrits à des paraboloides homofocaux sont homofocaux; c'est évidemment là un cas particulier d'un théorème bien connu relatif à des quadriques homofocales quelconques.

Parmi ces cônes, ceux qui sont relatifs aux paraboloides homofocaux passant par M se réduisent évidemment à des plans qui forment le *trièdre principal* pour un point M quelconque; c'est dire que si l'on étudie les volumes cylindriques définis par la cloison S et un plan II, passant par M avec les cosinus directeurs  $\lambda, \mu, \nu$  par rapport audit trièdre, ces volumes sont des formes quadratiques en  $\lambda, \mu, \nu$  ne contenant que des termes en  $\lambda^2, \mu^2, \nu^2$ .

[33] Considérons maintenant l'ensemble des points de même paramètre.

Soit d'abord un trièdre trirectangle tangent par ses faces à trois paraboloides homofocaux correspondant respectivement aux paramètres  $p_1, p_2, p_3$ .

Son sommet a un paramètre *constant*  $p_1 + p_2 + p_3$  et, d'après ce que nous avons

vu au n° 15, ce sommet décrit un plan. On retrouve ainsi un théorème de Chasles rétabli par M. Darboux pour les quadriques homofocales centrées.

Si les trois faces du trièdre trirectangle sont tangentes à un même parabolôïde, le lieu du sommet est simplement le plan de Monge que l'on sait être perpendiculaire à l'axe du parabolôïde. Ceci est encore bien d'accord avec le résultat du n° 15, d'après lequel le plan, lieu des points de paramètre constant, est perpendiculaire au vecteur aréolaire de  $\Sigma$ .

[34] Enfin, toujours en suivant M. Darboux, on peut attribuer d'élégantes propriétés au complexe formé par les droites de paramètre constant. L'équation générale de ce complexe a été donnée au n° 24; nous savons aussi qu'en un même point de l'espace, mais pour des valeurs différentes du paramètre à attribuer aux droites passant par ce point, les cônes du complexe sont homocycliques.

Considérons un dièdre rectangle tangent par ses faces aux parabolôïdes de paramètres  $p_1$  et  $p_2$ . L'arête de ce dièdre a un paramètre constant  $q = p_1 + p_2$ . Toutes les droites du complexe sont susceptibles d'être considérées comme de telles arêtes. Il reste à vérifier que celles de ces droites qui sont dans un plan quelconque P de paramètre  $p$  y enveloppent une conique C. Or, par l'une de ces droites de paramètre constant  $q$ , menons un plan normal à P; il est toujours tangent au parabolôïde de paramètre  $q - p$ ; par suite, il enveloppe un cylindre parabolique et C est une parabole.

[34 bis] *Remarque de M. Darboux.* — Les résultats contenus dans les paragraphes précédents (29 à 34) ont été brièvement résumés dans une Note des *Comptes rendus* (10 avril 1911) à laquelle M. Darboux a ajouté une Remarque identifiant complètement la notion de volume avec celle de moment d'inertie d'une double couche analogue aux couches magnétiques. Soit  $x, y, z$  le point de la cloison S où se trouve l'élément  $d\sigma$  avec une densité superficielle  $-\rho$ ; sur la normale, considérons le point infiniment voisin

$$x + \alpha\varepsilon, \quad y + \beta\varepsilon, \quad z + \gamma\varepsilon,$$

où l'on superposera à  $d\sigma$  un élément que l'on peut considérer comme égal, mais de densité superficielle  $+\rho$ . Par rapport aux plans coordonnés, l'ensemble de ces deux éléments aura pour moment ordinaire

$$\varepsilon\rho\alpha d\sigma, \quad \varepsilon\rho\beta d\sigma, \quad \varepsilon\rho\gamma d\sigma$$

et pour moment d'inertie

$$2\varepsilon\rho\alpha x d\sigma, \quad 2\varepsilon\rho\gamma\beta d\sigma, \quad 2\varepsilon\rho z\gamma d\sigma.$$

Si l'on fait le même raisonnement pour tous les points de  $S$ , on définit une double couche dont le centre de gravité a pour coordonnées homogènes

$$\varepsilon \iint_S \rho x d\sigma, \quad \varepsilon \iint_S \rho y d\sigma, \quad \varepsilon \iint_S \rho z d\sigma$$

et zéro; quant aux moments d'inertie par rapport aux plans coordonnés ils sont :

$$2\varepsilon \iint_S \rho x^2 d\sigma, \quad 2\varepsilon \iint_S \rho y^2 d\sigma, \quad 2\varepsilon \iint_S \rho z^2 d\sigma.$$

Si  $\rho$  est une constante, que l'on peut d'ailleurs supposer telle que  $2\varepsilon\rho = 1$ , ces trois dernières intégrales doubles ne sont autre chose que

$$U_x, \quad U_y, \quad U_z.$$

D'une manière générale, le volume cylindrique attaché à  $S$  et à un plan quelconque est le moment d'inertie, par rapport à ce plan, d'une double couche de densité constante étendue sur  $S$ . On établirait sans peine des théorèmes analogues pour les volumes conoïdaux et coniques.

Si la densité  $\rho$ , au lieu d'être constante, devient variable, on obtient une généralisation curieuse de la notion de volume.

Mais il reste quelque chose de particulier au cas du volume proprement dit. Dans le cas de la densité  $\rho$  constante, les coordonnées homogènes du centre de gravité de la double couche sont

$$A_x, \quad A_y, \quad A_z, \quad 0.$$

Dans les trois premières on reconnaît les composantes du vecteur aréolaire de M. Kœnigs; ce centre de gravité ne dépend pas de la cloison  $S$ , mais seulement de son contour  $\Sigma$ . Il en serait autrement, en général, avec une densité  $\rho$  variable; bien entendu, le centre de gravité serait toujours rejeté à l'infini, mais il se déplacerait, dans le plan de l'infini, quand on déformerait  $S$ .

