ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

PAUL CAUBET

Étude des principales inégalités du mouvement de la Lune qui dépendent de l'inclinaison

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3e série, tome 1 (1909), p. 381-471

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1909_3_1__381_0>

ÉTUDE

DES

PRINCIPALES INÉGALITÉS DU MOUVEMENT DE LA LUNE

QUI DÉPENDENT DE L'INCLINAISON

PAR PAUL CAUBET

INTRODUCTION.

[**1**] Dans une série de mémoires sur la Théorie de la Lune (¹), M. Andoyer a montré l'existence d'un certain nombre d'erreurs, de peu d'importance pratique en général, mais qui déparent la beauté des recherches antérieures faites sur le même sujet par Delaunay (²). J'ai cru utile de poursuivre la vérification des résultats de Delaunay, en me limitant aux principaux termes qui dépendent de l'inclinaison.

J'ai trouvé aussi des erreurs insignifiantes; mais, encore une fois, c'est la perfection *analytique* et non pratique que j'ai recherchée. D'autre part, j'ai calculé avec la même approximation, c'est-à-dire jusqu'au septième ordre, le logarithme du rayon vecteur et les trois coordonnées rectangulaires.

M. Andoyer avait bien voulu m'exposer le principe de sa dernière méthode, qui n'était pas encore publiée, et qui l'a été depuis (³); il m'en fit de plus saisir sur le vif, par des exemples nombreux et appropriés, le mécanisme détaillé; il m'a aidé souvent, de ses conseils, à surmonter les difficultés que j'ai rencontrées dans l'exécution

(¹) H. ANDOYER, *Sur quelques inégalités de la Longitude de la Lune* (Annales de la Faculté des sciences de Toulouse, t. VI, pp. J_1 à J_{33}). — *Théorie de la Lune*, collection *Scientia*, février 1902. — *Bulletin astronomique*, t. XXIV (nov. 1907), pp. 395 à 412; t. XVIII (1901), pp. 177 à 197; t. XIX (1902), pp. 401 à 412.

(²) *Théorie du Mouvement de la Lune* (Mémoires de l'Académie des sciences, t. XXVIII, 1866; t. XXIX, 1867).

(³) H. ANDOYER, *Sur la Théorie de la Lune* (Bull. astr., nov. 1907, pp. 395 à 412).

de mon travail, ensuite, à l'occasion, dans quelques cas embarrassants ; il m'a appris enfin à exposer les résultats de mes recherches et indiqué plusieurs ouvrages où je pourrais puiser des documents utiles. C'est dire combien je lui suis redevable pour la bienveillante direction qu'il n'a cessé d'exercer sur l'ensemble de mes efforts. Je lui en dédie le résultat avec reconnaissance.

Je n'aurais garde d'oublier dans mes remerciements M. Cosserat, qui a bien voulu m'aider de ses conseils dans la rédaction qui va suivre.

[**2**] Je me bornerai, dans cette étude, à la Théorie *solaire* du mouvement de la Lune, c'est-à-dire aux perturbations déterminées dans le mouvement de celle-ci par l'action du Soleil. On sait, en effet, qu'étant données les dimensions des corps célestes, leurs distances mutuelles et leurs masses. l'influence perturbatrice du Soleil est de beaucoup prépondérante (1). Je reproduirai d'abord, en considérant seulement celles des équations dont je me suis servi, l'exposé de M. Andoyer (2).

« La Théorie solaire du mouvement de la Lune revient, comme on sait, à l'étude « du mouvement d'un point matériel de masse 1, sous l'action d'une certaine fonc- « tion de forces U, déterminée plus loin. Soient x, y, z les coordonnées rectangu- « laires de la Lune, par rapport à des axes de directions fixes, ayant la Terre pour « origine ; soit N un argument égal à $nt + \omega$, n et ω désignant deux constantes arbi- « traires, t représentant le temps ; soit a une autre constante liée à n par la relation

$$f(M_0 + M) = n^2 a^3$$

« où f, M_0, M sont respectivement le coefficient d'attraction, la masse de la Terre et « celle de la Lune ; soient enfin e la base des logarithmes hyperboliques et i l'imagi- « naire $\sqrt{-1}$.

« Nous poserons

$$\xi = \frac{x + iy}{a} e^{-iN}, \qquad \eta = \frac{x - iy}{a} e^{iN}, \qquad \zeta = \frac{z}{a}, \tag{1}$$

« de sorte que, inversement

$$x = \frac{a}{2}(\xi e^{iN} + \eta e^{-iN}), \qquad y = \frac{a}{2i}(\xi e^{iN} - \eta e^{-iN}), \qquad z = a\zeta, \tag{2}$$

« et nous substituerons ξ, η, ζ aux coordonnées rectangulaires x, y, z ; de plus, nous « prendrons N comme variable indépendante, et nous marquerons par des accents « les dérivées par rapport à N, sans qu'il puisse en résulter de confusion.

(1) Voir *Théorie de la Lune,* collection *Scientia*, p. 7.
(2) *Bulletin astronomique* (nov. 1907), t. XXIV, pp. 395 à 412.

« Nous ferons encore, en désignant par r le rayon vecteur de la Lune :

$$\rho = \frac{r}{a} = (\xi\eta + \zeta^2)^{\frac{1}{2}}, \qquad U = n^2 a^2 F. \tag{3}$$

« Les équations du mouvement, telles que les fournit la méthode de Lagrange, « s'écrivent dès lors immédiatement :

$$\left\{\begin{aligned} &\xi'' + 2i\xi' - \xi = 2\frac{\partial F}{\partial \eta}, \\ &\eta'' - 2i\eta' - \eta = 2\frac{\partial F}{\partial \xi}, \\ &\zeta'' = \frac{\partial F}{\partial \zeta}. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

[**3**] « La latitude du Soleil étant supposée nulle, sa longitude sera $N' + \lambda'$, N' étant « un argument analogue à N de la forme $n't + \omega'$, et λ' étant périodique, sans partie « constante ; son rayon vecteur r' sera $a'\rho'$, a' étant lié à n' par la relation

$$f(M' + M_0 + M) = n'^2 a'^3$$

« où M' désigne la masse du Soleil. Il ne faut pas oublier, d'ailleurs, que les coor- « données du Soleil sont ici rapportées au centre de gravité de la Terre et de la Lune « comme origine.

« Faisant alors

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{n'}{n} = m, \qquad \frac{a}{a'} = \alpha, \qquad \frac{M}{M_0 + M} = \nu, \\ &\qquad \beta = 1 - 2\nu, \qquad K = N - N', \end{aligned}\right. \tag{5}$$

« on aura, comme on sait, en écrivant σ pour $e^{i(N-N')}$:

$$F = \frac{1}{\rho} + m^2\rho'^{-3}\left(\frac{1}{4}\xi\eta - \frac{1}{2}\zeta^2 + \frac{3}{8}\xi^2\sigma^2 e^{-2i\lambda'} + \frac{3}{8}\eta^2\sigma^{-2}e^{2i\lambda'}\right)$$
$$+ \alpha\beta m^2\rho'^{-4}\left[\left(\frac{3}{16}\xi^2\eta - \frac{3}{4}\xi\zeta^2\right)\sigma e^{-i\lambda'} + \left(\frac{3}{16}\xi\eta^2 - \frac{3}{4}\eta\zeta^2\right)\sigma^{-1}e^{i\lambda'} + \frac{5}{16}\xi^3\sigma^3 e^{-3i\lambda'} + \frac{5}{16}\eta^3\sigma^{-3}e^{3i\lambda'}\right]$$
$$+ \dots$$

[**4**] « Les équations (4) sont suffisantes pour résoudre le problème. Mais afin « d'obtenir des vérifications complètes pour les calculs numériques, afin aussi « d'avoir des équations plus commodes dans certains cas particuliers où l'emploi des « équations (4) exigerait des calculs en réalité superflus, il convient de former de « nouvelles équations entièrement distinctes des premières au point de vue du « calcul. Il convient aussi d'introduire à volonté, au lieu des seules coordonnées ξ, η, ζ, « les coordonnées polaires de la Lune ou des quantités équivalentes.

« A cet effet, désignant par v et s la longitude et la latitude de la Lune, nous « poserons $\rho = e^{\mu}$, $v = \mathrm{N} + \lambda$, et nous conserverons les quantités μ, λ, s liées à ξ, η, ζ « par les relations

$$(7) \qquad \xi = e^{\mu + i\lambda} \cos s, \qquad \eta = e^{\mu - i\lambda} \cos s, \qquad \zeta = e^{\mu} \sin s.$$

Pour les coefficients à longue ou à très longue période, nous utiliserons en outre l'équation de Laplace :

$$(10) \qquad \frac{d^2}{d\mathrm{N}^2}(\rho^2) = 4\mathrm{F} + 2\mathrm{F}_1 - 4m \int \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{N}'} d\mathrm{N}$$

où

$$\mathrm{F}_1 = \xi \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \eta} + \zeta \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \zeta}$$

et que l'on obtient facilement par combinaison des équations primitives.

Partons, en effet, des coordonnées rectangulaires

$$x'' = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x},$$
$$y'' = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y},$$
$$z'' = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z},$$

où x'', y'', z'' représentent ici les dérivées du deuxième ordre par rapport au temps.

Multiplions par x', y', z' et ajoutons, ce qui correspond à la combinaison des forces vives; on a :

$$x'x'' + y'y'' + z'z'' = x' \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} + y' \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y} + z' \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z} = \frac{d\mathrm{U}}{dt} - \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{N}'} n',$$

d'où

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 2\mathrm{U} - 2n' \int \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{N}'} dt.$$

D'autre part, multiplions par x, y, z, et ajoutons; il viendra :

$$xx'' + yy'' + zz'' = x \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} + y \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y} + z \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z} = \mathrm{U}_1,$$

d'où, par combinaison :

$$2(xx'' + yy'' + zz'') + 2(x'^2 + y'^2 + z'^2) = 2\mathrm{U}_1 + 4\mathrm{U} - 4n' \int \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{N}'} dt.$$

Or :

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$
$$(r^2)' = 2xx' + 2yy' + 2zz',$$
$$(r^2)'' = 2x'^2 + 2y'^2 + 2z'^2 + 2xx'' + 2yy'' + 2zz''.$$

Donc

$$(r^2)'' = 2\mathrm{U}_1 + 4\mathrm{U} - 4n' \int \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{N}'} dt.$$

Revenant à

$$\rho = \frac{r}{a}$$

et à N comme variable indépendante, on a bien, puisque $U = n^2 a^2 F$:

$$(\rho^2)'' = 4F + 2F_1 - 4m \int \frac{\partial F}{\partial N'} dN.$$

[5] « Déterminons maintenant la forme de la solution. En désignant par ε' « l'excentricité de l'orbite solaire, par ϖ' la longitude de son périgée, posons « d'abord

$$(11) \qquad \varepsilon'_1 = \varepsilon' e^{i(N'-\varpi')}, \qquad \varepsilon'_2 = \varepsilon' e^{-i(N'-\varpi')};$$

« les coordonnées ρ' et λ' sont développables suivant les puissances entières, posi- « tives ou nulles, de ε'_1 et de ε'_2; les premiers termes des développements sont :

$$(12) \qquad \begin{cases} \rho'^{-1} = 1 + \frac{1}{2}(\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2) + \ldots, \\ i\lambda' = \varepsilon'_1 - \varepsilon'_2 + \ldots. \end{cases}$$

« Introduisons de la même façon deux constantes arbitraires ε, γ, et deux argu- « ments correspondants $G = gN + \varpi$, $H = hN + \theta$, où ϖ et θ sont des constantes « arbitraires, g et h des constantes inconnues; puis posons :

$$(13) \qquad \begin{cases} \varepsilon_1 = \varepsilon e^{i(N-G)}, \qquad \varepsilon_2 = \varepsilon e^{-i(N-G)}, \\ \gamma_1 = \gamma e^{i(N-H)}, \qquad \gamma_2 = \gamma e^{-i(N-H)}. \end{cases}$$

« On sait que les inconnues ξ, η, ζ, λ, μ, s sont developpables suivant les puis- « sances entières, positives ou nulles, de ε_1, ε_2, γ_1, γ_2, ε'_1, ε'_2, et en outre α, et aussi « suivant les puissances entières, positives, négatives ou nulles, de σ.

« Désignons donc par M_p un monôme tel que

$$\alpha^q \varepsilon_1^{r_1} \varepsilon_2^{r_2} \varepsilon_1'^{r'_1} \varepsilon_2'^{r'_2} \gamma_1^{s_1} \gamma_2^{s_2},$$

« on aura pour les inconnues des expressions telles que

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \sum \xi_p M_p \\ \eta &= \sum \eta_p M_p \end{aligned}\right\} \qquad (s_1 + s_2 \text{ pair}),$$

$$i\zeta = \sum \zeta_p M_p \qquad (s_1 + s_2 \text{ impair}),$$

$$\left.\begin{aligned} \mu &= \sum \mu_p M_p \\ i\lambda &= \sum \lambda_p M_p \end{aligned}\right\} \qquad (s_1 + s_2 \text{ pair}),$$

$$is = \sum s_p M_p \qquad (s_1 + s_2 \text{ impair}).$$

« Les coefficients ξ_p, η_p, ... sont eux-mêmes développés suivant les puissances « de σ, de façon que

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} \xi_p &= \sum \xi_{p,k}\sigma^k, \\ \eta_p &= \sum \eta_{p,k}\sigma^k \qquad (k \gtrless 0,\ \text{de même parité que } q), \\ \zeta_p &= \sum \zeta_{p,k}\sigma^k, \\ \mu_p &= \sum \mu_{p,k}\sigma^k, \\ \lambda_p &= \sum \lambda_{p,k}\sigma^k, \\ s_p &= \sum s_{p,k}\sigma^k, \end{aligned}\right.$$

« On a de même

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} g &= \sum g_p \mathrm{M}_p \\ h &= \sum h_p \mathrm{M}_p \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &q \ \text{pair}, \\ &r_1 = r_2, \quad r'_1 = r'_2, \quad s_1 = s_2. \end{aligned}$$

« Cette solution est possible, la partie constante de λ étant nulle ; les coefficients « $\xi_{p,k}$, $\eta_{p,k}$, ..., $s_{p,k}$, g_p, h_p sont réels et ont la forme de séries ordonnées suivant les « puissances du seul paramètre m. Si d'ailleurs $\mathrm{M}_{p'}$ désigne le monôme conjugué de « M_p, on a les relations

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} &\xi_{p,k} = \eta_{p',-k}, \quad \zeta_{p,k} = -\zeta_{p',-k}, \\ &\mu_{p,k} = \mu_{p',-k}, \quad \lambda_{p,k} = -\lambda_{p',-k}, \quad s_{p,k} = -s_{p',-k}, \end{aligned}\right.$$

« Revenant enfin aux quantités réelles, on peut écrire :

$$\frac{x}{a} = \sum \xi_{p,k}\alpha^q \varepsilon^{r_1+r_2}\varepsilon'^{r'_1+r'_2}\gamma^{s_1+s_2}\cos[\mathrm{N} + k\mathrm{K} + (r_1 - r_2)(\mathrm{N} - \mathrm{G}) + (r'_1 - r'_2)(\mathrm{N}' - \varpi') + (s_1 - s_2)(\mathrm{N} - \mathrm{H})],$$

$$\frac{y}{a} = \sum \eta_{p,k}\alpha^q \varepsilon^{r_1+r_2}\varepsilon'^{r'_1+r'_2}\gamma^{s_1+s_2}\sin[\mathrm{N} + k\mathrm{K} + (r_1 - r_2)(\mathrm{N} - \mathrm{G}) + (r'_1 - r'_2)(\mathrm{N}' - \varpi') + (s_1 - s_2)(\mathrm{N} - \mathrm{H})],$$

$$\frac{z}{a} = \sum \zeta_{p,k}\alpha^q \varepsilon^{r_1+r_2}\varepsilon'^{r'_1+r'_2}\gamma^{s_1+s_2}\sin[k\mathrm{K} + (r_1 - r_2)(\mathrm{N} - \mathrm{G}) + (r'_1 - r'_2)(\mathrm{N}' - \varpi') + (s_1 - s_2)(\mathrm{N} - \mathrm{H})],$$

$$\mu = \sum \mu_{p,k}\alpha^q \varepsilon^{r_1+r_2}\varepsilon'^{r'_1+r'_2}\gamma^{s_1+s_2}\cos[k\mathrm{K} + (r_1 - r_2)(\mathrm{N} - \mathrm{G}) + (r'_1 - r'_2)(\mathrm{N}' - \varpi') + (s_1 - s_2)(\mathrm{N} - \mathrm{H})],$$

$$\lambda = \sum \lambda_{p,k}\alpha^q \varepsilon^{r_1+r_2}\varepsilon'^{r'_1+r'_2}\gamma^{s_1+s_2}\sin[k\mathrm{K} + (r_1 - r_2)(\mathrm{N} - \mathrm{G}) + (r'_1 - r'_2)(\mathrm{N}' - \varpi') + (s_1 - s_2)(\mathrm{N} - \mathrm{H})],$$

$$s = \sum s_{p,k}\alpha^q \varepsilon^{r_1+r_2}\varepsilon'^{r'_1+r'_2}\gamma^{s_1+s_2}\sin[k\mathrm{K} + (r_1 - r_2)(\mathrm{N} - \mathrm{G}) + (r'_1 - r'_2)(\mathrm{N}' - \varpi') + (s_1 - s_2)(\mathrm{N} - \mathrm{H})],$$

$$g = \sum g_p \alpha^q \varepsilon^{2r_1}\varepsilon'^{2r'_1}\gamma^{2s_1}, \qquad h = \sum h_p \alpha^q \varepsilon^{2r_1}\varepsilon'^{2r'_1}\gamma^{2s_1}.$$

« Dans les six premières de ces formules, q et k sont de même parité ; dans les « deux dernières, q est pair ; dans la troisième et la sixième, la somme $s_1 + s_2$ est « impaire, tandis qu'elle est paire dans les autres. Les développements trigonométriques de $\frac{z}{a}$, μ, λ, s sont symétriques, c'est-à-dire que les cosinus de deux arguments égaux et de signes contraires ont des coefficients égaux, tandis que les « coefficients de leurs sinus sont égaux et de signes contraires. Les $\xi_{p,k}$ s'échangent « en $\eta_{p',-k}$, M_p et $M_{p'}$ désignant deux monômes conjugués.

