ÉMILE TURRIÈRE

Sur les congruences de normales qui appartiennent à un complexe donné

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3e série, tome 2, nº 1-2 (1910), p. 143-223
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1910_3_2_1-2_143_0>

SUR

LES CONGRUENCES DE NORMALES

QUI APPARTIENNENT A UN COMPLEXE DONNÉ,

PAR

ÉMILE TURRIÈRE,

Professeur au Lycée d'Alençon.

INTRODUCTION.

Le développement des études de Géométrie réglée, en ce qui concerne les complexes, est certainement en retard par rapport à la théorie des congruences de droites, notamment au point de vue des propriétés métriques : la théorie des congruences, en effet, a donné lieu à de nombreuses recherches se rapportant surtout à la géométrie projective. « Les propriétés infinitésimales des congruences, écrit « M. G. Kœnigs (1), sont connues depuis beaucoup plus longtemps que celles des « complexes. Elles se sont présentées aux géomètres dès les premières recherches « sur la théorie des surfaces. Dans son *Traité de Géométrie*, M. Darboux leur a con- « sacré une place importante et a ajouté à l'intérêt que les géomètres leur prêtaient « déjà en les rattachant aux recherches de Laplace sur les équations linéaires aux « dérivées partielles du second ordre. »

Parmi les quelques recherches qui sont relatives aux propriétés infinitésimales des complexes, se trouve l'étude du problème considéré, pour la première fois en 1861, par Abel Transon et qui peut être énoncé ainsi : « *Un complexe étant donné, déterminer toutes les congruences de droites qui appartiennent à ce complexe et qui sont des congruences de normales.* » Outre le grand intérêt géométrique que présente cette

---

(1) G. Kœnigs, *La Géométrie réglée et ses applications*, chap. iv, § 66 (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, t. VI, 1892, p. 55).

question, elle offre aussi un intérêt physique, puisqu'elle est équivalente à la détermination des systèmes de rayons lumineux jouissant d'une propriété donnée. Au même problème de Transon, Lie (1) rattache d'ailleurs le problème qui consiste à déterminer toutes les surfaces pour lesquelles les tangentes à une famille à un paramètre de géodésiques appartiennent à un complexe de droites donné.

Dans son *Mémoire sur les propriétés d'un ensemble de droites menées de tous les points de l'espace, suivant une loi continue* (2), Transon attache à tout point $M(x, y, z)$ de l'espace une droite D dont les cosinus directeurs X, Y, Z sont trois fonctions données des coordonnées de M. Si l'équation

$$X dx + Y dy + Z dz = 0$$

est intégrable, on sait que la totalité des droites données se répartit en groupes respectivement normaux aux différentes surfaces particulières que renferme son intégrale générale. Mais la répartition des droites en de tels groupes n'est nullement subordonnée à l'intégration de cette équation : quelles que soient les fonctions données, il y a toujours une infinité de manières de répartir l'ensemble donné, lorsque c'est un complexe, en groupes normaux à des surfaces distinctes, et dans le cas même où l'équation ci-dessus est intégrable, la répartition qu'elle procure n'est qu'un mode particulier entre une infinité d'autres. Toute surface (S) — que Transon appelle *résolvante* — intégrale de l'équation linéaire

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right) p + \left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right) q = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x},$$

est un lieu de *points de départ* M de rayons D d'une certaine congruence de normales. Il en résulte qu'à toute intégrale de cette dernière équation correspond une congruence de normales appartenant au complexe et réciproquement.

Tel est le résumé du Mémoire remarquable de Transon, Mémoire qui fut l'objet d'un rapport de Chasles (3).

L'équation linéaire de Transon est d'une forme digne d'intérêt : je ferai remarquer que c'est l'équation des surfaces de tourbillon dans le champ de vecteurs (X, Y, Z); et j'ai pu obtenir cette équation en appliquant le théorème d'Ampère-Stokes. Les caractéristiques sont les lignes de tourbillon et, dans le cas du complexe tétraédral convenablement défini, j'ai obtenu leurs équations sous la forme des trois équations d'Euler pour le mouvement d'un corps solide ayant un point fixe et qui n'est soumis à aucune force. L'intérêt de la méthode de Transon est donc grand, d'autant plus que

---

(1) SOPHUS LIE, *Ueber Complexe, insbesondere Linien- und Kugelcomplexe mit Anwendung auf die Theorie partieller Differentialgleichungen* (Mathematische Annalen, V, 1872, § 52).

(2) *Comptes rendus*, 1861, LII, pp. 245-247. *Journal de l'École Polytechnique*, 1861, XXII, 38e cahier, pp. 195-208.

(3) *Comptes rendus*, LII, pp. 1013-1018.

j'ai pu obtenir une équation plus générale pour des coordonnées curvilignes orthogonales quelconques.

Mais, à côté de certains avantages, se trouvent de très grands inconvénients, provenant principalement du choix des points de départ des droites du complexe lorsque celui-ci est défini, non plus analytiquement, mais géométriquement. J'ai bien pu obtenir des règles permettant de choisir des points de départ, dans divers cas particuliers, mais lorsqu'on se trouve en présence d'un complexe tel que le complexe de Painvin, on est assez embarrassé : il ne s'agit pas, en effet, de choisir des points de départ quelconques; il faut surtout ne pas perdre de vue l'équation finale qui doit être simultanément simple et élégante. La méthode de Transon échoue totalement dans le cas du complexe de Painvin, alors que, par une autre méthode, j'ai pu obtenir une équation, non plus linéaire, il est vrai, mais possédant une intégrale quadratique; le problème est alors équivalent à la détermination des géodésiques pour un certain élément linéaire de surfaces harmoniques.

La définition d'un complexe à l'aide des points de départ présente aussi l'inconvénient de ne pas toujours fournir un complexe, mais parfois une congruence de droites : si l'on se donne, par exemple, une quadrique et si, à chaque point de l'espace, on attache les focales du cône circonscrit à la quadrique, on constitue une congruence isotrope remarquable.

Dans le cas où la méthode de Transon est praticable, on obtient, non pas les surfaces dont les normales appartiennent au complexe, mais les surfaces résolvantes qui, malgré l'interprétation géométrique donnée par Ossian Bonnet (1), ont des rapports plutôt lointains avec le complexe. Il est d'ailleurs bien naturel qu'il en soit ainsi et que les surfaces résolvantes ne soient pas intimement liées au complexe, puisque ces surfaces dépendent du choix des points de départ, lequel choix est arbitraire, dans le cas d'un complexe défini géométriquement.

Il convenait donc de reprendre le problème sous un autre jour et d'avoir principalement en vue la détermination des surfaces dont les normales appartiennent au complexe. Ces surfaces, pour abréger, je les désignerai sous le nom de *surfaces trajectoires*. Le premier, en 1870, M. Darboux (2) énonça incidemment le théorème suivant : *Étant donné un complexe de droites dont on connaît* a priori *une famille à un paramètre de surfaces trajectoires, non parallèles, la solution complète du problème de Transon pour le complexe considéré s'obtient sans introduction de nouvelles quadratures*. Des conséquences de ce théorème fondamental ont été développées par M. Darboux lui-même dans deux Communications récentes à l'Académie (3) *Sur les*

(1) *Comptes rendus*, LII, p. 1082.

(2) G. Darboux, *Sur les systèmes de coniques et de surfaces du second ordre* (Bulletin des Sciences mathématiques, 1870, p. 351).

(3) Séances des 15 et 22 novembre 1909.

congruences de courbes et sur les surfaces normales aux droites d'un complexe, qui, comme l'indique le titre, contiennent des résultats plus généraux et relatifs aux congruences de courbes quelconques.

L'importance du théorème de M. Darboux n'a point échappé à Sophus Lie [1], qui rattacha l'étude du problème de Transon à ses recherches sur les transformations de contact. Sous la dénomination de *problème des normales*, Lie [2] considéra le problème de Transon et établit que l'équation aux dérivées partielles du premier ordre dont dépendent les surfaces trajectoires est caractérisée par son invariance dans la transformation infinitésimale constituée par la dilatation. Je ferai remarquer que cela revient à dire que l'équation du problème de Transon, pour un complexe quelconque, est l'équation du premier ordre la plus générale qui possède une intégrale développable isotrope.

Après ce résumé des recherches qui furent faites sur le problème de Transon, pour un complexe quelconque, il convient d'observer qu'en ce qui concerne des complexes particuliers, on connaît, indépendamment de toute théorie générale, des surfaces dont les normales appartiennent à ces complexes : c'est ainsi que Monge [3] avait déterminé, bien antérieurement à Transon, les surfaces dont les normales appartiennent au complexe spécial des tangentes à une surface développable, ou à une sphère. Plus généralement pour un complexe spécial quelconque, le problème étant équivalent à la détermination des lignes géodésiques de la surface de singularité, le problème peut être considéré comme ayant été résolu par Geisenheimer, dans son Mémoire *Sur les systèmes de rayons formés par les tangentes à une surface* [4], et par tous les géomètres qui se sont occupés du problème des géodésiques.

Dans le cas du complexe linéaire, le problème fut résolu par Lie et par M. É. Picard qui, dans sa Thèse de Doctorat (1877, p. 31), établit d'une manière purement géométrique que les surfaces trajectoires sont des hélicoïdes.

Tel est le résumé succinct de l'historique du problème de Transon, problème auquel je vais consacrer le présent Mémoire.

Pour point de départ de mes recherches, j'ai pris le théorème de M. Darboux; ce théorème m'a conduit à des méthodes nouvelles de résolution du problème de Transon et m'a amené à faire reposer une théorie nouvelle des complexes de droites sur la considération de leurs congruences de normales.

Un premier chapitre est consacré au théorème de M. Darboux et à l'illustration de ce théorème par quelques exemples; et à propos des exemples, je me permets de faire observer dès maintenant que, pour des raisons diverses, j'ai cru devoir leur

---

(1) Lie et Scheffers, *Geometrie der Berührungstransformationen*, p. 273 et pp. 675-685.

(2) Lie, *Ueber Complexe, insbesondere Linien- und Kugelcomplexe* (M. A. 1872).

(3) *Application de l'analyse à la géométrie*, pp. 246-321.

(4) *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 1872.

accorder une large place, tout en m'efforçant d'éviter l'exagération. L'examen d'un exemple bien choisi, étudié sous des points de vue différents, permet de comprendre les théories générales qu'il précise et offre l'avantage appréciable d'être parfois l'origine de nouvelles recherches. L'absence d'ouvrage didactique concernant les complexes, autres que le complexe linéaire et les complexes quadratiques, m'a souvent obligé, à propos des exemples signalés, à faire quelques digressions inévitables.

Après l'examen de ces cas particuliers destinés à mettre en évidence l'intérêt du théorème de M. Darboux, j'aborde le problème de Transon dans le cas le plus général; pour un complexe quelconque, il semble que le théorème de M. Darboux soit absolument inapplicable; il n'en est rien et je montre qu'il est possible de réduire l'équation aux dérivées partielles du problème à une forme canonique remarquable.

Une telle réduction nécessite l'emploi de coordonnées tangentielles qui ne sont pas différentes de celles qui furent considérées par Ossian Bonnet, dans ses recherches sur les surfaces minima. Deux systèmes de coordonnées me serviront dans la suite : le second chapitre est consacré à rappeler ou à établir des formules qui seront utilisées; je me suis d'ailleurs limité à ces formules.

Au chapitre III commence l'étude de classes de complexes; m'inspirant constamment des travaux de Lie, j'étudie des cas où l'équation aux dérivées partielles est équivalente à une équation différentielle du premier ordre : c'est le cas où le complexe donné admet une transformation infinitésimale connue *a priori*. Je consacre une place importante aux complexes dont l'équation est homogène par rapport aux coordonnées plückériennes qui jouent le rôle de moments; ces complexes sont ceux qui jouissent de l'invariance dans une homothétie infinitésimale de pôle fixe. De même que, par la considération des courbes dont les tangentes appartiennent à un complexe donné, Lie fut amené à associer à tout complexe de droites une équation de Pfaff ou de Monge caractérisant ce complexe, de même, par la considération des surfaces trajectoires, il est possible, pour les complexes particuliers précédents, de leur associer une seconde équation de Pfaff-Monge; réciproquement, à toute équation de cette nature correspond un complexe déterminé, invariant dans l'homothétie infinitésimale : c'est ainsi que le complexe de M. Humbert, dans un cas de dégénérescence, est susceptible d'être associé à une certaine équation différentielle d'Euler.

L'interprétation du rôle de l'équation associée m'amène à considérer les complexes admettant des surfaces développables parmi leurs trajectoires : l'examen de ces complexes particuliers s'imposait d'ailleurs, puisque les surfaces développables échappent aux méthodes tangentielles de recherche et puisque l'équation la plus générale, considérée par Lie, invariante dans la dilatation infinitésimale, n'est autre, comme je le fais observer, que celle qui possède une intégrale développable isotrope.

Le chapitre est continué par l'étude des complexes de révolution et terminé par celle des complexes de translation; les résultats contenus dans ce chapitre III sont donc applicables à un très grand nombre de complexes connus.

Les chapitres IV et V sont principalement consacrés à une classification des complexes de droites. Comme conséquence de la simplicité de forme de l'équation aux dérivées partielles, je caractérise tout complexe de droites par une courbe plane que je désigne sous la dénomination de *figuratrice* du complexe. Il en résulte tout d'abord une classification des complexes analogue à celle des courbes planes. Et comme il se trouve que, dans la plupart des cas, la figuratrice est une droite ou une conique, je n'ai eu à envisager que deux catégories de complexes : les complexes *semi-linéaires*, pour lesquels la figuratrice est une droite ou peut être décomposée en droites, et les complexes *semi-quadratiques* associés à des coniques. Vu les propriétés spéciales des équations linéaires et vu l'importance et la fréquence des complexes semi-linéaires, j'ai consacré le chapitre IV à ces complexes.

Passant ensuite aux complexes semi-quadratiques, je les ai étudiés dans le Vᵉ chapitre qui est un des plus longs; ce développement est justifié par des applications nouvelles, en Géométrie réglée, des belles recherches de M. Kœnigs sur les intégrales quadratiques du problème des géodésiques. Devant l'intérêt qu'offrent le problème des géodésiques et la théorie, encore incomplète, des surfaces harmoniques, je n'ai pas hésité à accorder une place importante aux complexes pour lesquels le problème de Transon est réductible au problème des géodésiques pour un élément linéaire quelconque et, en particulier, pour un élément de Liouville.

L'introduction des figuratrices de complexes ne permet pas seulement une classification plus ou moins intéressante des complexes. On sait qu' « il est souvent utile « de représenter une congruence en exprimant les coordonnées de l'une quelconque « de ses droites en fonctions de deux paramètres. De même il est souvent utile de « représenter les coordonnées d'une droite d'un complexe au moyen de fonctions de « trois variables [1]. » L'emploi de la figuratrice permet précisément d'exprimer les coordonnées des rayons d'un complexe en fonctions de trois paramètres et d'étendre aux complexes la notion de genre des courbes planes : c'est l'objet du chapitre VI, qui est terminé par la résolution du problème de Transon pour les complexes définis paramétriquement; l'équation du problème est alors linéaire et admet l'unité pour multiplicateur, tout comme l'équation formée par Transon.

Le théorème de M. Darboux suppose essentiellement que l'on connaît *a priori* une famille de congruences de normales appartenant au complexe donné. Au chapitre VII, je m'occupe des complexes pour lesquels on sait qu'une congruence de normales jouit d'une certaine propriété, d'être par exemple formée de normales à une surface de M. Appell ou à une surface *minima*. Il n'existe pas en général de surface trajectoire qui soit une surface de M. Appell; s'il en existe une, il en existe une infinité (en se bornant aux surfaces non parallèles); ces surfaces sont déterminables par quadratures et le problème de Transon est résoluble par application du théorème

(1) Kœnigs, *La Géométrie réglée et ses applications*, chap. IV, § 71, p. 63.

de M. Darboux. Il existe des théorèmes analogues pour les surfaces moulures, les surfaces *minima* et autres surfaces satisfaisant à des équations du second ordre. L'étude des complexes de droites qui admettent des surfaces *minima* pour trajectoires particulières est étroitement liée à la solution d'un problème de Mécanique physique, concernant les tourbillons de grandeur constante. Ce même chapitre contient la détermination des complexes dont toutes les trajectoires sont des surfaces de M. Appell, des surfaces moulures..., question intéressante et qui trouve là sa place toute naturelle.

Un VIII^e chapitre est relatif aux complexes spéciaux, à leur propriété de conduire à une équation aux dérivées partielles dont les caractéristiques sont lignes de courbure des surfaces intégrales, à la condition nécessaire et suffisante pour qu'une figuratrice soit associée à un complexe spécial et à la détermination des complexes, plus généraux que les complexes spéciaux, dont les droites singulières constituent une congruence de normales. Bien entendu, dans la rédaction de ce chapitre, j'ai soigneusement évité toute digression sur le problème des géodésiques de la surface de singularité d'un complexe spécial : le lecteur ne doit pas perdre de vue que mon but n'est point d'écrire une compilation sur tout ce que l'on sait des congruences de normales d'un complexe, mais de mettre en évidence l'intérêt d'un théorème de M. Darboux, de montrer tout le parti qu'on peut tirer de ce théorème en vue d'une orientation nouvelle des recherches de Géométrie réglée.

Ici s'arrêterait mon travail si je n'avais, sur les conseils de M. E. Cosserat, tenu à rattacher aux considérations précédentes la méthode de Transon lui-même : la forme remarquable de l'équation de Transon mérite une pareille étude. Dans les chapitres VIII et sq., j'ai repris la méthode de Transon que j'ai rattachée à la théorie des mouvements tourbillonnaires. Je me propose de publier de nouveaux Mémoires sur cette question, attendu que je me suis borné à l'exposition des considérations qui permettent d'être amené aux méthodes tangentielles. Après une extension de l'équation de Transon au cas de coordonnées curvilignes quelconques, j'ai essayé de montrer comment on peut choisir des points de départ des rayons d'un complexe donné; en particulier, il y a dans une foule de cas le plus grand intérêt à prendre pour point de départ d'un rayon la projection orthogonale d'un point fixe. De cette considération de la projection d'un point fixe, résulte une représentation analytique des congruences de normales au moyen d'une fonction homogène et un nouveau procédé de recherche des congruences de normales d'un complexe : l'interprétation géométrique de cette dernière méthode amène immédiatement aux méthodes tangentielles déduites du théorème de M. Darboux.

CHAPITRE PREMIER.

Le théorème de M. Darboux.

Le théorème de M. Darboux. — Exemples d'application : complexe tétraédral; complexe des droites équidistantes de deux points; troisième exemple tiré de la théorie des variables complexes. — Forme canonique, déduite du théorème de M. Darboux, de l'équation aux dérivées partielles dont dépendent les surfaces trajectoires d'un complexe quelconque. — Méthodes tangentielles.

[**1**] M. Darboux a le premier fait remarquer que, lorsqu'on connaît une famille dépendant d'un paramètre de surfaces trajectoires (c'est-à-dire de surfaces dont les normales appartiennent au complexe) non parallèles, la solution complète du problème de Transon s'obtient sans l'introduction de nouvelles quadratures, autres naturellement que celles qui peuvent déjà figurer dans l'équation du complexe ou dans l'équation de la solution connue. La dilatation est une transformation infinitésimale pour l'équation du problème de Transon; par suite, lorsqu'on connaît une famille à un paramètre de surfaces non parallèles, on connaît une intégrale complète de cette équation aux dérivées partielles du premier ordre. La solution générale s'obtient donc comme enveloppe de la famille obtenue en supposant, dans l'intégrale complète, les deux paramètres liés par une relation arbitraire.

[**2**] L'exemple le plus simple est celui à propos duquel M. Darboux fut amené à découvrir le théorème précédent : celui du complexe tétraédral, c'est-à-dire du complexe constitué par les normales aux quadriques d'un système homofocal. On connaît, d'après la nature même de la définition du complexe tétraédral, une famille de trajectoires non parallèles qui est précisément constituée par les quadriques du système homofocal. La surface la plus générale dont les normales appartiennent au complexe est donc, d'après le théorème de M. Darboux, l'enveloppe d'une famille quelconque de surfaces parallèles à ces quadriques.

[**3**] Un second exemple non moins remarquable est celui du complexe des droites équidistantes de deux points donnés, complexe qui est identique au complexe des droites telles que les projections orthogonales d'un point fixe O soient dans un plan donné Oxy passant par ce point; on connaît alors une famille de surfaces non parallèles (cylindres de révolution autour de droites du plan Oxy issues du point O) dont les normales constituent le complexe. Le problème est dès lors résoluble sans quadrature. Effectuons une transformation de contact : prenons les podaires des trajectoires par rapport au point O; la podaire d'un cylindre de révolution d'axe passant

par le point O est un cercle de centre O et de diamètre Oz, perpendiculaire à Oxy. Il en résulte que la surface la plus générale dont les normales appartiennent au complexe est antipodaire par rapport à O de la surface cerclée la plus générale engendrée par un cercle de centre O et de diamètre Oz. En d'autres termes, la trajectoire générale est antipodaire de la transformée apsidale, par rapport au point O, d'une courbe arbitraire du plan Oxy (1). Ce théorème est d'ailleurs un cas particulier d'une propriété plus générale, résultant aussi du théorème de M. Darboux et qui concerne les complexes de droites sur lesquelles un point fixe O se projette en les points d'un cône de sommet O : la trajectoire la plus générale est antipodaire, par rapport à O, de la surface transformée apsidale, par rapport au même point O, d'une courbe arbitraire tracée sur le cône (§ 14).

[**4**] Le théorème de M. Darboux est susceptible d'un grand nombre d'applications de cette nature; on en trouvera plusieurs disséminées dans ce Mémoire, ce qui me dispense d'insister ici en multipliant des exemples plus ou moins remarquables. J'en indiquerai toutefois un troisième destiné à montrer qu'il n'est pas nécessaire de se limiter toujours aux complexes linéaires ou quadratiques et que l'on peut faire appel à des complexes d'équation compliquée et qui pourtant conduisent à des résultats intéressants.

Au plan Oxy d'une variable complexe

$$z = x + iy,$$

associons un axe Oz, perpendiculaire en O à ce plan; soit

$$f(z) = P + iQ$$

une fonction de la variable complexe; à tout point m du plan, de coordonnées x, y, associons un cône de révolution ayant ce point pour sommet et d'axe parallèle à Oz; le demi-angle V au sommet du cône sera, par définition de la correspondance entre le cône et le point m, déterminé par la relation

$$\sin V = |f(z)|;$$

dans ces conditions, les génératrices des divers cônes associés aux points du plan (ou d'une façon plus correcte aux points de la région du plan pour laquelle le module de $f(z)$ est inférieur à l'unité) constituent un complexe qui dépend du choix de la fonction $f(z)$. Pour compliquée que soit l'équation de ce complexe, le problème de Transon est cependant résoluble par application du théorème de M. Darboux.

---

(1) Dans un article *Conséquences de deux théorèmes de M. Bricard concernant les tangentes communes à deux quadriques* (Nouvelles Annales de mathématiques, 1910, pp. 32-38), j'ai étudié d'une façon plus détaillée le complexe des droites équidistantes de deux points et donné des exemples de surfaces cerclées transformées apsidales par rapport à O d'une courbe générale du plan Oxy.

Soit, en effet, θ un angle arbitraire; du point m, faisons partir une droite de cosinus directeurs

$$p_1 = \mathrm{P}\cos\theta + \mathrm{Q}\sin\theta,$$
$$p_2 = \mathrm{P}\sin\theta - \mathrm{Q}\cos\theta,$$
$$p_3 = \sqrt{1 - \mathrm{P}^2 - \mathrm{Q}^2};$$

d'après la troisième de ces équations, la droite est une génératrice du cône associé au point m. Écrivons que le point μ de cette droite, de coordonnées

$$\xi = x + \lambda p_1, \quad \eta = y + \lambda p_2, \quad \zeta = \lambda p_3,$$

où λ est une fonction à déterminer de x et de y, engendre une surface normale à la droite $m\mu$; il faut que l'on ait

$$p_1 d\xi + p_2 d\eta + p_3 d\zeta = 0,$$

ou

$$d\lambda = -(p_1 dx + p_2 dy);$$

l'expression entre parenthèses doit être une différentielle exacte; on a

$$\frac{\partial p_1}{\partial y} - \frac{\partial p_2}{\partial x} = \left(\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x}\right)\cos\theta + \left(\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x}\right)\sin\theta;$$

d'après la définition de P et de Q, les coefficients de $\cos\theta$ et de $\sin\theta$ dans la relation précédente sont nuls. La congruence est donc une congruence de normales quel que soit θ [1]; on a alors

$$\lambda = -\text{partie réelle de}\left\{e^{-i\theta}\int f(z)\,dz\right\},$$

ou encore en introduisant la variable z_0 conjuguée de z :

$$\lambda = -\frac{1}{2}\left\{e^{i\theta}\int f(z_0)\,dz_0 + e^{-i\theta}\int f(z)\,dz\right\};$$

ainsi donc, dans le complexe considéré, nous connaissons une famille de congruences de normales correspondant aux diverses valeurs constantes du paramètre θ. Le problème de Transon est donc résoluble d'après le théorème de M. Darboux.