### CHAPITRE III.

#### Transformations génératrices de volumes équivalents.

[35] *Premier type de transformations.* — Les transformations de ce premier type vont nous conduire à des résultats géométriques évidents, mais qui n'en jetteront pas moins quelques clartés intéressantes sur la formule de Stokes.

Soit la transformation

$$(1) \quad X = X(x, y, z), \quad Y = Y(x, y, z), \quad Z = Z(x, y, z).$$

Considérons le contour  $\Sigma$  toujours situé sur la surface  $S$  d'équation  $z = f(x, y)$ .

La transformation précédente change, en général,  $S$  en une autre surface  $S'$  sur laquelle est tracé le contour  $\Sigma'$  transformé de  $\Sigma$ .

Soit le volume cylindrique

$$(2) \quad \iint_{S'} Z dX dY.$$

Il nous est loisible de le calculer avec les anciennes variables  $x$  et  $y$ , ce qui remplace l'intégrale double par la suivante, étendue à la surface  $S$ ,

$$\iint_S Z(x, y, z) \frac{\partial(X, Y)}{\partial(x, y)} dx dy,$$

ou, en développant le déterminant fonctionnel et en considérant que, sur  $S$ ,  $z$  est évidemment fonction de  $x$  et  $y$  :

$$(3) \quad \iint_S Z(x, y, z) \left[ -p \frac{\partial(X, Y)}{\partial(y, z)} - q \frac{\partial(X, Y)}{\partial(z, x)} + \frac{\partial(X, Y)}{\partial(x, y)} \right] dx dy.$$

Ceci posé, *proposons-nous de chercher s'il existe des transformations (1) susceptibles de transformer la surface  $S$  passant par  $\Sigma$  en une surface  $S'$  donnant des volumes (2) indépendants de  $S$  et dépendant seulement du contour  $\Sigma$ .*

L'intégrale (3) est transformable par la formule de Stokes en une intégrale simple ne dépendant que du contour  $\Sigma$ , si l'on a

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ Z \frac{\partial(X, Y)}{\partial(y, z)} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ Z \frac{\partial(X, Y)}{\partial(z, x)} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ Z \frac{\partial(X, Y)}{\partial(x, y)} \right] = 0.$$

Or, en vertu de l'identité

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial(X, Y)}{\partial(y, z)} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial(X, Y)}{\partial(z, x)} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial(X, Y)}{\partial(x, y)} = 0,$$

la relation précédente s'écrit simplement

$$\frac{\partial(X, Y, Z)}{\partial(x, y, z)} = 0,$$

ce qui exprime que la transformation (1) jouit de la propriété cherchée si les fonctions  $X, Y, Z$  sont liées par une relation

$$(4) \quad \varphi(X, Y, Z) = 0.$$

Au point de vue géométrique, ceci est évident, car le point  $(X, Y, Z)$  transformé de  $(x, y, z)$  devant toujours se trouver sur la surface (4) qui est invariable, le volume (2) ne dépendra que du cylindre qui le limite latéralement; et ce cylindre ne dépend que du contour  $\Sigma'$  transformé de  $\Sigma$ .

Poursuivons cependant le raisonnement. L'intégrale (3) doit maintenant prendre la forme

$$(5) \quad \int_{\Sigma} Pdx + Qdy + Rdz,$$

les fonctions P, Q, R étant définies par les équations

$$(6) \quad \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = Z \frac{\partial(X, Y)}{\partial(y, z)}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = Z \frac{\partial(X, Y)}{\partial(z, x)}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = Z \frac{\partial(X, Y)}{\partial(x, y)}.$$

Or, si l'on pose

$$Z(x, y, z) = \frac{\partial N}{\partial X} - \frac{\partial M}{\partial Y},$$

M et N étant des fonctions des deux quantités X(x, y, z) et Y(x, y, z), les équations précédentes sont satisfaites par

$$(7) \quad P = M \frac{\partial X}{\partial x} + N \frac{\partial Y}{\partial x}, \quad Q = M \frac{\partial X}{\partial y} + N \frac{\partial Y}{\partial y}, \quad R = M \frac{\partial X}{\partial z} + N \frac{\partial Y}{\partial z}$$

et l'égalité des expressions (5) et (3) prend la forme

$$(8) \quad \iint \left( \frac{\partial N}{\partial X} - \frac{\partial M}{\partial Y} \right) dX dY = \int M dX + N dY.$$

L'intégrale simple est étendue au contour plan projection de  $\Sigma'$  sur OXY; l'intégrale double est étendue à l'aire plane contenue dans le même contour.

La formule (8) n'est autre chose que celle de Riemann. Donc, le problème que nous venons d'examiner nous a montré comment un simple changement de variables permet de relier la formule de Stokes et celle de Riemann.

[36] Il nous a semblé utile d'étudier d'abord la transformation précédente comme prélude de transformations plus complexes; de plus, nous avons retrouvé, chemin faisant, des formules telles que (6) qui seront utiles plus loin. Quant au résultat qui consiste à identifier les formules de Stokes et de Riemann, il est en relation avec beaucoup d'autres travaux; il revient notamment à remarquer que le tourbillon d'un vecteur quelconque P, Q, R ne dépend, en vertu d'équations telles que (6), que de deux fonctions qui sont ici X et Y. Or, cette remarque est due à Clebsch qui, dans deux Mémoires publiés au *Journal de Crelle* en 1856 et 1858, en tire les points les plus essentiels de la théorie des tourbillons. Dans son *Traité de Mécanique* (t. III, 2<sup>e</sup> édit., p. 452), M. Appell donne un résumé du procédé de Clebsch et renvoie aussi à la *Teorica delle Forze Newtoniane* d'Enrico Betti (Pise, 1879), où l'on trouve, en effet (pp. 304-313), des formules analogues à quelques-unes des précédentes. Au fond, tout revient à poser

$$Pdx + Qdy + Rdz = M dX + N dY.$$

C'est là un cas particulier du problème de Pfaff grandement perfectionné par M. G. Darboux (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1882) qui, tout récemment, dans le cas de trois variables, semble avoir ramené la question à son maximum de simplicité (*Comptes rendus*, 15 et 22 novembre 1909).