« Pour faire coïncider les constantes ε et γ avec les quantités analogues e et γ de « la théorie de Delaunay, il suffira de faire en sorte, ce qui est possible, que le coefficient de sin (N — G) dans λ soit

$$\varepsilon - \frac{1}{8}\varepsilon^3 + \frac{5}{192}\varepsilon^5 + \frac{107}{9216}\varepsilon^7 + \ldots$$

« et que le coefficient de sin (N — H) dans s soit

$$\gamma - \gamma\varepsilon^2 - \frac{1}{8}\gamma^3 + \frac{7}{64}\gamma\varepsilon^4 - \frac{3}{16}\gamma^7 + \frac{1}{8}\gamma^3\varepsilon^2 - \frac{5}{288}\gamma\varepsilon^6;$$

« Ce sont les valeurs de ces coefficients dans le mouvement elliptique, quand on « désigne par ε l'excentricité, par γ le sinus de la demi-inclinaison.

[6] « Pour définir les différents monômes utilisés précédemment et dans le présent article, j'ai été amené à poser, en suivant une notation plutôt arbitraire, « résultant surtout de l'ordre des calculs effectués ou en cours :

$$\begin{array}{llll} M_0 = 1, & M_3 = \varepsilon_2, & M_6 = \varepsilon_1^2, & M_9 = \alpha\varepsilon_1, \\ M_1 = \alpha, & M_4 = \varepsilon_1', & M_7 = \varepsilon_1\varepsilon_2, & M_{10} = \alpha\varepsilon_2, \\ M_2 = \varepsilon_1, & M_5 = \varepsilon_2', & M_8 = \varepsilon_2^2. & \end{array}$$

[7] Telle est, exposée par lui-même, la méthode de M. Andoyer. Elle permet, non seulement de contrôler les résultats de Delaunay, mais en même temps de donner le rayon vecteur avec la même approximation que la longitude et de fournir aussi de la même façon les coordonnées rectangulaires qui sont fort utiles. On détermine sépament les unes et les autres, et, en rapprochant les résultats, on a une vérification. C'est un avantage sur les méthodes antérieures.

Si l'on considère m, ε, ε', γ comme des infiniment petits du premier ordre, α comme un infiniment petit du second ordre, les résultats de Delaunay, comme l'a montré M. Andoyer, sont tous inexacts au delà du septième ordre. Pour les termes dépendant de l'inclinaison, Delaunay n'a pas dépassé le septième ordre. Les erreurs sont en nombre très restreint, et portent presque toutes sur le dernier terme des coefficients ; il est extrêmement rare qu'elles atteignent le sixième ordre. De même que M. Andoyer, je marquerai d'un astérisque les termes de la longitude ou de la latitude qui diffèrent des termes correspondants donnés par Delaunay.

Je serai parfois conduit, pour déterminer certains coefficients à longue ou très longue période, à pousser plus loin que lui l'approximation des termes dont dépendent ces coefficients; je marquerai d'un double astérisque les additions ainsi effectuées.

[**8**] Je terminerai cette introduction par quelques généralités sur la marche des calculs. Leur but principal étant de retrouver par une nouvelle méthode les résultats de Delaunay, j'ai, comme lui, exprimé les coefficients sous forme de séries procédant suivant les puissances des divers éléments, y compris le rapport m des moyens mouvements. Sans doute, MM. Hill(1) et E.-W. Brown(2), en développant suivant les puissances du paramètre $\frac{m}{1-m}$, et remplaçant, dès le début du calcul, ce nouveau paramètre par sa valeur numérique, ont obtenu une convergence bien plus rapide. Mais la comparaison avec Delaunay serait, par leur méthode, moins immédiate.

La méthode de calcul que j'adopterai sera celle des coefficients indéterminés, facilement applicable, puisque nous connaissons la forme des inconnues. Prenons, en effet, l'une quelconque des équations (4). Remplaçons-y les inconnues par leurs valeurs supposées calculées $\xi_{p,k}\sigma^k \mathrm{M}_p \ldots$, et groupons les termes correspondant à une même puissance de e. L'identification se fera en annulant le coefficient de cette puissance.

Mais ce coefficient lui-même sera une somme de termes renfermant en facteur des expressions telles que $\alpha^q \varepsilon^{r_1+r_2} \varepsilon'^{r'_1+r'_2} \gamma^{s_1+s_2}$. L'exposant de e détermine seulement l'ordre de parité de q, les différences $r_1 - r_2$, $r'_1 - r'_2$, $s_1 - s_2$. L'équation générale se subdivise donc en autant d'équations partielles qu'il y a de combinaisons possibles $\alpha^q \varepsilon^{r_1+r_2} \varepsilon'^{r'_1+r'_2} \gamma^{s_1+s_2}$ correspondant à une même puissance de e. C'est ainsi, par exemple, qu'à l'expression $e^{i(\mathrm{N}-\mathrm{H})}$ correspondent les termes en γ_1, en $\gamma_1^2\gamma_2$, en $\gamma_1^3\gamma_2^2 \ldots$. Nous obtiendrons un premier groupe d'équations, donnant les termes du premier degré en γ, en annulant les termes en γ_1 correspondant à une même puissance de e; nous obtiendrons un second groupe, donnant des termes du troisième degré en γ, en annulant les termes en $\gamma_1^2\gamma_2$ correspondant à une même puissance de e. Et ainsi de suite.

Mais, dans chaque groupe, ce qui distingue les exposants de e, ce sont les

---

(1) *Researches in the Lunar Theory* (American Journal of Mathematics, 1878, t. I, pp. 5-26, 129-147, 245-260).

(2) *Theory of the Motion of the Moon* (Memoirs of the Royal Astronomical Society, t. LIII, 1897, 1899; t. LIV, 1900; t. LVII, 1905; t. LIX, 1908). — *An introductory treatise on the lunar Theory*. Cambridge, 1896. — *The inequalities in the Motion of the Moon due to the direct action of the planets*. Cambridge, 1908.

puissances de σ. Chacun d'eux donnera donc naissance à autant d'équations qu'il contiendra de puissances distinctes de σ.

Il est clair, dès lors, que l'identification pourra se faire par étapes successives. Si, par exemple, je veux obtenir les termes en γ_1 *seul*, les équations qui les donneront ne sauraient contenir que des expressions en γ_1, et d'autres dépendant du seul paramètre m, c'est-à-dire les termes de la *variation*. J'aurai d'ailleurs à utiliser des coefficients déjà calculés par M. Andoyer (1). Les seules modifications que j'aurai à y introduire consisteront à y transformer les x et les y en ξ et en η.

Il reste à montrer d'une façon détaillée le mécanisme des calculs. Soit, par exemple, à déterminer les termes en $\gamma_1 = M_{11}$, c'est-à-dire les $\zeta_{11,k}$ et les $s_{11,k}$. Nous aurons à calculer

$$\begin{array}{ll} \zeta_{11,0}, & h_0, \\ \zeta_{11,-2}, & s_{11,-2}, \\ \zeta_{11,2}, & s_{11,2}, \\ \zeta_{11,-4}, & s_{11,-4}, \\ \zeta_{11,4}, & s_{11,4}, \\ \zeta_{11,-6}, & s_{11,-6}, \\ \zeta_{11,6}, & s_{11,6}. \end{array}$$

d'ordres respectifs 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 en m, comme cela résulte des travaux de Delaunay. Nous verrons plus loin que les équations générales
peuvent s'écrire

$$\zeta_{11,k}\left\{-[k(1-m)+(1-h_0)]^2+m^2+a_0\right\}+a_2\zeta_{11,k-2}+a_{-2}\zeta_{11,k+2}+a_4\zeta_{11,-4}+a_{-4}\zeta_{11,k+4}+\ldots=0,$$
$$s_{11,k}=b_0\zeta_{11,k}+b_2\zeta_{11,k-2}+b_{-2}\zeta_{11,k+2}+\ldots,$$

en posant

$$a=\sum a_k\sigma^k=e^{-3\mu_0},$$

$$b=\sum b_k\sigma^k=e^{-\mu_0},$$

μ_0 désignant la partie de μ qui ne dépend que de m.

Les $\mu_{0,k}$ ayant été déterminés par M. Andoyer, il est aisé de former les quantités auxiliaires a_k, b_k dont les ordres par rapport à m sont

0	pour	a_0,	b_0,
2	»	$a_2=a_{-2}$,	$b_2=b_{-2}$,
4	»	$a_4=a_{-4}$,	$b_4=b_{-4}$,
6	»	$a_6=a_{-6}$,	$b_6=b_{-6}$.

(1) *Bulletin astronomique*, t. XVIII, 1901; t. XIX, 1902; t. XXIV, 1907.

Ceci posé, cherchons $\zeta_{11,0}$ et h_0, ce qui est possible, puisque, par convention, $s_{11,0}$, coefficient de $\gamma_1 \sin(\mathrm{N}-\mathrm{H})$ dans s, est égal à l'unité. Dans les deux équations

$$\begin{aligned}
&\zeta_{11,0}[-(1-h_0)^2+m^2+a_0]+a_2\zeta_{11,-2}+a_{-2}\zeta_{11,2}+\ldots=0,\\
&1=s_{11,0}=b_0\zeta_{11,0}+b_2\zeta_{11,-2}+b_{-2}\zeta_{11,2}+\ldots,
\end{aligned}$$

les termes en $\zeta_{11,-2}$, $\zeta_{11,2}$, ... sont au moins d'ordre 3 en m. De la seconde équation, on pourra donc tirer $\zeta_{11,0}$ jusqu'à m^2 inclus; portant dans la première, on aura le terme en m^2 de h_0.

Envisageons maintenant les équations

$$\begin{aligned}
&\zeta_{11,-2}\left\{-[2(1-m)+(1-h_0)]^2+m^2+a_0\right\}+a_2\zeta_{11,-4}+a_{-2}\zeta_{11,0}+\ldots=0,\\
&s_{11,-2}=b_0\zeta_{11,-2}+b_2\zeta_{11,-4}+b_{-2}\zeta_{11,0}+\ldots;
\end{aligned}$$

$\zeta_{11,-4}$ est du troisième ordre en m. On voit immédiatement qu'étant donné ce que nous savons de $\zeta_{11,0}$ et de h_0, on peut calculer les termes en m et en m^2 de $\zeta_{11,-2}$, dont le coefficient, comme nous le remarquerons par la suite, contient m en facteur. On aura $s_{11,-2}$ avec la même approximation.

Un raisonnement analogue nous montrerait que pour $\zeta_{11,2}$, $s_{11,2}$ nous pouvons dès à présent déterminer les termes en m^2, m^3, m^4. Revenant aux termes en $\zeta_{11,0}$, h_0, nous pourrons avoir ces quantités jusqu'en m^4 inclus.

Formant les équations en $\zeta_{11,-4}$, $\zeta_{11,4}$, nous pouvons les avoir jusqu'en m^4 et en m^6 respectivement. Ces quantités, substituées l'une dans l'équation en $\zeta_{11,-2}$, l'autre dans l'équation en $\zeta_{11,2}$, en même temps que les nouveaux termes calculés de $\zeta_{11,0}$ et h_0, nous permettront de pousser plus loin la détermination de ces expressions. Et ainsi de suite.

L'identification se fera ainsi par approximations successives, et l'ensemble des termes en M_{11} s'obtiendra avec la même approximation que Delaunay.

Nous pourrons alors passer aux coefficients en $\mathrm{M}_{13}=\gamma_1\varepsilon_1$. On fera sur ces coefficients des raisonnements analogues aux précédents, avec cette seule différence que l'indice 11 y sera remplacé par l'indice 13. Mais dans les équations qui les donneront interviendront les termes en γ_1 maintenant connus, et les termes en ε_1 déjà calculés par M. Andoyer. Puisque dans le terme général que nous égalons à zéro se trouve en facteur l'expression $\gamma_1\varepsilon_1$, les termes en γ_1 seront nécessairement multipliés par des termes convenables en ε_1. Il y aura intérêt à effectuer au préalable le calcul de ces produits auxiliaires, et à en obtenir une vérification, au moins sommaire. Voici comment je procéderai :

Soit, par exemple, à déterminer les coefficients en $\mathrm{M}_{33}=\gamma_1^2$ de la longitude, pour laquelle, comme pour le rayon vecteur, l'inclinaison ne figure jamais qu'à un ordre pair. On peut refaire, pour les approximations successives qui les donneront, des raisonnements analogues à ceux qui nous ont permis de calculer de proche en proche les termes en γ_1, en $\gamma_1\varepsilon_1$, ... de la latitude. Je me contenterai donc d'expliquer le calcul d'une certaine catégorie de quantités auxiliaires, les autres pouvant être obtenues de la même manière.

Puisque, dans les équations actuelles, l'expression γ_1^2 doit se trouver en facteur, les coefficients en γ_1 y figureront élevés au carré. Nous serons donc amenés à déterminer à l'avance des expressions telles que

$$
\begin{aligned}
(\zeta_{11}^2)_0 &= (\zeta_{11,0})^2 + 2\zeta_{11,2}\zeta_{11,-2} + 2\zeta_{11,4}\zeta_{11,-4} + \ldots, \\
(\zeta_{11}^2)_2 &= 2\zeta_{11,0}\zeta_{11,2} + 2\zeta_{11,-2}\zeta_{11,4} + \ldots, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

De même, proposons-nous de calculer les ξ et les η en $\gamma_1^2\varepsilon_1$. Nous rencontrerons les produits tels que $\xi_{33,k}\xi_{2,k'}$. Nous aurons donc avantage à former les expressions

$$
\begin{aligned}
(\xi_{33}\xi_2)_0 &= \xi_{33,0}\xi_{2,0} + \xi_{33,2}\xi_{2,-2} + \xi_{33,-2}\xi_{2,2} + \ldots, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Nous aurons encore des produits tels que $(\zeta_{11}^2)_k\xi_{2,k'}$; par exemple :

$$
(\zeta_{11}^2\xi_2)_0 = (\zeta_{11}^2)_0\xi_{2,0} + (\zeta_{11}^2)_2\xi_{2,-2} + \ldots.
$$

On voit qu'ici nous pouvons utiliser les $(\zeta_{11}^2)_k$ déjà déterminés. Formons, de plus, la somme des $(\zeta_{11}^2\xi_2)_k$ ainsi obtenus. Elle renferme, comme on le voit immédiatement, les produits de tous les $(\zeta_{11}^2)_k$ par tous les $\xi_{2,k'}$, de sorte que

$$
\sum(\zeta_{11}^2\xi_2)_k = \sum(\zeta_{11}^2)_{k'}\sum\xi_{2,k''}.
$$

On a ainsi un moyen de vérification qui, sans être *absolument* infaillible, — on peut commettre des erreurs qui se compensent, — donne cependant une certaine garantie d'exactitude. Pour qu'il soit efficace, on est amené à pousser le calcul des quantités auxiliaires un ordre plus loin que celui des quantités dont elles assurent la détermination : en effet, pour les termes à longue période, le dénominateur contient m en facteur, d'où la nécessité de calculer le numérateur avec un ordre d'approximation en plus.

Toutefois, ce dénominateur peut commencer par un terme en m^2, ce qui oblige à augmenter de deux unités l'ordre du numérateur. Il eût été trop long d'augmenter encore d'un ordre le calcul de toutes les quantités auxiliaires ; je me suis borné, pour ces cas tout à fait spéciaux, au calcul minutieux de celles qui m'étaient indispensables. Tous les calculs étant faits par deux méthodes différentes, la concordance des deux séries de résultats m'a garanti leur exactitude.

Mais on devine la difficulté que présente cette partie du travail. M. Andoyer a déjà expliqué (1) combien il devenait pénible à partir d'une certaine puissance de m.

(1) H. Andoyer, *Théorie de la Lune*, collection *Scientia*, pp. 57 et 59.

Je montrerai par la suite à quelles additions laborieuses m'a obligé le calcul du coefficient de la longitude en $\frac{\sin}{\cos} 2(G-H)$, que je n'ai poussé cependant que jusqu'en m^3. Ce coefficient rentre dans le groupe de termes en $\gamma_1^2\varepsilon_2^2$; le dénominateur contient m^2 en facteur, d'où la nécessité de calculer les quantités auxiliaires du numérateur jusqu'en m^5. Parmi celles-ci figurent les coefficients en sin $(2G-H)$, $\frac{\sin}{\cos}(G-2H)$ de la latitude et de la longitude dont le dénominateur contenait aussi m^2 en facteur. J'ai donc été amené à pousser jusqu'en m^7 le calcul des numérateurs, et des termes en γ_1, en γ_1^2, en $\gamma_1\varepsilon_1$ dont ils dépendaient. Ce retour en arrière, joint à la complication croissante des multiplicateurs de m, exige un grand effort, et il n'est pas rare de passer plusieurs fois à côté d'une erreur recherchée sans arriver à la découvrir.

Telles sont les quelques idées générales qu'il m'a paru utile d'esquisser au début de ce travail. Elles seront précisées par la suite.

Pour qu'il soit facilement comparable à la Théorie de Delaunay, il est bon de rappeler ses notations, savoir :

$$D=N-N', \quad l=N-G, \quad l'=N'-\varpi', \quad F=N-H, \quad e=\varepsilon, \quad e'=\varepsilon'.$$

CHAPITRE PREMIER.

Exposition des méthodes, conformément aux dernières recherches de M. Andoyer [1].

[**9**] Les coefficients que je me propose de contrôler sont les suivants :

Pour la latitude : les termes en γ, $\gamma\varepsilon$, $\gamma\varepsilon'$, $\gamma\varepsilon^2$, $\gamma\alpha$, $\gamma\alpha\varepsilon$.

Pour la longitude : les termes en γ^2, $\gamma^2\varepsilon$, $\gamma^2\varepsilon'$, $\gamma^2\varepsilon^2$, $\gamma^2\alpha$.