[5] Étant donné un complexe quelconque, il semble que, puisque l'on ne connaît aucune surface trajectoire de ce complexe, le théorème de M. Darboux doive être

---

(1) Nous avons établi non seulement la propriété énoncée, mais encore une propriété réciproque. Si l'on considère dans les expressions de p_1, p_2 et p_3 les fonctions $\mathrm{P}(x, y)$ et $\mathrm{Q}(x, y)$ comme étant quelconques, on voit que la condition nécessaire et suffisante pour que la congruence soit de normales, pour toutes valeurs de θ, est que P et Q soient deux fonctions synectiques associées. Le théorème ci-dessus constitue donc une interprétation géométrique des relations entre les fonctions synectiques et la propriété énoncée est caractéristique de ces fonctions.

inapplicable. Je vais cependant mettre en évidence des conséquences fondamentales de ce théorème, relativement au complexe le plus général.

Soit l'équation de ce complexe

$$C(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6) = 0,$$

équation dans laquelle p_1, p_2, p_3 représentent les coordonnées plückériennes de direction et p_4, p_5, p_6 les autres coordonnées, qui sont les moments d'un vecteur par rapport aux axes. L'équation, en coordonnées cartésiennes rectangulaires, des surfaces trajectoires du complexe est l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$C(p, q, -1, y + qz, -x - pz, py - qx) = 0.$$

Lie remarque que cette équation est invariante dans la dilatation infinitésimale; les formules relatives à cette dernière transformation étant

$$X = x + \frac{ap}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \ Y = y + \frac{aq}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \ Z = z - \frac{a}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \ P = p, \ Q = q,$$

de l'aspect même de toutes ces relations, il résulte que les calculs seront généralement compliqués, dans le système des coordonnées ordinaires : ils ne pourront être simples que pour des complexes tout particuliers.

Pour faire d'une part une étude approfondie du problème de Transon, dans des cas très généraux, et pour avoir d'autre part les calculs les plus simples lorsqu'il s'agit de résoudre ce problème pour un complexe déterminé, il est tout naturel de profiter de la connaissance de la transformation infinitésimale dont jouissent les équations afin de les simplifier. L'idée qui s'offre immédiatement est de faire disparaître la fonction inconnue : à cet effet, il n'y a qu'à prendre pour fonction la distance d'un point fixe au plan tangent de la surface trajectoire générale.

Dans ces conditions, l'équation du problème est plus simple; mais elle est encore susceptible d'une simplification plus grande. Dans les questions qui nous occupent, les six coordonnées plückériennes d'une droite se séparent en deux catégories distinctes : les coordonnées de direction d'une part, les coordonnées-moments d'autre part; en choisissant donc pour variables les deux paramètres qui fixent la direction d'une droite dans l'espace, et pour fonction inconnue la distance d'un point fixe au plan tangent, l'équation des trajectoires ne contiendra pas sous forme explicite cette fonction inconnue et ses dérivées ne figureront que dans les termes provenant de p_4, de p_5 et de p_6.

Et cette simplification a d'autant plus d'intérêt que les équations les plus compliquées de complexes, que l'on rencontre dans les diverses recherches qui ont été faites en Géométrie réglée, sont généralement très simples lorsque, faisant abstraction totale de p_1, p_2, p_3, on ne considère que p_4, p_5, p_6; on rencontre fréquemment des complexes d'équation homogène par rapport à p_4, p_5, p_6, pour lesquels le problème de Transon sera réductible à une équation différentielle (chapitre III); des complexes linéaires par rapport à p_4, p_5, p_6, pour lesquels on aura à intégrer une équation linéaire (complexes *semi-linéaires* du chapitre IV), et des complexes du second degré en p_4, p_5, p_6 (complexes *semi-quadratiques* du chapitre V).

Tout ce qui précède s'applique à n'importe quel système de variables fixant la direction d'une droite dans l'espace. Les surfaces trajectoires sont ainsi représentées tangentiellement. Le seul inconvénient est qu'une représentation tangentielle laisse échapper les trajectoires développables, ce qui est compensé par l'obtention des courbes dont toutes les normales appartiennent au complexe [1]. Dans ce Mémoire, j'utiliserai, suivant les cas, l'un ou l'autre de deux systèmes de coordonnées tangentielles. Le chapitre suivant est consacré à la mise en équation du problème de Transon, dans l'un ou l'autre cas.

CHAPITRE II.

Formules générales.

Expressions des coordonnées plückériennes de la normale d'une surface quelconque en coordonnées tangentielles symétriques. — Exemple d'application au problème de Transon : complexes $P_1p_4 + P_2p_5 + P_3p_6 = 0$; cas particuliers. — Expressions des coordonnées plückériennes de la normale en coordonnées tangentielles géographiques. — Application au complexe des droites équidistantes de deux points.

[**6**] Je rappellerai tout d'abord des formules fondamentales concernant les normales d'une surface considérée comme enveloppe du plan

$$x(X - iY) + y(X + iY) + (xy - 1)Z = z(1 + xy); \tag{1}$$

dans cette équation, X, Y, Z représentent les coordonnées du point de contact M, par rapport à des axes rectangulaires; x, y désignent des paramètres des génératrices imaginaires de la sphère, dans la représentation sphérique de Gauss; z enfin est la distance de l'origine O des coordonnées au plan tangent (1). Dérivant partiellement

---

[1] Deux exemples suffisent à mettre en évidence l'existence possible de trajectoires développables ou de courbes-trajectoires : le complexe des droites équidistantes de deux points donnés, considéré au paragraphe 3, admet pour trajectoires les cylindres d'axes situés dans Oxy et passant par O; le complexe tétraédral, du paragraphe 2, admet pour trajectoires les trois courbes focales du système homofocal.

Les complexes admettant des développables pour trajectoires particulières seront étudiés ultérieurement (aux paragraphes 12 et sq.).

en x et y l'équation (1) et désignant par p et q les dérivées partielles de cette fonction z de x et de y, on obtient deux équations qui, associées à l'équation (1), donnent les coordonnées du point de contact M de ce plan :

$$(2)\qquad \begin{cases} X + iY = -px^2 + q + \dfrac{2x}{1+xy}z, \\ X - iY = -qy^2 + p + \dfrac{2y}{1+xy}z, \\ Z = px + qy + \dfrac{xy-1}{xy+1}z; \end{cases}$$

de ces formules résultent l'expression

$$\overline{OM}^2 = z^2 + pq(1+xy)^2$$

du carré de la distance OM et celle

$$(3)\qquad \overline{OP}^2 = pq(1+xy)^2$$

du carré de la distance OP de l'origine O à la normale en M.

Cette normale sera définie par ses six coordonnées plückériennes $p_1, \ldots, p_6$; les trois premières p_1, p_2, p_3 seront les cosinus directeurs :

$$(4)\qquad p_1 = \frac{x+y}{xy+1}, \quad p_2 = i\frac{y-x}{xy+1}, \quad p_3 = \frac{xy-1}{xy+1};$$

arrêtons-nous un instant sur des formules, qui sont des cas particuliers des formules dont dépend le problème général de la représentation sphérique des surfaces; on obtient les relations suivantes entre x, y et les dérivées du premier ordre de p_1, p_2, p_3 :

$$(5)\qquad \begin{cases} (1+xy)^2\dfrac{\partial p_1}{\partial x} = 1 - y^2, & (1+xy)^2\dfrac{\partial p_2}{\partial x} = -i(1+y^2), & (1+xy)^2\dfrac{\partial p_3}{\partial x} = 2y, \\ (1+xy)^2\dfrac{\partial p_1}{\partial y} = 1 - x^2, & (1+xy)^2\dfrac{\partial p_2}{\partial y} = i(1+x^2), & (1+xy)^2\dfrac{\partial p_3}{\partial y} = 2x; \end{cases}$$

$$(6)\qquad \mathop{\mathrm{S}}_1^3 \left(\frac{\partial p_k}{\partial x}\right)^2 = 0, \quad (1+xy)^2 \mathop{\mathrm{S}}_1^3 \frac{\partial p_k}{\partial x}\frac{\partial p_k}{\partial y} = 2, \quad \mathop{\mathrm{S}}_1^3 \left(\frac{\partial p_k}{\partial y}\right)^2 = 0;$$

$$(7)\qquad \frac{D(p_2, p_3)}{D(x, y)} = \frac{-2ip_1}{(1+xy)^2}, \quad \frac{D(p_3, p_1)}{D(x, y)} = -\frac{2ip_2}{(1+xy)^2}, \quad \frac{D(p_1, p_2)}{D(x, y)} = \frac{-2ip_3}{(1+xy)^2};$$

$$(8)\qquad p_3\frac{\partial p_2}{\partial x} - p_2\frac{\partial p_3}{\partial x} = i\frac{\partial p_1}{\partial x}, \quad p_3\frac{\partial p_2}{\partial y} - p_2\frac{\partial p_3}{\partial y} = -i\frac{\partial p_1}{\partial y},$$

et les formules analogues qui s'en déduisent par permutation circulaire des indices 1, 2, 3.

Nous utiliserons fréquemment aussi les relations suivantes entre les dérivées des deux premiers ordres :

$$(9)\qquad \frac{\partial^2 p_k}{\partial x^2} = -\frac{2y}{1+xy}\frac{\partial p_k}{\partial x}, \qquad \frac{\partial^2 p_k}{\partial y^2} = -\frac{2x}{1+xy}\frac{\partial p_k}{\partial y}, \qquad \frac{\partial^2 p_k}{\partial x \partial y} = -\frac{2p_k}{(1+xy)^2};$$

k désigne l'un quelconque des trois indices 1, 2, 3.

Les trois autres coordonnées plückériennes, les moments p_4, p_5, p_6, par rapport aux axes, des segments unitaires portés par les normales, se présentent alors sous les formes suivantes :

$$(10)\qquad \begin{cases} p_4 = \dfrac{i}{2}[(1-x^2)p-(1-y^2)q], \\ p_5 = -\dfrac{1}{2}[(1+x^2)p+(1+y^2)q], \\ p_6 = i\,[px-qy]; \end{cases}$$

tenant compte des formules (5), nous mettrons ces dernières formules sous la forme symétrique

$$(11)\qquad \{p_4, p_5, p_6\} = \frac{i}{2}(1+xy)^2 \left\{ \frac{D(z, p_1)}{D(x, y)}, \frac{D(z, p_2)}{D(x, y)}, \frac{D(z, p_3)}{D(x, y)} \right\};$$

la présence remarquable des jacobiens s'explique par la considération des surfaces de révolution autour des axes coordonnés.

A côté de ces six coordonnées plückériennes de la normale, nous introduirons quelquefois les coordonnées ordinaires x_0, y_0, z_0 du point P projection orthogonale de l'origine O sur cette normale; x_0, y_0, z_0 ont pour expressions

$$(12)\qquad x_0 = \frac{1}{2}(1+xy)^2\left(p\frac{\partial p_1}{\partial y} + q\frac{\partial p_1}{\partial x}\right),$$

et les deux autres qui s'en déduisent par permutations circulaires.

[**7**] Avant d'aller plus loin, et afin de mettre en évidence dès maintenant l'élégance des équations obtenues par l'introduction des coordonnées précédentes, que je désignerai sous la dénomination de *coordonnées symétriques*, je résoudrai le problème de Transon pour la classe suivante de complexes.

Soit un complexe dont l'équation est linéaire et homogène en p_4, p_5, p_6, les coefficients P_1 de p_4, P_2 de p_5, P_3 de p_6 étant trois fonctions homogènes et de même degré de $\sqrt{p_1^2+p_2^2+p_3^2}$ et de chacune des trois coordonnées respectives p_1, p_2, p_3; en d'autres termes, cette équation se présente sous la forme

$$(13)\qquad P_1 p_4 + P_2 p_5 + P_3 p_6 = 0,$$

dans laquelle, en tenant compte de l'identité $p_1^2+p_2^2+p_3^2=1$, P_1, P_2, P_3 sont trois fonctions données respectivement de p_1, de p_2 et de p_3.

Il résulte immédiatement des relations (11) que l'équation aux dérivées partielles dont dépendent les surfaces dont les normales appartiennent à un tel complexe (13) est une équation linéaire susceptible d'être mise sous la forme

$$P_1 \frac{D(z, p_1)}{D(x, y)} + P_2 \frac{D(z, p_2)}{D(x, y)} + P_3 \frac{D(z, p_3)}{D(x, y)} = 0$$

ou

$$\frac{D(z, V)}{D(x, y)} = 0,$$

en posant

$$V = \int P_1 dp_1 + \int P_2 dp_2 + \int P_3 dp_3;$$

toutes les surfaces cherchées sont données, par conséquent, par la formule

$$f(z) = \int P_1 dp_1 + \int P_2 dp_2 + \int P_3 dp_3,$$

dans laquelle $f(z)$ est une fonction arbitraire d'intégration. Par un choix convenable de notations, c'est-à-dire en prenant pour P_1, P_2, P_3 trois dérivées de fonctions connues, les quadratures disparaîtront dans le résultat précédent.

Il s'agit là d'une classe importante de complexes; je citerai les exemples suivants :

I. Le complexe tétraédral

$$A p_1 p_4 + B p_2 p_5 + C p_3 p_6 = 0,$$

engendré par les normales aux quadriques

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = \text{const}.$$

et à leurs quadriques homofocales.

II. Le complexe du troisième ordre

$$(B - C)\frac{p_4}{p_1} + (C - A)\frac{p_5}{p_2} + (A - B)\frac{p_6}{p_3} = 0;$$

ce complexe est polaire réciproque par rapport à une sphère de centre O d'un complexe sur lequel je reviendrai et qui est une dégénérescence d'un complexe qui fut étudié par M. G. Humbert (§ 11, III).

III. Le complexe du sixième ordre

$$\sqrt{ap_1} \cdot p_4 + \sqrt{bp_2} \cdot p_5 + \sqrt{cp_3} \cdot p_6 = 0,$$

constitué par les tangentes aux cubiques qui passent par les points à l'infini sur les axes coordonnés et par deux points confondus avec O (c'est-à-dire qui passent par O avec une tangente en ce point déterminée et de coefficients directeurs a, b, c). C'est là un cas particulier du complexe des tangentes aux cubiques gauches qui passent par cinq points donnés dont on doit une étude intéressante à M. G. Kœnigs [1].

IV. En quatrième et dernier lieu, je citerai le complexe, du paragraphe 3,

$$p_2 p_4 - p_1 p_5 = 0$$

des droites équidistantes de deux points, signalé par Sturm [2] et dont j'ai fait ailleurs une étude [3].

[8] De même qu'en Mécanique rationnelle on accorde la préférence sur des coordonnées symétriques à des coordonnées qui conduisent à des formules non symétriques, de même dans la question actuelle, et pour les mêmes raisons qu'en Mécanique, nous introduirons souvent un système qui sera appelé *système des coordonnées géographiques*. L'emploi de ces coordonnées géographiques est particulièrement commode lorsqu'il existe une direction de droite privilégiée, pour les complexes de révolution par exemple. Dans d'autres cas, l'introduction de ces mêmes coordonnées conduit à des équations aux dérivées partielles à variables séparées.

Les surfaces trajectoires orthogonales des congruences de normales du complexe considéré sont définies comme enveloppes du plan

$$X \cos\varphi \cos\psi + Y \cos\varphi \sin\psi + Z \sin\varphi = \varpi;$$

les coordonnées du point de contact de ce plan ont pour expressions en fonction de ϖ et de ses dérivées partielles

$$p = \frac{\partial\varpi}{\partial\varphi}, \qquad q = \frac{\partial\varpi}{\partial\psi},$$

$$\begin{aligned} X &= \varpi \cos\varphi \cos\psi - p \sin\varphi \cos\psi - q \frac{\sin\psi}{\cos\varphi}, \\ Y &= \varpi \cos\varphi \sin\psi - p \sin\varphi \sin\psi + q \frac{\cos\psi}{\cos\varphi}, \\ Z &= \varpi \sin\varphi + p \cos\varphi; \end{aligned}$$

par conséquent, on pourra prendre pour coordonnées plückériennes de la normale à

---

(1) *Sur les cubiques gauches passant par cinq points donnés* (Nouvelles Annales de mathématiques, 1883, p. 301, et 1884, p. 47). Le même complexe des tangentes aux cubiques constituant une *gerbe de Reye* a été étudié depuis par M. Stuyvaert dans un Mémoire : *Deuxième congruence linéaire de cubiques gauches* (Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, 1908, p. 64).

(2) *Die Gebilde I und II Grades der Liniengeometrie*, t. I, p. 364.

(3) *Conséquences de deux théorèmes de M. Bricard concernant les tangentes communes à deux quadriques* (Nouvelles Annales de mathématiques, 1910, p. 31).

cette surface au point défini par les coordonnées géographiques φ et ψ de son image sphérique, dans la représentation de Gauss, les six expressions suivantes :

$$(14)\quad \left\{\begin{array}{l} p_1 = \cos\varphi\cos\psi, \\ p_2 = \cos\varphi\sin\psi, \\ p_3 = \sin\varphi, \\ p_4 = p\sin\psi - q\cos\psi\,\mathrm{tg}\,\varphi, \\ p_5 = -p\cos\psi - q\sin\psi\,\mathrm{tg}\,\varphi, \\ p_6 = q. \end{array}\right.$$

Comme exemple, je citerai celui du complexe du IV° du paragraphe précédent; on a

$$p_2p_4 - p_1p_5 \equiv p \times \cos\varphi,$$

et, par suite, la trajectoire générale du complexe des droites équidistantes de deux points est

$$\varpi = \Psi,$$

Ψ désignant une fonction arbitraire de ψ.

CHAPITRE III.

Complexes possédant une transformation infinitésimale connue.

Intérêt présenté par la considération des complexes invariants dans une transformation infinitésimale connue. — Complexes invariants dans l'homothétie infinitésimale de pôle fixe; réduction du problème de Transon à l'intégration d'une équation différentielle du premier ordre. Équation de Monge-Pfaff associée à un complexe invariant dans l'homothétie; exemples. Interprétation de l'équation différentielle; complexes dont des trajectoires sont des surfaces développables; la condition, formée par Lie, d'invariance, dans la dilatation infinitésimale, d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre est équivalente à la présence d'une développable isotrope parmi les trajectoires; détermination des trajectoires développables et résolution complète du problème de Transon pour le complexe; exemples. — Complexes de révolution; réduction du problème de Transon à une quadrature; exemples : complexe des sécantes harmoniques de deux sphères. — Complexes de translation; réduction du problème à une quadrature; complexe des droites sur lesquelles deux plans rectangulaires interceptent un segment de longueur constante; complexes dont toutes les trajectoires sont des surfaces moulures.

[9] Du point de vue de Lie, l'équation qui détermine les surfaces dont les normales appartiennent à un complexe donné est une équation qui possède la dilatation pour transformation infinitésimale. Si donc on cherche à résoudre le problème de

Transon pour un complexe possédant une transformation infinitésimale connue, l'équation aux dérivées partielles sera une équation à deux transformations infinitésimales, réductible, par conséquent et en vertu d'un théorème de Lie (1), soit à l'intégration d'une équation différentielle du premier ordre, soit à une quadrature (2).

[**10**] COMPLEXES POSSÉDANT UNE HOMOTHÉTIE DE PÔLE DONNÉ POUR TRANSFORMATION INFINITÉSIMALE. — Je m'occuperai, en premier lieu, du cas où la transformation infinitésimale est une homothétie de pôle donné, mais de puissance arbitraire.

Soit O le pôle commun aux diverses homothéties; tout complexe possédant l'homothétie pour transformation infinitésimale est caractérisé par la propriété d'avoir une *équation séparément homogène en les deux systèmes de variables* p_1, p_2, p_3 *d'une part et* p_4, p_5, p_6 *d'autre part.*

Dans le cas où l'équation du complexe est homogène séparément par rapport aux trois coordonnées de direction et par rapport aux trois coordonnées-moments, l'équation aux dérivées partielles des surfaces dont les normales appartiennent au complexe est une équation homogène, qu'il s'agisse des coordonnées symétriques ou des coordonnées géographiques. Cette équation se présente sous la forme

$$F\left(-\frac{p}{q}, x, y\right) = 0;$$

son intégration est équivalente à celle de l'équation différentielle

$$F\left(\frac{dy}{dx}, x, y\right) = 0;$$

c désignant la constante d'intégration, soit

$$\varphi(x, y, c) = 0$$

l'intégrale générale de l'équation différentielle; l'intégrale générale de l'équation aux dérivées partielles est

$$\varphi(x, y, Z) = 0,$$

Z désignant une fonction arbitraire de z.

(1) *Geometrie der Berührungstransformationen*, t. I, pp. 622 et 633.

(2) Il en est de même des complexes possédant plusieurs transformations distinctes. C'est ainsi que les complexes signalés par Sophus Lie (p. 623 de l'ouvrage cité) et dont l'équation est

$$p_6 = p_3 f\left(\frac{p_1^2 + p_2^2}{p_3^2}\right),$$

sont invariants dans la rotation infinitésimale autour de Oz et dans la translation infinitésimale parallèle au même axe. Un cas particulier remarquable est celui du complexe linéaire. Un autre cas est celui qui est signalé au paragraphe 35 de ce Mémoire et qui conduit à des surfaces étudiées par M. Darboux et par M. J. Haag.

Dans le cas d'un complexe homogène en p_1, p_2, p_3 d'une part, et en p_4, p_5, p_6 d'autre part, le problème de Transon est donc réductible à une équation différentielle du premier ordre; réciproquement à une équation différentielle du premier ordre quelconque correspond un complexe bien déterminé pour lequel le problème de Transon est réductible à l'intégration de l'équation différentielle.

Je vais transformer ce résultat et obtenir un théorème en vertu duquel on pourra, l'équation du complexe étant donnée, écrire immédiatement l'équation différentielle, et inversement, l'équation différentielle étant donnée, on pourra former immédiatement l'équation du complexe.

Les équations des caractéristiques de l'équation aux dérivées partielles présentent actuellement la combinaison intégrable

$$dz = 0;$$

en vertu de cette équation, on peut poser

$$dx = q\,dt, \qquad dy = -p\,dt,$$

et, par suite, on a

$$dp_1 = \frac{\partial p_1}{\partial x} dx + \frac{\partial p_1}{\partial y} dy = \left(q \frac{\partial p_1}{\partial x} - p \frac{\partial p_1}{\partial y} \right) dt;$$

en tenant compte des relations (11), les différentielles dp_1, dp_2, dp_3 sont donc proportionnelles respectivement à p_4, p_5, p_6; l'équation du complexe étant

$$f(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6) = 0,$$

l'équation différentielle à intégrer est par conséquent

$$f(p_1, p_2, p_3, dp_1, dp_2, dp_3) = 0.$$

D'où le théorème : *Le problème de Transon pour un complexe séparément homogène par rapport aux coordonnées de direction et aux coordonnées-moments est équivalent à la détermination des courbes qui, sur la sphère*

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1,$$

sont intégrales d'une équation de Monge.

Réciproquement, *si, étant donné une équation de Monge, on connaît les courbes intégrales de cette équation sur une sphère, on peut faire correspondre à cette équation de Monge un complexe pour lequel le problème de Transon est résolu.*

Lie [1], par la considération des courbes dont les tangentes appartiennent à un complexe donné, a mis en évidence les relations entre les équations de Monge et les complexes de droites. A tout complexe de droites, Lie a fait correspondre une équation

---

[1] *Geometrie der Berührungstransformationen*, t. I, p. 248.

de Monge; mais à l'équation de Monge la plus générale ne correspond pas de cette façon un complexe.

Ici, au contraire, à chaque équation de Monge, je fais correspondre un complexe, mais ce complexe est un complexe qui offre une particularité.

[**11**] Le théorème précédent étant établi, je vais indiquer des exemples destinés à l'illustrer; je rappelle tout d'abord la règle de formation de l'équation de Monge : dans l'équation du complexe, on substitue respectivement dp_1, dp_2, dp_3 à p_4, p_5, p_6.