Enfin, remarquons que les transformations les plus quelconques qui engendrent des volumes équivalents sont loin d'être déterminées par ce seul fait. Elles peuvent satisfaire de plus à des conditions d'une autre nature, comme nous le verrons plus loin, et être attachées notamment à de certaines équations différentielles. Alors les volumes constants sont des *invariants intégraux* comme on s'en rend compte par la seule définition intuitive que M. H. Poincaré donne de ces invariants (*Nouvelles méthodes de la Mécanique céleste*, t. III, p. 2). Bornons-nous, pour l'instant, à signaler ce rapprochement possible.

[37] *Démonstration de la formule de Stokes par un changement de variables dans celle de Riemann.* — Si les considérations précédentes ne sont pas nouvelles, il ne semble cependant pas sans intérêt de remarquer qu'elles offrent, pour la démonstration de la formule de Stokes, un procédé extrêmement bref qui n'en fait pas une formule spéciale, ni même une généralisation de la formule de Riemann, mais une simple transformation de cette dernière.

On pourrait se borner à dire que pour obtenir la transformation en question il suffit de remonter le raisonnement du n° 35, mais ceci va être fait en détail vu l'importance de la chose.

Partons donc de la formule de Riemann (où M et N sont fonctions des deux variables X et Y) :

$$(8) \quad \iint_A \left( \frac{\partial N}{\partial X} - \frac{\partial M}{\partial Y} \right) dX dY = \int_C M dX + N dY$$

et posons

$$(8 \text{ bis}) \quad z = f(x, y), \quad X = X(x, y, z), \quad Y = Y(x, y, z).$$

Ainsi, lorsque le point  $(x, y, z)$  décrit un contour  $\Sigma$  sur la surface S d'équation  $z = f(x, y)$ , le point  $(X, Y)$  décrit dans le plan OXY un contour C. Bien entendu A est l'aire enfermée dans C.

Posons alors

$$(7) \quad P = M \frac{\partial X}{\partial x} + N \frac{\partial Y}{\partial x}, \quad Q = M \frac{\partial X}{\partial y} + N \frac{\partial Y}{\partial y}, \quad R = M \frac{\partial X}{\partial z} + N \frac{\partial Y}{\partial z}.$$

Le second membre de (8) prend la forme

$$\int_{\Sigma} P dx + Q dy + R dz.$$



et le premier devient, en y exprimant tout avec les variables  $x, y$ ,

$$\iint_S \left( \frac{\partial N}{\partial X} - \frac{\partial M}{\partial Y} \right) \left[ -p \frac{\partial(X, Y)}{\partial(y, z)} - q \frac{\partial(X, Y)}{\partial(z, x)} + \frac{\partial(X, Y)}{\partial(x, y)} \right] dx dy.$$

Si, partant de (7), on forme les expressions

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y},$$

l'intégrale double qui précède prend définitivement la forme

$$\iint_S \left[ -p \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) - q \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right] dx dy$$

et les deux membres de (8) sont ainsi respectivement transformés en ceux de la formule de Stokes.

Et la transformation que nous venons de faire n'est bien qu'un simple changement de variables; dans (8) il y a deux variables *indépendantes*  $X$  et  $Y$ ; il n'y en a pas plus dans la formule de Stokes, puisque  $x, y, z$  sont liées par l'équation de  $S$ .

En d'autres termes, les équations (8 bis) expriment, si l'on veut, les coordonnées  $x, y, z$  d'un point de  $S$  à l'aide de deux coordonnées curvilignes  $X$  et  $Y$ .

Outre sa brièveté, cette démonstration de la formule de Stokes offre encore certains avantages; ainsi il est inutile de commencer par raisonner sur une portion de surface  $S$  où les cosinus directeurs de la normale, ou bien les fonctions  $P, Q, R$ , conservent un signe constant, et de montrer après coup, en assemblant de telles régions, la généralité de la formule.

Cette méthode rend inutile aussi le fait de démontrer la formule de Stokes en la scindant en trois fragments dont on n'établit que le premier pour conclure les deux autres par raison de symétrie et ajouter les trois résultats.

[38] *Second type de transformations.* — Les transformations de ce type vont être intimement liées aux précédentes, mais donner cependant des résultats géométriques moins évidents.

Les fonctions  $X, Y, Z$  étant toujours celles des égalités (1), nous avons :

$$(9) \quad \iint_S \left( \frac{\partial M}{\partial X} - \frac{\partial N}{\partial Y} \right) \frac{\partial(X, Y)}{\partial(x, y)} dx dy = \int_z P dx + Q dy + R dz,$$

les fonctions  $P, Q, R$  ayant la forme (7).

Or, cependant que le point  $(x, y, z)$  se déplace sur  $S$ , on peut imaginer un point ayant les mêmes coordonnées  $x, y$ , mais dont l'ordonnée parallèle à  $Oz$  serait

$$(10) \quad \zeta = \left( \frac{\partial M}{\partial X} - \frac{\partial N}{\partial Y} \right) \frac{\partial(X, Y)}{\partial(x, y)}.$$

Ce point décrit une surface  $S'$  qui variera en général quand  $S$  variera ; mais, si  $S$  ne cesse de passer par le contour invariable  $\Sigma$ , on aura, entre  $S'$ , le plan  $Oxy$  et le cylindre ayant ses génératrices parallèles à  $Oz$  et  $\Sigma$  pour courbe directrice, un volume cylindrique qui demeurera constant.