Puisque les termes que j'envisage ne renferment que la première puissance de ε', je pourrai prendre les valeurs de ρ' et de $i\lambda'$ telles qu'elles sont données par les formules (12), d'où :

$$\rho'^{-3} = 1 + \frac{3}{2}(\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2).$$

ε' ne s'introduisant pas en même temps que α, je pourrai, pour les termes en α, poser :

$$\rho' = 1, \qquad i\lambda' = 0.$$

La fonction F peut s'écrire

$$F = \frac{1}{\rho} + m^2\left(\frac{1}{4}\xi\eta - \frac{1}{2}\zeta^2\right) + \Phi.$$

La fonction Φ, réduite aux termes du premier ordre en α et ε', seuls considérés ici, devient

$$\begin{aligned}(0)\qquad \Phi = {} & \frac{3}{8}m^2[\xi^2\sigma^2 + \eta^2\sigma^{-2}] + \frac{3}{8}m^2(\varepsilon'_1 + \varepsilon'_2)(\xi\eta - 2\zeta^2) \\ & + m^2\xi^2\sigma^2\left(-\frac{3}{16}\varepsilon'_1 + \frac{21}{16}\varepsilon'_2\right) + m^2\eta^2\sigma^{-2}\left(\frac{21}{16}\varepsilon'_1 - \frac{3}{16}\varepsilon'_2\right) \\ & + \alpha\beta m^2\left[\frac{3}{16}(\xi^2\eta - 4\xi\zeta^2)\sigma + \frac{3}{16}(\xi\eta^2 - 4\eta\zeta^2)\sigma^{-1} + \frac{5}{16}\xi^3\sigma^3 + \frac{5}{16}\eta^3\sigma^{-3}\right].\end{aligned}$$

Les équations sont alors

$$1)\qquad -\xi'' - 2i\xi' + \xi\left(1 + \frac{m^2}{2}\right) - \frac{\xi}{\rho^3} + 2\frac{\partial\Phi}{\partial\eta} = 0,$$

$$2)\qquad -\eta'' + 2i\eta' + \eta\left(1 + \frac{m^2}{2}\right) - \frac{\eta}{\rho^3} + 2\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} = 0,$$

$$3)\qquad -i\zeta'' - m^2 i\zeta - \frac{i\zeta}{\rho^3} + i\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta} = 0,$$

---

[1] *Bulletin astronomique* (nov. 1907), t. XXIV, pp. 395-412.

et l'équation de Laplace

$$4)\qquad -\frac{1}{2}(\rho^2)'' + \frac{1}{\rho} + m^2(\rho^2 - 3\zeta^2) + 2\Phi + \Phi_1 - 2m\int\frac{\partial\Phi}{\partial N'}dN = 0$$

où

$$\Phi_1 = \xi\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} + \eta\frac{\partial\Phi}{\partial\eta} + \zeta\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}.$$

Les dérivées partielles de Φ par rapport à ξ, η, ζ, N' sont prises en supposant la fonction Φ laissée sous sa forme primitive (0).

Si l'on néglige Φ, on a la solution particulière évidente

$$\zeta = 0, \qquad \rho = \xi = \eta = \left(1 + \frac{m^2}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}.$$

[**10**] Les fonctions μ, $i\lambda$, is, définies dans l'introduction, donnent lieu, comme le montrent les formules (7), à des développements analogues à ceux des ξ, η, ζ; quand on change i en $-i$, c'est-à-dire quand on passe de $M_p\sigma^k$ à $M_{p'}\sigma^{-k}$, le monôme $M_{p'}$ étant conjugué de M_p, ξ et η s'échangent, μ ne change pas, $i\lambda$, is, $i\zeta$ changent de signe.

Il y a lieu d'envisager d'autres fonctions avec propriétés analogues telles que ξ^2; alors $(\xi^2)_p$ désignera le coefficient du monôme M_p dans la fonction ξ^2; et $(\xi^2)_{p,k}$ désignera le coefficient de σ^k dans $(\xi^2)_p$, conformément aux notations générales. Si l'on change M_p en $M_{p'}$, conjugué de M_p, $(\xi^2)_{p,k}$ devient $(\eta^2)_{p',-k}$; et ainsi de suite.

Pour simplifier l'écriture, je pose :

$$\frac{\xi}{\rho^3} = H, \qquad \frac{\eta}{\rho^3} = H', \qquad \frac{i\zeta}{\rho^3} = H'',$$

$$\frac{1}{\rho} = P, \qquad \rho^2 = C.$$

[**11**] Si $f_{p,k}$ est le coefficient de iN dans l'exposant de e relatif au produit $M_p\sigma^k$, on a :

$$f_{p,k} = k(1-m) + (r_1 - r_2)(1-g) + (r'_1 - r'_2)m + (s_1 - s_2)(1-h),$$

et ceci est développable, comme g et h, suivant les puissances de ε^2, ε'^2, γ^2, α^2; mais, ici, une partie seulement de ce développement nous intéressera.

On a :

$$-\xi'' - 2i\xi' = \sum \xi_{p,k}(f^2_{p,k} + 2f_{p,k})M_p\sigma^k,$$

$$-\eta'' + 2i\eta' = \sum \eta_{p,k}(f^2_{p,k} - 2f_{p,k})M_p\sigma^k,$$

$$-i\zeta'' = \sum \zeta_{p,k}f^2_{p,k}M_p\sigma^k,$$

$$-\frac{1}{2}(\rho^2)'' = \frac{1}{2}\sum C_{p,k}f^2_{p,k}M_p\sigma^k.$$

Soit un terme de Φ, contenant $M_p\sigma^k$ en facteur, et que j'appelle $T_{p,k}$; il est obtenu après que ξ, η, ζ sont remplacés par leurs développements. Supposons que le terme de Φ, *pris sous sa forme primitive*, qui donne naissance à $T_{p,k}$, soit du degré q d'homogénéité par rapport à ξ, η, ζ; que, de plus, il contienne directement, sous sa forme primitive, le produit $\sigma^{k'}\varepsilon_1'^{r_1''}\varepsilon_2'^{r_2''}$; dans ces conditions, le terme correspondant à $T_{p,k}$ sera, dans $\frac{\partial\Phi}{\partial N'}$:

$$T_{p,k}\,.\,i(-k'+r_1''-r_2''),$$

et dans $\int\frac{\partial\Phi}{\partial N'},dN$:

$$T_{p,k}\frac{-k'+r_1''-r_2''}{f_{p,k}}.$$

Par suite, le terme $T_{p,k}$ de Φ donnera, dans la combinaison

$$2\Phi+\Phi_1-2m\int\frac{\partial\Phi}{\partial N'}dN$$

qui figure dans (4), le résultat

$$T_{p,k}\left(2+q+2m\,.\,\frac{k'-r_1''+r_2''}{f_{p,k}}\right).$$

Alors les équations deviennent :

$$\text{(1)}\qquad 0=\sum\xi_{p,k}(f_{p,k^2}+2f_{p,k})M_p\sigma^k+\left(1+\frac{m^2}{2}\right)\xi-H+\frac{3}{2}m^2\sigma^{-2}\eta+\frac{3}{4}m^2(\varepsilon_1'+\varepsilon_2')\xi$$

$$+m^2\left(\frac{21}{4}\varepsilon_1'-\frac{3}{4}\varepsilon_2'\right)\sigma^{-2}\eta+\alpha\beta m^2\left[\frac{3}{8}\sigma\xi^2+\frac{3}{4}\sigma^{-1}\xi\eta+\frac{15}{8}\sigma^{-3}\eta^2-\frac{3}{2}\sigma^{-1}\zeta^2\right];$$

$$\text{(2)}\qquad 0=\sum\eta_{p,k}(f_{p,k}^2-2f_{p,k})M_p\sigma^k+\left(1+\frac{m^2}{2}\right)\eta-H'+\frac{3}{2}m^2\sigma^2\xi+\frac{3}{4}m^2(\varepsilon_1'+\varepsilon_2')\eta$$

$$+m^2\left(-\frac{3}{4}\varepsilon_1'+\frac{21}{4}\varepsilon_2'\right)\sigma^2\xi+\alpha\beta m^2\left[\frac{15}{8}\sigma^3\xi^2+\frac{3}{4}\sigma\xi\eta+\frac{3}{8}\sigma^{-1}\eta^2-\frac{3}{2}\sigma\zeta^2\right];$$

$$\text{(3)}\qquad 0=\sum\zeta_{p,k}f_{p,k}^2M_p\sigma^k-m^2\sum\zeta_{p,k}-H''-\frac{3}{2}m^2(\varepsilon_1'+\varepsilon_2')i\zeta$$

$$-\alpha\beta m^2\left[\frac{3}{2}\sigma\xi(i\zeta)+\frac{3}{2}\sigma^{-1}\eta(i\zeta)\right];$$

(4) (à une constante près, à cause de l'intégrale) :

$$
\begin{aligned}
0 = \frac{1}{2}\sum C_{p,k} f^2_{p,k} M_p \sigma^k + P + m^2(C - 3\zeta^2) \\
+\sum M_p \sigma^k \Big\{ & \frac{3}{2} m^2 (\xi^2\sigma^2)_{p,k}\left(1+\frac{m}{f_{p,k}}\right) + \frac{3}{2} m^2 [\eta^2\sigma^{-2}]_{p,k}\left(1-\frac{m}{f_{p,k}}\right) \\
& + \frac{3}{2} m^2 [(\xi\eta - 2\zeta^2)\varepsilon'_1]_{p,k}\left(1-\frac{m}{2f_{p,k}}\right) + \frac{3}{2} m^2 [(\xi\eta - 2\zeta^2)\varepsilon'_2]_{p,k}\left(1+\frac{m}{2f_{p,k}}\right) \\
& - \frac{3}{4} m^2 [\xi^2\sigma^2\varepsilon'_1]_{p,k}\left(1+\frac{m}{2f_{p,k}}\right) + \frac{21}{4} m^2 [\xi^2\sigma^2\varepsilon'_2]_{p,k}\left(1+\frac{3m}{2f_{p,k}}\right) \\
& - \frac{3}{4} m^2 [\eta^2\sigma^{-2}\varepsilon'_2]_{p,k}\left(1-\frac{m}{2f_{p,k}}\right) + \frac{21}{4} m^2 [\eta^2\sigma^{-2}\varepsilon'_1]_{p,k}\left(1-\frac{3m}{2f_{p,k}}\right) \\
& + \frac{15}{16}\alpha\beta m^2 [(\xi^2\eta - 4\xi\zeta^2)\sigma]_{p,k}\left(1+\frac{2m}{5f_{p,k}}\right) \\
& + \frac{15}{16}\alpha\beta m^2 [(\xi\eta^2 - 4\eta\zeta^2)\sigma^{-1}]_{p,k}\left(1-\frac{2m}{5f_{p,k}}\right) \\
& + \frac{25}{16}\alpha\beta m^2 [\xi^3\sigma^3]_{p,k}\left(1+\frac{6m}{5f_{p,k}}\right) \\
& + \frac{25}{16}\alpha\beta m^2 [\eta^3\sigma^{-3}]_{p,k}\left(1-\frac{6m}{5f_{p,k}}\right)\Big\}.
\end{aligned}
$$

[12] Les différentes fonctions introduites ne sont pas indépendantes.
Si l'on prend μ, λ, s comme variables indépendantes, on a

$$
\begin{aligned}
\xi &= e^{\mu+i\lambda}\cos s, \\
\eta &= e^{\mu-i\lambda}\cos s, \\
\zeta &= e^{\mu}\sin s, \\
H &= e^{-2\mu+i\lambda}\cos s, \\
H' &= e^{-2\mu-i\lambda}\cos s, \\
H'' &= ie^{-2\mu}\sin s.
\end{aligned}
$$

On peut donc calculer ces fonctions à l'aide de μ, λ, s.

Si l'on prend les coordonnées rectangulaires ξ, η, ζ comme variables indépendantes, on a, outre les fonctions qui s'expriment alors immédiatement, comme ξ^2, $\xi\eta$, ...,

$$
\begin{aligned}
&C = \xi\eta + \zeta^2, \qquad P = (\xi\eta+\zeta^2)^{-\frac{1}{2}}, && C = e^{2\mu}, \qquad P = e^{-\mu}, \\
&H = \xi(\xi\eta+\zeta^2)^{-\frac{3}{2}} && \text{ou} \quad H = \xi e^{-3\mu}, \\
&H' = \eta(\xi\eta+\zeta^2)^{-\frac{3}{2}} && H' = \eta e^{-3\mu}, \\
&H'' = i\zeta(\xi\eta+\zeta^2)^{-\frac{3}{2}} && H'' = i\zeta e^{-3\mu}.
\end{aligned}
$$

et ainsi tout s'exprime en fonction de ξ, η, ζ et peut se vérifier à l'aide des dernières égalités.

Voici, sur un exemple, de quelle façon j'ai effectué le développement pratique de ces diverses quantités. Mes calculs ayant commencé par des termes en γ_1 seul, la première que j'ai rencontrée est, comme le montre l'équation (3) :

$$H'' = i\zeta(\xi\eta + \zeta^2)^{-\frac{3}{2}} = i\zeta e^{-3\mu}.$$

Ici $i\zeta = \sum \zeta_{11,k} M_{11} \sigma^k$ (avec $M_{11} = \gamma_1$) représente la somme des divers coefficients à déterminer. Le second facteur de H ne contiendra donc que des expressions dépendant du seul paramètre m, c'est-à-dire

$$(\xi_0\eta_0)^{-\frac{3}{2}} = a = \Sigma a_k \sigma^k.$$

Mais ici

$$\xi_0\eta_0 = (\rho^2)_0 = e^{2\mu_0},$$

d'où

$$a = e^{-3\mu_0},$$

ce qui permet de vérifier les résultats.

Passons au calcul des termes en $\gamma_1\varepsilon_1$, et voyons ce que devient H'' par exemple. Si nous posons $\gamma_1\varepsilon_1 = M_{13}$, les expressions $\zeta_{13,k}$ se trouvent dans H'', multipliées par les a_k, puisque dans l'équation générale intervient le seul facteur commun $\gamma_1\varepsilon_1$. Quant aux $\zeta_{11,k}$ déjà calculés, ils devront être multipliés par des termes convenables en $\varepsilon_1 = M_2$. Pour les trouver, remarquons que

$$e^{-3\mu} = e^{-3\mu_0} - 3e^{-3\mu_0}\mu_2 + \ldots = a - 3a\mu_2 + \ldots$$

ce qui donne pour H'' des expressions de la forme

$$-3a_k \mu_{2,k'} \zeta_{11,k''} M_{13} \sigma^{k+k'+k''}.$$

Des considérations analogues nous permettront d'obtenir *graduellement* les développements des quantités conjuguées H et H'. Envisageons la première. Elle s'introduit d'abord dans la détermination des termes en $\gamma_1^2 = M_{33}$.

Si nous posons

$$\xi(\xi\eta + \zeta^2)^{-\frac{3}{2}} = f(\xi, \eta, \zeta),$$

il est clair que, ξ et η ne contenant que les puissances paires de γ_1, ζ les puissances impaires, on introduira

$$\xi_{33}\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)_0 + \eta_{33}\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)_0 - \frac{1}{2}(\zeta_{11}^2)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \zeta^2}\right)_0$$

en remarquant que

$$i\zeta = \sum \zeta_p M_p.$$

Ceci nous amène à l'expression

$$-\frac{1}{2}a\xi_{33}-\frac{3}{2}\xi_0^{-\frac{1}{2}}\eta_0^{-\frac{5}{2}}\eta_{33}+\frac{3}{2}\xi_0^{-\frac{3}{2}}\eta_0^{-\frac{5}{2}}(\zeta_{11}^2),$$

ou bien

$$-\frac{1}{2}a\xi_{33}+f\eta_{33}+e(\zeta_{11}^2),$$

en posant

$$f=\sum f_k\sigma^k=-\frac{3}{2}\xi_0^{-\frac{1}{2}}\eta_0^{-\frac{5}{2}},$$

$$e=\sum e_k\sigma^k=\frac{3}{2}\xi_0^{-\frac{3}{2}}\eta_0^{-\frac{5}{2}}.$$

Remarquons que

$$a_k=a_{-k},$$

ce qui n'a lieu ni pour e ni pour f.

On obtiendra de nouvelles quantités auxiliaires si l'on forme l'expression H relative aux termes en $\gamma_1^2\varepsilon_1$. Elles se détermineront aisément par la formule de Taylor, et j'en donnerai explicitement la forme algébrique à mesure qu'elles s'introduiront.

[**13**] Considérons l'équation (3) à la latitude. Cherchons directement ζ_p. Je pose :

$$H''=i\zeta e^{-3\mu}=a_0(i\zeta)+G_1''=(i\zeta)\left(1+\frac{1}{2}m^2\right)+G''.$$

Le développement de $e^{-3\mu}$ ne diffère de l'unité que par des termes qui contiennent des monômes M_p en facteur, sauf une partie a_0-1 constante en m qui commence par le terme $\frac{1}{2}m^2$ et dont le terme suivant contient m^4 en facteur. Soit $\zeta_{p,k}$ le coefficient à déterminer. Si dans (3) je groupe la portion $-(i\zeta)(1+\frac{1}{2}m^2)$ de $-H''$ avec l'ensemble des deux premiers termes, il en résulte, *et c'est essentiel*, que dans $G''_{p,k}$ le coefficient de $\zeta_{p,k}$ ne se retrouvera que multiplié par m^4, d'où une méthode d'approximations successives applicable sans difficulté.

G'' étant donc calculé (par approximations successives naturellement), l'équation (3) s'écrit sans peine.

Soit en général $\varphi_{p,k}$ la partie de $f_{p,k}$ qui est indépendante de ε, γ, ε', α, et ne dépend par suite que de m. L'équation (3) donnera naissance aux équations suivantes :

$$\zeta_{p,k}\left[\varphi_{p,k}^2-1-\frac{3}{2}m^2\right]+X''_{p,k}=0.$$

Elle devient résoluble par approximations successives, pour chaque monôme successivement ; et à mesure on pourra calculer les $X''_{p,k}$. D'après la remarque faite, $X''_{p,k}$ *ne saurait contenir l'inconnue* $\zeta_{p,k}$ *que multipliée par un terme d'ordre au moins égal à* m^4.