I. A l'équation de Pfaff générale correspond un complexe dont l'équation est linéaire et homogène par rapport à p_4, p_5, p_6. On peut retrouver, à l'aide du théorème précédent, le résultat obtenu plus haut (§ 7) relativement aux complexes

$$P_1(p_1)\cdot p_4 + P_2(p_2)\cdot p_5 + P_3(p_3)\cdot p_6 = 0.$$

II. Soit le complexe du quatrième ordre

$$z_0 = ap_6,$$

c'est-à-dire

$$(p_1p_5 - p_2p_4)^2 = a^2(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)p_6^2;$$

l'équation de Monge correspondante se réduit à l'équation de Pfaff

$$x\,dy - y\,dx = a\,dz$$

attachée par Lie au complexe linéaire; on est ainsi conduit à déterminer les courbes qui, sur la sphère, sont les courbes d'un complexe linéaire. On pose, avec M. Appell,

$$x = \sqrt{a\varphi'}\,.\cos\theta, \qquad y = \sqrt{a\varphi'}\,.\sin\theta, \qquad z = \varphi,$$

φ étant une fonction inconnue de θ, définie par l'équation

$$a\varphi' + \varphi^2 = 1;$$

d'où l'on déduit

$$\varphi = th\,\frac{\theta - \theta_0}{a};$$

revenant au problème de Transon, on doit éliminer θ entre

$$p_1 \pm ip_2 = \frac{e^{\pm i\theta}}{ch\,\dfrac{\theta-\theta_0}{a}}, \qquad p_3 = th\,\frac{\theta - \theta_0}{a};$$

Π désignant une fonction arbitraire de ϖ, on a donc

$$\Pi(\varpi) = \psi + a\,\mathrm{Log}\left[\mathrm{tang}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right].$$

Dans le cas particulier $a = 1$, ces surfaces dérivent de l'alysséide

$$\varpi_1 = \psi + \mathrm{Log}\left[\mathrm{tang}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right],$$

par la transformation géométrique simple

$$\varpi_1 = \text{fonction arbitraire de } \varpi.$$

III. Le problème précédent eût pu être traité directement sans avoir recours au théorème général ; il eût suffi d'intégrer l'équation

$$\cos\varphi \times p - aq = 0.$$

Mais voici un exemple, non moins intéressant, qui va me permettre de considérer une équation d'Euler.

Les normales aux quadriques

$$\frac{X^2}{(b+\sigma)(c+\sigma)} + \frac{Y^2}{(c+\sigma)(a+\sigma)} + \frac{Z^2}{(a+\sigma)(b+\sigma)} - 1 = 0,$$

engendrent un complexe du troisième ordre qui fut étudié par M. G. Humbert (1) ; l'équation de ce complexe est

$$(b-c)p_1p_5p_6 + (c-a)p_2p_6p_4 + (a-b)p_3p_4p_5 = (a-b)(b-c)(c-a)p_1p_2p_3 ;$$

le problème de Transon pour ce complexe est immédiatement résolu en vertu du théorème de M. Darboux.

Je considère le complexe

$$(b-c)p_1p_5p_6 + (c-a)p_2p_6p_4 + (a-b)p_3p_4p_5 = 0,$$

dégénéré du précédent et qui correspond aux cônes homocycliques

$$\frac{X^2}{(b+\sigma)(c+\sigma)} + \frac{Y^2}{(c+\sigma)(a+\sigma)} + \frac{Z^2}{(a+\sigma)(b+\sigma)} = 0 ;$$

ce complexe est celui des génératrices des quadriques homothétiques aux quadriques d'un faisceau homofocal.

L'équation de ce complexe est homogène en p_4, p_5, p_6 ; le problème de Transon pour ce complexe est donc équivalent à l'intégration, sur la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, de l'équation de Monge

$$(b-c)x\,dy\,dz + (c-a)y\,dz\,dx + (a-b)z\,dx\,dy = 0,$$

c'est-à-dire de l'équation de Monge que Lie (2) associe au complexe tétraédral d'équation

$$ap_1p_4 + bp_2p_5 + cp_3p_6 = 0.$$

---

(1) *Sur les normales aux quadriques* (Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, t. CXI, 22 décembre 1890, p. 963).

(2) *Geometrie der Berührungstransformationen*, t. I, p. 318.

Or, il résulte des considérations de Lie concernant les courbes tétraédrales, que les courbes qui, sur la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

appartiennent au complexe tétraédral, sont des coniques sphériques ; l'équation générale de ces coniques sphériques peut être mise sous la forme

$$\frac{x^2}{a+\sigma} + \frac{y^2}{b+\sigma} + \frac{z^2}{c+\sigma} = 0,$$

σ désignant un paramètre variable. De la forme même de leur équation, il résulte que ces coniques sphériques sont homofocales.

D'autre part, l'équation du complexe du troisième ordre étant mise sous la forme

$$ap_4x_0 + bp_5y_0 + cp_6z_0 = 0,$$

il résulte des formules (11) et (12) que l'équation aux dérivées partielles à intégrer est

$$\sum a\left(\frac{\partial p_1}{\partial y}\right)^2 . p^2 = \sum a\left(\frac{\partial p_1}{\partial x}\right)^2 . q^2;$$

en utilisant alors les expressions (5) et en posant

$$\mathrm{R}(t) = t^4 - 2\frac{a+b-2c}{a-b}t^2 + 1,$$

on est conduit à l'équation différentielle d'Euler :

$$\frac{dx}{\sqrt{\mathrm{R}(x)}} = \frac{dy}{\sqrt{\mathrm{R}(y)}}.$$

L'équation différentielle d'Euler dans le cas où le polynôme du quatrième degré est simultanément réciproque et bicarré s'interprète donc de deux façons à l'aide de la Géométrie réglée : c'est d'elle que dépendent les surfaces dont les normales appartiennent au complexe, dégénéré du complexe de M. Humbert, constitué par les génératrices des quadriques homothétiques aux quadriques homofocales. C'est de cette même équation d'Euler que dépendent les coniques sphériques tracées sur la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

et dont les tangentes appartiennent au complexe tétraédral

$$ap_1p_4 + bp_2p_5 + cp_3p_6 = 0.$$

La forme de l'intégrale de cette équation d'Euler qui se déduit des considérations précédentes rentre dans celle que donnèrent Stieltjes et M. Kœnigs.

IV. Comme dernier exemple, que j'emprunte à Monge [1], je considère le complexe spécial attaché à un cône du second degré. L'équation d'un tel complexe s'obtient en annulant une forme quadratique, à coefficients constants, de p_4, p_5, p_6. La résolution du problème de Transon pour le complexe spécial attaché à un cône du second degré est donc équivalente à la détermination des courbes de la sphère dont les tangentes sont parallèles aux génératrices d'un cône du second degré.

Un tel problème, qui est équivalent à la détermination des hélices des quadriques, ou encore des lignes de longueur nulle des quadriques, est réductible aux fonctions elliptiques.

[**12**] Après avoir traité ces exemples, je reviens sur l'interprétation géométrique du théorème du paragraphe 10. Lorsqu'on a à résoudre le problème de Transon pour un complexe d'équation homogène par rapport aux moments, on réduit l'intégration de l'équation aux dérivées partielles à l'intégration d'une équation différentielle. Cette équation détermine les *courbes de contact sur la sphère des développables circonscrites à la sphère et aux diverses surfaces dont les normales appartiennent au complexe : c'est une propriété caractéristique des complexes considérés que les courbes de cette nature ne dépendent que d'un paramètre variable.*

Pour le complexe

$$z_0 = ap_6,$$

ces courbes constituent une famille de loxodromies; pour le complexe dégénéré du complexe de M. Humbert, ces courbes sont des coniques sphériques homofocales; pour le complexe tétraédral, ce sont des coniques sphériques admettant mêmes arcs cycliques.

La remarque précédente m'amène à considérer les complexes qui contiennent des congruences de normales à des surfaces développables parallèles. Je vais montrer que, *pour un complexe d'équation homogène par rapport aux trois moments, il est possible de déterminer une infinité de développables, circonscrites à une sphère de centre* O, *et dont les normales appartiennent au complexe.*

[**13**] L'introduction des coordonnées tangentielles, dans la résolution du problème de Transon, offre de grands avantages; elle permet d'obtenir les courbes dont les normales appartiennent à un complexe, mais elle exclut les développables dont les normales pourraient appartenir au complexe. Il y a donc lieu d'examiner s'il existe des complexes contenant des congruences de normales à des développables.

Plaçons-nous au point de vue de Sophus Lie [2]. Un complexe étant donné, l'équa-

---

(1) *Applications de l'analyse à la Géométrie.*

(2) *Geometrie der Berührungstransformationen*, t. I, p. 675.

tion, en coordonnées rectangulaires ordinaires, des surfaces dont les normales appartiennent à ce complexe est réductible à la forme

$$F(p, q, x + pz, y + qz) = 0;$$

cette équation est l'équation générale du premier ordre qui admet la dilatation pour transformation infinitésimale et elle est caractérisée par la condition

$$p\frac{\partial F}{\partial x} + q\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

Cette condition donnée, par Sophus Lie, n'est autre que celle que l'on obtient en exprimant la compatibilité de l'équation

$$F(p, q, x, y, z) = 0$$

avec l'équation des développables isotropes

$$1 + p^2 + q^2 = 0.$$

Il résulte donc de cette remarque et des recherches de Lie, que *l'équation du problème de Transon, pour tout complexe, est l'équation du premier ordre la plus générale qui possède une intégrale développable isotrope.*

Les droites isotropes d'un complexe constituent une congruence particulière; en vertu du théorème précédent, on a le droit de considérer cette congruence de droites isotropes comme une congruence de normales appartenant au complexe.

Excluant cette solution particulière, considérons une équation du premier ordre

$$f(p, q, x, y, z) = 0$$

donnée et une équation

$$\varphi(p, q) = 0,$$

φ étant une fonction inconnue de p et de q; écrivons la condition de compatibilité entre $f = 0$ et $\varphi = 0$:

$$[f, \varphi] = \frac{\partial \varphi}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial q}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\left(p\frac{\partial \varphi}{\partial p} + q\frac{\partial \varphi}{\partial q}\right) = 0;$$

pour une équation admettant la dilatation pour transformation infinitésimale, cette condition devient

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial p} + p^2\frac{\partial \varphi}{\partial p} + pq\frac{\partial \varphi}{\partial q}\right)\frac{\partial F}{\partial x} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q} + q^2\frac{\partial \varphi}{\partial q} + pq\frac{\partial \varphi}{\partial p}\right)\frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Elle exprime qu'en vertu de $F = 0$, le rapport des dérivées de F en x et y ne contient ni x, ni y, ni z.

Cette condition est nécessaire; elle est aussi suffisante, car, si elle est remplie, le rapport des dérivées de φ en p et q est une certaine fonction de p et q; la détermination de cette fonction inconnue φ de p et de q est alors équivalente à l'intégration d'une équation différentielle du premier ordre. Il existe, par suite, une famille à un paramètre de développables non parallèles dont les normales appartiennent au complexe.

En résumé, *étant donné un complexe quelconque de droites, il ne contient pas de congruence de normales à des surfaces développables non isotropes ou bien il en contient une infinité dependant d'un paramètre.*

Il résulte de ce qui précède que le complexe étant donné par son équation, pour reconnaître s'il contient ou non des congruences de normales à des développables, on doit procéder d'après la règle suivante : on élimine de l'équation la coordonnée plückérienne p_6, à l'aide de la relation identique entre les six coordonnées plückériennes; soit alors

$$C(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = 0$$

l'équation obtenue. Pour que le complexe contienne des congruences de normales à des surfaces développables non isotropes, il faut et il suffit que le rapport des dérivées de C en p_4 et en p_5 ne soit fonction ni de p_4 ni de p_5, en vertu de $C = 0$.

Il en est ainsi, en particulier, pour les complexes dont l'équation est homogène en p_4, p_5, p_6; pour un tel complexe, l'équation est réductible, théoriquement du moins, à l'équation

$$\frac{p_4}{p_5} = \text{fonction de } (p_1, p_2, p_3).$$

[**14**] Étant donné un complexe que l'on sait posséder des congruences de normales à des surfaces développables, le problème de Transon pour ce complexe est résoluble *a priori* en vertu du théorème fondamental de M. Darboux et puisque ces congruences de normales à des développables sont en nombre infini. D'une façon précise, le problème de Transon pour un complexe de cette nature est réductible à la détermination de ces congruences, laquelle dépend d'une certaine équation différentielle du premier ordre. Quant à celle-ci, on peut la former comme plus haut, à moins que l'on ne préfère procéder de la façon suivante. On peut se proposer de chercher les arêtes de rebroussement des développables qui sont des solutions particulières du problème de Transon. A cet effet, on écrit que les parallèles à la binormale émanant des divers points de la tangente à la courbe cherchée appartiennent au complexe.

Supposons que le paramètre choisi pour exprimer les coordonnées d'un point M de la courbe soit l'arc s compté à partir d'une certaine origine. Les coordonnées plückériennes d'une telle droite sont proportionnelles aux six quantités

$$\begin{aligned} \rho p_1 &= y'z'' - z'x'', & \rho p_4 &= Ax' - (B + \lambda)x'', \\ \rho p_2 &= z'x'' - x'z'', & \rho p_5 &= Ay' - (B + \lambda)y'', \\ \rho p_3 &= x'y'' - y'x'', & \rho p_6 &= Az' - (B + \lambda)z'', \end{aligned}$$

λ désignant le paramètre qui fixe le point de la tangente, et en posant

$$A = xx'' + yy'' + zz'', \qquad B = xx' + yy' + zz'.$$

En portant ces six expressions dans l'équation du complexe, celle-ci doit être vérifiée quel que soit $B + \lambda$.

Prenons l'exemple du complexe tétraédral :

$$ap_1p_4 + bp_2p_5 + cp_3p_6 = 0;$$

on obtient deux relations qui doivent être vérifiées toutes deux :

$$A \times \sum ax'(y'z'' - z'y'') = 0, \qquad \sum ax''(y'z'' - z'y'') = 0;$$

la véritable solution est

$$A = 0, \qquad \sum ax''(y'z'' - z'x'') = 0.$$

L'équation $A = 0$ exprime qu'entre le rayon vecteur $OM = r$ et l'arc s il existe la relation

$$r^2 - s^2 = \text{const.},$$

caractéristique des courbes dont les tangentes touchent une sphère de centre O : ces courbes sont des développées particulières de courbes quelconques de la sphère. Tenant compte alors de la seconde relation, on trouve que les courbes sphériques sont les coniques sphériques ayant les mêmes arcs cycliques :

$$aX^2 + bY^2 + cZ^2 = \text{const.}$$

Pour un complexe d'équation homogène en p_4, p_5, p_6, réduite à la forme linéaire

$$Pp_4 + Qp_5 + Rp_6 = 0,$$

on est ainsi conduit à l'intégration, sur la sphère, de l'équation de Pfaff

$$\mathfrak{P}dX + \mathfrak{Q}dY + \mathfrak{R}dZ = 0,$$

où $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ représentent les fonctions d'X, Y, Z obtenues en substituant dans P, Q, R les variables X, Y, Z aux variables p_1, p_2, p_3.

Par l'intégration de cette équation de Pfaff sur la sphère on connaît donc les courbes de contact des développables circonscrites à la sphère et aux diverses surfaces solutions du problème de Transon pour le complexe homogène en p_4, p_5, p_6 ; on connaît donc ces développables elles-mêmes, puisque leurs arêtes de rebroussement sont des développées particulières de ces courbes sphériques et, par l'application du théorème de M. Darboux, on en déduit la solution générale du problème de Transon.

Pour terminer, j'appliquerai ce théorème de M. Darboux au complexe des droites telles que les projections d'un point fixe O soient sur un cône donné de sommet O. Il existe une famille de développables dont les normales appartiennent au complexe : ce sont les cylindres de révolution ayant pour axes les génératrices du cône; pour appliquer le théorème de M. Darboux, on doit considérer une infinité de cylindres non parallèles et prendre leur enveloppe. A cet effet, effectuons une transformation de contact : prenons la podaire de cette enveloppe cherchée par rapport au point O; cette podaire est le lieu des podaires des cylindres, c'est-à-dire une surface cerclée engendrée par un cercle de centre O et dont le plan est tangent au cône supplémentaire du cône donné. La solution générale du problème de Transon est donc antipodaire de la surface transformée apsidale d'une courbe générale du cône donné.

Dans le cas de dégénérescence du cône en un plan passant par O, le complexe est le complexe des droites équidistantes de deux points, déjà considéré au paragraphe 3.

[**15**] Complexes de révolution. — Si la transformation infinitésimale que possède le complexe est une rotation autour d'un axe, Oz par exemple, le complexe est de révolution autour de cet axe. C'est le cas du complexe linéaire.

L'équation d'un complexe de révolution est de la forme

$$F(p_4^2 + p_5^2, p_6^2, p_1^2 + p_2^2, p_3^2) = 0.$$

Soit à résoudre le problème de Transon pour un complexe de révolution. L'introduction des coordonnées géographiques conduit à une équation du premier ordre ne contenant ni la fonction inconnue ϖ, ni la longitude ψ, c'est-à-dire à une équation à variables séparées, intégrable par une quadrature. Ce résultat est une conséquence du théorème de Lie [1] sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre possédant deux transformations infinitésimales indépendantes.

Ainsi donc, en *coordonnées géographiques, l'équation qui résout le problème de Transon pour un complexe de révolution autour de* Oz *est réductible à une quadrature.*

On s'explique ainsi les résultats obtenus par Monge [2] pour le complexe spécial attaché à un cône de révolution, par Lie [3] et M. É. Picard [4] pour le complexe linéaire.

Soit le complexe spécial des tangentes au cône de révolution

$$z^2 = \operatorname{tg}^2 a \,.\, (x^2 + y^2);$$

l'équation du complexe est [5]

$$p_4^2 + p_5^2 = p_6^2 \operatorname{tg}^2 a;$$

---

(1) *Geometrie der Berührungstransformationen*, t. I, p. 622.

(2) Monge, *Applications de l'analyse à la géométrie*, pp. 280-321.

(3) Lie, *Ueber complexe.....*, § 52.

(4) Picard, Thèse sur le complexe linéaire (*Annales de l'École Normale*, 1877, p. 31).

(5) D'après le paragraphe 11 (IV), le problème actuel est équivalent à la détermination, sur une sphère, d'hélices ayant l'axe Oz pour directrice, ou encore à la détermination des lignes de longueur nulle d'un hyperboloïde de révolution.

l'équation aux dérivées partielles, à variables séparées,

$$\frac{p}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 a - \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \pm q$$

admet pour intégrale générale

$$\prod(\varpi) = \psi \pm \int \sqrt{\operatorname{tg}^2 a - \operatorname{tg}^2 \varphi} \, . \, d\varphi.$$

La quadrature disparaît d'ailleurs par un changement de variables : en posant

$$\sin \varphi = \sin a \sin \upsilon,$$

on obtient

$$\int \sqrt{\operatorname{tg}^2 a - \operatorname{tg}^2 \varphi} \, d\varphi = \frac{\upsilon}{\cos a} - \operatorname{arc\,tang} (\cos a \operatorname{tang} \upsilon).$$

Soit de même un complexe linéaire, l'axe central étant pris pour axe des z. De l'équation

$$p_6 + a p_3 = 0,$$

il résulte que l'équation à intégrer est

$$q + a \sin \varphi = 0;$$

son intégrale est

$$\varpi = - a\psi \sin \varphi + \Phi,$$

Φ représentant la fonction arbitraire d'intégration. Cette solution représente les héli-coïdes de Lie et de M. Picard.

[**16**] Comme complexes de révolution remarquables, je citerai :

1° Ceux qui sont constitués par des droites pour lesquelles il existe une relation donnée entre la distance à un point fixe donné et l'angle avec une direction fixe également donnée; l'équation à intégrer est alors de la forme

$$p^2 + \frac{q^2}{\cos^2 \varphi} = F(\varphi),$$

en choisissant le point fixe pour origine et la direction fixe pour axe Oz; les variables se séparant, on en déduit l'intégrale complète

$$\varpi = a\psi + \int \sqrt{F(\varphi) - \frac{a^2}{\cos^2 \varphi}} \, d\varphi + b;$$

2° Les complexes de droites coupant harmoniquement deux quadriques de révolution de même axe (¹). Parmi ceux-ci, je considérerai le complexe des sécantes har-

(¹) Ces complexes appartiennent à une catégorie de complexes du second ordre qui ont donné lieu à divers travaux de Battaglini, d'Aschieri, de Loria et Segre, etc.

moniques de deux sphères. En prenant le plan radical pour plan Oxy et la ligne des centres pour axe Oz, les équations

$$x^2+y^2+z^2-2az-c=0,$$
$$x^2+y^2+z^2-2bz-c=0$$

représenteront les deux sphères et l'équation

$$p_4^2+p_5^2+p_6^2-c(p_1^2+p_2^2+p_3^2)+(a+b)(p_1p_5-p_2p_4)-abp_3^2=0$$

représentera le complexe de leurs sécantes harmoniques. L'équation dont dépend la solution du problème de Transon pour ce complexe est :

$$p^2+\frac{q^2}{\cos^2\varphi}-c-ab\sin^2\varphi-(a+b)p\cos\varphi=0\,;$$

les variables se séparent et, en posant

$$u=\sin\varphi,$$
$$R=A_0u^4+A_1u^2+A_2,$$

avec

$$4A_0=(a-b)^2,$$
$$-2A_1=a^2+b^2+2c,$$
$$A_2=\frac{(a+b)^2}{4}+c-A^2,$$

on a l'intégrale complète suivante qui dépend d'intégrales elliptiques des trois espèces :

$$\varpi=A\psi+\frac{a+b}{2}u+B+(A_0+A_1)\int\frac{du}{\sqrt{R}}$$
$$+A_0\int\frac{u^2\,du}{\sqrt{R}}+(A_0+A_1+A_2)\int\frac{du}{(u^2-1)\sqrt{R}}\,;$$

A et B sont les deux constantes de cette intégrale complète.

Telle est la solution du problème de Transon pour le complexe des sécantes harmoniques de deux sphères quelconques; j'ai tenu à donner le résultat des calculs, à cause de l'importance de ce complexe dont on rencontre souvent des dégénérescences : complexe de Painvin attaché à une quadrique de révolution (§ 22), complexes des droites dont la somme ou la différence des distances à deux points fixes est constante, complexe des droites dont le rapport des distances à deux points fixes est constant, etc...

3° Les complexes spéciaux de révolution. Le problème de Transon est alors équivalent au problème des géodésiques d'une surface de révolution quelconque : il est, par conséquent, inutile d'insister sur ces derniers complexes. Je me bornerai à l'exemple, considéré par Monge dans ses *Applications de l'Analyse à la Géométrie* (pp. 246-286), du complexe spécial attaché à une sphère ; ce complexe d'équation

$$p_4^2 + p_5^2 + p_6^2 = R^2$$

conduit à l'équation aux dérivées partielles

$$p^2 + \frac{q^2}{\cos^2 \varphi} = R^2,$$

qui admet une intégrale complète

$$\frac{\varpi}{R} = a\psi + \text{arc tang } t - a \text{ arc tang } (at) + b;$$

a et b sont constantes, et l'on a posé

$$\sin \varphi = \frac{\sqrt{1-a^2}.t}{\sqrt{1+t^2}};$$

je donnerai incidemment l'équation, en coordonnées symétriques,

$$pq(1+xy)^2 - R^2 = 0$$

des trajectoires de ce complexe ; cette équation qui résulte de la formule (3) sera utile par la suite.

[**17**] Complexes admettant une translation pour transformation infinitésimale. — Un complexe admet pour transformation infinitésimale la translation parallèle à Oz si son équation ne dépend ni de p_4 ni de p_5. En d'autres termes, l'équation sera réductible à la forme

$$f(p_6, p_1, p_2, p_3) = 0.$$

Les coordonnées géographiques s'imposent : l'équation aux dérivées partielles est

$$f_1(q, \varphi, \psi) = 0;$$

elle s'intégre comme une équation différentielle du premier ordre en $\frac{d\varpi}{d\psi}$, ne contenant pas la fonction inconnue : une quadrature suffit donc pour obtenir l'équation de la surface la plus générale dont les normales appartiennent à ce complexe. La constante arbitraire d'intégration devra être remplacée par une fonction arbitraire de la latitude.

Des exemples de complexes de cette nature sont nombreux. On peut, par exemple, envisager :

1° Le complexe des droites pour lesquelles il existe une relation donnée entre la distance à une droite fixe et l'angle avec une direction fixe.

2° Le complexe des droites qui coupent harmoniquement deux cylindres du second degré parallèles...

Comme exemple remarquable [1]. je considérerai le *complexe des droites sur lesquelles deux plans rectangulaires interceptent un segment de longueur constante.* En prenant les deux plans pour plans de coordonnées $x=0$, $y=0$ et désignant par $2a$ la longueur constante, l'équation du complexe prend la forme

$$p_6^2 = 4a^2 \frac{p_1^2 p_2^2}{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2};$$

ce complexe est donc du quatrième ordre : les courbes planes du complexe sont d'ailleurs des courbes parallèles d'hypocycloïdes à quatre rebroussements et, plus particulièrement, des hypocycloïdes même; toutes ces courbes sont de quatrième classe.

L'équation à intégrer est :

$$q = \pm 2a \cos^2 \varphi \cos \psi \sin \psi;$$

une intégration donne

$$\varpi = \mp a \cos^2 \varphi \cos^2 \psi + \Phi,$$

Φ désignant une fonction arbitraire de φ.

Au chapitre VII (§ 33) enfin, je considérerai les complexes d'équation

$$\frac{p_6}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}} = f\left(\frac{p_1}{p_2}\right)$$

qui admettent pour trajectoires des surfaces moulures : cette famille de complexes appartient à la classe des complexes invariants dans la translation infinitésimale parallèle à Oz.

---

(1) On sait que les droites dont trois points sont situés dans trois plans rectangulaires forment une congruence de normales; M. Darboux a établi que l'une des trajectoires est le lieu du milieu du segment formé par le point où une telle droite coupe l'un des plans coordonnés et par le pied de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur la droite.