Ce volume est exprimé, d'après (9), par le second membre de cette égalité.

[39] L'équation (10) doit évidemment être développée sous la forme

$$(11) \quad \zeta = \left( \frac{\partial M}{\partial X} - \frac{\partial N}{\partial Y} \right) \left[ -p \frac{\partial(X, Y)}{\partial(y, z)} - q \frac{\partial(X, Y)}{\partial(z, x)} + \frac{\partial(X, Y)}{\partial(x, y)} \right].$$

Observons tout de suite que, dans les applications, les fonctions arbitraires  $X(x, y, z)$  et  $Y(x, y, z)$  doivent forcément contenir la variable  $z$ . En effet, on voit facilement que si on les réduisait à ne dépendre que de  $x$  et  $y$ , les coefficients de  $p$  et  $q$  seraient nuls ;  $\zeta$  ne pourrait pas dépendre de la cloison déformable, les ordonnées  $z$  des points de celle-ci ou les coefficients directeurs de ses plans tangents n'intervenant plus.

Comme exemple simple, soit :

$$X = xz, \quad Y = yz.$$

$$\frac{\partial M}{\partial X} - \frac{\partial N}{\partial Y} = \text{const.} = \frac{1}{k}.$$

Alors, (11) devient

$$\zeta = \frac{z}{k} (z + px + qy).$$

Prenons maintenant le cylindre circulaire  $x^2 + y^2 - R^2 = 0$  et le plan  $z = a$ . L'intersection est une circonférence  $\Sigma$  par laquelle passent tous les paraboloides

$$z = a + \lambda(x^2 + y^2 - R^2).$$

Ce seront là les cloisons variables passant par le contour  $\Sigma$  fixe. A ces cloisons variables correspondent les surfaces

$$\zeta = \frac{1}{k} [a + \lambda(x^2 + y^2 - R^2)] [a + \lambda(3x^2 + 3y^2 - R^2)]$$

également variables, mais qui doivent comprendre un volume  $U$  constant (c'est-à-dire indépendant de  $\lambda$ ) entre elles, le plan  $Oxy$  et le cylindre circulaire.

Il est facile de vérifier qu'il en est bien ainsi. Pour  $\lambda = 0$  on a le volume  $\pi R^2 \frac{a^2}{k}$  d'un simple cylindre circulaire droit. Pour  $\lambda = \frac{a}{R^2}$  on a une surface de révolution dont le méridien est une parabole du quatrième degré ayant  $Oz$  pour axe ; cette surface coupe le cylindre circulaire suivant une circonférence identique à  $\Sigma$ , mais dont l'ordonnée est trois fois plus grande que la hauteur du cylindre obtenue pour  $\lambda = 0$ .

[40] *Troisième type de transformations.* — Dans les transformations du second type, un point  $x, y, z$  se changeait en un point  $x, y, \zeta$ . Cherchons maintenant des transformations changeant le point  $x, y, z$  en un point  $\xi, \eta, \zeta$  et telles que, lorsque le premier de ces points est sur la cloison mobile  $S$  jetée sur le contour fixe  $\Sigma$ , la surface lieu du second donne des volumes cylindriques

$$\iint \zeta d\xi d\eta$$

constants. Ces volumes sont limités latéralement par un cylindre ayant pour courbe directrice la transformée du contour  $\Sigma$ .

Si  $\xi, \eta, \zeta$  sont uniquement fonctions de  $x, y, z$  et non des dérivées partielles  $p$  et  $q$ , nous avons une transformation du premier type. Mais il est possible d'obtenir autre chose.

Imaginons d'abord que  $\xi$  et  $\eta$  soient uniquement fonctions de  $x$  et  $y$ . Alors on peut se proposer de calculer l'intégrale double précédente avec les variables  $x, y$ ; elle devient ainsi

$$\iint_S \zeta \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} dx dy.$$

Pour abréger l'écriture, désignons par  $D$  le déterminant fonctionnel figurant dans cette intégrale. Si maintenant nous posons

$$\zeta = \frac{1}{D} \left( \frac{\partial M}{\partial X} - \frac{\partial N}{\partial Y} \right) \frac{\partial(X, Y)}{\partial(x, y)},$$

la formule de Stokes, prise sous la forme (9), nous montre que l'intégrale double précédente ne dépendra plus que du contour  $\Sigma$ . En résumé, les transformations du troisième type sont définies par les égalités

$$(12) \quad \begin{cases} \xi = \xi(x, y), & \eta = \eta(x, y), & D = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \neq 0, \\ \zeta = \frac{1}{D} \left( \frac{\partial M}{\partial X} - \frac{\partial N}{\partial Y} \right) \left[ -p \frac{\partial(X, Y)}{\partial(y, z)} - q \frac{\partial(X, Y)}{\partial(z, x)} + \frac{\partial(X, Y)}{\partial(x, y)} \right]. \end{cases}$$

[41] On pourrait présenter autrement les transformations du second et du troisième type.

Partons de la formule de Stokes :

$$\iint_S (-Fp - Gq + H) dx dy = \int_\Sigma P dx + Q dy + R dz.$$

Si nous posons

$$(13) \quad \xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y), \quad \zeta = \frac{1}{D} (-Fp - Gq + H),$$

on aperçoit immédiatement l'existence des transformations (12); mais les fonctions  $F$ ,  $G$ ,  $H$  ne sont pas alors explicitement connues. Il reste à chercher si l'on peut les exprimer à l'aide de fonctions arbitraires et, autant que possible, sans quadratures.

Pour cela, il sera naturel de prendre pour ces fonctions les seconds membres des équations (6), ce qui fera retomber sur le raisonnement précédent.