Avec $\zeta_{p,k}$, on pourra calculer $s_{p,k}$ par la formule

$$\sin s = \zeta e^{-\mu}.$$

Si l'on veut directement s, faisons :

$$i\zeta = (e^{\mu})_{0,0}\, is + B'',$$
$$H'' = (e^{-2\mu})_{0,0}\, is + K''.$$

Nous obtiendrons, pour l'inconnue $s_{p,k}$, l'équation

$$s_{p,k}(e^{\mu})_{0,0}[\varphi_{p,k}^2 - m^2 - a_0] + (Y_1'')_{p,k} = 0,$$

d'où, en divisant par le facteur constant $(e^{\mu})_{0,0}$ et en groupant avec $\frac{(Y_1'')_{p,k}}{(e_{\mu})_{0,0}}$ la portion de $-a_0 s_{p,k}$ qui contient $m^4 s_{p,k}$ en facteur

$$s_{p,k}[\varphi_{p,k}^2 - 1 - \frac{3}{2} m^2] + Y_{p,k}'' = 0,$$

$Y_{p,k}''$ étant une nouvelle fonction analogue à $X_{p,k}''$. Ensuite l'équation

$$i\zeta = (e^{\mu})_{0,0}\, is + B''$$

peut servir à calculer $\zeta_{p,k}$, connaissant $s_{p,k}$.

Mais on a employé la même équation ; il n'y a donc pas là de vérification *absolue*; cependant il est clair que les erreurs de calcul proprement dites seront évitées, si l'on fait ainsi le calcul en double, et que l'on pourra escompter pour les résultats une grande certitude.

Le coefficient de l'inconnue est toujours $\varphi_{p,k}^2 - 1 - \frac{3}{2} m^2$; si $\varphi_{p,k}$ diffère de ± 1, pas de difficulté ; s'il en diffère d'une quantité de l'ordre m, on a un dénominateur de l'ordre m.

Pour le terme $s_{11,0} = 1$, $Y_{11,0}''$ est de l'ordre de m^3, et l'on a tout de suite, puisqu'ici $\varphi_{11,0} = 1 - h_0$, la relation

$$(1 - h_0)^2 = 1 + \frac{3}{2} m^2,$$

ce qui donne le terme en m^2 de h_0, savoir $-\frac{3}{2^2} m^2$.

Il n'y a pas à craindre ici que le coefficient de l'inconnue devienne d'un ordre supérieur à m^2. Remarquons, en effet, que

$$\varphi_{p,k} = k(1 - m) + (r_1 - r_2)(1 - g_0) + (r_1' - r_2')m + (s_1 - s_2)(1 - h_0).$$

Nous n'envisageons ici que des termes du premier ordre en ε'. On doit donc avoir : soit

$$r_1' = 1 \quad \text{avec} \quad r_2' = 0,$$

soit

$$r_1' = 0 \quad \text{avec} \quad r_2' = 1.$$

Dans l'un comme dans l'autre cas, on voit, k étant pair puisque nous n'envisageons pas les termes en $\gamma\alpha\varepsilon'$, que $\varphi_{p,k}$ ne peut différer de l'unité que par une quantité de l'ordre de m.

Nous sommes ainsi amenés à considérer les seuls coefficients

$$\varphi_{p,k} = k(1-m) + (r_1 - r_2)(1-g_0) + (s_1 - s_2)(1-h_0).$$

g_0 et h_0 étant du second ordre en m, on doit avoir évidemment $k=0$ pour que la différence $\varphi_{p,k} \pm 1$ puisse être de l'ordre de m^2.

D'autre part, puisque nous en sommes aux termes du premier degré en γ, on doit avoir :

soit

$$s_1 = 1 \quad \text{avec} \quad s_2 = 0,$$

soit

$$s_1 = 0 \quad \text{avec} \quad s_2 = 1.$$

Le second cas se ramène au premier, étant donnée la forme symétrique des coefficients. Finalement nous sommes donc conduits à rechercher pour quelles valeurs l'expression

$$\varphi_{p,0} = (r_1 - r_2)(1-g_0) + (1-h_0)$$

diffère de ± 1 par un terme de l'ordre de m^2. D'abord la somme $r_1 + r_2$ ne peut prendre que les valeurs 0, 1, 2, puisque j'envisage seulement des termes en ε^0, ε^1, ε^2. On n'aura par suite à s'occuper que de

$$r_1 = r_2 = 0 \quad \text{ou} \quad 1,$$
$$r_2 = 2.$$

Dans le premier cas, nous avons

$$\varphi_{p,0} = 1 - h_0,$$

c'est-à-dire que nous devons calculer les coefficients en γ et en $\gamma\varepsilon^2$ de sin (N — H). Mais ils sont donnés par convention. L'équation en s nous permet dans ces cas de calculer immédiatement les coefficients h_0 et h_7 de M_0 et de M_7 dans h.

En effet, supposons effectué le calcul de h_0 pour lequel nous avons donné tous les détails nécessaires dans l'Introduction, et proposons-nous de déterminer h_7. Posons

$$\gamma_1\varepsilon_1\varepsilon_2 = M_{22}.$$

Nous aurons

$$\begin{aligned} f_{22,0} &= (1-h_0) - h_7\varepsilon_1\varepsilon_2 + \text{des termes d'ordre supérieur} \\ &= \varphi_{22,0} - h_7\varepsilon_1\varepsilon_2 + \quad \text{des termes d'ordre supérieur,} \end{aligned}$$

d'où

$$f^2_{22,0} = (1-h_0)^2 - 2(1-h_0)h_7\varepsilon_1\varepsilon_2 + \text{des termes d'ordre supérieur.}$$

L'équation en s s'écrit donc, en se rappelant que $\gamma_1 = M_{11}$,

$$s_{22,0}[(1-h_0)^2 - 1 - \frac{3}{2}m^2] - 2s_{11,0}h_7(1-h_0) + A_1 = 0,$$

A_1 dépendant seulement de h_7^2 et étant du troisième ordre au moins en m, comme on le verra plus tard. On a $s_{11,0} = 1$, $s_{22,0} = -1$; h_0 est du second ordre en m.

L'équation précédente montre que h_7 est aussi du second ordre, et permet de le calculer par approximations successives. Après quoi, l'équation

$$i\zeta = (e^{\chi})_{0,0}\, is + B''$$

donnera la valeur de $\zeta_{22,0}$.

Envisageons maintenant le cas où

$$r_2 = 2,$$

ce qui donne

$$\varphi_{p,0} = -2(1-g_0) + 1 - h_0 = -1 + 2g_0 - h_0.$$

Dans l'expression $\varphi_{p,0}^2 - 1 - \frac{3}{2}m^2$, les termes en m^2 seront donnés par

$$-2(2g_0 - h_0) - \frac{3}{2}m^2.$$

Or, $h_0 = -\frac{3}{4}m^2 \ldots$. Nous verrons plus loin que $g_0 = \frac{3}{4}m^2 \ldots$. Nous trouvons ainsi une somme en m^2 égale à $-6m^2$.

Ainsi le coefficient de l'inconnue ne sera jamais d'un ordre supérieur à m^2. La discussion précédente serait inutile, si l'on se reporte à la démonstration générale bien connue, faite notamment par MM. H. Andoyer, E.-W. Brown et H. Poincaré : mais il m'a paru intéressant de la donner à titre d'indication pratique.

[**14**] Passons maintenant aux termes de la longitude et du rayon vecteur.

L'idée la plus simple est d'employer les équations (1) et (2), soit avec ξ et η seuls, soit avec μ et λ seuls.

1° Avec ξ et η. — Ce sont les fonctions H et H' qui gênent. J'ai montré plus haut comment je les développais progressivement.

Envisageons l'équation (1) relative à $\xi_{p,k}$, $\eta_{p,k}$. Ces inconnues se trouvent, dans H, multipliées respectivement par $-\frac{1}{2}a_0$ et par f_0. Or,

$$a_0 = 1 + \frac{1}{2}m^2 + \text{ des termes d'ordre 4 en } m,$$

$$f_0 = -\frac{3}{2} - \frac{3}{2^2}m^2 + \text{ des termes d'ordre 4 en } m.$$

Envisageons maintenant l'équation (2). Dans H', $\xi_{p,k}$ et $\eta_{p,k}$ sont multipliées respectivement par f_0 et par $-\frac{1}{2}a_0$. Cela ressort immédiatement des explications données plus haut pour le développement de H.

Puisque dans les équations (1) et (2) ce sont $-$H et $-$H' qui interviennent, nous obtenons immédiatement

$$\xi_{p,k}\left(\varphi_{p,k}^2+2\varphi_{p,k}+\frac{3}{2}+\frac{3m^2}{4}\right)+\eta_{p,k}\left(\frac{3}{2}+\frac{3m^2}{4}\right)+X_{p,k}=0,$$
$$\xi_{p,k}\left(\frac{3}{2}+\frac{3m^2}{4}\right)+\eta_{p,k}\left(\varphi_{p,k}^2-2\varphi_{p,k}+\frac{3}{2}+\frac{3m^2}{4}\right)+X'_{p,k}=0.$$

Si l'on veut conserver μ et λ, on fera

$$\begin{aligned}
\xi &= e^{\mu+i\lambda}\cos s=(e^{\mu})_{0,0}(1+\mu+i\lambda)+B,\\
\eta &= e^{\mu-i\lambda}\cos s=(e^{\mu})_{0,0}(1+\mu-i\lambda)+B',\\
H &= e^{-2\mu+i\lambda}\cos s=(e^{-2\mu})_{0,0}(1-2\mu+i\lambda)+K,\\
H' &= e^{-2\mu-i\lambda}\cos s=(e^{-2\mu})_{0,0}(1-2\mu-i\lambda)+K',
\end{aligned}$$

et B, B', K, K' seront faciles à calculer.

Les expressions $(e^{\mu})_{0,0}\times 1$, $(e^{-2\mu})_{0,0}\times 1$ s'introduisent dans la détermination de $\xi_{0,0}$ $H_{0,0}$. Pour déterminer $\xi_{p,k}$, $\eta_{p,k}$, nous aurons

$$\begin{aligned}
\xi_{p,k} &= (e^{\mu})_{0,0}(\mu_{p,k}+\lambda_{p,k})+B_{p,k},\\
\eta_{p,k} &= (e^{\mu})_{0,0}(\mu_{p,k}-\lambda_{p,k})+B'_{p,k}.
\end{aligned}$$

Substituons ces valeurs dans les équations en $\xi_{p,k}$, $\eta_{p,k}$, et divisons les premiers membres par le facteur constant $(e^{\mu})_{0,0}$. Nous obtiendrons

$$\mu_{p,k}\left\{\varphi_{p,k}^2+2\varphi_{p,k}+3+\frac{3m^2}{2}\right\}+\lambda_{p,k}(\varphi_{p,k}^2+2\varphi_{p,k})+Y_{p,k}=0,$$
$$\mu_{p,k}\left\{\varphi_{p,k}^2-2\varphi_{p,k}+3+\frac{3m^2}{2}\right\}+\lambda_{p,k}(-\varphi_{p,k}^2+2\varphi_{p,k})+Y'_{p,k}=0.$$

Ces équations auront les mêmes propriétés que celles de la latitude; on a les mêmes observations sur leur emploi, qui ne donne pas la certitude *absolue.*

Voyons de plus près les difficultés possibles. Leur déterminant est, dans l'un des cas comme dans l'autre :

$$\Delta=\varphi_{p,k}^2\left(\varphi_{p,k}^2-1+\frac{3}{2}m^2\right).$$

Si donc φ diffère de 0 et de ± 1 d'une quantité finie, il n'y a pas de difficultés.

On établit pour le mouvement du périgée une propriété analogue à celle de h_0, savoir :

$$(1-g_0)^2 = 1 - \frac{3}{2}m^2\ldots,$$

ce qui donne $g = \frac{3}{4}m^2 + \ldots$.

Si $\varphi_{p,k}$ diffère de ± 1 d'une quantité d'ordre m ou m^2, il faudrait calculer les $X_{p,k}\ldots$ un ou deux ordres plus loin.

Si $\varphi_{p,k}$ diffère de o d'une quantité d'ordre m ou m^2, il faudrait calculer les $X_{p,k}\ldots$ deux ou quatre ordres plus loin, ce qui arrive pour l'argument $2F - 2l = 2(G - H)$.

C'est ici qu'intervient l'équation de Laplace. Il n'y a pas à craindre dès lors que le dénominateur devienne d'un ordre plus élevé en m^2, comme je vais le montrer en discutant tous les cas possibles. Mais auparavant examinons l'équation de Laplace :

1° Avec ξ et η. — Développons C et P par la formule de Taylor. Elle donne immédiatement, en se reportant aux notations déjà définies :

$$C = (\xi\eta)_{0,0} + \eta_{0,0}\xi + \xi_{0,0}\eta + D_1,$$
$$P = \left[(\xi\eta)^{-\frac{1}{2}}\right]_{0,0} - \frac{1}{2}a_0\eta_{0,0}\xi - \frac{1}{2}a_0\xi_{0,0}\eta + Q_1,$$

D_1 et Q_1 étant des fonctions analogues aux fonctions $G_1\ldots$ déjà considérées.

L'équation (4) devient alors, en divisant par le facteur constant $\eta_{0,0} = \xi_{0\,0}$:

$$\frac{1}{2}(\xi_{p,k} + \eta_{p,k})(\varphi_{p,k}^2 - 1 + \frac{3}{2}m^2) + Z_1 = 0.$$

2° Avec μ et λ. — On fait :

$$C = (e^{2\mu})_{0,0}(1 + 2\mu) + D,$$
$$P = (e^{-\mu})_{0,0}(1 - \mu) + Q,$$

et l'on a, en divisant par le facteur constant $(e^{2\mu})_{0,0}$:

$$\mu_{p,k}(\varphi_{p,k}^2 - 1 + \frac{3}{2}m^2) + Z = 0.$$

Z et Z_1 sont des fonctions toujours analogues aux précédentes.

Ainsi, dans les deux cas, le dénominateur sera :

$$\varphi_{p,k}^2 - 1 + \frac{3}{2}m^2.$$

Je dis qu'il ne saurait être d'ordre supérieur à celui de m^2. En effet, pour qu'il soit d'ordre supérieur à o, il faut que la partie constante de $\varphi_{p,k}$ soit égale à ± 1. Or, on a :

$$\varphi_{p,k} = k(1-m) + (r_1 - r_2)(1 - g_0) + (r' - r'_2)m + (s_1 - s_2)(1 - h_0).$$

Comme pour les termes de la latitude, nous n'envisageons que les termes du premier ordre en ε', k étant pair puisque nous n'envisageons pas les termes en $\gamma^2\alpha\varepsilon'$. On verrait, comme pour la latitude, que pour ces termes en $\gamma^2\varepsilon'$, $\varphi_{p,k}$ (et par suite $\varphi^2_{p,k}$) ne peut différer de l'unité que par une quantité de l'ordre de m.

Envisageons donc les termes indépendants de ε', c'est-à-dire pour lesquels

$$\varphi_{p,k} = k(1-m) + (r_1 - r_2)(1-g_0) + (s_1 - s_2)(1-h_0).$$

Si k est différent de 0, nous arrivons à la même conclusion quant à l'ordre du dénominateur. Nous sommes donc ramenés à examiner les coefficients

$$\varphi_{p,0} = (r_1 - r_2)(1-g_0) + (s_1 - s_2)(1-h_0),$$

pour lesquels

$$r_1 - r_2 + s_1 - s_2 = \pm 1.$$

Nous pouvons d'ailleurs, profitant de la forme symétrique des coefficients, et puisque tous renferment γ^2 en facteur, supposer

soit

$$s_1 = 2 \qquad \text{avec} \qquad s_2 = 0,$$

soit

$$s_1 = s_2 = 1.$$

Nous sommes ainsi conduits aux deux types suivants :

$$\varphi_{p,0} = (r_1 - r_2)(1-g_0) + 2(1-h_0),$$
$$\varphi_{p,0} = (r_1 - r_2)(1-g_0),$$

pour lesquels

$$\varphi_{p,0} = \pm 1 \ldots.$$

Puisque la somme $r_1 + r_2$, pour les termes que nous envisageons, ne peut dépasser 2, le second type nous donne soit $r_1 = 1$ avec $r_2 = 0$, soit $r_2 = 1$ avec $r_1 = 0$, cas qui se ramènent l'un à l'autre, par raison de symétrie. Ils correspondent au calcul du coefficient en $\gamma_1\gamma_2\varepsilon_1$ ou $\gamma_1\gamma_2\varepsilon_2$ dans λ, coefficient égal à zéro par convention, et ceci nous permettra de calculer sans difficulté le coefficient de $\gamma_1\gamma_2$ dans g.

Le premier type ne peut donner que

$$r_2 = 1 \qquad \text{avec} \qquad r_1 = 0,$$

d'où

$$\varphi_{p,0} = 1 + g_0 - 2h_0.$$

D'après les valeurs connues des termes en m^2 de g_0 et de h_0, on aura :

$$\varphi^2_{p,0} - 1 + \frac{3}{2}m^2 = 6m^2 + \ldots.$$

Donc, dans tous les cas possibles où la partie constante de $\varphi_{p,k}$ est égale à ± 1, le dénominateur $\varphi_{p,k}^2 - 1 + \frac{3}{2}m^2$ est au plus du second ordre en m. On devra alors calculer Z ou Z_1 à un ordre (ou deux) de plus qu'on ne veut. Ensuite, connaissant $\mu_{p,k}$, $\xi_{p,k} + \eta_{p,k}$ de cette façon, il suffira de prendre l'une ou l'autre des équations (1) ou (2) pour achever la détermination complète des inconnues.