Par une translation arbitraire parallèle à l'une des arêtes du trièdre trirectangle constitué par les plans donnés, on obtient une famille de surfaces non parallèles dont les normales sont les droites du complexe que j'envisage ci-dessus. D'après le théorème fondamental de M. Darboux, le problème de Transon pour ce complexe est résoluble et l'intégrale générale ne dépend pas de quadrature.

Je ferai observer que l'on peut établir la propriété de la congruence des droites dont trois points décrivent les trois plans coordonnés, à partir des équations

$$p_4^2(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) = 4a^2 p_2^2 p_3^2,$$
$$p_5^2(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) = 4b^2 p_1^2 p_3^2;$$

les équations aux dérivées partielles, qui résolvent le problème de Transon pour les deux complexes représentés par ces deux équations, sont respectivement

$$p \sin \psi - q \cos \psi \operatorname{tang} \varphi = 2a \sin \varphi \cos \varphi \sin \psi,$$
$$-p \cos \psi - q \sin \psi \operatorname{tang} \varphi = 2b \sin \varphi \cos \varphi \cos \psi;$$

il est aisé de vérifier que ces équations sont compatibles et admettent la solution commune :

$$\varpi = \frac{1}{4}(1 + \cos 2\varphi)\,[(a+b)\cos 2\psi + (b-a)].$$

CHAPITRE IV.

Classification des complexes : figuratrice. — Complexes semi-linéaires.

Figuratrice d'un complexe; la figuratrice caractérise le complexe. — Classification des complexes d'après les degrés des figuratrices. — Complexes semi-linéaires; leur fréquence; réduction du problème de Transon pour un complexe semi-linéaire lorsqu'une solution est connue *a priori*.

[**18**] Figuratrice. — Dans ce qui suit, je vais faire une application d'une remarque antérieure. Au paragraphe 5, j'ai fait observer que l'équation aux dérivées partielles, dont dépendent les surfaces trajectoires d'un complexe donné, dépend essentiellement, quant à sa forme, de la manière dont figurent les trois coordonnées p_4, p_5 et p_6 dans l'équation du complexe : ce sont, en effet, ces trois coordonnées seulement qui introduisent les dérivées de la fonction inconnue ϖ ou z.

Je prendrai pour élément d'une classification des complexes de droites, non plus l'ordre de ce complexe, mais le degré de l'équation aux dérivées partielles. L'ordre, en effet, ne joue absolument aucun rôle dans la théorie des congruences de normales; ce qui importe, c'est de savoir si l'équation aux dérivées partielles est linéaire ou non, décomposable ou non, ... c'est de se rendre compte de la complexité de cette équation et des particularités qu'elle peut présenter.

Qu'il s'agisse des coordonnées géographiques ou des coordonnées symétriques, cette équation aux dérivées partielles est l'équation la plus générale du premier ordre qui ne contienne pas explicitement la fonction inconnue :

$$f(p, q, x, y) = 0;$$

pour faire l'étude de cette équation, il y a avantage à donner au raisonnement une forme géométrique, en attachant à chaque complexe de droites une courbe plane qui le caractérisera. Procédant d'une manière analogue à celle de M. Hadamard dans ses *Leçons sur le calcul des variations* (¹), je considérerai sous le nom de *courbe figuratrice* du complexe la courbe plane représentée par l'équation

$$f(p, q, x, y) = 0,$$

dans laquelle p et q sont regardées comme des coordonnées ordinaires et où x et y sont deux paramètres. Pour le moment, aucune condition supplémentaire n'est imposée, pas même la condition qui exprime que p et q sont des dérivées partielles d'une

(¹) Tome I, § 68.

même fonction : p, q, x, y sont deux coordonnées et deux paramètres uniquement liés par l'équation $f=0$.

Étant donné un complexe, on sait former immédiatement l'équation de ses surfaces trajectoires par application des formules du paragraphe 6 (ou 8) qui donnent les expressions des coordonnées plückériennes en fonction de x, y, p et q. Il est évident que, réciproquement, étant donné une équation du premier ordre ne contenant pas la fonction inconnue sous forme explicite, un complexe unique correspond à cette équation. S'il s'agit des coordonnées symétriques, par exemple, en portant dans l'équation aux dérivées partielles considérée les expressions suivantes de p et de q,

$$p = -i\left(p_4\frac{\partial p_1}{\partial x} + p_5\frac{\partial p_2}{\partial x} + p_6\frac{\partial p_3}{\partial x}\right),$$
$$q = \quad i\left(p_4\frac{\partial p_1}{\partial y} + p_5\frac{\partial p_2}{\partial y} + p_6\frac{\partial p_3}{\partial y}\right),$$

utilisant ensuite les formules qui donnent x et y en fonction de p_1, p_2 et p_3, et tenant compte enfin de l'homogénéité, on forme l'équation de ce complexe. Tel est le sens qu'il faut donner à la correspondance entre le complexe et l'équation aux dérivées partielles. Il en résulte que, étant donnée une courbe plane dépendant ou non de paramètres, il est possible, sous la condition unique de bien préciser le rôle de ces paramètres, de la considérer comme étant la figuratrice d'un complexe bien déterminé, dont l'équation peut être obtenue aisément.

La figuratrice caractérise donc le complexe de droites (¹). Dans ces conditions, on

---

(¹) De la remarque ci-dessus, il résulte que l'emploi de la figuratrice peut présenter, dans certains cas, un avantage qui n'est pas à négliger. Par la considération des figuratrices on peut, en effet, reconnaître l'identité de deux complexes dont les équations en coordonnées plückériennes sont très différentes. C'est ainsi que les équations

$$p_2p_4 - p_1p_5 = 0,$$
$$(p_1^2 + p_2^2)(p_4^2 + p_5^2) - p_3^2p_6^2 = 0,$$

qui, à première vue, semblent n'avoir aucune relation entre elles, représentent un même complexe (§ 8), puisque, dans les deux cas, la figuratrice a pour équation

$$\frac{\partial\varpi}{\partial\varphi} = 0,$$

en coordonnées géographiques. Une fois l'identité des complexes établie, il est aisé de la mettre en évidence indépendamment de la considération des figuratrices : il suffit de mettre la seconde équation sous la forme équivalente

$$(p_1^2 + p_2^2)(p_4^2 + p_5^2) - (p_1p_4 + p_2p_5)^2 = 0,$$

et de lui appliquer alors une identité connue. Il est bien naturel d'ailleurs qu'il en soit parfois ainsi, lorsqu'on fait usage de variables liées entre elles par des relations supplémentaires et d'équations qui ne sont pas d'une forme canonique.

conçoit la possibilité d'une classification des complexes entièrement analogue à celle des courbes planes. Bien entendu, je ne me servirai de l'analogie que pour obtenir des résultats intéressants et j'écarterai toute considération étrangère à la présente étude. Je me bornerai à l'introduction d'une classification des complexes, d'après les degrés des figuratrices et à l'application de la notion de genre des courbes planes.

[**19**] Classification des complexes. — La classification des complexes reposera sur la considération des degrés des figuratrices qui les caractérisent. Il est important de faire observer que l'on envisagera toujours la figuratrice générale

$$f(p, q, x, y) = 0,$$

qui correspond à des valeurs absolument quelconques des paramètres x et y et que l'on ne tiendra aucun compte des particularités qui peuvent se présenter pour des valeurs singulières de ces paramètres, auxquelles pourraient être liés un abaissement de degré ou de genre. En second lieu, il convient d'observer que. dans les applications qui vont suivre, il importe peu qu'il s'agisse de tel ou tel système de coordonnées : quoique les figuratrices d'un même complexe soient distinctes en coordonnées géographiques et en coordonnées symétriques, les degrés seront les mêmes, ainsi que les genres, et les singularités se correspondront; ces courbes sont en effet transformées l'une de l'autre par une affinité particulière qui laisse invariants les degrés, les genres et les singularités des figuratrices générales.

Les complexes les plus simples seront les complexes admettant des droites pour figuratrices. Par analogie avec le complexe linéaire, je désignerai par la dénomination de complexes *semi-linéaires* les complexes ayant une droite pour figuratrice. Après les complexes *semi-linéaires*, viendront les complexes *semi-quadratiques* constitués par les complexes admettant pour figuratrices des coniques et ainsi de suite. Aux figuratrices algébriques correspondront ainsi les complexes *semi-algébriques* et aux figuratrices transcendantes correspondront les complexes *semi-transcendants*. On comprend la raison de ces dénominations en songeant au rôle exclusif que jouent la moitié des coordonnées plückériennes.

L'intérêt d'une telle classification réside dans l'importance des complexes semi-linéaires et des complexes semi-quadratiques, et dans la fréquence de ces complexes. Les complexes linéaires sont naturellement semi-linéaires; les complexes quadratiques sont semi-quadratiques, semi-linéaires ou décomposables en complexes semi-linéaires. Bien peu de complexes d'ordre supérieur au second ont été considérés jusqu'à présent et les quelques rares complexes de cette nature que l'on rencontre dans les travaux de Géométrie réglée sont semi-linéaires ou semi-quadratiques, pour compliquées que soient les équations habituelles. C'est ainsi que le complexe du troisième ordre de M. Humbert (cité au § 10) est semi-quadratique. C'est aussi le cas du complexe des directrices des sections planes d'une quadrique : ce complexe du sixième ordre, qui fut l'objet d'un Mémoire de M. Rouquet (¹) et qui est l'un des complexes les plus compliqués que je connaisse, rentre pourtant dans la catégorie des complexes semi-quadratiques.

Je me bornerai donc à étudier, d'une façon spéciale, les complexes semi-linéaires et les complexes semi-quadratiques.

[20] Complexes semi-linéaires. — Je commencerai par les complexes semi-linéaires et les complexes qui se décomposent en complexes semi-linéaires. Il ne s'agit pas d'une décomposition de nature géométrique, mais d'un fait purement analytique. Je m'explique par un exemple.

Le complexe, dégénéré du complexe de M. Humbert, constitué par les génératrices des quadriques homothétiques aux quadriques d'un système homofocal a pour équation (§§ 7, 10) :

$$(b-c)p_1p_5p_6 + (c-a)p_2p_6p_4 + (a-b)p_3p_4p_5 = 0\,;$$

ce complexe cubique n'est nullement décomposable en complexes linéaires ou quadratique; mais la figuratrice se décompose en deux droites issues de l'origine, de sorte que ce complexe semi-quadratique est analytiquement décomposable en deux complexes semi-linéaires.

Il importe peu que les éléments de décomposition de la figuratrice soient liés ou non entre eux par des relations plus ou moins intéressantes. Ce qu'il est essentiel de noter, c'est la décomposition lorsqu'elle se produit, qu'il s'agisse d'ailleurs d'une décomposition en complexes semi-linéaires ou non. Cela découle de la théorie des équations aux dérivées partielles qui sont décomposables. Et l'on sait combien il est important, à cause des propriétés toutes particulières des équations linéaires, de mettre en évidence les décompositions en des équations de cette nature.

L'emploi de la figuratrice est tout indiqué pour faire l'étude d'un complexe donné, du point de vue de la décomposition. Par de simples considérations ressortissant à la Géométrie analytique la plus élémentaire, on saura s'il y a décomposition ou non et, dans le premier cas, on saura mettre en évidence les divers éléments de cette décomposition. Il ne restera plus qu'à étudier successivement les divers cas, qui pourront être très différents les uns des autres.

Je considère donc un complexe semi-linéaire ou un élément de décomposition de cette nature. Pour un tel complexe, le problème de Transon est réductible à l'intégration d'une équation linéaire, particulière parmi les équations linéaires, la fonction inconnue ne figurant pas explicitement.

Deux cas seront pratiquement à discerner, suivant que l'on connaîtra ou non

(¹) Rouquet, *Étude d'un complexe du sixième ordre* (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1899).

a priori une solution particulière (c'est-à-dire une famille de surfaces parallèles). Dans le cas où l'on ne connaît *a priori* aucune solution, on aura à intégrer une équation différentielle du premier ordre suivie d'une quadrature.

Mais si l'on connaît une solution particulière ϖ_0, en posant

$$\varpi = \varpi_0 + \varpi_1,$$

la nouvelle fonction inconnue ϖ_1 sera donnée par une équation linéaire et homogène et on sera ramené au cas du chapitre III (§ 10). Ainsi : *si on connaît* a priori *une trajectoire particulière d'un complexe semi-linéaire, le problème de Transon est réductible au même problème pour un complexe possédant l'homothétie pour transformation infinitésimale.*

Insister sur les complexes semi-linéaires serait reproduire inutilement la théorie de l'équation linéaire. Il ne me reste qu'à citer des exemples de complexes semi-linéaires, pour prouver leur importance. Cette catégorie de complexes comprend les complexes linéaires, les complexes possédant l'homothétie pour transformation infinitésimale, le complexe quadratique

$$2(p_2 p_4 - p_1 p_5) + Bp_1^2 + Ap_2^2 + (A + B)p_3^2 = 0$$

des arêtes des dièdres droits dont les faces touchent le paraboloïde d'équation tangentielle

$$Au^2 + Bv^2 - 2w = 0;$$

l'équation générale des trajectoires de ce dernier complexe est :

$$2\varpi = \sin\varphi\,(A\cos^2\psi + B\sin^2\psi) - (A + B)\,\mathrm{Log}\left[\mathrm{tang}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right] + \Psi,$$

Ψ désignant une fonction arbitraire de ψ. Le terme logarithmique disparaît dans le cas où le paraboloïde est équilatère : l'équation des trajectoires du complexe de Ball (*The theory of screws*, p. 21) est donc

$$2\varpi = A\sin\varphi\cos 2\psi + \Psi.$$

De nouveaux exemples seront donnés au chapitre suivant, à propos des intégrales linéraires des équations aux dérivées partielles des complexes semi-quadratiques.

CHAPITRE V.

Complexes semi-quadratiques.

Équivalence du problème de Transon pour un complexe semi-quadratique et d'un problème de Mécanique, du problème des géodésiques notamment; application au complexe des arêtes des dièdres droits circonscrits à une quadrique à centre. — Complexes d'équation

$$p_4^2 + p_5^2 + p_6^2 = f(p_1, p_2, p_3). \text{ —}$$

Application de la théorie des intégrales quadratiques du problème des géodésiques au problème de Transon; exemples.

[21] Je consacrerai ce chapitre à l'étude du problème de Transon pour les complexes semi-quadratiques non décomposables en deux complexes semi-linéaires. C'est dire que je supposerai que la figuratrice est une véritable conique non décomposable pour toutes valeurs des paramètres x et y.

Pour tout complexe semi-quadratique, le problème de Transon est équivalent à un problème de Mécanique concernant le mouvement d'un point sur une surface, les liaisons ne dépendant pas du temps, et, en particulier, au problème des géodésiques pour un élément linéaire donné. Il s'agit, bien entendu, d'une correspondance purement analytique; dans le cas particulier d'un complexe spécial semi-quadratique, la correspondance entre le problème de Transon et un problème de géodésiques sera, en général, essentiellement distincte de celle qui existe entre le problème de Transon pour ce complexe spécial et le problème des géodésiques pour sa surface de singularité. Quelque lointains que soient les rapports entre le complexe semi-quadratique donné et les surfaces qui admettent l'élément linéaire correspondant, on peut toutefois espérer obtenir des résultats en considérant cette équivalence entre problème de Transon et problème de géodésiques.

Si le problème de Transon est résolu pour un complexe semi-quadratique, à l'aide de considérations quelconques, il en résultera que le problème des géodésiques sera résolu pour un certain élément linéaire facilement déterminable. Considérons, par exemple, le complexe quadratique spécial, d'équation

$$Ap_4^2 + Bp_5^2 + Cp_6^2 - BCp_1^2 - CAp_2^2 - ABp_3^2 = 0,$$

attaché à une quadrique à centre d'équation tangentielle

$$Au^2 + Bv^2 + Cw^2 - 1 = 0.$$

Le problème de Transon pour ce complexe (¹) est équivalent non seulement au problème des géodésiques, sur la quadrique précédente, mais encore au même problème pour un élément linéaire assez compliqué, mais dont il est aisé d'obtenir la forme. L'équation des trajectoires du complexe est en effet de la forme

$$\mathcal{A}p^2 - 2\mathcal{B}pq + \mathcal{C}q^2 = \mathcal{D},$$

en posant

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= (B-A)x^4 + 2(A+B-2C)x^2 + B - A,\\
\mathcal{B} &= A(x^2-1)(y^2-1) - B(x^2+1)(y^2+1) - 4Cxy,\\
\mathcal{C} &= (B-A)y^4 + 2(A+B-2C)y^2 + B - A,\\
\mathcal{D} &= \frac{4}{(xy+1)^2}\left[BC(x+y)^2 - CA(x-y)^2 + AB(xy-1)^2\right];
\end{aligned}$$

identifiant cette équation avec celle

$$Gp^2 - 2Fpq + Eq^2 = EG - F^2$$

du problème des géodésiques pour l'élément linéaire

$$ds^2 = E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2,$$

on trouve :

$$E = \frac{\mathcal{C}\mathcal{D}}{\mathcal{A}\mathcal{C} - \mathcal{B}^2}, \qquad F = \frac{\mathcal{B}\mathcal{D}}{\mathcal{A}\mathcal{C} - \mathcal{B}^2}, \qquad G = \frac{\mathcal{A}\mathcal{D}}{\mathcal{A}\mathcal{C} - \mathcal{B}^2}.$$

[**22**] Comme second exemple, je citerai celui des droites par lesquelles on peut mener des plans tangents rectangulaires à une quadrique donnée. Considérons deux quadriques (H_1), (H_2) d'un faisceau homofocal d'équation

$$\frac{x^2}{A+\lambda} + \frac{y^2}{B+\lambda} + \frac{z^2}{C+\lambda} - 1 = 0,$$

qui correspondent aux deux valeurs symétriques $\lambda_1 = \lambda$ et $\lambda_2 = -\lambda$ du paramètre. La congruence commune aux deux complexes quadratiques spéciaux respectivement attachés à (H_1) et à (H_2) a pour équations

$$\mathsf{S}(A+\lambda)p_4^2 - \mathsf{S}(B+\lambda)(C+\lambda)p_1^2 = 0,$$

$$\mathsf{S}(A-\lambda)p_4^2 - \mathsf{S}(B-\lambda)(C-\lambda)p_1^2 = 0;$$

(¹) On peut appliquer le théorème de M. Darboux au complexe quadratique spécial. D'après un théorème de Chasles, si on considère une quadrique homofocale à la surface de singularité du complexe, la congruence des tangentes communes aux deux quadriques est une congruence de normales à une famille de surfaces dont Liouville donna l'équation. En faisant varier la quadrique homofocale, on engendre le complexe avec une congruence de normales et le problème de Transon est dès lors résolu.

par simple soustraction des premiers membres de celles-ci, on vérifie que l'équation

$$p_4^2 + p_5^2 + p_6^2 - (B + C)p_1^2 - (C + A)p_2^2 - (A + B)p_3^2 = 0$$

est satisfaite; la congruence considérée appartient donc au complexe des arêtes des dièdres droits dont les faces touchent la quadrique (H_0) du système homofocal qui correspond à la valeur zéro du paramètre et dont l'équation tangentielle est

$$Au^2 + Bv^2 + Cw^2 - 1 = 0,$$

c'est-à-dire au complexe de Painvin attaché à la quadrique précédente (¹). En faisant varier le paramètre λ, on établit que le complexe de Painvin peut être envisagé comme engendré par une certaine congruence qui, d'après un théorème de Chasles (²), est une congruence de normales; les surfaces orthogonales ont été déterminées par Liouville (³). Il résulte donc du théorème fondamental de M. Darboux que le problème de Transon pour le complexe de Painvin est résolu et que l'équation de la trajectoire la plus générale se déduit de l'équation formée par Liouville. L'équation aux dérivées partielles étant

$$pq(1 + xy)^4 = (B + C)(x + y)^2 - (C + A)(x - y)^2 + (A + B)(xy - 1)^2,$$

l'élément linéaire correspondant est de la forme

$$ds^2 = \frac{a(x + y)^2 + b(x - y)^2 + c(xy - 1)^2}{(xy + 1)^4}.$$

Je reviendrai plus loin sur cet élément linéaire et je montrerai qu'il est réductible à la forme de Liouville. Pour le moment, je ferai observer que, dans le cas particulier

---

(¹) Dans un article *Conséquences de deux théorèmes de M. Bricard concernant les tangentes communes à deux quadriques* (Nouvelles Annales de mathématiques, 1910, p. 25), j'ai établi le résultat ci-dessus par un raisonnement géométrique qui présente l'avantage de subsister dans le cas où le quadrique (H_0) est un paraboloïde. Cette démonstration géométrique est une conséquence d'un théorème remarquable que M. Bricard avait fait connaître dans les *Nouvelles Annales* de 1908 : *Si une droite varie en touchant constamment deux quadriques homofocales, les plans tangents menés par cette droite aux diverses quadriques homofocales aux deux premières forment un faisceau de grandeur constante.* Considérons alors le complexe des arêtes des dièdres de grandeur constante donnée dont les plans touchent une quadrique donnée (H_0); soit (γ) une courbe quelconque du complexe; toute tangente δ à (γ) est touchée par deux quadriques (H_1) et (H_2) du système homofocal (H) auquel appartient la quadrique particulière (H_0). Puisque δ est un rayon du complexe, la congruence des tangentes communes à (H_1) et à (H_2) appartient au complexe, d'après le théorème cité de M. Bricard; en remarquant alors que, d'après un théorème de Chasles, cette même congruence est une congruence de normales et en appliquant le théorème de M. Darboux, j'ai établi que le problème de Transon est résoluble non seulement pour le complexe de Painvin attaché à la quadrique (H_0), mais encore pour le complexe plus général des arêtes des dièdres de grandeur constante donnée dont les faces touchent cette quadrique.

(²) *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie*, p. 392.

(³) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. XVI, 1851, p. 6.

où la quadrique est de révolution autour de l'axe Oz, le complexe de Painvin se présente comme un cas particulier du complexe des sécantes harmoniques de deux sphères. Cette propriété, qui fut établie par Loria et Segre [1], résulte de l'équation

$$p_4^2 + p_5^2 + p_6^2 - c(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + (a + b)(p_1 p_5 - p_2 p_4) - abp_3^2 = 0$$

qui représente le complexe des droites coupées harmoniquement par deux sphères :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2az - c = 0,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2bz - c = 0,$$

rapportées à leur ligne des centres et à leur plan radical (cf. le paragraphe 16). Par comparaison des équations des deux complexes, on établit l'identité du complexe de Painvin attaché à la quadrique de révolution d'équation

$$\frac{x^2 + y^2}{A} + \frac{z^2}{C} - 1 = 0$$

et du complexe des sécantes harmoniques des deux sphères égales d'équations

$$x^2 + y^2 + z^2 \pm 2\sqrt{C - A}\,.\,z - A - C = 0.$$

Plus particulièrement encore, lorsque la quadrique (H_0) est une sphère, le complexe de Painvin est identique au complexe spécial des tangentes d'une sphère donnée (cf. le paragraphe 16).

[23] Le complexe de Painvin appartient, par la forme de son équation, à une catégorie de complexes semi-quadratiques d'équation générale

$$p_4^2 + p_5^2 + p_6^2 = f(p_1, p_2, p_3);$$

tout complexe de cette nature est constitué par des droites dont la distance à un point fixe est une fonction donnée des paramètres qui en définissent la direction. De tels complexes, que j'ai rencontrés ailleurs [2] comme invariants dans une certaine transformation de droites, conduisent à une équation aux dérivées partielles de la forme générale

$$pq = F(x, y).$$

Pour ces complexes semi-quadratiques particuliers, le problème de Transon est équivalent au problème des géodésiques de la surface la plus générale rapportée à ses

---

(1) Loria et Segre, *Sur les différents complexes du second degré de droites qui coupent harmoniquement deux quadriques* (Mathematische Annalen, 1884).

(2) *Sur une transformation de droites* (Nouvelles Annales de mathématiques, 1909, p. 254). Dans cette Note, j'ai défini et étudié une transformation de droites laissant invariantes les congruences isotropes de Ribaucour, les congruences de normales des surfaces de M. Appell et les complexes semi-quadratiques ci-dessus envisagés.

lignes de longueur nulle; l'élément linéaire correspondant est, en effet,

$$ds^2 = F(x, y)\,dx\,dy,$$

$F(x, y)$ désignant une fonction quelconque de x et de y; entre les fonctions $f(p_1, p_2, p_3)$ et $F(x, y)$, existe, en vertu des expressions (4) de (p_1, p_2, p_3) en (x, y), la relation

$$f(p_1, p_2, p_3) = (1 + xy)^2 F(x, y)$$

qui peut servir à former l'une des deux fonctions connaissant l'autre.