[42] *Transformations spéciales appartenant au troisième type.* — Si les formules (12) sont complètement explicites, on peut cependant leur reprocher de donner une infinité de transformations définissant, au hasard, des volumes équivalents. Peut-on s'astreindre, en recherchant de tels volumes, à des conditions géométriques d'une autre nature qui seraient imposées à l'avance.

Nous traiterons, à cet égard, un problème qui semble particulièrement intéressant.

Rappelons que le plan tangent en un point  $M(x, y, z)$  de  $S$  (fig. 6) coupe  $Oz$  en un point  $T$ , tel que

$$\overline{OT} = z - px - qy.$$

Ceci posé, soit  $m(x, y)$  la projection de  $M$  sur  $Oxy$ . Le point  $M'$ , transformé de  $M$ , ayant pour projection  $m'(\xi, \eta)$  sur  $Oxy$ , on devra avoir, par définition, pour les transformations à étudier

$$(14) \quad Om' = \rho \cdot \overline{Om}, \quad \xi = \varphi(\rho)z + \psi(\rho)\overline{OT},$$

$O$ ,  $m$ ,  $m'$  étant en ligne droite, les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  étant données et  $\rho$  étant une fonction de  $x$  et  $y$  à déterminer.

Analytiquement, on a :

$$\xi = \rho x, \quad \eta = \rho y, \quad \xi = \varphi(\rho)z + \psi(\rho)[z - px - qy].$$

Si l'on pose

$$X(\rho) = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y},$$

on a

$$D = \rho[\rho + X(\rho)].$$

La troisième des équations (13) montre qu'ici l'on doit prendre

$$(15) \quad F = x\psi(\rho)D, \quad G = y\psi(\rho)D, \quad H = z[\varphi(\rho) + \psi(\rho)]D.$$

Reste à exprimer que

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0,$$

ce qui s'écrit facilement

$$(16) \quad X(\psi D) + (\varphi + 3\psi)D = 0.$$

C'est là une équation aux dérivées partielles du second ordre à laquelle doit satisfaire la fonction  $\varphi(x, y)$ . L'intégration de cette équation ne dépend que de celle d'une équation différentielle ordinaire, laquelle peut même être ramenée au premier ordre; mais, avant de traiter ce cas général, il sera plus simple et plus intéressant de traiter d'abord quelques cas particuliers remarquables.

[43] Transformation  $\overline{Om'} = \rho \cdot \overline{Om}$  ;  $\zeta = \overline{OT}$ . — Dans ce cas, on a  $\varphi = 0$ ,  $\psi = 1$  et l'équation générale (16), qui doit déterminer la fonction  $\varphi(x, y)$ , devient alors

$$X(D) + 3D = 0.$$

On en tire d'abord

$$D = \frac{1}{x^3} f\left(\frac{y}{x}\right),$$

$f$  désignant une fonction arbitraire. Cette dernière égalité devant s'écrire

$$\rho \left( \rho + x \frac{\partial \rho}{\partial x} + y \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) = \frac{1}{x^3} f\left(\frac{x}{y}\right),$$

nous avons finalement une équation aux dérivées partielles du premier ordre dont l'intégration doit introduire une seconde fonction arbitraire.

Nous avons d'abord à intégrer les équations simultanées :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{\rho \, d\rho}{\frac{1}{x^3} f\left(\frac{y}{x}\right) - \rho^2}.$$

Une simple équation linéaire donne  $\rho^2$ , si bien que l'on a sans peine, tous calculs faits,

$$\rho^2 = \frac{1}{x^2} g\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{2}{x^3} f\left(\frac{y}{x}\right),$$

$g$  désignant une nouvelle fonction arbitraire.

Les expressions (15) sont ici :

$$F = xD, \quad G = yD, \quad H = zD.$$

Elles définissent à elles trois le tourbillon du vecteur

$$P = yzD, \quad Q = -xzD, \quad R = 0,$$

si bien que le volume

$$\iint_{S'} \zeta \, d\zeta \, d\eta = \iint_S (z - px - qy) D \, dx \, dy$$

s'exprime par l'intégrale de ligne

$$(17) \quad \int_x z D (y \, dx - x \, dy) = - \int_x \frac{z}{x} f\left(\frac{y}{x}\right) d\left(\frac{y}{x}\right).$$

Naturellement, tout ceci suppose que les conditions de validité de la formule de Stokes soient respectées; il faut que les fonctions  $F, G, H$ , le long de toutes les cloisons  $S$  possibles, ne cessent ni d'être finies ni d'avoir des déterminations précises. C'est ce qui aura lieu ici si  $D$  est dans ces conditions; pour cela il suffit d'imaginer que les cloisons  $S$  ne soient pas traversées par l'axe  $Oz$ .

Le seul examen de l'intégrale relative au contour  $\Sigma$  qui figure dans (17) montre que si la cloison  $S$  appartient au cône

$$\frac{z}{x} = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

ladite intégrale est nulle en général. C'est évident géométriquement, puisqu'alors tous les plans tangents à  $S$  passent par  $O$  et donnent des ordonnées  $\zeta = \overline{OT}$  qui sont nulles. Mais on peut déformer  $S$  en laissant simplement son contour  $\Sigma$  sur le cône précédent; les plans tangents coupent alors  $Oz$  tantôt au-dessus, tantôt au-dessous de  $O$ , d'où des ordonnées  $\zeta$  qui permettent de réaliser des volumes nuls, parce que les parties qui se trouvent au-dessus du plan  $Oxy$  et celles qui se trouvent au-dessous sont égales et de signes contraires.