Examinons maintenant le cas où $\varphi_{p,k}$ diffère de zéro d'une quantité de l'ordre m ou m^2. L'équation de Laplace donne, sans difficulté, $\xi_{p,k} + \eta_{p,k}$ dans le premier cas, $\mu_{p,k}$ dans l'autre. Pour avoir $\xi_{p,k}$, $\eta_{p,k}$ d'une part, $\lambda_{p,k}$ de l'autre, portons dans l'équation (1). Nous avons
soit

$$\xi_{p,k}(\varphi_{p,k}^2 + 2\varphi_{p,k}) + \left(\frac{3}{2} + \frac{3m^2}{4}\right)(\xi_{p,k} + \eta_{p,k}) + X_{p,k} = 0,$$

soit

$$\lambda_{p,k}(\varphi_{p,k}^2 + 2\varphi_{p,k}) + \mu_{p,k}\left(\varphi_{p,k}^2 + 2\varphi_{p,k} + 3 + \frac{3m^2}{2}\right) + Y_{p,k} = 0.$$

Les multiplicateurs de $\xi_{p,k}$ et de $\lambda_{p,k}$ seront de l'ordre de $\varphi_{p,k}$ en m. Je dis que cet ordre ne saurait dépasser le second, ce qui nous amènera à calculer $\xi_{p,k} + \eta_{p,k}$ et $\mu_{p,k}$ jusqu'à l'ordre $\alpha + 2$ au plus, si nous voulons avoir les inconnues jusqu'à l'ordre α.

Envisageons, en effet,

$$\varphi_{p,k} = k(1 - m) + (r_1 - r_2)(1 - g_0) + (r'_1 - r'_2)m + (s_1 - s_2)(1 - h_0)$$

où

$$k + r_1 - r_2 + s_1 - s_2 = 0.$$

Pour les termes en ε', k est pair d'après ce que nous avons dit, $r'_1 - r'_2$ est égal à ± 1. Donc $\varphi_{p,k}$ est au plus de l'ordre de m. Nous pouvons écarter ce cas et considérer

$$\varphi_{p\,k} = k(1 - m) + (r_1 - r_2)(1 - g_0) + (s_1 - s_2)(1 - h_0).$$

Si k est différent de zéro, l'ordre de $\varphi_{p,k}$ ne peut encore dépasser celui de m. Nous sommes finalement conduits à l'expression

$$\varphi_{p\,0} = (r - r_2)(1 - g_0) + (s_1 - s_2)(1 - h_0)$$

avec

$$r_1 - r_2 + s_1 - s_2 = 0.$$

Si l'on suppose

$$s_1 = s_2 = 1,$$

on doit avoir en même temps

$$r_1 = r_2 = 0 \quad \text{ou} \quad 1,$$

ce qui nous conduit aux coefficients d'indice o en $\gamma_1\gamma_2$ ou en $\gamma_1\gamma_2\varepsilon_1\varepsilon_2$. Mais alors, par raison de symétrie, $\lambda_{p,0} = 0$, $\xi_{p,0} = \eta_{p,0}$, et l'équation (1) détermine sans difficulté les inconnues $\xi_{p,0}$, $\mu_{p,0}$.

Nous devons donc avoir, de toute nécessité,

$$s_1 = 2 \qquad \text{avec} \qquad s_2 = 0,$$

et par suite

$$r_2 = 2.$$

Nous arrivons ainsi au coefficient en $2(G - H)$ dont j'ai parlé dans l'Introduction.

En réalité, on pourrait avoir

$$s_1 = 0 \qquad \text{avec} \qquad s_2 = 2.$$

Mais ce cas se déduit du précédent par symétrie.

g_0 et h_0 ont des termes en m^2 égaux et de signes contraires; on aura donc

$$\varphi_{p,0} = 2(g_0 - h_0) = 3m^2 + \ldots,$$

ce que nous voulions établir.

La discussion précédente, comme celle relative à la latitude, n'a d'utilité que pour se faire une idée précise du degré d'approximation nécessaire dans tous les cas possibles. A la vérité, $f_{p,k}$ figure dans Z ou Z_1 au dénominateur; mais — et c'est là l'avantage essentiel de cette équation — il n'y figure que multiplié par m^3.

Nous pouvons, après cet exposé, aborder la publication des résultats. Les particularités que comporte le calcul de certains coefficients seront détaillées au fur et à mesure. Nous consacrerons un chapitre aux termes de la latitude, et, vu leur étendue, deux autres à ceux de la longitude.

Remarquons toutefois que les équations, soit de la longitude, soit de la latitude, peuvent se ramener au même type, ou à peu près. On s'en rend compte par la discussion, et on s'en apercevra mieux à mesure que nous les rencontrerons. Ce qui les distingue, c'est la forme de plus en plus compliquée que prennent les expressions H, H', ... à mesure que nous avançons. Le développement de H, par exemple, introduit seulement les dérivées premières $\left(\frac{\partial H}{\partial \xi}\right)_0$, $\left(\frac{\partial H}{\partial \eta}\right)_0$ s'il s'agit des termes en $\gamma_1^2 = M_{33}$; les dérivées secondes $\left(\frac{\partial^2 H}{\partial \xi^2}\right)_0 \ldots$, si nous abordons les termes en $\gamma^2\varepsilon$; les dérivées troisièmes $\left(\frac{\partial^3 H}{\partial \xi^3}\right)_0 \ldots$ pour les termes en $\gamma^2\varepsilon^2$, et ainsi de suite. Ces dérivées successives seront des quantités auxiliaires qu'il sera bon de déterminer à l'avance. Nous en donnerons l'expression dès qu'elles se présenteront.

Toutefois, il m'a paru utile, pour la commodité de la lecture, d'en donner, dès à présent, le tableau général que voici :

$$a = e^{-3\mu_0}, \qquad b = e^{-\mu_0},$$
$$c = e^{\mu_0}, \qquad d = e^{-2\mu_0}, \qquad h^{(1)} = e^{2\mu_0},$$
$$e = \frac{3}{2}\xi_0^{-\frac{3}{2}}\eta_0^{-\frac{5}{2}}, \qquad f = -\frac{3}{2}\xi_0^{-\frac{1}{2}}\eta_0^{-\frac{5}{2}},$$
$$i = \frac{15}{2^2}\xi_0^{-\frac{1}{2}}\eta_0^{-\frac{7}{2}}, \qquad K = \frac{15}{2}\xi_0^{-\frac{3}{2}}\eta_0^{-\frac{7}{2}},$$
$$l = \frac{9}{2}e^{-5\mu_0}, \qquad m^{(1)} = -\frac{105}{2^3}\xi_0^{-\frac{1}{2}}\eta_0^{-\frac{9}{2}},$$
$$n^{(1)} = -\frac{45}{2^2}\xi_0^{-\frac{7}{2}}\eta_0^{-\frac{5}{2}}, \qquad o = -\frac{105}{2^2}\xi_0^{-\frac{3}{2}}\eta_0^{-\frac{9}{2}},$$
$$J_0 = a\xi_0, \qquad J'_0 = a\eta_0.$$

L'une quelconque de ces expressions, l par exemple, peut se mettre sous la forme $\sum l_k \sigma^k$.

CHAPITRE II.

Latitude.

[**15**] Nous avons donné au n° 13 les formules qui permettent de déterminer soit directement soit indirectement les ζ et les s, et nous avons indiqué un moyen de vérification qui, sans être d'une rigueur absolue, offre cependant une grande certitude.

Appliquons ces formules aux divers groupes de coefficients.

I. *Termes en γ seul.* — Ils sont de deux sortes :

1° Les termes en $M_{11} = \gamma_1$;
2° Les termes en $M_{12} = \gamma_2$.

Il suffit évidemment de déterminer les premiers.

Vu la forme symétrique que nous adoptons, en vertu de laquelle à un argument quelconque, nous faisons correspondre l'argument égal et de signe contraire, il faudra, pour la comparaison, prendre la moitié des coefficients de Delaunay, et ceci s'applique à l'ensemble des résultats tant de la latitude que de la longitude.

Delaunay donne les termes en γ jusqu'à m^6 inclus. J'ai été amené à déterminer les termes en m^7 de $\zeta_{11,0}$, $\zeta_{11,-2}$, $s_{11,-2}$: ils interviennent dans le calcul des coefficients en $2(G - H)$. D'autre part, le coefficient de $\zeta_{11,-2}$ renfermant m en facteur, j'ai dû calculer les termes en m^8 de a_{-2}, de c_{-2} et de d_{-2} définis plus bas.

Reportons-nous aux notations du n° 13. Nous aurons :

$$f_{11,k} = k(1-m) + (1-h),$$
$$\varphi_{11,k} = k(1-m) + (1-h_0).$$

Au lieu d'envisager les équations en ζ et en s qui nous ont servi pour la discussion, partons de l'équation initiale; elle nous conduira *directement* aux notations que j'ai utilisées dans la pratique. Soit donc

$$i\zeta'' = i\frac{\partial F}{\partial \zeta} = -\frac{i\zeta}{\rho^3} - m^2 i\zeta + i\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta},$$

ou bien

$$i\zeta'' + i\zeta e^{-3\mu} + m^2 i\zeta - i\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} = 0.$$

Dans le cas actuel, nous pouvons faire

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} = 0.$$

En effet, dans Φ, ζ se trouve multiplié par l'une des quantités ε' ou $\alpha\beta$, et ces quantités ne sauraient intervenir dans la détermination des termes en γ seul. De plus, nous devons réduire $f_{11,k}$ à $\varphi_{11,k}$, puisque cette expression doit être multipliée par $\zeta_{11,k}$, et que dans l'équation générale n'intervient que le facteur commun γ_1.

C'est là, d'ailleurs, une règle qui s'applique quel que soit le monôme M_p : la partie de $f_{p,k}$ qu'il faudra multiplier par $\zeta_{p,k}$, s'il s'agit de la latitude, par $\xi_{p,k}$, ..., s'il s'agit de la longitude, devra nécessairement être indépendante de ε, ε', γ, α, et par suite se réduire à $\varphi_{p,k}$. Car le produit de $\zeta_{p,k}$ (ou de $\xi_{p,k}$) par l'une de ces quantités ε, ε', γ, α donnerait un monôme multiple de M_p, $M_p . \varepsilon_1^2$ par exemple, qui ne saurait intervenir dans le groupe considéré.

Pour obtenir la dérivée seconde de $\zeta_{p,k}$, nous devons multiplier cette expression par $-\varphi_{p,k}^2$. D'autre part, dans le produit $(i\zeta e^{-3\mu})_{11}$, nous ne pouvons prendre pour μ que *les valeurs dépendant du seul paramètre m*, c'est-à-dire

$$e^{-3\mu_0} = \sum a_k \sigma^k.$$

Nous obtenons alors immédiatement

$$\zeta_{11,k}[-\varphi_{11,k}^2 + m^2 + a_0] + a_2\zeta_{11,k-2} + a_{-2}\zeta_{11,k+2} + \ldots = 0.$$

D'autre part, l'égalité

$$\sin s = \zeta e^{-\mu}$$

peut s'écrire ici, puisque nous envisageons les seules termes du premier degré en γ :

$$s_{11,k} = \sum (\zeta_{11} e^{-\mu_0})_k = b_0 \zeta_{11,k} + b_2 \zeta_{11,k-2} + b_{-2} \zeta_{11,k+2} + \ldots$$

où

$$e^{-\mu_0} = \sum b_k \sigma^k.$$

Telles sont, par le premier procédé, les équations du problème. Elles permettent d'obtenir immédiatement les équations de la seconde méthode. En effet,

$$\zeta_{11,k} = \sum (e^{\mu_0} s_{11})_k = c_0 s_{11,k} + c_2 s_{11,k-2} + \ldots$$

en posant

$$e^{\mu_0} = \sum c_k \sigma^k.$$

L'équation initiale

$$\zeta_{11,k}[-\varphi_{11,k}^2 + m^2] + [\zeta_{11} e^{-3\mu_0}]_k = 0$$

s'écrit donc

$$(c_0 Q + d_0) s_{11,k} + (c_2 Q + d_2) s_{11,k-2} + (c_{-2} Q + d_{-2}) s_{11,k+2} + \ldots = 0$$

où

$$e^{-2\mu_0} = \sum d_k \sigma^k$$

avec

$$Q = -\varphi_{11,k}^2 + m^2.$$

Nous savons que $s_{11,0} = 1$. Nous pouvons profiter de cette circonstance pour déterminer la partie constante h_0 de h avec la même approximation que Delaunay, c'est-à-dire jusqu'en m^7. Deux procédés s'offrent à nous :

1° Considérons les deux équations

$$\begin{aligned} &\zeta_{11,0}[-(1-h_0)^2 + m^2 + a_0] + a_2 \zeta_{11,-2} + a_{-2} \zeta_{11,2} + \ldots = 0, \\ &s_{11,0} = 1 = b_0 \zeta_{11,0} + b_2 \zeta_{11,-2} + b_{-2} \zeta_{11,2} + \ldots. \end{aligned}$$

De la deuxième nous pouvons, par approximations successives, déduire $\zeta_{11,0}$. Portons dans la première, et remarquons que $a_0 = 1 + \frac{1}{2} m^2 + \ldots$ Elle s'écrit :

$$2\zeta_{11,0} h_0 - \zeta_{11,0} h_0^2 + [m^2 + (a_0 - 1)] \zeta_{11,0} + a_2 \zeta_{11,-2} + \ldots = 0.$$

On a $b_0 = 1 + \frac{1}{2.3}m^2 + \dots$ Le premier terme de $\zeta_{11,0}$ est donc l'unité : $m^2 + (a_0 - 1)$, et par suite h_0, sont du second ordre en m, et le premier terme de h_0, donné par $-\frac{m^2 + a_0 - 1}{2}$ sera $-\frac{3}{2^2}m^2$, ce que nous avions déjà trouvé directement. De proche en proche, il sera aisé d'obtenir la valeur complète de h_0 qui concorde avec celle donnée par Delaunay.

2° L'équation en s donne immédiatement :

$$c_0[-(1-h_0)^2 + m^2] + d_0 + s_{11,-2}\{c_2[-(1-h_0)^2 + m^2] + d_2\} + \dots = 0.$$

A partir du terme en $s_{11,-2}$, tous les produits sont au moins du troisième ordre en m. D'autre part, on a :

$$c_0 = 1 - \frac{1}{2.3}m^2 + \dots,$$

$$d_0 = 1 + \frac{1}{3}m^2 + \dots.$$

L'expression $c_0[-(1-h_0)^2 + m^2] + d_0$ donne alors, comme termes en m^2, $2h_0 + \frac{3}{2}m^2$, d'où :

$$h_0 = -\frac{3}{2^2}m^2 \dots.$$

Quant à $\zeta_{11,-2}$, $s_{11,-2}$, la seule difficulté que présente leur détermination résulte de ce que leur coefficient commence par un terme en m, et qu'il faut par suite pousser un ordre plus loin le calcul du numérateur.

On obtient ainsi :

$$\zeta_{11,0} = 1 - \frac{1}{2.3}m^2 + \frac{3}{2^4}m^3 + \frac{1.031}{2^6.3^2}m^4 + \frac{19.573}{2^{10}.3}m^5 + \frac{5.865.125}{2^{12}.3^4}m^6 + \frac{1.430.743}{2^{15}}m^7,$$

$$h_0 = -\frac{3}{2^2}m^2 + \frac{9}{2^5}m^3 + \frac{273}{2^7}m^4 + \frac{9.797}{2^{11}}m^5 + \frac{199.273}{2^{13}.3}m^6 + \frac{6.657.733}{2^{16}.3^2}m^7,$$

$$\zeta_{11,2} = \frac{3}{2^4}m^2 + \frac{7}{2^3}m^3 + \frac{977}{2^7.3}m^4 + \frac{107.971}{2^{11}.3^2}m^5 + \frac{12.889.531}{2^{13}.3^3.5}m^6,$$

$$s_{11,2} = \frac{11}{2^4}m^2 + \frac{59}{2^3.3}m^3 + \frac{7.063}{2^7.3^2}m^4 + \frac{705.689}{2^{11}.3^3}m^5 + \frac{77.231.201}{2^{13}.3^4.5}m^6,$$

$$\zeta_{11,-2} = -\frac{3}{2^3}m - \frac{41}{2^5}m^2 - \frac{5.293}{2^9.3}m^3 - \frac{146.303}{2^{11}.3^2}m^4 - \frac{7.276.745}{2^{14}.3^3}m^5 - \frac{168.834.913}{2^{16}.3^4}m^6 - \frac{149.346.650.753}{2^{21}.3^5.5}m^7,$$

$$s_{11,-2} = -\frac{3}{2^3}m - \frac{25}{2^5}m^2 - \frac{2.957}{2^9.3}m^3 - \frac{84.703}{2^{11}.3^2}m^4 - \frac{4.380.985}{2^{14}.3^3}m^5 - \frac{100.407.473}{2^{16}.3^4}m^6 - \frac{80.181.761.089}{2^{21}.3^5.5}m^{7**},$$

$$\zeta_{11,4} = \frac{25}{2^8} m^4 + \frac{1.553}{2^7.3.5} m^5 + \frac{1.783.801}{2^{11}.3^2.5^2} m^6,$$

$$s_{11,4} = \frac{161}{2^8} m^4 + \frac{8.437}{2^7.3.5} m^5 + \frac{8.508.509}{2^{11}.3^2.5^2} m^6,$$

$$\zeta_{11,-4} = -\frac{9}{2^7} m^3 - \frac{213}{2^9} m^4 - \frac{58.953}{2^{13}.5} m^5 - \frac{2.941.933}{2^{15}.5^2} m^6,$$

$$s_{11,-4} = -\frac{33}{2^7} m^3 - \frac{621}{2^9} m^4 - \frac{456.643}{2^{13}.3.5} m^5 - \frac{22.536.223}{2^{15}.3.5^2} m^6,$$

$$\zeta_{11,6} = \frac{833}{2^{12}.3} m^6,$$

$$s_{11,6} = \frac{7.697}{2^{12}.3} m^6,$$

$$\zeta_{11,-6} = -\frac{75}{2^{11}} m^5 - \frac{41.297}{2^{13}.3.5} m^6,$$

$$s_{11,-6} = -\frac{483}{2^{11}} m^5 - \frac{228.233}{2^{13}.3.5} m^6.$$

II. *Terme en* $\gamma\varepsilon$. — On distingue :

1° Les termes en $\gamma_1\varepsilon_1 = M_{13}$;

2° » $\gamma_1\varepsilon_2 = M_{14}$;

3° » $\gamma_2\varepsilon_1 = M_{15}$;

4° » $\gamma_2\varepsilon_2 = M_{16}$.