On sait que le problème des géodésiques des surfaces rapportées à leurs lignes de longueur nulle a donné lieu à des recherches du plus grand intérêt, de M. Kœnigs notamment. Dans un *Mémoire sur les lignes géodésiques* (1), M. Kœnigs a étudié les problèmes des géodésiques à intégrales quadratiques et il a précisé un théorème antérieurement établi par Massieu (2). M. Kœnigs a montré que si l'équation

$$pq = \lambda(x, y),$$

dont dépend le problème des géodésiques pour l'élément linéaire d'une surface rapportée à ses lignes de longueur nulle

$$ds^2 = \lambda \,.\, dx\,dy,$$

est supposée avoir une ou plusieurs intégrales quadratiques de la forme

$$Ap^2 + 2Bpq + Cq^2 = \text{const.},$$

cet élément linéaire est nécessairement réductible à l'une ou l'autre des formes dites respectivement de Lie ou de Liouville; pour la forme de Lie, on a

$$\lambda = yf(x) + g(x),$$

et pour celle de Liouville

$$\lambda = f(x + y) - g(x - y);$$

réciproquement, si un élément linéaire se présente sous l'une ou l'autre des deux formes précédentes ou si, par un changement de variables, il est réductible à l'une d'elles, l'équation aux dérivées partielles

$$pq = \lambda$$

(1) *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences* (Prix Bordin, 1892) et Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse (1892).

Le théorème de Massieu a servi de point de départ à Raffy, dans son Mémoire *Sur quelques propriétés des surfaces harmoniques* (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1895), pour certaines recherches concernant les surfaces dont l'élément linéaire est réductible à la forme de Liouville.

(2) Cf. le tome III (pp. 30-37) des *Leçons* de M. Darboux.

admet une ou plusieurs intégrales quadratiques. Le coefficient A est nécessairement une fonction de la variable x seule, et C est de même fonction de la seule variable y :

$$A = X(x), \qquad C = Y(y);$$

la fonction λ de (x, y) satisfait à l'équation donnée par M. Darboux

$$2X\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2} + 3X'\frac{\partial\lambda}{\partial x} + X''\lambda = 2Y\frac{\partial^2\lambda}{\partial y^2} + 3Y'\frac{\partial\lambda}{\partial y} + Y''\lambda,$$

dans laquelle X', Y', X'', Y'' sont les dérivées des deux premiers ordres des fonctions X et Y. Si λ étant donnée, (X, Y) est un couple de fonctions satisfaisant à cette équation, le changement de variables défini par les formules

$$x' = \int \frac{dx}{\sqrt{X}}, \qquad y' = \int \frac{dy}{\sqrt{Y}},$$

fait prendre à l'élément linéaire la forme de Liouville.

Il en est ainsi si X et Y sont toutes deux distinctes de zéro; si l'une de ces fonctions, X par exemple, est identiquement nulle, le changement de variables défini par les formules

$$x' = x, \qquad y' = \int \frac{dy}{\sqrt{Y}}$$

fait alors prendre à l'élément linéaire la forme de Lie.

[**24**] Ces résultats remarquables étant rappelés, considérons un complexe semi-quadratique de la famille

$$p_4^2 + p_5^2 + p_6^2 = f(p_1, p_2, p_3)$$

auquel correspond un élément linéaire déterminé

$$ds^2 = \frac{f}{(1+xy)^2}\,dx\,dy.$$

Si l'élément linéaire est réductible, par changements de variables à la forme de Lie ou à celle de Liouville, le complexe considéré jouit d'une propriété digne d'être remarquée : il existera une ou plusieurs familles de complexes semi-quadratiques — correspondant aux diverses intégrales quadratiques — dont les intersections avec le complexe considéré seront des congruences de normales.

La réciproque n'est pas nécessairement vraie, en général : si, un complexe

$$p_4^2 + p_5^2 + p_6^2 = f(p_1, p_2, p_3)$$

étant donné, on connaît, à la suite de considérations géométriques par exemple, une famille de complexes semi-quadratiques constituant avec ce complexe des congruences de normales, il ne s'ensuit pas que l'élément linéaire associé au complexe doive nécessairement être réductible par changements de variables à l'une des formes de Lie ou de Liouville. Pour être assuré d'une telle réduction, il est nécessaire de montrer que l'intégrale quadratique est de la forme

$$Ap^2 + 2Bpq + Cq^2 = \text{const.};$$

la constante arbitraire doit figurer sous forme additive, en tenant compte s'il y a lieu de l'équation

$$pq = \lambda.$$

C'est ce qui arrive relativement au complexe de Painvin et à l'élément linéaire que nous lui avons associé au paragraphe 22. Le complexe de Painvin est engendré par une infinité de congruences de normales appartenant aux divers complexes quadratiques spéciaux attachés aux quadriques homofocales; mais l'équation générale de ces derniers complexes étant

$$\begin{gathered}(A+\rho)p_4^2 + (B+\rho)p_5^2 + (C+\rho)p_6^2 - (B+\rho)(C+\rho)p_1^2 - (C+\rho)(A+\rho)p_2^2 \\ - (A+\rho)(B+\rho)p_3^2 = 0,\end{gathered}$$

il n'en résulte pas que l'élément linéaire associé au complexe de Painvin doive être réductible à la forme de Liouville : la constante ρ ne figure pas sous forme additive dans l'intégrale quadratique. Toutefois, en tenant compte de l'équation du complexe de Painvin, on peut substituer aux complexes quadratiques spéciaux une autre famille de complexes semi-quadratiques, d'équation générale

$$Ap_4^2 + Bp_5^2 + Cp_6^2 - BCp_1^2 - CAp_2^2 - ABp_3^2 - \rho^2(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) = 0,$$

à laquelle correspond une intégrale quadratique

$$\begin{aligned}&[-A(1-x^2)^2 + B(1+x^2)^2 - 4Cx^2]p^2 \\ &+ 2[A(1-x^2)(1-y^2) + B(1+x^2)(1+y^2) + 4Cxy]pq \\ &+ [-A(1-y^2)^2 + B(1+y^2)^2 - 4Cy^2]q^2 \\ &- 4\frac{BC(x+y)^2 - CA(x-y)^2 + AB(xy-1)^2}{(xy+1)^2} = \text{const.},\end{aligned}$$

ou encore :

$$\begin{aligned}Xp^2 + 2\Big[&A(1-x^2)(1-y^2) + B(1+x^2)(1+y^2) + 4Cxy \\ &- 4\frac{BC(x+y)^2 - CA(x-y)^2 + AB(xy-1)^2}{(B+C)(x+y)^2 - (C+A)(x-y)^2 + (A+B)(xy-1)^2}\Big]pq + Yq^2 = \text{const.},\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}X &= (B-A)x^4 + 2(A+B-2C)x^2 + (B-A), \\ Y &= (B-A)y^4 + 2(A+B-2C)y^2 + (B-A);\end{aligned}$$

cette dernière intégrale quadratique est bien de la forme de celles qui figurent dans l'énoncé du théorème de Massieu. L'élément linéaire considéré au paragraphe 22 est donc réductible à la forme de Liouville, par le changement de variables défini par les quadratures elliptiques suivantes :

$$x' = \int \frac{dx}{\sqrt{(B-A)x^4 + 2(A+B-2C)x^2 + (B-A)}},$$

$$y' = \int \frac{dy}{\sqrt{(B-A)y^4 + 2(A+B-2C)y^2 + B - A}};$$

les invariants étant les mêmes pour les fonctions elliptiques qui permettent de calculer x et y en fonction de x' et de y':

$$x = \frac{1}{2}\frac{\wp' x'}{\wp x' - \wp \alpha}, \qquad y' = \frac{1}{2}\frac{\wp' y'}{\wp y' - \wp \alpha},$$

on pourra aisément calculer les termes $x+y$, $x-y$ et xy qui figurent dans l'élément linéaire :

$$xy = \frac{1}{4}\frac{\wp' x' \times \wp' y'}{(\wp x' - \wp\alpha)(\wp y' - \wp\alpha)},$$

$$x + y = \zeta(x'+\alpha) + \zeta(y'+\alpha) - \zeta x' - \zeta y' - 2\zeta\alpha,$$

$$x - y = \zeta(x'+\alpha) - \zeta(y'+\alpha) - \zeta x' + \zeta y';$$

une simplification importante se produit pour

$$A + B = 2C,$$

condition qui caractérise un faisceau homofocal de quadriques dont l'hyperbole focale est équilatère; on a alors les quadratures

$$\sqrt{A-B}\,x' = \int \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}}, \qquad \sqrt{A-B}\,y' = \int \frac{dy}{\sqrt{y^4+1}},$$

et l'on est ramené aux transcendantes spécialement considérées par Gauss sous le nom de lemniscatiques.

[**25**] Comme second exemple intéressant de complexes semi-quadratiques associés à des éléments linéaires remarquables, je signalerai le complexe des droites situées à une distance Δ d'un point fixe et faisant avec une direction fixe un angle V lié à Δ par la relation

$$\Delta \cos V = \text{const.}$$

Prenant le point fixe pour origine et la direction fixe pour direction de l'axe Oz, l'équation de ce complexe est

$$(p_4^2 + p_5^2 + p_6^2)p_3^2 = (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)^2;$$

le complexe est du quatrième ordre et de révolution; le problème de Transon est immédiatement résoluble; l'équation en coordonnées géographiques

$$p^2 + \frac{q^2}{\cos^2 \varphi} = \frac{1}{\sin^2 \varphi}$$

admet, en effet, l'intégrale complète

$$\varpi = a\psi + \int \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \varphi} - \frac{a^2}{\cos^2 \varphi}}\, d\varphi + b,$$

ou encore

$$\varpi = a\psi + a \operatorname{arc\,tang} \frac{t}{\sqrt{2}\, a} + \frac{1}{2} \operatorname{Log} \frac{t - \sqrt{2}}{t + \sqrt{2}} + b,$$

en posant

$$\cos 2\varphi = \frac{t^2 + a^2 - 1}{a^2 + 1}.$$

Prenant pour direction fixe celle de l'axe Ox, l'équation du même complexe est

$$(p_4^2 + p_5^2 + p_6^2) p_1^2 = (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)^2;$$

l'équation aux dérivées partielles du problème de Transon pour ce complexe est

$$pq(x + y)^2 = 1,$$

et l'élément linéaire associé est

$$ds^2 = \frac{dx \cdot dy}{(x + y)^2};$$

on reconnaît là l'élément linéaire de la sphère rapportée à ses génératrices isotropes (1).

Dans le cas actuel, l'équation aux dérivées partielles admet deux intégrales linéaire et quadratique :

$$p - q = \text{const.},$$

$$(p + q)^2 - \frac{4}{(x + y)^2} = \text{const.},$$

---

(1) On observera que le problème de Transon pour le complexe considéré est équivalent au même problème pour le complexe spécial des tangentes à une sphère. La transformation définie par les formules

$$\varpi = \varpi_1, \qquad x x_1 = 1, \qquad y = y_1,$$

transforme, en effet, l'équation

$$p_1 q_1 (x_1 + y_1)^2 = 1$$

en celle (§ 16)

$$pq(1 + xy)^2 = -1$$

des surfaces dont les normales touchent une sphère représentée par l'équation

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + 1 = 0.$$

auxquelles correspondent respectivement une famille de complexes semi-linéaires et une famille de complexes semi-quadratiques. Chaque fois que l'on aura d'ailleurs une équation du type

$$pq = \text{fonction de } (x+y),$$

celle-ci admettra l'intégrale linéaire

$$p - q = \text{const.},$$

à laquelle correspondra une famille de complexes semi-linéaires; le complexe semi-linéaire associé à la figuratrice

$$p - q = a$$

sera constitué par les normales à toutes les surfaces qui rentrent dans l'équation

$$f(ax - z,\ ay + z) = 0, \text{ en coordonnées symétriques.}$$

[**26**] Ces exemples mettront en évidence l'intérêt d'un pareil rapprochement entre la théorie des complexes de droites et la théorie du problème des géodésiques. Cette dernière étant certainement la plus développée, permettra de faire des applications à la théorie du problème de Transon. On se donnera un élément linéaire pour lequel le problème des géodésiques est résolu; le complexe associé à cet élément linéaire, complexe dont l'équation sera aisée à former, conduira à un problème de Transon résoluble. Si, en outre, l'équation du problème des géodésiques pour cet élément linéaire admet une ou plusieurs intégrales quadratiques, la théorie précédente des complexes semi-linéaires et des complexes semi-quadratiques permettra de donner une interprétation géométrique remarquable de ces intégrales. Comme éléments linéaires, on pourra considérer tout d'abord ceux qui sont de révolution; d'après un théorème de M. Darboux, le problème des géodésiques, pour ces éléments, admet une intégrale linéaire et une intégrale quadratique : étant donné, en effet, un complexe de révolution

$$p_4^2 + p_5^2 + p_6^2 = f(p_3,\ p_1^2 + p_2^2 + p_3^2),$$

l'équation associée

$$pq = \mathrm{F}(x \times y)$$

admet une intégrale linéaire

$$px - qy = \text{const.},$$

à laquelle correspondent des complexes quadratiques, semi-linéaires et de révolution autour de Oz, d'équation

$$\frac{p_6}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}} = \text{const.};$$

il est remarquable d'observer que ces complexes semi-linéaires sont absolument indépendants de la fonction $\mathrm{F}(xy)$.

D'autres exemples pourront être tirés des tableaux qui font suite au Mémoire cité de M. Kœnigs : l'élément linéaire

$$ds^2 = \left[\frac{1}{(x+y)^2} - \frac{1}{(x-y)^2}\right] dx\,dy$$

de la 4ᵉ forme du IIᵉ tableau, par exemple, conduit à un complexe du sixième ordre

$$p_4^2 + p_5^2 + p_6^2 = \left(\frac{1}{p_1^2} - \frac{1}{p_2^2}\right)(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)^2.$$

Comme exemple d'élément linéaire conduisant à une équation douée de plusieurs intégrales quadratiques, je citerai le suivant qui fût considéré par Lie (¹) :

$$ds^2 = (x+y)\,dx\,dy\,;$$

l'équation correspondante

$$pq = x + y$$

admet une intégrale linéaire

$$p - q = \text{const.},$$

à laquelle correspond une famille de complexes semi-linéaires et deux intégrales quadratiques

$$p^2 - 2y = \text{const.},$$
$$q^2 - 2x = \text{const.},$$

auxquelles correspondent deux familles de complexes semi-quadratiques.

CHAPITRE VI.

Complexes définis paramétriquement.

Application de la notion de figuratrice à l'expression des coordonnées plückériennes des rayons d'un complexe en fonctions de trois paramètres. — Problème de Transon pour un complexe défini paramétriquement; réduction du problème à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre admettant l'unité pour multiplicateur. — Exemples : complexes dont toutes les trajectoires sont des surfaces de M. Appell.

[27] Nous avons précédemment été amenés à considérer, sous le nom de *figuratrice* d'un complexe quelconque, la courbe représentée par l'équation aux dérivées partielles, en coordonnées géographiques ou symétriques, des surfaces dont les normales constituent le complexe envisagé. En coordonnées symétriques pour fixer les idées, cette équation étant

$$f(p, q, x, y) = 0,$$

(¹) *Geometrie der Berührungstransformationen*, p. 166.

si l'on regarde p et q comme des coordonnées courantes et x, y comme des paramètres, elle représentera une certaine courbe plane du plan (p, q) dépendant de deux paramètres x et y : c'est, par définition, la figuratrice du complexe.

La considération de la figuratrice sera d'un grand intérêt lorsqu'on voudra exprimer les coordonnées plückériennes des droites d'un complexe en fonction de trois paramètres, ce qui peut être utile dans certains cas. La théorie des courbes, la théorie des surfaces et la théorie des congruences fournissent non seulement des exemples remarquables pour lesquels les coordonnées sont paramétriques, mais encore la preuve que, dans les cas compliqués notamment, il est absolument indispensable d'avoir recours à des expressions paramétriques. Pourquoi n'en serait-il pas de même dans la théorie des complexes de droites?

Un complexe étant donné, par une équation compliquée par exemple, on peut se proposer de former des expressions des coordonnées plückériennes des droites qui le constituent en fonction de paramètres. Un procédé pratique et simple découle de l'introduction de la figuratrice. Celle-ci est une courbe plane; la Géométrie analytique nous apprend à exprimer les coordonnées courantes de ses points en fonction d'un paramètre et cela de bien des façons. Se laissant toujours guider par la théorie des courbes planes, on choisira une de ces représentations. Soit alors θ le paramètre; on posera :

$$p = \text{fonction de } (\theta, x, y) = \mathrm{P}(\theta, x, y),$$
$$q = \text{fonction de } (\theta, x, y) = \mathrm{Q}(\theta, x, y);$$

en utilisant les formules (10) qui donnent p_4, p_5, p_6 en fonctions linéaires de p et de q, les coordonnées plückériennes seront exprimées en fonction des trois coordonnées (θ, x, y); la coordonnée θ figurera uniquement dans les coordonnées-moments. Bien entendu, tout ce qui vient d'être dit à propos des coordonnées symétriques est applicable aux coordonnées géographiques.

[**28**] Le complexe donné est donc défini paramétriquement, avec indétermination d'ailleurs. Sans entrer dans des considérations relatives à ces expressions paramétriques, je passe à l'étude des congruences de normales des complexes définis paramétriquement.

Je suppose donc que p et q soient définis par des expressions en θ, x, y :

$$p = \mathrm{P}(\theta, x, y), \qquad q = \mathrm{Q}(\theta, x, y);$$

si l'on se donnait des expressions de p_4, p_5, p_6, il n'y aurait qu'à les porter dans les relations qui donnent p et q :

$$p = -i\left(p_4\frac{\partial p_1}{\partial x} + p_5\frac{\partial p_2}{\partial x} + p_6\frac{\partial p_3}{\partial x}\right),$$
$$q = \quad i\left(p_4\frac{\partial p_1}{\partial y} + p_5\frac{\partial p_2}{\partial y} + p_6\frac{\partial p_3}{\partial y}\right).$$

Jusqu'ici aucune hypothèse n'a été faite sur p et q; si nous imposons la condition supplémentaire

$$\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial q}{\partial x},$$

nous obtenons une équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x},$$

linéaire par rapport aux dérivées de θ. Si l'on prend alors pour expression de θ une fonction de x et de y qui soit intégrale de cette équation linéaire, on isole une congruence appartenant au complexe et cette congruence est une congruence de normales. Réciproquement, toute congruence de normales appartenant au complexe est susceptible d'une pareille détermination. *L'équation linéaire*

$$\frac{\partial Q}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y}=\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}$$

peut donc être envisagée comme définissant toutes les congruences de normales qui appartiennent au complexe.

[**29**] L'intégration de toute équation aux dérivées partielles du premier ordre pouvant, par un procédé analogue, être toujours réduite à celle d'une équation linéaire, l'équation précédente serait peu intéressante si elle ne jouissait pas de la particularité d'avoir un multiplicateur connu *a priori*. On a en effet la relation identique

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Q}{\partial \theta}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial P}{\partial \theta}\right)+\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\equiv 0$$

qui exprime que l'équation aux multiplicateurs admet une constante pour solution.

L'équation linéaire dont dépend le problème de Transon pour un complexe défini paramétriquement admet l'unité pour multiplicateur, tout comme l'équation formée par Transon lui-même.

Insister ici sur une telle équation serait reproduire des résultats bien connus.

Comme exemples de complexes définis paramétriquement, on pourra prendre les complexes homogènes en p_4, p_5, p_6 (chap. III, § 10); on posera

$$p_4=\theta\times a_4,\qquad p_5=\theta\times a_5,\qquad p_6=\theta\times a_6,$$

a_4, a_5, a_6 étant des fonctions de (x, y). Ainsi pour le complexe tétraédral

$$ap_1p_4+bp_2p_5+cp_3p_6=0,$$

on posera

$$p_4=\frac{b-c}{p_1}\theta,\qquad p_5=\frac{c-a}{p_2}\theta,\qquad p_6=\frac{a-b}{p_3}\theta;$$

l'équation à intégrer est alors, en appliquant les relations (9) :

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} \mathrm{S} \frac{b-c}{p_1} \frac{\partial p_1}{\partial y} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \mathrm{S} \frac{b-c}{p_1} \frac{\partial p_1}{\partial x} = 2\theta\, \mathrm{S} \frac{b-c}{p_1^2} \frac{\partial p_1}{\partial x} \frac{\partial p_1}{\partial y};$$

cette équation admet la solution particulière

$$\theta = p_1 p_2 p_3 \times \text{const.};$$

et, comme il s'agit d'une équation à multiplicateur égal à un, le problème est immédiatement résolu.

Comme autres exemples, on pourra considérer les complexes du chapitre V (§ 23)

$$p_4^2 + p_5^2 + p_6^2 = f(p_1, p_2, p_3),$$

qui admettent pour figuratrice une hyperbole équilatère. On posera alors

$$p = e^{\theta} . \mathrm{P}_1(x, y), \qquad q = e^{-\theta} . \mathrm{Q}_1(x, y).$$

[**30**] Je terminerai ce chapitre par l'examen particulier d'une classe de complexes qui interviendront plus loin (§ 32) au titre de complexes ayant des surfaces de M. Appell pour trajectoires. Ce sont les complexes conduisant à l'équation

$$f(p, x) = g(q, y)$$

à variables séparées, en coordonnées symétriques. Prenant pour paramètre variable θ la valeur commune de $f(p, x)$ et de $g(q, y)$, puis supposant p et q explicitement calculés en fonction de x ou y et de θ, on a :

$$p = \mathrm{P}(x, \theta), \qquad q = \mathrm{Q}(y, \theta);$$

l'équation linéaire est alors

$$\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0;$$

son intégrale est définie par la relation

$$\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\int \mathrm{P}dx + \int \mathrm{Q}dy\right] = \Theta(\theta),$$

dans laquelle Θ est une fonction arbitraire de θ.

CHAPITRE VII.

Cas d'une solution unique connue *a priori*.

Complexes admettant une surface de M. Appell pour trajectoire; il existe une infinité de telles surfaces déterminables par quadratures; résolution du problème de Transon pour un tel complexe. — Complexes dont toutes les trajectoires sont des surfaces de M. Appell. — Complexes admettant une surface moulure pour trajectoire; complexes dont toutes les trajectoires sont des surfaces moulures. — Extension au cas d'un complexe ayant pour trajectoire une surface intégrale d'une certaine équation aux dérivées partielles du second ordre. — Complexes admettant pour trajectoire une surface *minima*. — Application simultanée des théorèmes de M. Darboux et de Malus à certains complexes pour lesquels la connaissance d'une solution est suffisante. — Complexe dont tous les cônes sont de révolution.

[**31**] Le théorème de M. Darboux suppose essentiellement que la famille connue *a priori* de surfaces trajectoires est composée de surfaces non parallèles entre elles; en d'autres termes que l'on connaît une famille de congruences de normales appartenant au complexe. Dans ce cas, d'après le théorème de M. Darboux, le problème est résoluble.

On rencontre souvent des complexes pour lesquels on connaît *a priori* une seule congruence de normales; le théorème de M. Darboux ne peut alors être appliqué. Toutefois, la connaissance de cette solution peut être précieuse : c'est ainsi que, dans la théorie des complexes semi-linéaires, nous avons remarqué que la connaissance d'une solution unique simplifie considérablement le problème de Transon, puisqu'alors sa solution dépend d'une équation différentielle du premier ordre (§ 20).

Je m'occuperai, dans ce chapitre, des complexes admettant pour surface trajectoire une surface, connue ou non *a priori*, mais que l'on sait satisfaire à une équation donnée aux dérivées partielles du second ordre à caractéristiques distinctes. Je vais montrer que si on sait *a priori* qu'un complexe admet pour trajectoire une surface de M. Appell, une surface moulure, une surface *minima*, ... et plus généralement une surface que l'on sait être intégrale d'une équation donnée du second ordre, on pourra, sauf exceptions, déterminer une famille de surfaces de même nature et, par suite, considérer le problème comme résolu. Pendant l'impression du présent Mémoire, j'ai observé que les complexes admettant des surfaces *minima* parmi leurs trajectoires ont une importance particulière. Il résulte, en effet, d'une expression de la courbure moyenne, à laquelle peut être rattachée une formule qui fut utilisée par Schwarz, que les surfaces *minima* sont caractérisées par la propriété suivante : la divergence du vecteur égal à l'unité porté par la normale est identiquement nulle. L'étude des complexes admettant des familles de surfaces *minima* pour trajectoires est donc intimement liée au problème qui consiste à déterminer les champs de vecteurs tels que les tourbillons soient constants en grandeur. La considération des surfaces *minima* conduit à une solution particulière qui mérite d'être signalée.