En résumé, la transformation

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = \sqrt{g\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{2}{x}f\left(\frac{y}{x}\right)}, \quad \eta = \frac{y}{x} \sqrt{g\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{2}{x}f\left(\frac{y}{x}\right)}, \\ \zeta = \overline{OT} = z - px - qy \end{array} \right.$$

change la cloison  $S$ , lieu du point  $x, y, z$ , en une cloison  $S'$ , lieu du point  $\xi, \eta, \zeta$ ; le volume cylindrique  $U_z$  relatif à  $S'$  ne dépend que du contour  $\Sigma$  de  $S$  et est égal à

$$- \int_{\Sigma} \frac{z}{x} f\left(\frac{y}{x}\right) d\left(\frac{y}{x}\right).$$

Observons aussi que ce volume ne dépend pas du choix de la fonction  $g$ .

[44] Transformations pour lesquelles  $\varphi + 3\psi = 0$ . — Ceci est encore un cas particulièrement élémentaire qu'il est intéressant de développer avant de passer aux cas généraux.

Alors les équations (14) sont :

$$\overline{Om'} = \rho \cdot \overline{Om}, \quad \zeta = \psi(\rho)(\overline{OT} - 3z).$$

L'équation (16) donne

$$\psi D = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

$f$  étant une fonction arbitraire. Remplaçant  $D$  par son expression générale, on a finalement, pour déterminer  $\rho$ , l'équation aux dérivées partielles du premier ordre :

$$(19) \quad \rho \psi(\rho) \left( \rho + x \frac{\partial \rho}{\partial x} + y \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

De là les équations simultanées

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{\rho \psi(\rho) d\rho}{f\left(\frac{y}{x}\right) - \rho^2 \psi(\rho)},$$

d'où

$$(20) \quad y = Cx, \quad \log \frac{x}{C'} = \int \frac{\rho \psi(\rho) d\rho}{f(C) - \rho^2 \psi(\rho)},$$

C et C' étant deux constantes arbitraires.

On voit qu'on peut encore, par quadrature, déterminer la fonction  $\rho(x, y)$  avec deux fonctions arbitraires de  $\frac{y}{x}$ .

Les expressions (15) sont ici :

$$F = x \psi D, \quad G = y \psi D, \quad H = -2z \psi D.$$

Elles représentent le tourbillon du vecteur

$$P = zy \psi D, \quad Q = -zx \psi D, \quad R = 0,$$

si bien que le volume

$$\iint_{S'} \xi d\xi d\eta = - \iint_S \psi(\rho)(px + qy + 2z) D dx dy$$

s'exprime par l'intégrale de ligne

$$\int_{\Sigma} z \psi D (y dx - x dy) = - \int_{\Sigma} z x^2 f\left(\frac{y}{x}\right) d\left(\frac{y}{x}\right).$$

En raisonnant comme au n° précédent, on voit que si le contour  $\Sigma$  est tracé sur l'une des surfaces

$$zx^2 = F\left(\frac{y}{x}\right),$$

déjà rencontrées au n° 18, les cloisons S passant par ce contour donnent toutes, par la transformation ici étudiée, des cloisons S' auxquelles correspondent des volumes U nuls. Ceci suppose encore que  $\Sigma$  n'entoure pas l'axe Oz et puisse toujours, par déformation continue, être réduit à un point.

[45] Pour faire une application très simple et d'ailleurs très particulière, soit

$$\rho^2 \psi(\rho) = 1.$$

Alors les équations (20) donnent facilement

$$\rho = x g\left(\frac{y}{x}\right)$$

si le second membre de (19) est pris égal à 2. On peut conclure que la transformation

$$\xi = x^3 g\left(\frac{y}{x}\right), \quad \eta = xy g\left(\frac{y}{x}\right), \quad x^3 \left[ g\left(\frac{y}{x}\right) \right]^3 \zeta = 3z - \overline{OT}$$

fait correspondre à la cloison S une cloison S' à laquelle est attaché le volume

$$\iint_{S'} \zeta d\xi d\eta = 6(U_z - V_o),$$

les notations étant les mêmes qu'au n° 16.

[46] *Transformations pour lesquelles*  $\varphi + a\psi = 0$ . — Ici,  $a$  désigne une constante quelconque; les équations (14) sont :

$$\overline{OM'} = \rho \cdot \overline{OM}, \quad \zeta = \psi(\rho)(\overline{OT} - az).$$

L'équation (16) devient

$$X(\psi D) + (3 - a)\psi D = 0$$

et donne

$$\psi D = x^{a-3} f\left(\frac{y}{x}\right),$$

d'où l'équation

$$\psi(\rho)\rho[\rho + X(\rho)] = x^{a-3} f\left(\frac{y}{x}\right)$$

qui entraîne les équations différentielles ordinaires :

$$(21) \quad \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{\rho \psi(\rho) d\rho}{x^{a-3} f\left(\frac{y}{x}\right) - \rho^3 \psi(\rho)}.$$

On a ici

$$F = x\psi D, \quad G = y\psi D, \quad H = (1 - a)z\psi D,$$

ce qui représente le tourbillon du vecteur

$$P = zy\psi D, \quad Q = -zx\psi D, \quad R = 0.$$

Nous sommes donc maintenant en présence d'une transformation conduisant au volume

$$\iint_{S'} \zeta d\xi d\eta = \iint_S \psi(\rho)[(1 - a)z - px - qy] D dx dy,$$

lequel s'exprime par l'intégrale de ligne

$$\int_{\Sigma} z\psi D(y dx - x dy) = - \int_{\Sigma} z x^{a-1} f\left(\frac{y}{x}\right) d\left(\frac{y}{x}\right).$$



Pour  $a=0$ , on retrouve toutes les conclusions du n° 43 et, pour  $a=3$ , toutes celles du n° 44. On aurait pu d'ailleurs traiter ces paragraphes, comme cas particuliers, à la suite de celui-ci. Mais les calculs poussés jusqu'au bout dans ces cas ne peuvent plus l'être maintenant. Pour obtenir la fonction  $\rho$  il resterait à intégrer le système (21) qui donne :

$$(21 \text{ bis}) \quad y = Cx, \quad \frac{dx}{x} = \frac{\rho \psi(\rho) d\rho}{x^{a-3} f(C) - \rho^3 \psi(\rho)}.$$

L'équation en  $x$  et  $\rho$  est linéaire quand  $\psi(\rho)$  est de la forme  $k\rho^m$ , comme dans le cas déjà étudié où l'on avait  $k=1$ ,  $m=0$ ; elle est à variables séparées pour  $a=3$ ; dans le cas où  $\psi(\rho)$  est quelconque et  $a$  différent de 3, la détermination de  $\rho$  cesse d'être élémentaire.