Ce sont les deux premiers groupes que nous déterminerons.

1° Termes en $M_{13} = M_{11}.M_2$.
Nous avons ici

$$f_{13,k} = k(1-m) + (1-g) + (1-h),$$
$$\varphi_{13,k} = k(1-m) + (1-g_0) + (1-h_0).$$

L'équation générale peut s'écrire, Φ pouvant encore être négligé :

$$\zeta_{13,k}[-\varphi_{13,k}^2 + m^2] + [i\zeta e^{-3\mu}]_{13,k} = 0.$$

Or,

$$e^{-3\mu} = e^{-3\mu_0} - 3\mu_2 e^{-3\mu_0} + \ldots = a - 3a\mu_2 + \ldots,$$

d'où

$$[i\zeta e^{-3\mu}]_{13,k} = [a\zeta_{13}]_k - 3[a\mu_2\xi_{11}]_k.$$

Donc on est amené à calculer les produits auxiliaires $(\mu_2\zeta_{11})_k$, et l'équation en ζ s'écrit

$$\zeta_{13,k}[-\varphi^2_{13,k}+m^2+a_0]+\sum_0 a_{k'}\zeta_{13,k-k'}-3\sum a_{k'}(\mu_2\zeta_{11})_{k-k'}=0,$$

où $\sum_0$ indique que k' a toutes les valeurs possibles sauf 0 ; ce symbole aura d'ailleurs la même signification toutes les fois qu'il s'introduira.

$$s_{13,k}=\sum b_{k'}\zeta_{13,k-k'}-\sum b_{k'}(\mu_2\zeta_{11})_{k-k'}.$$

Quant à l'équation en s, elle deviendra

$$s_{13,k}(c_0 Q+d_0)+\sum_0 s_{13,k'}(c_{k-k'}Q+d_{k-k'})+\sum(\mu_2 s_{11})_{k'}(c_{k-k'}Q-2d_{k-k'})=0$$

en posant

$$Q=-\varphi^2_{13,k}+m^2.$$

D'une façon générale, la quantité Q correspondant à un coefficient quelconque $s_{p,k}$ aura pour valeur $-\varphi^2_{p,k}+m^2$.

Remarquons que l'équation en s nous amène à calculer les produits auxiliaires $(\mu_2 s_{11})_k$.

Les coefficients se déterminent sans difficultés, et les s concordent avec ceux trouvés par Delaunay :

$$\zeta_{13,0}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3.3}m^2+\frac{69}{2^5}m^3+\frac{46.067}{2^9.3^2}m^4+\frac{56.227}{2^9.3}m^5,$$

$$s_{13,0}=1-\frac{1}{2^2}m^2-\frac{21}{2^4}m^3-\frac{2.101}{2^8}m^4-\frac{69.605}{2^9.3}m^5,$$

$$\zeta_{13,2}=\frac{3}{2^3}m^2+\frac{51}{2^5}m^3+\frac{1.673}{2^7.3}m^4+\frac{117.707}{2^8.3^2.5}m^5,$$

$$s_{13,2}=\frac{7}{2^2}m^2+\frac{287}{2^4.3}m^3+\frac{8.185}{2^6.3^2}m^4+\frac{462.803}{2^7.3^3.5}m^5,$$

$$\zeta_{13,-2}=-\frac{9}{2^2}m-\frac{291}{2^5}m^2-\frac{9.475}{2^8}m^3-\frac{765.499}{2^{11}.3}m^4-\frac{29.419.349}{2^{13}.3^2}m^5,$$

$$s_{13,-2}=-\frac{3}{2}m-\frac{105}{2^4}m^2-\frac{3.681}{2^7}m^3-\frac{98.299}{2^{10}}m^4-\frac{3.496.637}{2^{12}.3}m^5,$$

$$\zeta_{13,4}=\frac{177}{2^9}m^4+\frac{6.987}{2^9.5}m^5,$$

$$s_{13,4}=\frac{657}{2^8}m^4+\frac{4.467}{2^8}m^5,$$

$$\zeta_{13,-4} = -\frac{45}{2^7}m^2 - \frac{339}{2^7}m^3 - \frac{51.083}{2^{12}}m^4 - \frac{455.673}{2^{11}.5}m^5,$$

$$s_{13,-4} = -\frac{45}{2^6}m^2 - \frac{267}{2^6}m^3 - \frac{36.459}{2^{11}}m^4 - \frac{978.821}{2^{10}.3.5}m^5,$$

$$\zeta_{13,-6} = -\frac{135}{2^9}m^4 - \frac{5.523}{2^{11}}m^5,$$

$$s_{13,-6} = -\frac{315}{2^8}m^4 - \frac{10.989}{2^{10}}m^5.$$

2° Termes en $M_{14} = M_{11}.M_3$.

On déduit immédiatement les deux systèmes d'équations de celles relatives à M_{13}, en y remplaçant les $\mu_{2,k}$ par les $\mu_{3,k}$, et l'indice 13 par l'indice 14. De plus, dans $f_{14,k}$ et $\varphi_{14,k}$, $1-g$ et $1-g_0$ se trouvent remplacés par $-(1-g)$ et $-(1-g_0)$. Le calcul ne présente ni difficulté ni discordance avec les résultats de Delaunay. Toutefois, j'ai dû ajouter à ceux-ci les termes en m^6 et en m^7 de $\zeta_{14,0}$, $s_{14,0}$, les termes en m^6 de $\zeta_{14,-2}$, $\zeta_{14,2}$, $s_{14,-2}$, $s_{14,2}$, qui interviennent dans le calcul du coefficient de l'argument 2(G—H), et dont voici les expressions :

$$\zeta_{14,0} = -\frac{3}{2} + \frac{503}{2^7}m^2 + \frac{1.269}{2^7}m^3 + \frac{264.419}{2^{12}.3}m^4 + \frac{112.101}{2^{11}}m^5 + \frac{2.632.953.433}{2^{19}.3^3}m^6 + \frac{4.410.801.295}{2^{19}.3^2}m^7,$$

$$s_{14,0} = -1 + \frac{189}{2^6}m^2 + \frac{375}{2^6}m^3 + \frac{15.403}{2^{11}}m^4 + \frac{1.843}{2^{10}}m^5 - \frac{85.474.223}{2^{18}.3^2}m^{6**} - \frac{669.495.377}{2^{18}.3^3}m^{7**},$$

$$\zeta_{14,2} = \frac{15}{2^4}m + \frac{337}{2^6}m^2 + \frac{63.881}{2^{10}.3}m^3 + \frac{2.430.415}{2^{12}.3^2}m^4 + \frac{148.016.869}{2^{15}.3^3}m^5 + \frac{16.771.524.877}{2^{17}.3^4.5}m^6,$$

$$s_{14,2} = \frac{15}{2^3}m + \frac{241}{2^5}m^2 + \frac{43.721}{2^9.3}m^3 + \frac{1.751.311}{2^{11}.3^2}m^4 + \frac{125.005.381}{2^{14}.3^3}m^5 + \frac{21.570.491.053}{2^{16}.3^4.5}m^{6**},$$

$$\zeta_{14,-2} = -\frac{3}{2^4}m - \frac{23}{2^6}m^2 - \frac{1.501}{2^{10}.3}m^3 + \frac{9.391}{2^{12}.3^2}m^4 + \frac{3.356.287}{2^{15}.3^3}m^5 + \frac{124.034.657}{2^{17}.3^4}m^6,$$

$$s_{14,-2} = -\frac{3}{2^3}m - \frac{23}{2^5}m^2 - \frac{2.077}{2^9.3}m^3 + \frac{11.215}{2^{11}.3^2}m^4 + \frac{6.304.159}{2^{14}.3^3}m^5 + \frac{348.447.137}{2^{16}.3^4}m^{6**},$$

$$\zeta_{14,4} = \frac{45}{2^6}m^3 + \frac{409}{2^6}m^4 + \frac{2.196.319}{2^{12}.3.5}m^5,$$

$$s_{14,4} = \frac{105}{2^5}m^3 + \frac{1.579}{2^6}m^4 + \frac{1.270.801}{2^{11}.5}m^5,$$

$$\zeta_{14,-4} = -\frac{9}{2^6}m^3 - \frac{97}{2^7}m^4 - \frac{149.171}{2^{12}.3.5}m^5,$$

$$s_{14,-4} = -\frac{21}{2^5}m^3 - \frac{97}{2^5}m^4 - \frac{93.229}{2^{11}.5}m^5,$$

$$\zeta_{14,6} = \frac{2.655}{2^{12}} m^5,$$

$$s_{14,6} = \frac{9.855}{2^{11}} m^5,$$

$$\zeta_{14,-6} = -\frac{531}{2^{12}} m^5,$$

$$s_{14,-6} = -\frac{1.971}{2^{11}} m^5.$$

III. *Termes en* $\gamma\varepsilon'$. — On distingue :

1° Les termes en $\gamma_1 \varepsilon'_1 = M_{17}$;
2° » $\gamma_1 \varepsilon'_2 = M_{18}$;
3° » $\gamma_2 \varepsilon'_1 = M_{19}$;
4° » $\gamma_2 \varepsilon'_2 = M_{20}$.

Ce sont les deux premiers groupes de coefficients que nous déterminerons.

1° Termes en $M_{17} = M_{11} M_4$. — Remarquons que nous pouvons poser $\Phi = -\frac{3}{4} m^2 \varepsilon'_1 \zeta^2$, ce qui, dans l'équation donnant $\zeta_{17,k}$, introduit l'expression $\frac{3}{2} m^2 \zeta_{11,k}$. D'autre part :

$$f_{17,k} = k(1-m) + m + (1-h),$$
$$\varphi_{17,k} = k(1-m) + m + (1-h_0).$$

On trouve immédiatement l'équation

$$\zeta_{17,k}[-\varphi^2_{17,k} + m^2] + [i\zeta e^{-3\mu}]_{17,k} + \frac{3}{2} m^2 \zeta_{11,k} = 0.$$

Mais

$$[i\zeta e^{-3\mu}]_{17,k} = [a\zeta_{17}]_k - 3[a\mu_4 \zeta_{11}]_k.$$

D'où

$$\zeta_{17,k}[-\varphi^2_{17,k} + m^2 + a_0] + \sum_0 a_{k'} \zeta_{17,k-k'} - 3\sum a_{k'} (\mu_4 \zeta_{11})_{k-k'} + \frac{3}{2} m^2 \zeta_{11,k} = 0.$$

Ceci nous amène à déterminer à l'avance les produits auxiliaires $(\mu_4 \zeta_{11})_k$.
D'autre part :

$$s_{17,k} = \sum b_{k'} \zeta_{17,k-k'} - \sum b_{k'} (\mu_4 \zeta_{11})_{k-k'}.$$

L'équation en s donne :

$$s_{17,k}(c_0 Q + d_0) + \sum_0 (c_{k'} Q + d_{k'}) s_{17,k-k'} + \sum (c_{k'} Q - 2d_{k'})(\mu_4 s_{11})_{k-k'} + \frac{3}{2} m^2 \sum c_{k'} s_{11,k-k'} = 0$$

avec

$$Q = -[k(1-m) + m + (1-h_0)]^2 + m^2.$$

Les termes en m^4 et en m^5 de $s_{17,-2}$, le terme en m^5 de $s_{17,2}$ diffèrent de ceux qu'a trouvés Delaunay. Le reste des calculs ne présente d'ailleurs aucune particularité.

N'oublions pas enfin que l'équation en s nécessite le calcul des produits auxiliaires $(\mu_4 s_{11})_k$:

$$\zeta_{17,0} = -\frac{3}{2^3} m - \frac{21}{2^6} m^2 + \frac{2.421}{2^7} m^3 + \frac{1.600.333}{2^{12}.3} m^4 + \frac{1.383.353}{2^8.3^2} m^5,$$

$$s_{17,0} = -\frac{3}{2^3} m - \frac{69}{2^6} m^2 + \frac{2.369}{2^7} m^3 + \frac{1.737.485}{2^{12}.3} m^4 + \frac{12.614.783}{2^{11}.3^2} m^5,$$

$$\zeta_{17,2} = -\frac{3}{2^5} m^2 - \frac{109}{2^7} m^3 - \frac{8.717}{2^{10}.3} m^4 + \frac{91.781}{2^{11}.3^2} m^5,$$

$$s_{17,2} = -\frac{11}{2^5} m^2 - \frac{1.127}{2^7.3} m^3 - \frac{74.671}{2^{10}.3^2} m^4 + \frac{1.410.727}{2^{11}.3^3} m^{5*},$$

$$\zeta_{17,-2} = -\frac{7}{2^3} m - \frac{367}{2^6} m^2 - \frac{18.023}{2^8.3} m^3 - \frac{889.927}{2^{12}.3} m^4 - \frac{22.629.943}{2^{14}.3^2} m^5,$$

$$s_{17,-2} = -\frac{7}{2^3} m - \frac{255}{2^6} m^2 - \frac{3.509}{2^8} m^3 - \frac{158.029}{2^{12}} m^{4*} - \frac{3.354.277}{2^{14}.3} m^{5*},$$

$$\zeta_{17,4} = -\frac{25}{2^8} m^4 - \frac{12.587}{2^{11}.5} m^5,$$

$$s_{17,4} = -\frac{161}{2^8} m^4 - \frac{74.803}{2^{11}.5} m^5,$$

$$\zeta_{17,-4} = -\frac{105}{2^8} m^3 - \frac{1.817}{2^9} m^4 - \frac{847.325}{2^{14}.3} m^5,$$

$$s_{17,-4} = -\frac{385}{2^8} m^3 - \frac{16.375}{2^9.3} m^4 - \frac{6.713.503}{2^{14}.3^2} m^5,$$

$$\zeta_{17,-6} = -\frac{175}{2^9} m^5,$$

$$s_{17,-6} = -\frac{1.127}{2^9} m^5.$$

2° Termes en $M_{18} = M_{11} M_5$.

Nous avons :

$$\Phi = -\frac{3}{4} m^2 \varepsilon'_2 \zeta ,$$

$$f_{18,k} = k(1-m) - m + (1-h),$$

$$\varphi_{18,k} = k(1-m) - m + (1-h_0).$$

On déduit immédiatement les équations de ce groupe de celles relatives à M_{17} en y remplaçant les $\mu_{4,k}$ par les $\mu_{5,k}$, ε'_1 par ε'_2, et l'indice 17 par l'indice 18. Le terme en m^5 de $s_{18,0}$ est le seul qui diffère de ceux trouvés par Delaunay :

$$\zeta_{18,0} = \frac{3}{2^3} m + \frac{57}{2^6} m^2 - \frac{1.081}{2^6} m^3 - \frac{579.883}{2^{12}} m^4 - \frac{5.840.941}{2^{13}} m^5,$$

$$s_{18,0} = \frac{3}{2^3} m + \frac{9}{2^6} m^2 - \frac{1.107}{2^6} m^3 - \frac{537.771}{2^{12}} m^4 - \frac{15.757.075}{2^{13}.3} m^{5*},$$

$$\zeta_{18,2} = \frac{21}{2^5} m^2 + \frac{669}{2^7} m^3 + \frac{24.635}{2^{10}} m^4 + \frac{77.645}{2^{10}} m^5,$$

$$s_{18,2} = \frac{77}{2^5} m^2 + \frac{1.949}{2^7} m^3 + \frac{61.091}{2^{10}} m^4 + \frac{156.949}{2^{10}} m^5,$$

$$\zeta_{18,-2} = \frac{3}{2^3} m + \frac{131}{2^6} m^2 + \frac{3.131}{2^8.3} m^3 - \frac{64.411}{2^{12}.3^2} m^4 - \frac{31.220.047}{2^{14}.3^3} m^5,$$

$$s_{18,-2} = \frac{3}{2^3} m + \frac{115}{2^6} m^2 + \frac{2.083}{2^8.3} m^3 - \frac{138.491}{2^{12}.3^2} m^4 - \frac{28.563.575}{2^{14}.3^3} m^5,$$

$$\zeta_{18,4} = \frac{175}{2^8} m^4 + \frac{47.309}{2^{11}.3} m^5,$$

$$s_{18,4} = \frac{1.127}{2^8} m^4 + \frac{260.869}{2^{11}.3} m^5,$$

$$\zeta_{18,-4} = \frac{27}{2^8} m^3 + \frac{249}{2^8} m^4 + \frac{322.917}{2^{14}.5} m^5,$$

$$s_{18,-4} = \frac{99}{2^8} m^3 + \frac{815}{2^8} m^4 + \frac{900.669}{2^{14}.5} m^5,$$

$$\zeta_{18,-6} = \frac{75}{2^{10}} m^5,$$

$$s_{18,-6} = \frac{483}{2^{10}} m^5.$$

IV. *Termes en* $\gamma\varepsilon^2$.

Des six groupes de coefficients :

$$\begin{array}{lll}
\text{Termes en} & \gamma_1\varepsilon_1^2 & = M_{21}, \\
\quad\text{»} & \gamma_1\varepsilon_1\varepsilon_2 & = M_{22}, \\
\quad\text{»} & \gamma_1\varepsilon_2^2 & = M_{23}, \\
\quad\text{»} & \gamma_2\varepsilon_1^2 & = M_{24}, \\
\quad\text{»} & \gamma_2\varepsilon_1\varepsilon_2 & = M_{25}, \\
\quad\text{»} & \gamma_2\varepsilon_2^2 & = M_{26},
\end{array}$$

ce sont les trois premiers que je déterminerai.

1° Termes en $\gamma_1 \varepsilon_1^2 = M_{21} = M_{11} M_6 = M_{13} M_2 = M_{11}(M_2)^2$.