[**32**] Considérons, par exemple, un complexe que l'on sait avoir, pour surface trajectoire, une surface de M. Appell connue ou non. En coordonnées symétriques, l'équation des surfaces de M. Appell, c'est-à-dire des surfaces dont la développée moyenne est réduite à un point, est

$$s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0\,;$$

son intégrale générale est

$$Z = X + Y,$$

X et Y désignant deux fonctions arbitraires de x et de y respectivement. Considérons alors l'équation

$$f(p, q, x, y) = 0$$

des trajectoires du complexe donné; l'équation

$$f(X', Y', x, y) = 0,$$

dans laquelle X' et Y' désignent les dérivées $\frac{dX}{dx}$ et $\frac{dY}{dy}$, est supposée admettre une solution : cela ne sera possible, en vertu de l'indépendance même des variables x et y, que si celles-ci se séparent; l'équation précédente est donc susceptible d'être mise sous la forme

$$\xi(X', x) = \eta(Y', y),$$

ce qui exige d'ailleurs que l'équation aux dérivées partielles soit à variables séparées. En introduisant alors une constante arbitraire σ, on posera

$$\xi(X', x) = \sigma,$$
$$\eta(Y', y) = \sigma\,;$$

on déduira de ces relations les fonctions X et Y par des quadratures; on aura finalement des expressions de la forme

$$X = \text{fonction } (x, \sigma) + \text{const.},$$
$$Y = \text{fonction } (y, \sigma) + \text{const.},$$

d'où

$$z = f_1(x, \sigma) + f_2(y, \sigma) + \text{const.},$$

la constante σ ne s'introduisant pas sous forme additive. Si donc on sait que, parmi les trajectoires d'un complexe, se trouve une surface de M. Appell, on pourra déterminer par quadratures une infinité de telles surfaces auxquelles on devra associer toutes les surfaces parallèles. Le problème de Transon sera donc résolu, d'après le théorème de M. Darboux. Ainsi :

Il n'existe pas en général de surface de M. Appell qui soit une surface trajectoire d'un complexe donné. Mais s'il existe une surface de cette nature, il en existe une infinité et toutes ces surfaces sont déterminables par quadratures. Le problème de Transon est alors résolu.

Comme exemple de complexes possédant des surfaces trajectoires qui sont des surfaces de M. Appell, je citerai les complexes de figuratrices

$$pq = F_1(x) \times F_2(y);$$

ces complexes appartiennent à la classe des complexes semi-quadratiques étudiée au paragraphe 23; l'élément linéaire associé étant un élément linéaire de surfaces développables, il résulte de la théorie générale que le problème de Transon pour ces complexes est résoluble. L'équation peut se mettre sous la forme à variables séparées et par conséquent les complexes possèdent des surfaces de M. Appell pour trajectoires : X et Y étant des fonctions respectives de x et de y déterminées par deux quadratures, σ étant un paramètre variable, ces surfaces de M. Appell sont représentées par l'équation

$$z = e^{\sigma}X + e^{-\sigma}Y + \text{const.}$$

Le cas exceptionnel (1) auquel j'ai fait allusion plus haut est celui où l'équation du complexe est l'une ou l'autre des équations analogues

$$p = f(x), \qquad q = f(y);$$

pour le complexe

$$p = f(x),$$

par exemple, l'équation qui détermine les surfaces de M. Appell est

$$X' = f(x);$$

la constante σ n'intervient donc nullement. D'une façon générale, il en sera ainsi chaque fois que le complexe aura pour trajectoires des surfaces qui seront toutes des intégrales de l'équation du second ordre. Dans le cas actuel, les complexes semi-linéaires

$$p = f(x), \qquad q = f(y)$$

sont précisément ceux pour lesquels toutes les trajectoires sont des surfaces de M. Appell.

---

(1) On observera que parmi les équations à variables séparées, les équations

$$f_1(p, x) + f_2(y) = 0,$$
$$g_1(q, y) + g_2(x) = 0,$$

dans lesquelles $f_2(y)$ et $g_2(x)$ sont des fonctions non constantes, font exception et ne possèdent aucune surface trajectoire qui soit une surface de M. Appell.

[**33**] Ce qui précède peut être étendu aux équations aux dérivées partielles du second ordre dont l'intégrale affecte la forme

$$z = f[\mathrm{U}(u),\ \mathrm{V}(v), x, y] :$$

u et v sont deux fonctions données des variables x et y, fonctions qui sont en outre essentiellement indépendantes; U et V sont deux fonctions arbitraires de u et de v respectivement; f est une fonction donnée de U, V, x et y. On transforme tout d'abord l'équation des trajectoires du complexe considéré en substituant aux variables x et y les nouvelles variables u et v, ce qui est possible en vertu de l'hypothèse faite relativement à l'indépendance de ces fonctions : l'équation des trajectoires conserve sa propriété caractéristique qui consiste en l'absence de la fonction inconnue. On est ainsi ramené au cas où u et v se réduisent respectivement aux variables x et y, c'est-à-dire au cas où l'on a

$$z = f(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, x, y);$$

pour que le complexe admette des trajectoires qui rentrent dans cette équation il faut qu'une équation du type

$$\mathcal{F}(\mathrm{X}', \mathrm{Y}', \mathrm{X}, \mathrm{Y}, x, y) = 0,$$

entre x, y, X, Y, et les dérivées de X et de Y, admette au moins une solution (X, Y). La condition nécessaire et suffisante d'existence d'une telle solution est que $\mathcal{F}$ puisse être mise sous la forme

$$\xi(\mathrm{X}', \mathrm{X}, x) = \eta(\mathrm{Y}', \mathrm{Y}, y)$$

ou soit décomposable en plusieurs relations de cette nature. Dans le cas d'une relation unique, on obtient non seulement un couple de solutions, mais encore une infinité : on intègre, à cet effet, les équations différentielles du premier ordre

$$\xi(\mathrm{X}', \mathrm{X}, x) = \sigma,$$
$$\eta(\mathrm{Y}', \mathrm{Y}, y) = \sigma,$$

qui donnent

$$\mathrm{X} = \text{fonction de } x, \sigma, x_0,$$
$$\mathrm{Y} = \text{fonction de } y, \sigma, y_0;$$

dans le cas le plus favorable, on a une famille de surfaces trajectoires dépendant de trois paramètres arbitraires σ, x_0, y_0. Pour que le problème soit résoluble, il suffit que finalement, après toutes les réductions possibles, il subsiste un paramètre et que ce paramètre figure dans l'expression de z sous forme non additive. La présence de trois paramètres permet de concevoir que, dans la plupart des cas, on obtiendra une infinité de trajectoires particulières auxquelles sera applicable le théorème de M. Darboux. C'est d'ailleurs ce qui arrive pour l'équation $s = 0$ des surfaces de M. Appell. Les deux constantes d'intégration x_0 et y_0 s'additionnent, ce qui réduit le nombre de constantes à deux dans l'expression définitive de z; l'une de ces constantes se présente sous forme additive; l'autre, σ, correspond à une famille de surfaces non parallèles.

Comme second exemple, je considérerai les surfaces moulures. L'équation du second ordre de ces surfaces est, en coordonnées géographiques φ et ψ,

$$q \operatorname{tg} \varphi + s = 0 ;$$

elle peut être mise sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{q}{\cos \varphi}\right) = 0 ;$$

l'équation de l'intégrale générale est

$$\varpi = \Phi + \cos \varphi \, . \, \Psi,$$

en introduisant deux fonctions arbitraires respectives de φ et de ψ. On doit tout d'abord mettre en évidence les complexes pour lesquels toutes les trajectoires appartiennent à cette classe de surfaces : l'équation aux dérivées partielles des trajectoires est nécessairement de la forme

$$\frac{q}{\cos \varphi} = \mathrm{F}(\psi),$$

F étant quelconque; le complexe est donc un complexe d'équation

$$\frac{p_6}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}} = \text{fonction homogène et de degré zéro de } p_1 \text{ et de } p_2 ;$$

un tel complexe d'équation

$$\frac{p_6}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}} = f\left(\frac{p_1}{p_2}\right),$$

appartient à la famille étudiée au paragraphe 17 des complexes invariants dans la translation infinitésimale parallèle à Oz. La trajectoire générale est une surface moulure pour laquelle Ψ est déterminée par quadrature, lorsque le complexe est donné, et Φ une fonction arbitraire.

Laissant de côté ces complexes exceptionnels, un complexe quelconque n'aura nécessairement pas pour trajectoires des surfaces moulures : pour qu'il en soit ainsi, il faudra qu'une certaine relation entre $\frac{d\Phi}{d\varphi}$, φ, $\frac{d\Psi}{d\psi}$, Ψ et ψ soit vérifiée. En vertu de l'indépendance des variables φ et ψ, il suffit que cette relation se présente sous la forme à variables séparées

$$f_1(\Phi', \varphi) = f_2(\Psi', \Psi, \psi) ;$$

d'où, en introduisant un paramètre σ représentant la valeur commune des deux termes, Φ par une quadrature, et Ψ par une équation différentielle du premier ordre.

La constante provenant de la quadrature qui donne Φ est une constante additive dans ϖ. Il reste donc deux constantes à considérer. On arrive ainsi à un théorème analogue à celui qui concerne les surfaces de M. Appell. La seule différence consiste dans ce que Ψ est donnée par une équation du premier ordre et que l'intégrale déterminée dépend de deux constantes, en plus de celle qui est additive. Il résulte de là qu'il ne sera pas nécessaire d'intégrer l'équation en Ψ; si σ est arbitraire, il suffira, en général, d'obtenir une intégrale particulière de cette équation différentielle. On pourra de même donner à σ une valeur particulière et intégrer l'équation différentielle correspondante. Il s'agit uniquement d'obtenir une intégrale dépendant d'une constante arbitraire non additive à laquelle on pourra alors appliquer le théorème de M. Darboux, et l'on conçoit l'inutilité de l'intégration de l'équation différentielle pour toute valeur du paramètre σ.

[**34**] Les considérations précédentes s'étendent aux solutions que l'on sait être *a priori* de la forme

$$z = F[U^{(n)}, V^{(n)}, U^{(n-1)}, V^{(n-1)}, \ldots, U', V', u, v, x, y],$$

où $U^{(n)}$, $V^{(n)}$ désignent des dérivées des fonctions U de u et V de v (¹). C'est le cas des solutions qui sont des surfaces *minima;* l'équation du second ordre des surfaces *minima* en coordonnées symétriques

$$(1 + xy)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 2z = 0$$

admet l'intégrale générale

$$z = X' + Y' - 2\frac{xY + yX}{1 + xy}.$$

Il n'y a pas lieu de chercher des complexes dont toutes les trajectoires soient des surfaces *minima*, puisque la dilatation transforme les surfaces *minima* en des surfaces qui ne sont plus *minima*. Un complexe quelconque n'aura, en général, pas de trajectoire qui soit une surface *minima*. Pour qu'un complexe ait une trajectoire de cette nature, il sera nécessaire que l'on ait une ou plusieurs relations à variables séparées de la forme

$$\xi(X'', X', X, x) = \eta(Y'', Y', Y, y);$$

plaçons-nous dans le cas d'une relation unique; on posera, comme précédemment :

$$\xi(X'', X', X, x) = \sigma,$$
$$\eta(Y'', Y', Y, y) = \sigma,$$

(¹) Plus généralement, on pourrait supposer que z a une forme analogue où figurent plusieurs fonctions de la variable u et plusieurs fonctions de la variable v; la question dépend alors de certaines équations fonctionnelles auxquelles Abel consacra un Mémoire important; la méthode d'Abel conduisant à des calculs compliqués, qui la rendent souvent impraticable, M. Kœnigs a signalé une méthode plus puissante, empruntée à la théorie des fonctions.

d'où l'on déduira

$$X = \text{fonction de } (x, \sigma, x_0, x_1),$$
$$Y = \text{fonction de } (y, \sigma, y_0, y_1).$$

Dans le cas le plus favorable, on aura donc une famille de surfaces *minima* dépendant de cinq constantes arbitraires x_0, x_1, y_0, y_1, σ; on connaîtra ainsi, en considérant les surfaces parallèles aux précédentes, une famille de trajectoires particulières dépendant de six paramètres.

Le problème se complique donc, puisque X, Y dépendent d'équations du second ordre; mais le nombre des constantes arbitraires augmente simultanément. En observant que, pour pouvoir appliquer le théorème de M. Darboux, il suffit d'avoir une famille à un paramètre de solutions non parallèles, on pourra considérablement simplifier, en donnant, par exemple, à certaines constantes des valeurs toutes particulières.

Comme exemple de complexes admettant des surfaces *minima* pour trajectoires, on peut citer le complexe linéaire. Soit l'équation

$$p_6 = ap_3,$$

à laquelle correspond l'équation aux dérivées partielles des trajectoires

$$q = a \sin \varphi;$$

cette équation est satisfaite par l'intégrale dépendant de deux constantes A et A_1,

$$\varpi = a\psi \sin \varphi + A_1 \sin \varphi + A\left[\sin \varphi \operatorname{Log} \operatorname{tang}\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - 1\right]$$

qui représente des surfaces *minima*, puisque l'équation générale de celles-ci est, en coordonnées géographiques :

$$(\varpi + r) \cos^2 \varphi + \varpi \cos^2 \varphi + t - p \sin \varphi \cos \varphi = 0;$$

ces surfaces *minima* peuvent être construites au moyen de l'hélicoïde gauche à plan directeur et du caténoïde.

Dans le cas actuel, les relations à variables séparées, entre les fonctions X, Y et leurs dérivées, sont au nombre de deux :

$$xX'' - yY'' = ai,$$
$$\frac{X}{x} - \frac{Y}{y} - X' + Y' = -ai;$$

elles admettent la solution commune :

$$X = x\left[B + (A + \frac{1}{2}ai)(\operatorname{Log} x - 1)\right], \qquad Y = y\left[C + (A - \frac{1}{2}ai)(\operatorname{Log} y - 1)\right],$$

qui conduit à la famille précédente de surfaces *minima* dépendant de deux paramètres A et B + C.

[35] Aux paragraphes précédents, j'ai mis en évidence des cas où le problème de Transon est résoluble lorsqu'on connaît une solution unique ou même lorsqu'on sait *a priori* qu'il existe une solution d'une certaine nature. Mais il est des cas nombreux se rattachant à des considérations différentes de celles qui précèdent, où il suffit de connaître une solution unique; en voici d'ailleurs un exemple (1).

Considérons un complexe de droites (C) dont tout cône admet un axe de symétrie; les axes de symétrie des cônes du complexe (C) constituent un nouveau complexe (C'). Soit (S) une trajectoire de (C'); tout rayon du complexe (C) se réfléchissant sur (S) est, après réflexion, un rayon de (C). En d'autres termes, *le complexe* (C) *est invariant par réflexion sur toute trajectoire du complexe* (C'). Si maintenant on envisage une congruence de normales du complexe (C), elle reste après réflexion sur (S) une congruence de (C) et, en vertu du théorème de Malus, elle reste une congruence de normales. Comme une congruence de normales déterminée de (C) ne sera pas invariante pour toutes les réflexions de cette espèce, on pourra engendrer ainsi toutes les congruences de normales du complexe (C) si on connaît toutes les trajectoires du complexe (C') et une congruence de normales de (C).

Lorsque le problème de Transon est résolu pour le complexe (C'), *si une congruence de normales de* (C) *est connue, le problème de Transon est résolu pour* (C).

Il arrive souvent que le problème est plus simple pour le complexe (C') que pour le complexe (C). C'est ainsi que, lorsque le complexe (C) est le complexe quadratique spécial, le complexe (C') est le complexe tétraédral.

Si le complexe (C) est le complexe des droites équidistantes de deux points (§ 8)

$$p_4 p_2 - p_5 p_1 = 0,$$

le cône issu du point (x, y, z), en coordonnées ordinaires, a pour équation

$$zX^2 + zY^2 - xXZ - yYZ = 0;$$

les trois racines de l'équation en S sont

$$z \quad , \frac{1}{2}\left[z \pm \sqrt{x^2+y^2+z^2}\right];$$

à la première correspond un axe de symétrie qui engendre le complexe (C') linéaire spécial attaché à la droite de l'infini de Oxy, complexe dont les trajectoires sont des cylindres parallèles à Oz; à chacune des deux autres racines correspond un axe de symétrie de direction

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z \pm \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

(1) Voir mon article intitulé *Une application du théorème de Malus au problème de Transon* (Nouvelles Annales de mathématiques, 1911, p. 160).

qui engendre le complexe (C′) linéaire spécial des droites rencontrant Oz, dont les trajectoires sont les surfaces de révolution autour de Oz.

Les considérations précédentes sont applicables aux complexes quadratiques, puisque à tout complexe quadratique correspondent trois complexes (C′). Dans le cas du complexe linéaire (C), il existe un complexe (C′) qui est celui des droites perpendiculaires aux plans focaux en chaque foyer (§ 47) et une infinité de complexes (C′) qui sont identiques avec le complexe linéaire lui-même.

Ce cas n'est pas le seul pour lequel tout cône du complexe admet une infinité d'axes de symétrie. Soit en effet le complexe (C) d'équation

$$(a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3 + a_4p_4 + a_5p_5 + a_6p_6)^2 = a^2(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2),$$

a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a désignant sept constantes arbitraires. Tout cône du complexe de sommet M est bitangent au cône isotrope de même sommet le long des deux génératrices situées dans le plan focal de M par rapport au complexe linéaire (Γ) d'équation

$$a_1p_1 + a_2p_2 + a_3p_3 + a_4p_4 + a_5p_5 + a_6p_6 = 0;$$

en d'autres termes, tout cône du complexe est de révolution : l'axe de révolution est la perpendiculaire en M au plan focal de M par rapport à (Γ). Au complexe considéré (C) correspondent donc deux complexes (C′) identiques à ceux qui sont associés au complexe linéaire (Γ) (1).

---

(1) Voir mon article *Sur un complexe quadratique dont tous les cônes sont de révolution* (Nouvelles Annales de mathématiques, 1911, p. 308). — Le complexe (C) peut être considéré comme un complexe de révolution et comme un complexe de translation : son équation est en effet réductible par changement d'axes à la forme canonique

$$(p_6 + kp_3)^2 = a^2(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2);$$

le complexe est décomposable en deux complexes semi-linéaires et l'on a

$$\frac{\partial \varpi}{\partial \psi} + k \sin \varphi = a,$$

d'où la trajectoire la plus générale :

$$\varpi = (a - k \sin \varphi)\psi + \Phi.$$

Ces surfaces jouissent de la propriété suivante : les images sphériques des lignes de courbure de chaque système se déduisent de l'une d'elles par rotation autour de Oz.

En coordonnées cartésiennes ordinaires, l'équation aux dérivées partielles des mêmes surfaces est :

$$\frac{qx - py - k}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} = a;$$

on reconnaît une équation qui a été étudiée par M. Darboux (p. 86 des *Leçons sur les systèmes triple-orthogonaux*) et par M. J. Haag dans sa Thèse de Doctorat (*Familles de Lamé, composées de surfaces égales*, p. 11, Annales de l'École Normale, 1910). M. Darboux a caractérisé les surfaces intégrales de cette équation par la propriété d'être superposables aux surfaces qui leur sont parallèles; M. Haag a donné une construction de leurs congruences de normales par la considération des deux hélicoïdes qui constituent la développée de chacune de ces surfaces.

CHAPITRE IX.

Complexes spéciaux et complexes dont la congruence des droites singulières est une congruence de normales.

Intérêt du problème de Transon pour un complexe spécial. — Les complexes spéciaux jouissent de la propriété de conduire à des équations dont les caractéristiques sont des lignes de courbure des surfaces trajectoires. — Condition nécessaire et suffisante pour qu'une figuratrice donnée soit associée à un complexe spécial. — Complexes dont les droites singulières constituent une congruence de normales. Application à des complexes antérieurement envisagés.

[**36**] Étant donné un complexe de droites pour lequel on se propose de résoudre le problème de Transon, on devra examiner toujours si ce complexe est spécial ou non. Pour un complexe spécial, en effet, le problème de Transon est identique au problème des géodésiques sur la surface de singularité (¹), puisque les tangentes à une famille de géodésiques dépendant d'un paramètre sont les rayons d'une congruence de normales.

Les géodésiques d'une quadrique, par exemple, dépendant de quadratures hyperelliptiques, le problème de Transon pour le complexe spécial quadratique dépend des mêmes quadratures. J'ai résolu plus haut (§§ 15 et 16) le problème pour les complexes spéciaux attachés au cône de révolution ou à la sphère.

[**37**] En se plaçant au point de vue du problème de Transon, les complexes spéciaux sont caractérisés par une propriété intéressante. Étant donné un complexe d'équation

$$C(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6) = 0,$$

en coordonnées plückériennes, les équations

$$C = 0,$$

$$\Omega \equiv \frac{\partial C}{\partial p_1}\frac{\partial C}{\partial p_4} + \frac{\partial C}{\partial p_2}\frac{\partial C}{\partial p_5} + \frac{\partial C}{\partial p_3}\frac{\partial C}{\partial p_6} = 0$$

sont, d'après Cayley et Klein, celles de la congruence des droites singulières. Pour qu'un complexe soit spécial, il faut et il suffit que la relation

$$C = 0,$$

entre les coordonnées plückériennes, entraîne la relation

$$\Omega = 0.$$

(¹) Ce théorème bien connu est établi dans le Mémoire de Geisenheimer, *Sur les systèmes de rayons formés par les tangentes à une surface* (Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1872).

Cela étant rappelé, considérons un complexe dans l'équation duquel nous supposons p_6 éliminée à l'aide de la relation identique

$$p_1 p_4 + p_2 p_5 + p_3 p_6 = 0;$$

on ne diminue en rien la généralité d'une équation de complexe en faisant ainsi disparaître une des coordonnées. Soit donc

$$C(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = 0,$$
$$\Omega \equiv \frac{\partial C}{\partial p_1}\frac{\partial C}{\partial p_4} + \frac{\partial C}{\partial p_2}\frac{\partial C}{\partial p_5};$$

en coordonnées cartésiennes, l'équation des surfaces trajectoires est celle que considéra Lie comme invariante dans la dilatation infinitésimale

$$C[p, q, -1, -(y + qz), x + pz] = 0,$$

ou encore

$$F(p, q, x + pz, y + qz) = 0.$$

D'autre part, la condition pour qu'une équation

$$f(p, q, z, x, y) = 0$$

du premier ordre soit telle que les caractéristiques constituent, sur toute intégrale, une famille de lignes de courbure est, d'après Lie [1],

$$\left[\frac{\partial f}{\partial p} + p\left(p\frac{\partial f}{\partial p} + q\frac{\partial f}{\partial q}\right)\right]\left(\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \left[\frac{\partial f}{\partial q} + q\left(p\frac{\partial f}{\partial p} + q\frac{\partial f}{\partial q}\right)\right]\left(\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}\right);$$

transformons-la à l'aide de la relation (§ 13)

$$\frac{\partial f}{\partial z} = p\frac{\partial f}{\partial x} + q\frac{\partial f}{\partial y}$$

caractéristique, d'après Lie, des équations invariantes dans la dilatation infinitésimale. Il vient

$$(1 + p^2 + q^2)\left(\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 0;$$

le facteur $1 + p^2 + q^2$, qui correspond aux développables isotropes, étant supprimé, il reste la relation

$$\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

qui est donc la condition nécessaire et suffisante pour que les caractéristiques d'une équation de trajectoires d'un complexe soient lignes de courbure des surfaces trajectoires; il résulte de la forme de l'équation $F = 0$ que cette condition est équivalente à la condition $\Omega = 0$. Ainsi :

---

(1) Sophus Lie, *Geometrie der Berührungstransformationen*, p. 657.

La condition nécessaire est suffisante pour que, dans le problème de Transon, les caractéristiques soient lignes de courbure des surfaces trajectoires est que le complexe soit spécial.

[**38**] Étant donné un complexe représenté par sa figuratrice, en coordonnées symétriques pour fixer les idées, cherchons la condition nécessaire et suffisante qui doit être imposée à cette figuratrice pour que le complexe soit spécial.