Mais il faut bien observer que, même si la transformation ne peut être explicitement construite, le volume constant attaché à la surface transformée n'en est pas moins connu puisque l'intégrale de ligne qui l'exprime ne dépend pas de la fonction  $\psi$ .

[47] *Cas général des transformations du type (14).* — Abordons maintenant le cas général de la transformation (14) et, au sujet de l'équation (16), démontrons les assertions émises à la fin du n° 42.

Cette équation (16) peut s'écrire

$$X\{\rho\psi(\rho)[\rho + X(\rho)]\} + \rho[\varphi(\rho) + 3\psi(\rho)][\rho + X(\rho)] = 0,$$

en posant toujours

$$X() = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}.$$

On sait qu'un tel opérateur, si l'on y remplace les variables  $x, y$  par d'autres  $u, v$ , prend la forme

$$X(u) \frac{\partial}{\partial u} + X(v) \frac{\partial}{\partial v}$$

ou  $\frac{\partial}{\partial u}$ , si l'on détermine  $u$  et  $v$  par les équations

$$X(u) = 1, \quad X(v) = 0,$$

qui donnent ici

$$(22) \quad u = \log x \theta_1 \left( \frac{y}{x} \right), \quad v = \theta_2 \left( \frac{y}{x} \right),$$

si  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont des fonctions arbitraires.

Adoptons l'un de ces derniers changements de variables et l'équation en litige deviendra :

$$(23) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left[ \rho \psi \left( \rho + \frac{\partial \rho}{\partial u} \right) \right] + \rho (\varphi + 3\psi) \left( \rho + \frac{\partial \rho}{\partial u} \right) = 0.$$

Cette équation aux dérivées partielles, ne contenant pas explicitement la variable  $v$ , peut être traitée comme une équation différentielle ordinaire. Si on l'écrit

$$(24) \quad \frac{d}{du} \left[ \rho \psi \left( \rho + \frac{d\rho}{du} \right) \right] + \rho(\varphi + 3\psi) \left( \rho + \frac{d\rho}{du} \right) = 0$$

et si l'on pose

$$\frac{d\rho}{du} = t, \quad \text{d'où} \quad \frac{d}{du} = \frac{d\rho}{du} \frac{d}{d\rho} = t \frac{d}{d\rho},$$

elle s'abaisse au premier ordre et devient

$$t \frac{d}{d\rho} [\rho \psi(\rho + t)] + \rho(\varphi + 3\psi)(\rho + t) = 0$$

ou

$$(25) \quad \rho \psi t \frac{dt}{d\rho} + (\rho \psi' + \psi) t^2 + \rho(\rho \psi' + 5\psi + \varphi) t + \rho^2(\varphi + 3\psi) = 0.$$

En général, cette équation n'est pas intégrable élémentairement, mais, bien entendu, elle doit le devenir dans les cas simples des paragraphes précédents.

Ainsi pour  $\varphi + 3\psi = 0$ , elle est linéaire après suppression du facteur  $t$ .

Pour  $\psi = k\rho^m$ ,  $\varphi = -a\psi = -ak\rho^m$ , elle devient homogène.

A ces cas élémentaires, on peut adjoindre celui où l'on aurait

$$\rho \psi'(\rho) + 5\psi(\rho) + \varphi(\rho) = 0;$$

alors l'équation (25) est linéaire par rapport à  $t^2$ .

[48] Que l'équation (25) soit intégrable ou non par les méthodes élémentaires, ce qui précède suffit pour apercevoir le degré de généralité que pourra finalement posséder la fonction  $\varphi(x, y)$ . L'intégrale générale de (25) étant définie par une équation de la forme

$$F(t, \rho, C_1) = 0,$$

il faudra intégrer

$$F\left(\frac{d\rho}{du}, \rho, C_1\right) = 0$$

pour avoir l'intégrale générale de (24) qui sera de la forme

$$\Phi(\rho, u, C_1, C_2) = 0.$$

Si l'on considère maintenant  $C_1$  et  $C_2$  comme des fonctions arbitraires de  $v$ , l'équation

$$\Phi[\rho, u, C_1(v), C_2(v)] = 0$$

définit l'intégrale générale de (23). En se rappelant la signification de  $u$  et  $v$ , on a finalement, pour déterminer  $\rho$ ,

$$\Phi[\rho, \log x \theta_1, C_1(\theta_2), C_2(\theta_2)] = 0.$$

Il est clair qu'il n'y a aucun intérêt à prendre la substitution (22) sous sa forme générale. La forme la plus simple est, au contraire, la plus avantageuse. Prenons donc

$$\theta_1\left(\frac{y}{x}\right) = 1, \quad \theta_2\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x}$$

et finalement  $\rho$  pourra s'exprimer à l'aide de  $x$  et de deux fonctions arbitraires de  $\frac{y}{x}$ . C'est bien ainsi que  $\rho$  a été exprimé dans tous les cas particuliers traités directement.