Nous avons :

$$\Phi = 0,$$

$$f_{21,k} = k(1-m) + 2(1-g) + (1-h),$$

$$\varphi_{21,k} = k(1-m) + 2(1-g_0) + (1-h_0),$$

et l'équation générale s'écrit :

$$\zeta_{21,k}[-\varphi_{21,k}^2 + m^2] + [i\zeta e^{-3\mu}]_{21,k} = 0.$$

Ici

$$e^{-3\mu} = e^{-3\mu_0} - 3\mu_6 e^{-3\mu_0} - 3\mu_2 e^{-3\mu_0} + \frac{9}{2}(\mu_2)^2 e^{-3\mu_0} + \dots,$$

d'où

$$(i\zeta e^{-3\mu})_{21,k} = [a\zeta_{21}]_k - 3[a(\mu_6\zeta_{11} + \mu_2\zeta_{13} - \frac{3}{2}\mu_2^2\zeta_{11})]_k.$$

Nous sommes ainsi amenés à calculer les produits auxiliaires $(\mu_6\zeta_{11})_k$, $(\mu_2\zeta_{13})_k$, $(\mu_2^2\zeta_{11})_k = \sum \mu_{2,k'}(\mu_2\zeta_{11})_{k-k'}$, et à faire les sommes

$$(\mu_6\zeta_{11} + \mu_2\zeta_{13} - \frac{3}{2}\mu_2^2\zeta_{11})_k.$$

Cela donne

$$\zeta_{21,k}[-\varphi_{21,k}^2 + m^2 + a_0] + \sum_0 a_{k'}\zeta_{21,k-k'} - 3\sum a_{k'}(\mu_6\zeta_{11} + \mu_2\zeta_{13} - \frac{3}{2}\mu_2^2\zeta_{11})_{k-k'} = 0.$$

On trouve sans peine

$$s_{21,k} = \sum b_{k'}\zeta_{21,k-k'} - \sum b_{k'}(\mu_6\zeta_{11} + \mu_2\zeta_{13} - \frac{1}{2}\mu_2^2\zeta_{11})_{k-k}.$$

On est ainsi conduit à déterminer les

$$(\mu_6\zeta_{11} + \mu_2\zeta_{13} - \frac{1}{2}\mu_2^2\zeta_{11})_k = (\mu_6\zeta_{11} + \mu_2\zeta_{13} - \frac{3}{2}\mu_2^2\zeta_{11})_k + (\mu_2^2\zeta_{11})_k.$$

L'équation en s devient

$$s_{21,k}(c_0 Q + d_0) + \sum_0 s_{21,k-k'}(c_{k'}Q + d_{k'}) + \sum(\mu_6 s_{11} + \mu_2 s_{13})_{k-k'}(c_{k'}Q - 2d_{k'})$$
$$+ \sum(\mu_2^2 s_{11})_{k-k'}\left(\frac{c_{k'}}{2}Q + 2d_{k'}\right) = 0$$

avec

$$Q = -[k(1-m) + 2(1-g_0) + (1-h_0)]^2 + m^2.$$

Nous déterminerons les $(\mu_6 s_{11} + \mu_2 s_{13})_k$ et les $(\mu_2^2 s_{11})_k = \sum \mu_{2,k'} (\mu_2 s_{11})_{k-k'}$.

Seul, le terme en m^4 de $s_{21,0}$ diffère de celui trouvé par Delaunay. Les calculs ne présentent pas de difficulté spéciale :

$$\zeta_{21,0} = \frac{3}{2^3} + \frac{1}{2^5} m^2 + \frac{81}{2^8} m^3 - \frac{5.915}{2^{10}.3} m^4,$$

$$s_{21,0} = \frac{9}{2^3} - \frac{17}{.2^5} m^2 - \frac{279}{2^5} m^3 - \frac{6.995}{2^7} m^{4*},$$

$$\zeta_{21,2} = \frac{75}{2^7} m^2 + \frac{75}{2^5} m^3 + \frac{94.121}{2^{10}.3.5} m^4,$$

$$s_{21,2} = \frac{425}{2^7} m^2 + \frac{265}{2^3.3} m^3 + \frac{1.158.437}{2^{10}.3^2.5} m^4,$$

$$\zeta_{21,-2} = -\frac{93}{2^6} m - \frac{1.871}{2^8} m^2 - \frac{503.593}{2^{12}.3} m^3 - \frac{27.068.357}{2^{14}.3^2} m^4,$$

$$s_{21,-2} = -\frac{147}{2^6} m - \frac{3.257}{2^8} m^2 - \frac{764.755}{2^{12}.3} m^3 - \frac{37.539.119}{2^{14}.3^2} m^4,$$

$$\zeta_{21,4} = \frac{833}{2^{10}} m^4,$$

$$s_{21,4} = \frac{7.007}{2^{10}} m^4,$$

$$\zeta_{21,-4} = -\frac{315}{2^9} m^2 - \frac{903}{2^8} m^3 - \frac{47.745}{2^{11}} m^4,$$

$$s_{21,-4} = -\frac{585}{2^9} m^2 - \frac{105}{2^4} m^3 - \frac{343.609}{2^{13}} m^4,$$

$$\zeta_{21,-6} = -\frac{2.025}{2^{12}} m^3 - \frac{95.985}{2^{14}} m^4,$$

$$s_{21,-6} = -\frac{6.075}{2^{12}} m^3 - \frac{244.755}{2^{14}} m^4.$$

2° Termes en $\gamma_1 \varepsilon_1 \varepsilon_2 = M_{22} = M_{11} . M_7 = M_{13} M_3 = M_{14} . M_2 = M_{11} M_2 M_3$.

Ici, nous avons :

$$\Phi = 0,$$

$$f_{22,k} = k(1 - m) + (1 - h),$$

$$\varphi_{22,k} = k(1 - m) + (1 - h_0).$$

Par définition,

$$s_{22,0} = -1.$$

Cette égalité nous permettra de déterminer h_7, coefficient de $\varepsilon_1 \varepsilon_2$ dans le développement de h. Voici comment je procéderai :

L'équation générale s'écrit immédiatement

$$\zeta_{22,k}[-\varphi^2_{22,k}+m^2+a_0]+\sum_0 a_{k'}\zeta_{22,k-k'}-3\sum a_{k'}(\mu_3\zeta_{13}+\mu_2\zeta_{14}+\mu_7\zeta_{11}-3\mu_2\mu_3\zeta_{11})_{k-k'}$$
$$+2(k+1-km-h_0)h_7\zeta_{11,k}=0,$$

ce qui nous amène à déterminer les produits auxiliaires

$$(\mu_3\zeta_{13}+\mu_2\zeta_{14}+\mu_7\zeta_{11}-3\mu_2\mu_3\zeta_{11})_k.$$

On trouve de même

$$s_{22,k}=\sum b_{k'}\zeta_{22,k-k'}-\sum b_{k'}(\mu_3\zeta_{13}+\mu_2\zeta_{14}+\mu_7\zeta_{11}-\mu_2\mu_3\zeta_{11})_{k-k'}.$$

Nous calculerons les

$$(\mu_3\zeta_{13}+\mu_2\zeta_{14}+\mu_7\zeta_{11}-\mu_2\mu_3\zeta_{11})_k=(\mu_3\zeta_{13}+\mu_2\zeta_{14}+\mu_7\zeta_{11}-3\mu_2\mu_3\zeta_{11})_k+2(\mu_2\mu_3\zeta_{11})_k.$$

Appliquons les formules précédentes à $k=0$; elles deviennent

$$\zeta_{22,0}[-\varphi^2_{22,0}+m^2+a_0]+\sum_0 a_{k'}\zeta_{22,-k'}-3\sum a_{k'}(\mu_3\zeta_{13}+\mu_2\zeta_{14}+\mu_7\zeta_{11}-3\mu_2\mu_3\zeta_{11})_{-k'}$$
$$+2(1-h_0)h_7\zeta_{11,0}=0$$

et

$$-1=b_0\zeta_{22,0}+\sum_0 b_{k'}\zeta_{22,-k'}-\sum b_{k'}(\mu_3\zeta_{13}+\mu_2\zeta_{14}+\mu_7\zeta_{11}-\mu_2\mu_3\zeta_{11})_{-k'}.$$

La seconde relation donne $\zeta_{22,0}$; portant dans la première, nous en déduirons h_7. Quant à l'équation en s, elle donne

$$s_{22,k}(c_0Q+d_0)+\sum_0 s_{22,k-k'}(c_{k'}Q+d_{k'})+\sum(\mu_3 s_{13}+\mu_2 s_{14}+\mu_7 s_{11})_{k-k'}(c_{k'}Q-2d_{k'})$$
$$+\sum(s_{11}\mu_2\mu_3)_{k-k'}(c_{k'}Q+4d_{k'})+2\varphi_{22,k}h_7\sum c_{k'}s_{11,k-k'}=0.$$

avec

$$Q=-[k(1-m)+(1-h_0)]^2+m^2.$$

Nous déterminerons les deux groupes de produits auxiliaires

$$(\mu_3 s_{13}+\mu_2 s_{14}+\mu_7 s_{11})_k \quad \text{et} \quad (\mu_2\mu_3 s_{11})_k.$$

Faisant $k=0$, nous avons une nouvelle détermination de h_7 qui vérifie la première :

$$\zeta_{22,0}=-\frac{1}{2}-\frac{25}{2^5.3}m^2+\frac{759}{2^8}m^3+\frac{263.999}{2^{10}.3^2}m^4,$$

$$h_7=-\frac{3}{2}m^2-\frac{189}{2^5}m^3-\frac{2.739}{2^7}m^4-\frac{165.411}{2^{11}}m^5,$$

$$\zeta_{22,2}=\frac{45}{2^5}m+\frac{855}{2^7}m^2+\frac{51.177}{2^{11}}m^3+\frac{674.695}{2^{13}}m^4,$$

$$s_{22,2}=\frac{135}{2^5}m+\frac{1.929}{2^7}m^2+\frac{113.915}{2^{11}}m^3+\frac{4.415.959}{2^{13}.3}m^4,$$

$$\zeta_{22,-2}=-\frac{3}{2^5}m-\frac{47}{2^7}m^2-\frac{6.353}{2^{10}.3}m^3-\frac{250.663}{2^{12}.3^2}m^4,$$

$$s_{22,-2}=-\frac{27}{2^5}m-\frac{423}{2^7}m^2-\frac{2.619}{2^8}m^3-\frac{163.375}{2^{11}.3}m^4,$$

$$\zeta_{22,4}=\frac{1.125}{2^9}m^3+\frac{38.175}{2^{11}}m^4,$$

$$s_{22,4}=\frac{6,375}{2^9}m^3+\frac{182.985}{2^{11}}m^4,$$

$$\zeta_{22,-4}=-\frac{135}{2^8}m^2-\frac{1.737}{2^9}m^3-\frac{118.581}{2^{13}}m^4,$$

$$s_{22,-4}=-\frac{405}{2^8}m^2-\frac{4.605}{2^9}m^3-\frac{315.543}{2^{13}}m^4,$$

$$\zeta_{22,-6}=-\frac{3.375}{2^{12}}m^4,$$

$$s_{22,-6}=-\frac{19.125}{2^{12}}m^4.$$

3° Termes en $\gamma_1\varepsilon_2^2=M_{23}=M_{11}M_8=M_{14}M_3=M_{11}(M_3)^2$.

On a :

$$\Phi=0,$$

$$f_{23,k}=k(1-m)-2(1-g)+(1-h),$$
$$\varphi_{23,k}=k(1-m)-2(1-g_0)+(1-h_0).$$

On écrit sans difficulté les relations

$$\zeta_{23,k}[-\varphi_{23,k}^2+m^2+a_0]+\sum_0 a_{k'}\zeta_{23,k-k'}-3\sum a_{k'}(\mu_8\zeta_{11}+\mu_3\zeta_{14}-\frac{3}{2}\mu_3^2\zeta_{11})_{k-k'}=0,$$

$$s_{23,k}=\sum b_{k'}\zeta_{23,k-k'}-\sum b_{k'}(\mu_8\zeta_{11}+\mu_3\zeta_{14}-\frac{1}{2}\mu_3^2\zeta_{11})_{k-k'}.$$

Entre les deux groupes d'auxiliaires, on a la relation

$$(\mu_8\zeta_{11}+\mu_3\zeta_{14}-\frac{1}{2}\mu_3^2\zeta_{11})_k=(\mu_8\zeta_{11}+\mu_3\zeta_{14}-\frac{3}{2}\mu_3^2\zeta_{11})_k+(\mu_3^2\zeta_{11})_k.$$

L'expression directe de s s'obtient par l'équation

$$s_{23,k}(c_0 Q+d_0)+\sum_0 s_{23,k-k'}(c_{k'}Q+d_{k'})+\sum(\mu_8 s_{11}+\mu_3 s_{14})_{k-k'}(c_{k'}Q-2d_{k'})$$
$$+\sum(\mu_3^2 s_{11})_{k-k'}\left(\frac{c_{k'}}{2}Q+2d_{k'}\right)=0$$

avec

$$Q=-[k(1-m)-2(1-g_0)+(1-h_0)]^2+m^2.$$

Les produits auxiliaires à déterminer sont les $(\mu_8 s_{11}+\mu_3 s_{14})_k$ et les $(\mu_3^2 s_{11})_k$.

J'ai dû pousser jusqu'à m^5 la détermination de $s_{23,0}$ (dont le terme en m^4 ne concorde pas avec celui de Delaunay) : cette approximation est nécessaire pour obtenir le terme en m^3 du coefficient à très longue période en $\gamma_1^2\varepsilon_2^2$. Le dénominateur de $s_{23,0}$ renfermant m^2 en facteur, j'ai dû calculer les termes en m^7 du numérateur, ce qui m'a conduit à déterminer les termes en m^5 de $s_{23,-2}$, $s_{23,2}$. Le dénominateur de ce dernier contient lui-même m en facteur; cela exige le calcul des termes en m^6 du numérateur :

$$\zeta_{23,0}=-\frac{1}{2}+\frac{135}{2^6}m+\frac{3.551}{2^9.3}m^2+\frac{19.071}{2^{12}}m^3+\frac{4.095.275}{2^{14}.3^2}m^4+\frac{85.518.223}{2^{17}.3}m^5,$$

$$s_{23,0}=-\frac{3}{2^2}+\frac{135}{2^6}m+\frac{2.025}{2^9}m^2+\frac{35.727}{2^{12}}m^3+\frac{587.407}{2^{14}}m^{4**}+\frac{86.845.027}{2^{17}.3}m^{5**},$$

$$\zeta_{23,2}=\frac{45}{2^6}m+\frac{381}{2^9}m^2+\frac{43.267}{2^{12}}m^3+\frac{1.124.855}{2^{12}.3}m^4+\frac{794.786.153}{2^{17}.3^2}m^5,$$

$$s_{23,2}=-\frac{15}{2^6}m-\frac{1.555}{2^9}m^2+\frac{37.943}{2^{12}.3}m^3+\frac{4.343.963}{2^{13}.3^2}m^4+\frac{897.844.193}{2^{16}.3^3}m^{5**},$$

$$\zeta_{23,-2}=-\frac{9}{2^6}m-\frac{81}{2^8}m^2-\frac{1.257}{2^{12}}m^3+\frac{164.921}{2^{14}.5}m^4+\frac{120.417.043}{2^{17}.3.5^2}m^5,$$

$$s_{23,-2}=-\frac{27}{2^6}m-\frac{303}{2^8}m^2-\frac{5.187}{2^{12}}m^3+\frac{683.527}{2^{14}.5}m^4+\frac{527.970.461}{2^{17}.3.5^2}m^{5**},$$

$$\zeta_{23,4}=\frac{675}{2^9}m^2+\frac{855}{2^6}m^3+\frac{1.386.435}{2^{14}}m^4,$$

$$s_{23,4}=\frac{2.025}{2^9}m^2+\frac{16,035}{2^9}m^3+\frac{2.908.653}{2^{14}}m^4,$$

$$\zeta_{23,-4}=-\frac{225}{2^{10}}m^3-\frac{4.805}{2^{12}}m^4,$$

$$s_{23,-4} = -\frac{1.275}{2^{10}} m^3 - \frac{24.811}{2^{12}} m^4,$$

$$\zeta_{23,6} = \frac{16.875}{2^{13}} m^4,$$

$$s_{23,6} = \frac{95.625}{2^{13}} m^4.$$

V. *Termes en* $\gamma\alpha$.

Les termes en

$$M_{28} = \gamma_2 \alpha = M_{12} \,.\, M_1$$

se déduiront de ceux en

$$M_{27} = \gamma_1 \alpha = M_{11} \,.\, M_1$$

que je vais déterminer.

On a ici

$$\Phi = \alpha\beta m^2 [-\frac{3}{4}\xi\zeta^2\sigma - \frac{3}{4}\eta\zeta^2\sigma^{-1}],$$

$$f_{27,k} = k(1-m) + (1-h),$$

$$\varphi_{27,k} = k(1-m) + (1-h_0),$$

k étant impair.

Les équations s'écrivent immédiatement :

$$\zeta_{27,k}[-\varphi_{27,k}^2 + m^2 + a_0] + \sum_0 a_{k'}\zeta_{27,k-k'} - 3\sum a_{k'}(\zeta_{11}\mu_1)_{k-k'} + \frac{3}{2}m^2(\xi_0\zeta_{11})_{k-1}$$

$$+ \frac{3}{2}m^2(\eta_0\zeta_{11})_{k+1} = 0,$$

$$s_{27,k} = \sum b_{k'}\zeta_{27,k-k'} - \sum b_{k'}(\zeta_{11}\mu_1)_{k-k'}.$$

Elles nécessitent le calcul auxiliaire des $(\zeta_{11}\mu_1)_k$, $(\xi_0\zeta_{11})_{k-1}$, $(\eta_0\zeta_{11})_{k+1}$.

Quant à l'équation en s, elle devient

$$s_{27,k}(c_0 Q + d_0) + \sum_0 s_{27,k-k'}(c_{k'}Q + d_{k'}) + \sum(\mu_1 s_{11})_{k-k'}(c_{k'}Q - 2d_{k'})$$

$$+ \frac{3}{2}m^2\sum c_{k'}(\xi_0 s_{11})_{k-k'-1} + \frac{3}{2}m^2\sum c_{k'}(\eta_0 s_{11})_{k-k'+1} = 0.$$

Elles entraînent la détermination des $(\mu_1 s_{11})_k$, des $(\xi_0 s_{11})_{k-1}$ et des $(\eta_0 s_{11})_{k+1}$.