L'équation $f=0$ du complexe, en coordonnées plückériennes, et celle, $\Gamma=0$, de la figuratrice sont liées entre elles par la relation identique, en vertu des expressions des coordonnées plückériennes données au paragraphe 6 :

$$f(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6) \equiv \Gamma(p, q, x, y).$$

Il en résulte que l'on a par dérivations partielles de cette identité par rapport à p, à q, à x et à y :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Gamma}{\partial p} &= X_1 \frac{\partial f}{\partial p_4} + X_2 \frac{\partial f}{\partial p_5} + X_3 \frac{\partial f}{\partial p_6} \equiv \mathbf{S}\, X_1 \frac{\partial f}{\partial p_4},\\
\frac{\partial \Gamma}{\partial q} &= Y_1 \frac{\partial f}{\partial p_4} + Y_2 \frac{\partial f}{\partial p_5} + Y_3 \frac{\partial f}{\partial p_6} \equiv \mathbf{S}\, Y_1 \frac{\partial f}{\partial p_4},\\
\frac{\partial \Gamma}{\partial x} &= p\, \mathbf{S}\, X_1' \frac{\partial f}{\partial p_4} + \mathbf{S} \frac{\partial p_1}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial p_1},\\
\frac{\partial \Gamma}{\partial y} &= q\, \mathbf{S}\, Y_1' \frac{\partial f}{\partial p_4} + \mathbf{S} \frac{\partial p_1}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial p_1},
\end{aligned}$$

en posant [formules (10) du paragraphe 6] :

$$p_4 = X_1 p + Y_1 q, \qquad p_5 = X_2 p + Y_2 q, \qquad p_6 = X_3 p + Y_3 q;$$

dans ces formules, les X et les Y désignent des fonctions bien déterminées des variables respectives x et y; les X' et les Y' sont leurs dérivées; adjoignons la relation qui résulte de l'homogénéité de f par rapport aux six coordonnées plückériennes :

$$\mathbf{S}\, p_1 \frac{\partial f}{\partial p_1} + \mathbf{S}\, p_4 \frac{\partial f}{\partial p_4} = 0.$$

Nous avons cinq équations linéaires en $\frac{\partial f}{\partial p_1}, \ldots\ldots, \frac{\partial f}{\partial p_6}$, c'est-à-dire cinq équations à six inconnues. Introduisons un paramètre arbitraire θ par la relation supplémentaire

$$p_1 \frac{\partial f}{\partial p_4} + p_2 \frac{\partial f}{\partial p_5} + p_3 \frac{\partial f}{\partial p_6} = \theta;$$

ce paramètre auxiliaire θ ne servira qu'à conserver la symétrie dans les calculs;

il disparaîtra d'ailleurs dans le résultat définitif; trois des équations donnent alors $\frac{\partial f}{\partial p_4}, \frac{\partial f}{\partial p_5}, \frac{\partial f}{\partial p_6}$:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial p_4} &= p_1\theta - i\frac{\partial p_1}{\partial x}\frac{\partial \Gamma}{\partial p} + i\frac{\partial p_1}{\partial y}\frac{\partial \Gamma}{\partial q}, \\ \frac{\partial f}{\partial p_5} &= p_2\theta - i\frac{\partial p_2}{\partial x}\frac{\partial \Gamma}{\partial p} + i\frac{\partial p_2}{\partial y}\frac{\partial \Gamma}{\partial q}, \\ \frac{\partial f}{\partial p_6} &= p_3\theta - i\frac{\partial p_3}{\partial x}\frac{\partial \Gamma}{\partial p} + i\frac{\partial p_3}{\partial y}\frac{\partial \Gamma}{\partial q}; \end{aligned}\right.$$

portons ces expressions dans Ω :

$$\Omega \equiv \mathrm{S}\frac{\partial f}{\partial p_1}\frac{\partial f}{\partial p_4} = \theta\,\mathrm{S}\,p_1\frac{\partial f}{\partial p_1} - i\frac{\partial \Gamma}{\partial p}\mathrm{S}\frac{\partial p_1}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial p_1} + i\frac{\partial \Gamma}{\partial q}\mathrm{S}\frac{\partial p_1}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial p_1};$$

nous avons :

$$\mathrm{S}\,p_1\frac{\partial f}{\partial p_1} = -\mathrm{S}\,p_4\frac{\partial f}{\partial p_4} = -\left[p\,\mathrm{S}\,\mathrm{X}_1\frac{\partial f}{\partial p_4} + q\,\mathrm{S}\,\mathrm{Y}_1\frac{\partial f}{\partial p_4}\right] = -\left[p\frac{\partial \Gamma}{\partial p} + q\frac{\partial \Gamma}{\partial q}\right],$$

$$\mathrm{S}\frac{\partial p_1}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial p_1} = \frac{\partial \Gamma}{\partial x} - p\left[\theta\,\mathrm{S}\,p_1\frac{d\mathrm{X}_1}{dx} - i\frac{\partial \Gamma}{\partial p}\mathrm{S}\frac{\partial p_1}{\partial x}\frac{d\mathrm{X}_1}{dx}\right],$$

$$\mathrm{S}\frac{\partial p_1}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial p_1} = \frac{\partial \Gamma}{\partial y} - q\left[\theta\,\mathrm{S}\,p_1\frac{d\mathrm{Y}_1}{dy} + i\frac{\partial \Gamma}{dq}\mathrm{S}\frac{\partial p_1}{\partial y}\frac{d\mathrm{Y}_1}{dy}\right];$$

d'où finalement :

$$i(1+xy)\Omega = (1+xy)\left[\frac{\partial \Gamma}{\partial x}\frac{\partial \Gamma}{\partial p} - \frac{\partial \Gamma}{\partial y}\frac{\partial \Gamma}{\partial q}\right] + 2qx\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial q}\right)^2 - 2py\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial p}\right)^2.$$

La condition $\Omega = 0$ peut donc être mise sous la forme remarquable suivante, en introduisant la distance Δ de l'origine O au rayon du complexe par la formule (3) du paragraphe 6 :

$$\Delta^2 = pq(1+xy)^2,$$

$$p\frac{\partial \Gamma}{\partial p}\,\mathcal{J}\left(\frac{\Gamma, \Delta}{x, p}\right) = q\frac{\partial \Gamma}{\partial q}\,\mathcal{J}\left(\frac{\Gamma, \Delta}{y, q}\right).$$

Cette relation doit être identiquement satisfaite ou sinon elle doit résulter de l'équation $\Gamma = 0$; en d'autres termes, si on regarde $\Omega = 0$ comme représentant une figuratrice, cette nouvelle figuratrice doit être identique, pour toutes valeurs de x et de y, à celle du complexe spécial. On vérifiera, par exemple, que la condition $\Omega = 0$ est identiquement remplie pour le complexe spécial attaché à une sphère

$$\Gamma \equiv pq(1+xy)^2 - \mathrm{R}^2,$$

et qu'elle est une conséquence de l'équation

$$\Gamma = px - qy = 0$$

pour le complexe linéaire spécial [1].

[**39**] La considération de la condition $\Omega = 0$ est susceptible d'un certain nombre d'applications. Je vais utiliser l'expression trouvée de Ω, pour généraliser, en un certain sens, la notion de complexe spécial.

Considérons un complexe non spécial; pour ce complexe, la congruence des droites singulières n'est pas, en général, une congruence de normales. Un problème intéressant et qui constitue une application des figuratrices consiste à rechercher quels sont les complexes qui jouissent de la propriété d'avoir une congruence de normales pour congruence des droites singulières. Le complexe de figuratrice $\Gamma = 0$ n'étant pas spécial, la relation $\Omega = 0$ représente une courbe dans le plan (p, q) qui est distincte de $\Gamma = 0$, pour les valeurs quelconques de x et de y tout au moins; cette courbe $\Omega = 0$ étant considérée comme une figuratrice définit un second complexe dont l'intersection avec le premier est la congruence des droites singulières de celui-ci.

Deux complexes quelconques étant représentés par leurs figuratrices $\Gamma_1 = 0$ et $\Gamma_2 = 0$, leur intersection est une congruence de normales si ces équations $\Gamma_1 = 0$ et $\Gamma_2 = 0$ fournissent pour p et q des expressions en x et y satisfaisant à la relation supplémentaire

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x};$$

puisque Γ_1 et Γ_2 ne contiennent pas explicitement la fonction inconnue, la condition d'une telle compatibilité s'obtient en annulant la *parenthèse*

$$(\Gamma_1, \Gamma_2) = 0.$$

Dans le cas actuel, il suffit donc d'écrire

$$(\Gamma, \Omega) = 0,$$

la seule différence avec le cas général consistant dans le fait que Ω dépend de Γ. On

---

(1) En coordonnées géographiques, on obtient de même, par un calcul un peu long, mais qui ne présente pas de difficulté, la condition analogue

$$\Omega \equiv \frac{q \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial p}\right)^2 - p \sin \varphi \frac{\partial \Gamma}{\partial p}\frac{\partial \Gamma}{\partial q} - q \sin \varphi \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial q}\right)^2 - \frac{1}{\cos \varphi}\frac{\partial \Gamma}{\partial p}\frac{\partial \Gamma}{\partial \psi} + \cos \varphi \frac{\partial \Gamma}{\partial q}\frac{\partial \Gamma}{\partial \varphi} = 0;$$

elle est identiquement satisfaite pour

$$\Gamma = p^2 + \frac{q^2}{\cos^2 \varphi},$$

et elle est une conséquence de $\Gamma = 0$, pour $\Gamma = q$.

est ainsi conduit à une équation aux dérivées partielles du second ordre à laquelle doit satisfaire la fonction Γ des quatre variables indépendantes p, q, x, y. C'est de cette équation que dépendent les complexes considérés.

[**40**] Voici un cas particulier assez remarquable. Considérons les complexes

$$p_4^2 + p_5^2 + p_6^2 = f(p_1, p_2, p_3)$$

des paragraphes 23 et sq. La figuratrice d'un tel complexe est

$$\Gamma \equiv pq(1 + xy)^2 - F(x, y) \equiv \Delta^2 - F(x, y) = 0;$$

la condition $\Omega = 0$, c'est-à-dire

$$p\frac{\partial \Gamma}{\partial p} \mathcal{J}\left(\frac{\Gamma, \Delta}{x, p}\right) = q\frac{\partial \Gamma}{\partial q} \mathcal{J}\left(\frac{\Gamma, \Delta}{y, q}\right),$$

donne immédiatement :

$$q\frac{\partial F}{\partial x} = p\frac{\partial F}{\partial y}.$$

Il en résulte tout d'abord que, parmi les complexes considérés, les seuls qui soient spéciaux sont ceux qui correspondent aux valeurs constantes de F : ce sont les complexes spéciaux attachés aux diverses sphères de centre O (§ 16). Posons

$$p = \mu\frac{\partial F}{\partial x}, \qquad q = \mu\frac{\partial F}{\partial y},$$

μ étant une fonction définie par la relation

$$(1 + xy)^2 \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}\mu^2 - F = 0;$$

μ est donc une fonction de x et de y ; écrivant alors la condition de compatibilité, il vient :

$$\mathcal{J}\left(\frac{\mu, F}{x, y}\right) = 0;$$

il en résulte que F est solution de l'équation

$$(1 + xy)^2 \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y} = \text{fonction arbitraire de } F;$$

on considérera donc une surface quelconque dont les normales appartiennent au complexe spécial attaché à une sphère de centre O ; soit $z_0(x, y)$ l'intégrale générale de l'équation

$$(1 + xy)^2 pq = 1;$$

cette fonction $z_0(x, y)$ représente la surface précédente ; on posera

$$F = \mathcal{F}(z_0),$$

$\mathcal{F}$ étant arbitraire. Telle est la forme de $F(x, y)$; la congruence des droites singulières est la congruence des normales à une surface, pour laquelle z est également une fonction de z_0; on a, en effet,

$$dz = \mu\, dF,$$

μ étant fonction de F qui est elle-même fonction de z_0; il existe donc une relation entre les distances de O au plan tangent et à la normale à la surface, laquelle est dès lors une surface de Monge dont une nappe de la développée est un cône de sommet O.

CHAPITRE X.

Application de la théorie des tourbillons au problème de Transon.

Définition d'un complexe par Transon. Formation de l'équation linéaire de Transon; son interprétation : les surfaces résolvantes sont les surfaces de tourbillon d'un certain champ de vecteurs. — Application au complexe tétraédral : réduction aux équations d'Euler.

[**41**] Dans les chapitres qui suivent, je me propose de reprendre la méthode même de Transon et de la rattacher à la méthode que j'ai déduite du théorème de M. Darboux.

A chaque point de l'espace, de coordonnées (x, y, z), Transon associe une droite issue de ce point. Ces droites forment, *en général*, un complexe et, réciproquement, tout complexe de droites peut être défini de cette façon et la définition est possible d'une infinité de manières. Il convient cependant d'observer que parfois ce mode de génération, au lieu de conduire à un complexe, peut fournir une congruence : l'exemple le plus simple et le plus remarquable est celui des focales des cônes circonscrits à une quadrique donnée; si à chaque point de l'espace sont associées les focales du cône circonscrit à la quadrique et ayant le point pour sommet, on constitue une congruence qui n'est autre que celle des génératrices des quadriques homofocales à la quadrique donnée (1).

Considérons un complexe défini par des droites analytiquement associées à tous les points de l'espace. De chaque point (x, y, z) part une droite de cosinus directeurs X, Y, Z; X, Y, Z sont trois fonctions des trois variables liées par la relation

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1.$$

(1) Cette congruence remarquable est une congruence isotrope et une congruence d'axes optiques qui a été étudiée par M. Darboux et par M. E. Cosserat (cf. le Mémoire de M. Cosserat *Sur les congruences formées par les axes optiques et sur les surfaces à courbure totale constante*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1894).

Si l'expression $X dx + Y dy + Z dz$, dans laquelle x, y, z sont des variables indépendantes, est une différentielle totale exacte, la totalité des droites du complexe se répartit immédiatement en congruences de normales aux surfaces intégrales de l'équation

$$X dx + Y dy + Z dz = 0;$$

il en est ainsi lorsque X, Y, Z sont les dérivées d'une fonction (x, y, z). Lorsqu'il n'en est pas ainsi, pour avoir toutes les congruences de normales appartenant au complexe, il suffit d'exprimer que la même expression est une différentielle exacte des deux variables indépendantes x et y, par exemple; le point de départ d'un rayon quelconque d'une congruence de normales appartenant au complexe est alors sur une surface à laquelle Transon donne le nom de *surface résolvante.*

p et q étant les dérivées de z, par rapport à x et à y, l'équation générale des surfaces résolvantes est

$$p\left(\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y}\right)+q\left(\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z}\right)=\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x};$$

c'est l'équation donnée par Transon; on peut l'établir de bien des façons. On a, par exemple,

$$X dx + Y dy + Z dz = (X + pz) dx + (Y + qz) dy;$$

d'où l'on déduit

$$\frac{d}{dy}(X + pZ) = \frac{d}{dx}(Y + qZ);$$

en développant, on obtient l'équation précédente. On peut encore appliquer la condition nécessaire et suffisante pour qu'une congruence de droites définies par des points de départ soit une congruence de normales :

$$\mathfrak{J}(x, X) + \mathfrak{J}(y, Y) + \mathfrak{J}(z, Z) = 0,$$

$\mathfrak{J}(x, X)$, par exemple, désignant le jacobien de x et de X par rapport aux deux paramètres qui fixent les rayons de la congruence; il n'y a qu'à prendre pour paramètres x et y.

Considérons enfin un contour fermé (C) et une surface (S) quelconque à deux côtés, simplement connexe, limitée au contour (C). Appliquons le théorème d'Ampère-Stokes, c'est-à-dire écrivons que la circulation du vecteur X, Y, Z le long du contour est équivalente au flux du tourbillon T_x, T_y, T_z de ce vecteur à travers la surface (S) :

$$\int_{(C)} X dx + Y dy + Z dz = \iint_{S} (p T_x + q T_y - T_z)\, dx\, dy;$$

si (S) est quelconque, $X dx + Y dy + Z dz$ n'est pas une différentielle exacte; mais si z est choisie convenablement, cette expression peut être une différentielle exacte des variables indépendantes x et y; si donc (C) est sur une surface résolvante, on aura

$$\int X dx + Y dy + Z dz = 0,$$

$$\iint (p T_x + q T_y - T_z)\, dx\, dy = 0;$$

pour une surface résolvante, cette dernière relation sera donc satisfaite pour toute portion et, en particulier, pour tout élément de la surface. Nous arrivons ainsi à une définition remarquable des surfaces résolvantes :

Une surface résolvante est une surface pour chaque élément de laquelle le flux du tourbillon du vecteur X, Y, Z *est nul.*

L'équation des surfaces résolvantes est donc

$$p T_x + q T_y - T_z = 0.$$

De ces diverses méthodes de formation de l'équation de Transon, la première est la plus naturelle et la plus simple; la seconde nous sera utile pour généraliser ultérieurement (chap. XI); la troisième enfin donne sans calcul l'équation des *résolvantes qui se trouvent définies comme les surfaces de tourbillon du champ de vecteurs* (X, Y, Z).

Les caractéristiques elles-mêmes de cette équation linéaire, caractéristiques qui sont les intégrales des équations différentielles

$$\frac{dx}{\dfrac{\partial Y}{\partial z} - \dfrac{\partial Z}{\partial y}} = \frac{dy}{\dfrac{\partial Z}{\partial x} - \dfrac{\partial X}{\partial z}} = \frac{dz}{\dfrac{\partial X}{\partial y} - \dfrac{\partial Y}{\partial x}},$$

sont définies comme étant les lignes de tourbillon du même champ de vecteurs (¹).

[**42**] Avant d'aller plus loin, donnons un exemple remarquable, celui du complexe tétraédral. Considérons la quadrique d'équation

$$A x^2 + B y^2 + C z^2 - 1 = 0,$$

(¹) Transon ne pouvait, en 1861, donner une interprétation de cette nature, puisque les premiers théorèmes de la théorie des mouvements tourbillonnaires, dus à Helmholtz, datent de 1858 et puisque le premier ouvrage important exposant la théorie des tourbillons est celui de Kirchhoff publié en 1883. Toutefois, Transon remarqua que les plans tangents en un point aux différentes résolvantes y passant contiennent la droite de coefficients directeurs

$$\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}, \quad \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}.$$

Dans les *Comptes rendus* (t. LII, p. 1082), Ossian Bonnet donna la définition suivante des surfaces résolvantes : « Pour que la condition soit satisfaite, il faut et il suffit qu'après avoir pris « sur la surface (S) trois points infiniment voisins m, m', m'' tels que les éléments mm', mm'' « soient égaux et perpendiculaires, la différence des cosinus des angles que forment avec mm' « les droites D correspondantes aux points m et m' soit égale à la différence des cosinus des « angles que forment avec mm'' les droites D correspondantes aux points m et m''. »

par rapport à ses axes. Par un point quelconque (x, y, z) de l'espace menons la perpendiculaire d'équations

$$\frac{\xi - x}{Ax} = \frac{\eta - y}{By} = \frac{\zeta - z}{Cz}$$

sur le plan polaire, par rapport à la quadrique, du point (x, y, z). Nous définissons ainsi un complexe de droites, pour lequel on a :

$$X = \frac{Ax}{R}, \quad Y = \frac{By}{R}, \quad Z = \frac{Cz}{R},$$

R désignant une fonction de x, y, z déterminée par la relation

$$R^2 = A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2.$$

On sait, et l'on peut aisément vérifier à l'aide de ces expressions, que les droites précédentes constituent le complexe tétraédral d'équation

$$\frac{1}{A} p_1 p_4 + \frac{1}{B} p_2 p_5 + \frac{1}{C} p_3 p_6 = 0;$$

on obtient aisément

$$(T_x, T_y, T_z) = -\frac{ABC\,xyz}{R^3}\left(\frac{B-C}{Ax}, \frac{C-A}{By}, \frac{A-B}{Cz}\right);$$

il résulte de ces expressions des projections du tourbillon que les lignes de tourbillon ne sont autres que les intégrales des équations différentielles simultanées

$$A\frac{dx}{dt} + (C-B)yz = 0,$$

$$B\frac{dy}{dt} + (A-C)zx = 0,$$

$$C\frac{dz}{dt} + (B-A)xy = 0;$$

on reconnaît les équations d'Euler dont dépend le mouvement d'un corps solide ayant un point fixe et qui n'est soumis à aucune force. Les lignes de tourbillon sont, par conséquent, les biquadratiques gauches

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = \text{const.},$$
$$A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2 = \text{const.},$$

que l'on peut représenter au moyen des fonctions elliptiques. Les surfaces résolvantes ont pour équation générale :

$$F(Ax^2 + By^2 + Cz^2,\ A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2) = 0;$$

parmi ces surfaces résolvantes, il y a une double infinité de quadriques coaxiales.

CHAPITRE XI.

Équation de Transon en coordonnées curvilignes.

Extension de la méthode de Transon au cas de coordonnées curvilignes quelconques. — Examen du cas particulier des coordonnées orthogonales. — Application aux complexes de révolution.

[**43**] Au paragraphe 41, nous avons formé l'équation de Transon en supposant que les variables qui fixent les rayons du complexe soient les coordonnées cartésiennes du point de départ. Supposons maintenant que les coordonnées du point de départ et les cosinus directeurs de la droite qui part de ce point sont des fonctions données, d'ailleurs quelconques, de trois paramètres ρ_1, ρ_2, ρ_3. Reprenons la seconde méthode du paragraphe 41, en supposant que ρ_1, ρ_2 soient des variables et ρ_3 une fonction inconnue de ρ_1 et ρ_2; posons

$$p=\frac{\partial\rho_3}{\partial\rho_1}, \qquad q=\frac{\partial\rho_3}{\partial\rho_2};$$

on doit avoir :

$$\sum\left(\frac{\partial x}{\partial\rho_1}+\frac{\partial x}{\partial\rho_3}p\right)\left(\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial\rho_2}+\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial\rho_3}q\right)-\left(\frac{\partial x}{\partial\rho_2}+\frac{\partial x}{\partial\rho_3}q\right)\left(\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial\rho_1}+\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial\rho_3}p\right)=0,$$

c'est-à-dire, après simplification,

$$p\sum\mathfrak{J}\left(\frac{x,\mathrm{X}}{\rho_2,\rho_3}\right)+q\sum\mathfrak{J}\left(\frac{x,\mathrm{X}}{\rho_3,\rho_1}\right)=\sum\mathfrak{J}\left(\frac{x,\mathrm{X}}{\rho_1,\rho_2}\right),$$

le symbole $\mathfrak{J}\left(\frac{x,\mathrm{X}}{\rho_1,\rho_2}\right)$, par exemple, désignant le jacobien des fonctions x et X par rapport aux variables ρ_1 et ρ_2. Cette dernière équation linéaire est l'équation de Transon généralisée; les caractéristiques sont les courbes intégrales des équations différentielles :

$$\frac{d\rho_1}{\sum\mathfrak{J}\left(\frac{x,\mathrm{X}}{\rho_2,\rho_3}\right)}=\frac{d\rho_2}{\sum\mathfrak{J}\left(\frac{x,\mathrm{X}}{\rho_3,\rho_1}\right)}=\frac{d\rho_3}{\sum\mathfrak{J}\left(\frac{x,\mathrm{X}}{\rho_1,\rho_2}\right)}.$$

[**44**] Le système de coordonnées (ρ_1, ρ_2, ρ_3) étant toujours quelconque, supposons que (X, Y, Z) soient fonctions de ces coordonnées curvilignes par l'intermédiaire de (x, y, z); on a alors :

$$\sum\mathfrak{J}\left(\frac{x,\mathrm{X}}{\rho_2,\rho_3}\right)\equiv \mathrm{T}_x\,.\,\mathfrak{J}\left(\frac{y,z}{\rho_2,\rho_3}\right)+\mathrm{T}_y\,.\,\mathfrak{J}\left(\frac{z,x}{\rho_2,\rho_3}\right)+\mathrm{T}_z\,\mathfrak{J}\left(\frac{x,y}{\rho_2,\rho_3}\right),$$

T_x, T_y, T_z désignant les projections du tourbillon du vecteur X, Y, Z sur les axes $O(x, y, z)$. Posons

$$H_1'^2 = \sum \left[\mathcal{J}\left(\frac{y, z}{\rho_2, \rho_3}\right)\right]^2 = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial \rho_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho_2}\right)^2\right]\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \rho_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho_3}\right)^2\right] - \left[\frac{\partial x}{\partial \rho_2}\frac{\partial x}{\partial \rho_3} + \frac{\partial y}{\partial \rho_2}\frac{\partial y}{\partial \rho_3} + \frac{\partial z}{\partial \rho_2}\frac{\partial z}{\partial \rho_3}\right]^2, \ldots;$$

les cosinus directeurs de la normale à la surface coordonnée (ρ_1) sont précisément :

$$\frac{1}{H_1'}\mathcal{J}\left(\frac{y, z}{\rho_2, \rho_3}\right), \quad \frac{1}{H_1'}\mathcal{J}\left(\frac{z, x}{\rho_2, \rho_3}\right), \quad \frac{1}{H_1'}\mathcal{J}\left(\frac{x, y}{\rho_2, \rho_3}\right);$$

il en résulte que l'expression

$$\sum \mathcal{J}\left(\frac{x, X}{\rho_2, \rho_3}\right)$$

est égale au produit par H_1' de la projection orthogonale du tourbillon sur la normale à la surface coordonnée (ρ_1). Soient donc T_1, T_2, T_3 les projections orthogonales du tourbillon sur les normales aux surfaces coordonnées, qui ne sont pas encore supposées orthogonales entre elles ; les équations différentielles des caractéristiques de l'équation de Transon généralisée sont finalement :

$$\frac{d\rho_1}{H_1'T_1} = \frac{d\rho_2}{H_2'T_2} = \frac{d\rho_3}{H_3'T_3}.$$

Considérons, par exemple, le complexe tétraédral ; nous avons trouvé, au paragraphe 42, que les projections, sur les axes coordonnées, du tourbillon sont proportionnelles à

$$\frac{B-C}{Ax}, \quad \frac{C-A}{By}, \quad \frac{A-B}{Cz},$$

c'est-à-dire aux dérivées partielles de la fonction

$$V = \log\left(x^{\frac{B-C}{A}} \cdot y^{\frac{C-A}{B}} \cdot z^{\frac{A-B}{C}}\right);$$

le tourbillon est donc normal à celle des surfaces

$$x^{\frac{B-C}{A}} \quad y^{\frac{C-A}{B}} \quad z^{\frac{A-B}{C}} = \rho_1,$$

qui passe par le point de départ. A cette famille de surfaces, associons les deux familles suivantes de quadriques, qui leur sont orthogonales :

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = \rho_2,$$
$$A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2 = \rho_3.$$

Le système de surfaces coordonnées n'est pas un système triple-orthogonal; nous sommes donc dans le cas de coordonnées curvilignes quelconques; nous avons :

$$T_2 = 0, \qquad T_3 = 0;$$

les équations des caractéristiques

$$\frac{d\rho_1}{H_1'T_1} = \frac{d\rho_2}{0} = \frac{d\rho_3}{0}$$

donnent donc

$$\rho_2 = \text{const.}, \qquad \rho_3 = \text{const.};$$

Nous retrouvons ainsi la solution du paragraphe 42.