[49] *Sur les équations aux opérateurs X.* — L'équation (16), que l'on peut développer si l'on veut comme il est indiqué au début du n° 47, présente beaucoup d'analogies avec les équations, dites *aux opérateurs X*, que j'ai étudiées dans mon *Mémoire Sur les équations linéaires aux dérivées partielles et la théorie des groupes continus* <sup>(1)</sup> (Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1904). Si l'on s'en tient au cas de deux variables, de telles équations sont formées avec des opérateurs tels que

$$(26) \quad X_i() = X_{ii} \frac{\partial}{\partial x} + X_{2i} \frac{\partial}{\partial y} \quad (i = 1, 2)$$

de même que les équations *aux dérivées partielles*, linéaires et à coefficients constants, sont formées avec les opérateurs  $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ . De telles équations jouissent de propriétés particulièrement remarquables quand les opérateurs (26) définissent les transformations infinitésimales d'un groupe continu. Tout ceci ne s'applique pas exactement à l'équation (16) qui, en général, n'est pas linéaire par rapport à la fonction inconnue  $\rho$ . Mais il est facile de voir qu'il y a un cas où la coïncidence s'établit d'une manière particulièrement simple.

(1) Ce Mémoire fut présenté à l'Académie des Sciences pour le Grand Prix des Sciences mathématiques de 1902. Il fut écarté par l'Académie qui jugea qu'il s'éloignait trop du sujet proposé (voir l'analyse publiée dans les *Comptes rendus* du 22 décembre 1902, p. 1157, mémoire n° 3). Le défaut capital de ce Mémoire était d'étudier dans l'abstrait les équations aux opérateurs  $X$ , sans indication de problèmes conduisant à de telles équations, hormis peut-être quelques-uns qui étaient manifestement construits tout exprès pour cela. Il n'est donc pas sans intérêt de remarquer qu'on rencontre ici, dans un cas fort particulier, mais d'une manière naturelle, une équation de ce type.

J'ai donné le premier exemple *non construit exprès* dans un Mémoire *Sur les surfaces dont un système de lignes asymptotiques se projette suivant une famille de courbes données* (Bulletin de la Société Mathématique, 1903).

Comme au n° 46, soit  $\varphi + a\psi = 0$  et soit de plus  $\rho\psi = b$ ,  $b$  désignant une nouvelle constante. Alors le système (21 bis) devient

$$\gamma = Cx, \quad \frac{dx}{x} = \frac{b d\rho}{x^{a-3} f(C) - b\rho},$$

et l'on conclut facilement que

$$(27) \quad \rho = \frac{x^{a-3}}{b(a-2)} f\left(\frac{\gamma}{x}\right) + \frac{1}{x} g\left(\frac{\gamma}{x}\right),$$

$f$  et  $g$  désignant des fonctions arbitraires.

D'autre part, si  $\rho\psi = b$ , l'équation (16), développée comme au début du n° 47, s'écrit

$$X[\rho + X(\rho)] + (3-a)[\rho + X(\rho)] = 0$$

ou

$$(28) \quad X^2(\rho) + (4-a)X(\rho) + (3-a)\rho = 0,$$

l'exposant 2 dont est affecté  $X$  indiquant la réitération de cet opérateur. Nous avons bien alors une équation aux opérateurs  $X$ , linéaire, à coefficients constants et dégénérée d'ailleurs jusqu'à ne contenir qu'un seul opérateur :

$$(29) \quad X() = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}.$$

Nous n'avons pas à nous proposer de l'intégrer, puisque l'intégrale générale  $\rho$  est déjà connue et donnée par (27). Mais, du fait que  $\rho$  satisfait à une équation de la forme (28), on peut attribuer de certaines propriétés à cette fonction. Ainsi soit  $Y$  un opérateur permutable avec  $X$ , c'est-à-dire tel que  $X[Y()] = Y[X()]$ . Si l'on applique  $Y$  aux deux membres de (28) on est ramené à écrire une équation où  $\rho$  est remplacé par  $Y(\rho)$ . Donc l'opérateur  $Y$  change une solution  $\rho$  en une autre.

Ainsi, parmi les opérateurs permutables avec (29), il est facile d'indiquer

$$(30) \quad (x-y) \frac{\partial}{\partial x}, \quad (x-y) \frac{\partial}{\partial y},$$

et non moins facile de vérifier que si on les applique à  $\rho$  on trouve des fonctions de même nature où on a simplement varié les formes de  $f$  et  $g$ .

En d'autres termes, la transformation du n° 46, puisque l'on a maintenant  $\rho\psi = b$ , se réduit à

$$\overline{Om'} = \rho \cdot \overline{Om}, \quad \xi = \frac{b}{\rho} (\overline{OT} - az).$$

Si la fonction  $\rho$  est déterminée par une méthode particulière quelconque, de manière à rendre cette transformation susceptible d'engendrer des volumes équivalents, on pourra remplacer  $\rho$  par les fonctions en lesquelles les opérateurs (30) changent  $\rho$ .

[50] On pourrait chercher à remplacer les opérateurs (30) par l'opérateur le plus général qui soit permutable avec (29). C'est là une question classique bien connue qui se rattache à la théorie des systèmes complets d'équations aux dérivées partielles du premier ordre (E. GOURSAT, *Leçons sur l'intégration des équations, etc.*, p. 60), à la théorie des groupes (S. LIE und G. SCHEFFERS, *Vorlesungen über Differentialgleichungen*, S. 313), aux recherches modernes de M. Saltykow (*Comptes Rendus, passim*) et à bien d'autres travaux qui nous entraîneraient fort loin de l'objet de ce Mémoire. Ma propre Thèse *Sur les équations différentielles simultanées et la forme aux dérivées partielles adjointe* (Gauthier-Villars, 1901) était consacrée à une exposition élémentaire du sujet. Au point de vue pratique, c'est-à-dire pour la formation rapide de l'opérateur désiré, on trouvera une méthode très symétrique dans une Note que j'ai été amené à insérer dans les *Comptes Rendus* du 9 décembre 1907. M. Saltykow, de son côté, donna le 16 décembre des résultats analogues aux miens.