On observera que, pour l'exemple précédent, le vecteur X, Y, Z est orthogonal au tourbillon; l'expression

$$X dx + Y dy + Z dz$$

admet par suite un multiplicateur. Il existe alors une famille de surfaces, les quadriques

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = \text{const.},$$

qui sont simultanément trajectoires et résolvantes pour le complexe tétraédral.

[**45**] Dans le cas où les surfaces coordonnées constituent un système triple-orthogonal, on a, en introduisant les notations usuelles,

$$H_1'^2 = H_2^2 H_3^2, \qquad H_2'^2 = H_3^2 H_1^2, \qquad H_3'^2 = H_1^2 H_2^2,$$

et les équations des caractéristiques prennent alors la forme :

$$\frac{H_1}{T_1} d\rho_1 = \frac{H_2}{T_2} d\rho_2 = \frac{H_3}{T_3} d\rho_3.$$

Considérons, par exemple, le problème de Transon, en coordonnées elliptiques, pour le complexe tétraédral. Soit le faisceau homofocal de quadriques

$$\frac{x^2}{a^2 + \rho} + \frac{y^2}{b^2 + \rho} + \frac{z^2}{c^2 + \rho} - 1 = 0,$$

définissant le système de coordonnées elliptiques; le complexe tétraédral est celui qui est constitué par les normales de ces quadriques. On a :

$$H_1^2 = \frac{1}{4} \frac{(\rho_1 - \rho_2)(\rho_1 - \rho_3)}{(\rho_1 + a^2)(\rho_1 + b^2)(\rho_1 + c^2)},$$

$$H_2^2 = \frac{1}{4} \frac{(\rho_2 - \rho_1)(\rho_2 - \rho_3)}{(\rho_2 + a^2)(\rho_2 + b^2)(\rho_2 + c^2)},$$

$$H_3^2 = \frac{1}{4} \frac{(\rho_3 - \rho_1)(\rho_3 - \rho_2)}{(\rho_3 + a^2)(\rho_3 + b^2)(\rho_3 + c^2)};$$

T_1, T_2, T_3 sont d'autre part proportionnels aux expressions

$$\frac{1}{H_1}\sum\frac{a^4(c^2-b^2)}{a^2+\rho_1}, \qquad \frac{1}{H_2}\sum\frac{a^4(c^2-b^2)}{a^2+\rho_2}, \qquad \frac{1}{H_3}\sum\frac{a^4(c^2-b^2)}{a^2+\rho_3},$$

d'où se déduisent les équations différentielles

$$\frac{d\rho_1}{\rho_1^2(\rho_2-\rho_3)}=\frac{d\rho_2}{\rho_2^2(\rho_3-\rho_1)}=\frac{d\rho_3}{\rho_3^2(\rho_1-\rho_2)}$$

des caractéristiques; ces équations ont pour intégrales

$$\rho_1\rho_2\rho_3 = \text{const.},$$
$$\rho_1\rho_2+\rho_2\rho_3+\rho_3\rho_1 = \text{const.};$$

l'équation de la résolvante la plus générale du complexe tétraédral est, par suite, en coordonnées elliptiques,

$$F(\rho_1\rho_2\rho_3,\ \rho_1\rho_2+\rho_2\rho_3+\rho_3\rho_1)=0;$$

il est aisé de vérifier que ce résultat est identique à ceux trouvés aux paragraphes 42 et 44.

[**46**] Les équations des caractéristiques en coordonnées curvilignes orthogonales peuvent être formées par un autre procédé uniquement applicable aux coordonnées orthogonales. Soient α_1, α_2, α_3 les cosinus de Ox avec les directions des normales aux surfaces coordonnées, β_1, β_2, β_3 les cosinus de Oy avec ces mêmes directions, et enfin γ_1, γ_2, γ_3 ceux de Oz; ces cosinus sont donnés par les relations

$$\alpha_i=\frac{1}{H_i}\frac{\partial x}{\partial\rho_i}, \qquad \beta_i=\frac{1}{H_i}\frac{\partial y}{\partial\rho_i}, \qquad \gamma_i=\frac{1}{H_i}\frac{\partial z}{\partial\rho_i};$$

soient ξ_1, ξ_2, ξ_3 les cosinus directeurs par rapport aux normales des surfaces coordonnées de la droite qui avait X, Y, Z pour cosinus directeurs par rapport aux axes $O(xyz)$. Des formules

$$X=\xi_1\alpha_1+\xi_2\alpha_2+\xi_3\alpha_3,$$
$$Y=\xi_1\beta_1+\xi_2\beta_2+\xi_3\beta_3,$$
$$Z=\xi_1\gamma_1+\xi_2\gamma_2+\xi_3\gamma_3,$$

résulte l'identité

$$X\,dx+Y\,dy+Z\,dz\equiv H_1\xi_1\,d\rho_1+H_2\xi_2\,d\rho_2+H_3\xi_3\,d\rho_3;$$

l'équation de Transon a donc pour caractéristiques les lignes de tourbillon, dans le milieu ρ_1, ρ_2, ρ_3 du vecteur de composantes $H_1\xi_1$, $H_2\xi_2$, $H_3\xi_3$; les équations de ces caractéristiques sont alors :

$$\frac{d\rho_1}{\dfrac{\partial(H_2\xi_2)}{\partial\rho_3}-\dfrac{\partial(H_3\xi_3)}{\partial\rho_2}}=\frac{d\rho_2}{\dfrac{\partial(H_3\xi_3)}{\partial\rho_1}-\dfrac{\partial(H_1\xi_1)}{\partial\rho_3}}=\frac{d\rho_3}{\dfrac{\partial(H_1\xi_1)}{\partial\rho_2}-\dfrac{\partial(H_2\xi_2)}{\partial\rho_1}}.$$

Reprenons encore le problème de Transon pour le complexe tétraédral, en utilisant les formules précédentes; on pose alors

$$\xi_1 = \frac{\lambda}{H_1\rho_1}, \qquad \xi_2 = \frac{\lambda}{H_2\rho_2}, \qquad \xi_3 = \frac{\lambda}{H_3\rho_3},$$

λ étant définie par la relation

$$\frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{(H_1\rho_1)^2} + \frac{1}{(H_2\rho_2)^2} + \frac{1}{(H_3\rho_3)^2} = 4\sum \frac{(\rho_1 + a^2)(\rho_1 + b^2)(\rho_1 + c^2)}{\rho_1^2(\rho_1 - \rho_2)(\rho_1 - \rho_3)}$$

$$= \frac{4}{\rho_1^2\rho_2^2\rho_3^2}[(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)\rho_1\rho_2\rho_3 + a^2b^2c^2(\rho_1\rho_2 + \rho_2\rho_3 + \rho_3\rho_1)];$$

on obtient la relation

$$H_1\xi_1 d\rho_1 + H_2\xi_2 d\rho_2 + H_3\xi_3 d\rho_3 = \frac{\lambda}{\rho_1\rho_2\rho_3} d(\rho_1\rho_2\rho_3),$$

qui entraîne l'équation obtenue au paragraphe précédent pour la résolvante la plus générale.

[**47**] L'étude du problème de Transon pour les complexes de révolution peut être rattachée aux considérations qui précèdent, en introduisant les coordonnées cylindropolaires, qui constituent un système de coordonnées orthogonales. En posant

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$
$$H_1 = 1, \qquad H_2 = r, \qquad H_3 = 1,$$

les équations des caractéristiques deviennent

$$\frac{dr}{T_r} = \frac{r\,d\theta}{T_\theta} = \frac{dz}{T_z};$$

les cas particuliers intéressants sont les trois cas où deux des composantes T_r, T_θ, T_z du tourbillon sont nulles. Si T_r seule est différente de zéro, les résolvantes sont des conoïdes; si T_θ seule est différente de zéro, les résolvantes sont des surfaces de révolution; et, enfin, si T_z seule est différente de zéro, ce sont des cylindres parallèles à Oz.

Les exemples de complexes de révolution auxquels s'appliquent avec succès les considérations précédentes sont nombreux. Pour le complexe linéaire

$$X = -\frac{ay}{r\sqrt{a^2 + r^2}}, \qquad Y = \frac{ax}{r\sqrt{a^2 + r^2}}, \qquad Z = \frac{r}{\sqrt{a^2 + r^2}},$$
$$T_r = 0, \qquad \frac{T_\theta}{r} = -\frac{T_z}{a},$$

les lignes de tourbillon sont des hélices circulaires :

$$r = \text{const.}, \qquad z + a\theta = \text{const.}$$

Pour le complexe des droites perpendiculaires aux plans focaux d'un complexe linéaire aux foyers correspondants (§ 35), on peut poser

$$X = \frac{y}{\sqrt{a^2 + r^2}}, \qquad Y = \frac{-x}{\sqrt{a^2 + r^2}}, \qquad Z = \frac{a}{\sqrt{a^2 + r^2}},$$

et prendre pour T_x, T_y, T_z les expressions

$$T_x = \frac{ay}{(a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad T_y = \frac{-ax}{(a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad T_z = \frac{2a^2 + r^2}{(a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}},$$

d'où résulte l'équation de Transon :

$$py - qx = \frac{2a^2 + r^2}{a};$$

les lignes de tourbillon sont des hélices circulaires :

$$r = \text{const.}, \qquad z + \frac{2a^2 + r^2}{a}\theta = \text{const.};$$

ce résultat découle immédiatement des expressions de T_r, T_θ, T_z, qui sont respectivement proportionnelles à $0, -r, \dfrac{2a^2 + r^2}{a}$.

Les considérations qui précèdent s'appliquent à d'autres complexes que ceux qui sont de révolution; c'est ainsi que, pour le complexe formé par les droites dont deux points sont assujettis à rester dans deux plans rectangulaires (§ 17), on peut poser :

$$X = \frac{x}{a}, \qquad Y = -\frac{y}{a}, \qquad Z = \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{a^2}};$$

$$T_r = 0, \qquad T_z = 0;$$

les lignes de tourbillon sont des cercles d'axe Oz. Cet exemple prouve d'ailleurs qu'un complexe n'est pas nécessairement de révolution si toutes ses surfaces résolvantes sont de révolution et coaxiales.

CHAPITRE XII.

Choix des points de départ. — Méthodes tangentielles.

Inconvénients de la méthode de Transon; nécessité d'un choix des points de départ; méthode générale; application aux complexes de révolution. — Il y a fréquemment avantage à choisir, pour point de départ, les projections d'un point fixe sur les rayons du complexe. — Définition des congruences de normales à l'aide d'une fonction homogène des trois cosinus directeurs. — Méthode de résolution du problème de Transon découlant de la définition précédente. — Cette dernière méthode n'est pas distincte des méthodes tangentielles.

[**48**] Pour pouvoir appliquer la méthode de Transon, il est nécessaire que le complexe envisagé soit défini par des droites issues de tous les points de l'espace. En général, lorsqu'un complexe est donné, les droites qui passent par tout point constituent un cône ayant ce point pour sommet et aucune propriété géométrique ne distingue les génératrices les unes des autres. Pour un complexe donné par une définition géométrique, le complexe des arêtes des dièdres droits circonscrits à une quadrique par exemple, il est souvent impossible d'obtenir des expressions simples des cosinus directeurs X, Y, Z.

Comme il convient de prendre pour point de départ de tout rayon du complexe un point jouissant d'une propriété particulière, on s'efforcera tout d'abord de mettre un tel point en évidence par des considérations géométriques. D'une façon générale, il y a intérêt à envisager un faisceau ponctuel ou tangentiel de surfaces dépendant d'un paramètre; il existe un nombre fini de surfaces de la famille qui sont tangentes à une droite donnée quelconque. Si l'on peut choisir le faisceau de surfaces de telle sorte que le nombre des points de contact avec un rayon arbitraire du complexe se réduise à l'unité, il est alors permis d'espérer que l'introduction de ce point unique de contact conduira à des résultats particulièrement simples et élégants. Un exemple précisera le sens de ce qui précède : s'il s'agit du complexe spécial attaché à une quadrique (Q), il suffit de considérer un faisceau ponctuel ou tangentiel quelconque de quadriques comprenant la quadrique (Q) : on particularisera ainsi un point sur tout rayon du complexe. Mais comme ici le choix du faisceau est encore arbitraire, on adoptera celui qui conduit la plupart du temps aux résultats les plus remarquables, le faisceau homofocal comprenant (Q). En appliquant alors la méthode du paragraphe 46, on est conduit à des équations particulièrement simples, attendu que l'on a :

$$\xi_3 = 0,$$

$$\frac{\partial(H_1\xi_1)}{\partial\rho_2} = \frac{\partial(H_2\xi_2)}{\partial\rho_1}.$$

Considérons en second lieu un complexe de révolution quelconque. Soit Oz l'axe de révolution. Le faisceau de surfaces sera constitué par les cylindres d'axe Oz ; on est ainsi amené à prendre pour point de départ de chaque rayon le pied de la perpendiculaire commune avec Oz. On vérifie aisément qu'il en est ainsi pour les exemples traités au paragraphe 47. On procédera d'une manière analogue dans tous les cas où il existe une droite privilégiée et on utilisera des surfaces de révolution autour de cette droite.

[**49**] Étant donné un complexe qui n'est pas de la catégorie précédente, il arrive bien souvent qu'il existe un point O privilégié, un centre de symétrie notamment. Dans ce cas, un faisceau particulièrement simple de surfaces s'impose : celui des sphères concentriques admettant le point O pour centre. En d'autres termes, on prend alors pour point de départ de tout rayon la projection orthogonale du point O. Dans plusieurs articles publiés par les *Nouvelles Annales de mathématiques*, j'ai déjà mis en évidence l'intérêt que présente la considération de la projection d'un point fixe sur les rayons d'un système de droites [1]. Me bornant ici aux considérations qui sont relatives aux congruences de normales et au problème de Transon, j'introduirai une nouvelle représentation analytique des congruences de normales.

Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées de la projection de O sur un rayon d'une congruence. Pour qu'une congruence soit une congruence de normales, il faut et il suffit que l'expression

$$x_0 dp_1 + y_0 dp_2 + z_0 dp_3$$

soit une différentielle exacte. Il en sera certainement ainsi si l'on pose

$$x_0 = \frac{\partial \Pi}{\partial p_1}, \qquad y_0 = \frac{\partial \Pi}{\partial p_2}, \qquad z_0 = \frac{\partial \Pi}{\partial p_3},$$

$\Pi(p_1, p_2, p_3)$ étant une fonction homogène et de degré zéro des trois cosinus p_1, p_2, p_3 ; les dérivées partielles sont calculées comme si p_1, p_2, p_3 étaient indépendants. L'identité

$$p_1 \frac{\partial \Pi}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial \Pi}{\partial p_2} + p_3 \frac{\partial \Pi}{\partial p_3} = 0,$$

équivalente à

$$p_1 x_0 + p_2 y_0 + p_3 z_0 = 0,$$

exprime donc que le point (x_0, y_0, z_0) est la projection de O sur le rayon ; la relation identique

$$x_0 dp_1 + y_0 dp_2 + z_0 dp_3 = d\Pi$$

---

(1) *Sur une transformation de droites* (1909) ; *Conséquences de deux théorèmes de M. Bricard sur les tangentes communes à deux quadriques ; Sur les surfaces de M. Appell* (1910) et *Sur les congruences de droites qui admettent un point pour surface centrale* (1911).

exprime que la congruence est une congruence de normales. Réciproquement, donnons-nous une congruence de cette nature, définie par une des surfaces orthogonales (S); cette surface sera considérée comme enveloppe du plan d'équation

$$Xp_1 + Yp_2 + Zp_3 = \varpi,$$

dans laquelle ϖ est une fonction donnée des paramètres de direction de la normale; à cette fonction ϖ, on peut faire correspondre une fonction Π de p_1, p_2, p_3, homogène et de degré zéro par rapport à ces trois lettres, et telle que ϖ et Π soient identiques, en vertu des expressions de p_1, p_2 et p_3 en fonctions des paramètres de direction; Π ou ϖ sont deux fonctions identiques qui représentent toutes deux la distance de O au plan tangent à la surface (S); le point de contact de ce plan étant supposé avoir x, y, z pour coordonnées, on aura

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \varpi p_1 = x_0 + \Pi p_1, \\ y &= y_0 + \varpi p_2 = y_0 + \Pi p_2, \\ z &= z_0 + \varpi p_3 = z_0 + \Pi p_3, \end{aligned}$$

et, par suite, pour tout déplacement sur (S), on aura successivement :

$$\begin{aligned} &p_1 dx + p_2 dy + p_3 dz = 0, \\ &p_1 dx_0 + p_2 dy_0 + p_3 dz_0 = -d\varpi = -d\Pi, \\ &x_0 dp_1 + y_0 dp_2 + z_0 dp_3 = d\Pi; \end{aligned}$$

cette dernière relation exprime précisément que x_0, y_0, z_0 sont les dérivées partielles d'une fonction $\Pi(p_1, p_2, p_3)$ calculées en regardant les variables p_1, p_2 et p_3 comme indépendantes.

En résumé, pour avoir la congruence de normales la plus générale, il suffit de se donner une fonction Π homogène et de degré zéro en p_1, p_2 et p_3, de calculer les dérivées partielles de cette fonction comme s'il s'agissait de variables indépendantes; en posant

$$x_0 = \frac{\partial \Pi}{\partial p_1}, \qquad y_0 = \frac{\partial \Pi}{\partial p_2}, \qquad z_0 = \frac{\partial \Pi}{\partial p_3},$$

et considérant la droite de cosinus directeurs p_1, p_2, p_3 qui part du point de coordonnées x_0, y_0, z_0, on constitue une congruence de normales générale. C'est là la signification de la correspondance entre congruences de normales et fonctions, homogènes et de degré zéro, de trois variables.

Ainsi donc, *toute congruence de normales peut être analytiquement définie par une fonction homogène et de degré zéro des trois cosinus directeurs des rayons de la congruence* (1).

---

(1) Il convient de remarquer que si l'on considère une fonction Π homogène de degré zéro, de deux variables seulement de p_1 et p_2, regardées comme indépendantes dans le calcul des

[**50**] La méthode de la fonction homogène pour résoudre le problème de Transon découle de ce qui précède. Étant donné un complexe quelconque autre qu'un complexe de droites parallèles aux génératrices d'un cône, son équation sera toujours réductible à la forme

$$f(x_0, y_0, z_0, p_1, p_2, p_3) = 0,$$

et à toute équation de cette nature correspondra un complexe unique et déterminé; on peut, en d'autres termes, représenter un complexe quelconque par cette équation. Cela étant, il suffit de chercher les fonctions homogènes de degré zéro qui satisfont à l'équation aux dérivées partielles

$$f\left(\frac{\partial \Pi}{\partial p_1}, \frac{\partial \Pi}{\partial p_2}, \frac{\partial \Pi}{\partial p_3}, p_1, p_2, p_3\right) = 0;$$

ce qui revient à intégrer le système de deux équations du premier ordre à trois variables :

$$p_1\frac{\partial \Pi}{\partial p_1} + p_2\frac{\partial \Pi}{\partial p_2} + p_3\frac{\partial \Pi}{\partial p_3} = 0,$$
$$f\left(\frac{\partial \Pi}{\partial p_1}, \frac{\partial \Pi}{\partial p_2}, \frac{\partial \Pi}{\partial p_3}, p_1, p_2, p_3\right) = 0.$$

Quelques exemples choisis préciseront les considérations précédentes et mettront en évidence qu'il ne s'agit point d'une méthode uniquement utilisable dans des cas exceptionnels. Soit tout d'abord le complexe linéaire

$$p_6 = ap_3;$$

des expressions de p_4, p_5, p_6 en fonctions linéaires de x_0, y_0, z_0, il résulte que l'on a :

$$x_0 p_2 - y_0 p_1 = ap_3;$$

l'équation du problème de Transon est

$$p_2\frac{\partial \Pi}{\partial p_1} - p_1\frac{\partial \Pi}{\partial p_2} = ap_3;$$

on a donc

$$\Pi = \frac{ap_3}{\sqrt{p_1^2+p_2^2+p_3^2}}\,\text{arc tg}\,\frac{p_2}{p_1} + \mathrm{F}\left(\frac{p_3^2}{p_1^2+p_2^2+p_3^2}\right).$$

---

dérivées, et liées par la relation

$$p_1^2 + p_2^2 = 1,$$

et si l'on pose

$$x_0 = \frac{\partial \Pi}{\partial p_1}, \qquad y_0 = \frac{\partial \Pi}{\partial p_2},$$

on définit, dans le plan Oxy, une famille de droites dont les trajectoires orthogonales sont les courbes enveloppes de la droite variable

$$\mathrm{X}p_1 + \mathrm{Y}p_2 = \Pi(p_1, p_2) + \text{const.}$$

Considérons, en second lieu, le complexe d'équation

$$x_0 \mathfrak{J}\left(\frac{\mathrm{M}, \mathrm{M}'}{p_2, p_3}\right) + y_0 \mathfrak{J}\left(\frac{\mathrm{M}, \mathrm{M}'}{p_3, p_1}\right) + z_0 \mathfrak{J}\left(\frac{\mathrm{M}, \mathrm{M}'}{p_1, p_2}\right) = 0,$$

dans laquelle M et M′ sont des fonctions homogènes et de même degré des variables p_1, p_2, p_3 regardées comme indépendantes dans les dérivations. L'équation à intégrer étant

$$\sum \frac{\partial \Pi}{\partial p_1} \mathfrak{J}\left(\frac{\mathrm{M}, \mathrm{M}'}{p_2, p_3}\right) = 0,$$

on a :

$$\Pi = \text{fonction arbitraire de } \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{M}'}.$$

Cette famille de complexes, invariants dans l'homothétie infinitésimale, dépendant de deux fonctions M et M′, comprend un grand nombre de cas intéressants : lorsque M et M′ sont des formes linéaires, un changement d'axes permet de se ramener au complexe

$$z_0 = 0$$

des droites équidistantes de deux points (§ 3); la solution est, pour ce dernier complexe :

$$\Pi = f\left(\frac{p_1}{p_2}\right);$$

lorsque M et M′ sont les formes quadratiques

$$\begin{aligned} \mathrm{M} &= \mathrm{A}p_1^2 + \mathrm{B}p_2^2 + \mathrm{C}p_3^2, \\ \mathrm{M}' &= p_1^2 + p_2^2 + p_3^2, \end{aligned}$$

le complexe est le complexe tétraédral

$$\sum (\mathrm{C} - \mathrm{B}) p_2 p_3 x_0 = 0,$$

pour lequel on a donc

$$\Pi = f\left(\frac{\mathrm{A}p_1^2 + \mathrm{B}p_2^2 + \mathrm{C}p_3^2}{\mathrm{A}p_1^2 + \mathrm{B}p_2^2 + \mathrm{C}p_3^2}\right).$$

La méthode de la fonction homogène est tout indiquée pour résoudre le problème de Transon pour les complexes qui admettent une surface podaire, c'est-à-dire tels que les projections d'un point fixe O sur les rayons soient sur une surface donnée. J'ai déjà, au paragraphe 14, indiqué la solution dans le cas où la surface podaire est un cône de sommet O. Comme cas différent, j'envisagerai les complexes tout récemment considérés par M. Keraval dans ses recherches *Sur les surfaces partielle-*

ment cylindroïdes (Nouvelles Annales de Mathématiques, 1910, p. 51) : la surface podaire est alors un plan ne passant pas par O, d'équation

$$z_0 = a$$

par exemple ; on a pour ce complexe

$$\frac{\partial \Pi}{\partial p_3} = \frac{a}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}},$$

d'où l'on déduit la solution homogène

$$\Pi = \frac{a}{2} \operatorname{Log} \frac{\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2} + p_3}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2} - p_3} + f\left(\frac{p_1}{p_2}\right).$$

[**51**] Ainsi donc, en cherchant à perfectionner la méthode même de Transon qui consiste à faire partir des droites de tous les points de l'espace, on est amené à prendre, dans des cas nombreux, les projections d'un point fixe sur les rayons du complexe pour points de départ de ces rayons. La considération de ces points de départ permet d'introduire une représentation analytique des congruences de normales, d'où découle une méthode de résolution du problème de Transon. Cette méthode est au fond une méthode tangentielle, puisque la fonction inconnue est étroitement liée à la fonction ϖ ou z, les variables étant celles qui repèrent la normale en direction. Par conséquent, les méthodes tangentielles dont l'étude a fait l'objet de ce Mémoire se trouvent rattachées à la méthode de Transon.