D'ailleurs :

$$\zeta_{27,1} = -\frac{15}{2^5}m - \frac{85}{2^5}m^2 - \frac{44.597}{2^{10}.3}m^3 - \frac{2.794.613}{2^{12}.3^2}m^4,$$

$$s_{27,1} = -\frac{15}{2^4}m - \frac{83}{2^4}m^2 - \frac{38.917}{2^9.3}m^3 - \frac{2.384.221}{2^{11}.3^2}m^4,$$

$$\zeta_{27,-1} = \frac{45}{2^5}m + \frac{1.425}{2^8}m^2 + \frac{32.397}{2^{10}}m^3 + \frac{2.727.881}{2^{14}}m^4,$$

$$s_{27,-1} = \frac{15}{2^4}m + \frac{411}{2^7}m^2 + \frac{11.215}{2^9}m^3 + \frac{962.819}{2^{13}}m^4,$$

$$\zeta_{27,3} = \frac{5}{2^7}m^2 - \frac{95}{2^9}m^3 - \frac{2.485}{2^8.3}m^4,$$

$$s_{27,3} = \frac{15}{2^6}m^2 - \frac{245}{2^8}m^3 - \frac{895}{2^6}m^4,$$

$$\zeta_{27,-3} = \frac{95}{2^8}m^2 + \frac{2.695}{2^{10}}m^3 + \frac{593.227}{2^{14}.3}m^4,$$

$$s_{27,-3} = \frac{95}{2^7}m^2 + \frac{2.271}{2^9}m^3 + \frac{454.475}{2^{13}.3}m^4,$$

$$\zeta_{27,5} = \frac{105}{2^{11}}m^4,$$

$$s_{27,5} = \frac{465}{2^{10}}m^4,$$

$$\zeta_{27,-5} = -\frac{15}{2^{10}}m^3 + \frac{135}{2^{10}}m^4,$$

$$s_{27,-5} = -\frac{45}{2^9}m^3 + \frac{315}{2^9}m^4.$$

VI. *Termes en* $\gamma\alpha\varepsilon$.

On distingue :

1° Les termes en $\gamma_1\alpha\varepsilon_1 = M_{29}$;
2° » $\gamma_1\alpha\varepsilon_2 = M_{30}$;
3° » $\gamma_2\alpha\varepsilon_1 = M_{31}$;
4° » $\gamma_2\alpha\varepsilon_2 = M_{32}$.

Ce sont les deux premiers groupes que je déterminerai.

1° Termes en $\gamma_1\sigma\varepsilon_1 = M_{29} = M_{11}M_9 = M_{13}M_1 = M_2M_{27} = M_{11}M_1M_2$.

On a, k étant toujours impair :

$$\Phi = \alpha\beta m^2\left[-\frac{3}{4}\xi\zeta^2\sigma - \frac{3}{4}\eta\zeta^2\sigma^{-1}\right],$$

$$f_{29,k} = k(1-m) + (1-g) + (1-h),$$

$$\varphi_{29,k} = k(1-m) + (1-g_0) + (1-h_0).$$

On trouve sans peine :

$$\zeta_{29,k}[-\varphi^2_{29,k} + m^2 + a_0] + \sum_0 a_{k'}\zeta_{29,k-k'} - 3\sum a_{k'}(\mu_2\zeta_{27} + \mu_1\zeta_{13} + \mu_9\zeta_{11} - 3\mu_1\mu_2\zeta_{11})_{k-k}$$
$$+ \frac{3}{2}m^2(\xi_0\zeta_{13} + \xi_2\zeta_{11})_{k-1} + \frac{3}{2}m^2(\eta_0\zeta_{13} + \eta_2\zeta_{11})_{k+1} = 0,$$

$$s_{29,k} = \sum b_{k'}\zeta_{29,k-k'} - \sum b_{k'}(\mu_2\zeta_{27} + \mu_1\zeta_{13} + \mu_9\zeta_{11} - \mu_1\mu_2\zeta_{11})_{k-k'}.$$

Les produits auxiliaires à déterminer seront les

$$(\xi_0\zeta_{13} + \xi_2\zeta_{11})_{k-1}, \qquad (\eta_0\zeta_{13} + \eta_2\zeta_{11})_{k+1},$$
$$(\mu_2\zeta_{27} + \mu_1\zeta_{13} + \mu_9\zeta_{11} - 3\mu_1\mu_2\zeta_{11})_k = (\mu_2\zeta_{27} + \mu_1\zeta_{13} + \mu_9\zeta_{11} - \mu_1\mu_2\zeta_{11})_k - 2(\mu_1\mu_2\zeta_{11})_k.$$

Enfin, l'équation en s devient

$$s_{29,k}(c_0Q + d_0) + \sum_0 s_{29,k-k'}(c_{k'}Q + d_{k'}) + \sum(\mu_9 s_{11} + \mu_1 s_{13} + \mu_2 s_{27})_{k-k'}(c_{k'}Q - 2d_{k'})$$
$$+ \sum(\mu_1\mu_2 s_{11})_{k-k'}(c_{k'}Q + 4d_{k'}) + \frac{3}{2}m^2\sum(\xi_0\zeta_{13} + \xi_2\zeta_{11})_{k-1}$$
$$+ \frac{3}{2}m^2\sum(\eta_0\zeta_{13} + \eta^2\zeta_{11})_{k+1} = 0$$

avec

$$Q = -[k(1-m) + (1-g_0) + (1-h_0)]^2 + m^2.$$

Les produits auxiliaires sont ici les $(\mu_9 s_{11} + \mu_1 s_{13} + \mu_2 s_{27})_k$, les $(\mu_1\mu_2 s_{11})_k$, les $(\xi_0\zeta_{13} + \xi_2\zeta_{11})_{k-1}$ et les $(\eta_0\zeta_{13} + \eta_2\zeta_{11})_{k+1}$.

Nous trouvons ainsi :

$$\zeta_{29,1} = -\frac{45}{2^6}m - \frac{555}{2^7}m^2 - \frac{21.971}{2^{10}}m^3,$$

$$s_{29,1} = -\frac{135}{2^6}m - \frac{1.595}{2^7}m^2 - \frac{177.919}{2^{10}.3}m^3,$$

$$\zeta_{29,-1} = \frac{15}{2^6}m + \frac{2.145}{2^8}m^2 + \frac{82.357}{2^{11}}m^3.$$

$$s_{29,-1} = \frac{45}{2^6}m + \frac{3.141}{2^8}m^2 + \frac{137.077}{2^{11}}m^3,$$

$$\zeta_{29,3} = \frac{25}{2^8}m^2 - \frac{371}{2^9}m^3,$$

$$s_{29,3}=\frac{175}{2^8}m^2-\frac{2.229}{2^9}m^3,$$

$$\zeta_{29,-3}=\frac{25}{2^5}m+\frac{1.015}{2^7}m^2+\frac{522.295}{2^{12}.3}m^3,$$

$$s_{29,-3}=\frac{25}{2^5}m+\frac{55}{2^3}m^2+\frac{429.149}{2^{12}.3}m^3,$$

$$\zeta_{29,-5}=\frac{5.145}{2^{12}}m^3,$$

$$s_{29,-5}=\frac{16.315}{2^{12}}m^3.$$

2° Termes en $\gamma_1\alpha\varepsilon_2=M_{30}=M_{11}M_{10}=M_{14}M_4=M_3M_{27}=M_{11}M_4M_3$.

Les équations de ce groupe se déduisent immédiatement de celles du groupe précédent par les modifications suivantes :

a) Dans $f_{p,k}$ et $\varphi_{p,k}$ on remplace $1-g$ et $1-g_0$ par $-(1-g)$ et par $-(1-g_0)$.

b) On remplace les $\zeta_{13,k}$ et les $s_{13,k}$ par les $\zeta_{14,k}$ et les $s_{14,k}$.

c) On remplace $\mu_{9,k}$ par $\mu_{10,k}$; $\mu_{2,k}$, $\xi_{2,k}$, $\eta_{2,k}$ par $\mu_{3,k}$, $\xi_{3,k}$, $\eta_{3,k}$.

$$\zeta_{30,1}=\frac{15}{2^6}m-\frac{2.645}{2^9}m^2-\frac{213.559}{2^{12}.3}m^3,$$

$$s_{30,1}=\frac{45}{2^6}m-\frac{211}{2^9}m^2+\frac{64.519}{2^{12}.3}m^3,$$

$$\zeta_{30,-1}=\frac{165}{2^6}m-\frac{255}{2^9}m^2-\frac{31.547}{2^{12}}m^3,$$

$$s_{30,-1}=\frac{195}{2^6}m+\frac{327}{2^9}m^2-\frac{2.937}{2^{12}}m^3,$$

$$\zeta_{30,3}=-\frac{1.065}{2^9}m^2-\frac{42.375}{2^{11}}m^3,$$

$$s_{30,3}=-\frac{3.555}{2^9}m^2-\frac{115.785}{2^{11}}m^3,$$

$$\zeta_{30,-3}=\frac{225}{2^9}m^2+\frac{7.173}{2^{11}}m^3,$$

$$s_{30,-3}=\frac{635}{2^9}m^2+\frac{20.531}{2^{11}}m^3,$$

$$\zeta_{30,5}=\frac{375}{2^{11}}m^3,$$

$$s_{30,5}=\frac{2.625}{2^{11}}m^3,$$

$$\zeta_{30,-5}=-\frac{75}{2^{11}}m^3,$$

$$s_{30,-5}=-\frac{525}{2^{11}}m^3.$$

LONGITUDE.

[**16**] Les calculs de la longitude sont beaucoup plus longs que ceux effectués pour les coefficients de la latitude. Aussi décomposerai-je en deux chapitres cette partie de mon travail.

Dans un premier chapitre, j'envisagerai les coefficients qui contiennent en facteur une expression du second ou du troisième ordre, savoir :

$$\gamma^2, \quad \gamma^2\varepsilon, \quad \gamma^2\varepsilon'.$$

Dans un second chapitre, j'aborderai les coefficients qui contiennent en facteur une expression du quatrième ordre, savoir :

$$\gamma^2\varepsilon^2, \quad \gamma^2\alpha.$$

Dans les nos 11 et 13 sont développées et discutées les deux équations en ξ et en η, ainsi que l'équation de Laplace. La seule difficulté sera, pour chaque groupe de coefficients, de donner explicitement les valeurs de H, H′, P, C, ainsi que les valeurs des ξ et des η en fonction des μ et des λ. Cette dernière opération nous permettra de former les deux équations en μ et en λ, ainsi que l'équation de Laplace correspondante. Ayant calculé séparément les deux systèmes de coefficients (ξ et η d'une part, μ et λ d'autre part), nous vérifierons si la relation existant entre ces deux systèmes est bien réalisée, ce qui garantira l'exactitude des calculs.

Comme pour la latitude, ceux-ci se feront par approximations successives. J'indiquerai en détail comment j'ai procédé, en prenant un groupe de coefficients, en γ_1^2 par exemple, puisque c'est le premier qui se présente.

Il serait superflu, après ce qui a été dit dans l'exposition des méthodes, de s'appesantir sur la formation des équations dans chaque cas spécial. Étant donnée pour chaque groupe l'expression de Φ, de $f_{p,k}$ et de $\varphi_{p,k}$, de H, H′, P et C, il est aisé d'en déduire les équations correspondantes.

Abordons maintenant la détermination et la publication des diverses séries de résultats.

CHAPITRE III.

I. *Termes en* γ^2. — Ils sont de trois sortes :

1° Les termes en $\gamma_1^2 = M_{33}$;

2° » $\gamma_1\gamma_2 = M_{34}$;

3° » $\gamma_2^2 = M_{35}$.

Nous déterminerons les deux premiers groupes.

1° Termes en $\gamma_1^2 = M_{33} = (M_{11})^2$.

On a :

$$\Phi = \frac{3}{8} m^2 [\xi^2 \sigma^2 + \eta^2 \sigma^{-2}],$$

$$f_{33,k} = k(1-m) + 2(1-h),$$

$$\varphi_{33,k} = k(1-m) + 2(1-h_0).$$

D'autre part, la formule de Taylor donne immédiatement, en posant

$$f = \sum f_k \sigma^k = -\frac{3}{2} \xi_0^{-\frac{1}{2}} \eta_0^{-\frac{5}{2}},$$

$$e = \sum e_k \sigma^k = \frac{3}{2} \xi_0^{-\frac{3}{2}} \eta_0^{-\frac{5}{2}},$$

les valeurs suivantes pour $H_{33,k}$ et $H'_{33,k}$:

$$H_{33,k} = -\frac{1}{2} a_0 \xi_{33,k} + f_0 \eta_{33,k} + R_{33,k},$$

$$H'_{33,k} = f_0 \xi_{33,k} - \frac{1}{2} a_0 \eta_{33,k} + R'_{33,k},$$

avec

$$R_{33,k} = -\frac{1}{2} \sum_0 a_{k'} \xi_{33,k-k'} + \sum_0 f_{k'} \eta_{33,k-k'} + \sum e_{k'} (\zeta_{11}^2)_{k-k'},$$

$$R'_{33,k} = -\frac{1}{2} \sum_0 a_{-k'} \eta_{33,k-k'} + \sum_0 f_{-k'} \xi_{33,k-k'} + \sum e_{-k'} (\zeta_{11}^2)_{k-k'},$$

où, comme pour la latitude, $\sum\limits_0$ indique que k' a toutes les valeurs possibles, sauf o.

Alors les équations sont :

$$\xi_{33,k}\left[-(1+\varphi_{33,k})^2-\frac{m^2}{2}-\frac{1}{2}a_0\right]+f_0\eta_{33,k}-\frac{3}{2}m^2\eta_{33,k+2}+R_{33,k}=0,$$

$$f_0\xi_{33,k}+\eta_{33,k}\left[-(1-\varphi_{33,k})^2-\frac{m^2}{2}-\frac{1}{2}a_0\right]-\frac{3}{2}m^2\xi_{33,k-2}+R'_{33,k}=0.$$

Tout est prêt pour les approximations successives, et on a un type d'équations qui subsistera sans écritures nouvelles, ou à peine.

Ce type à peu près uniforme, nous allons aussi le réaliser pour les équations en $\mu_{33,k}$, $\lambda_{33,k}$, et pour l'équation de Laplace.

Dans celle-ci interviennent des produits tels que $(a\xi)_0$ et $(a\eta)_0$. Nous poserons :

$$(a\xi)_0=J_0=\sum J_{0,k}\sigma^k,$$

$$(a\eta)_0=J'_0=\sum J'_{0,k}\sigma^k,$$

de sorte que J et J' seront des quantités conjuguées.

Nous obtiendrons ainsi

$$P_{33,k}=-\frac{1}{2}J'_{0,0}\xi_{33,k}-\frac{1}{2}J_{0,0}\eta_{33,k}+P'_{33,k},$$

$$C_{33,k}=\eta_{0,0}\xi_{33,k}+\xi_{0,0}\eta_{33,k}+C'_{33,k},$$

avec

$$P'_{33,k}=-\frac{1}{2}\sum_0 J'_{0,k'}\xi_{33,k-k'}-\frac{1}{2}\sum_0 J_{0,k'}\eta_{33,k-k'}+\frac{1}{2}\sum a_{k'}(\zeta_1^2)_{k-k'},$$

$$C'_{33,k}=\sum_0 \eta_{0,k'}\xi_{33,k-k'}+\sum_0 \xi_{0,k'}\eta_{33,k-k'}-(\zeta_{11}^2)_k.$$

Alors

$$\begin{aligned}\xi_{33,k}[J'_{0,0}-\varphi^2_{33,k}\eta_{0,0}-2m^2\eta_{0,0}]+\eta_{33,k}[J_{0,0}-\varphi^2_{33,k}\xi_{0,0}-2m^2\xi_{0,0}]-2P'_{33,k}\\ -(\varphi^2_{33,k}+2m^2)C'_{33,k}-6m^2(\zeta^2_{11})_k-3m^2\left(1+\frac{m}{\varphi_{33,k}}\right)(\xi^2)_{33,k-2}\\ -3m^2\left(1-\frac{m}{\varphi_{33,k}}\right)(\eta^2)_{33,k+2}=0,\end{aligned}$$

avec, en outre,

$$(\xi^2)_{33,k}=2\sum \xi_{0,k'}\xi_{33,k-k'},$$

$$(\eta^2)_{33,k}=2\sum \eta_{0,k'}\eta_{33,k-k'}.$$

Pour passer aux équations en μ et λ, et à l'équation de Laplace correspondante, écrivons les relations

$$\xi = e^{\mu+i\lambda}\cos s,$$

$$\eta = e^{\mu-i\lambda}\cos s,$$

$$\mathrm{H} = \frac{\xi}{\rho^3} = e^{-2\mu+i\lambda}\cos s,$$

$$\mathrm{H}' = \frac{\eta}{\rho^3} = e^{-2\mu-i\lambda}\cos s.$$

Nous pourrons poser :

$$\begin{aligned}
\xi_{33,k} &= \xi_{0,0}(\mu_{33,k} + \lambda_{33,k}) + \mathrm{B}_{33,k},\\
\eta_{33,k} &= \eta_{0,0}(\mu_{33,k} - \lambda_{33,k}) + \mathrm{B}'_{33,k},\\
\mathrm{H}_{33,k} &= (\xi_0\rho_0^{-3})_0(-2\mu_{33,k} + \lambda_{33,k}) + \mathrm{G}_{33,k},\\
\mathrm{H}'_{33,k} &= (\eta_0\rho_0^{-3})_0(-2\mu_{33,k} - \lambda_{33,k}) + \mathrm{G}'_{33,k}.
\end{aligned}$$

Ceci nous amène à déterminer les quantités auxiliaires

$$(\xi_0\rho_0^{-3})_k = (\eta_0\rho_0^{-3})_{-k}.$$

Alors, avec

$$q_k = -(\varphi_{33,k} + 1)^2 - \frac{m^2}{2},$$

$$q'_k = -(\varphi_{33,k} - 1)^2 - \frac{m^2}{2},$$

$$\mathrm{B}_{33,k} = \frac{1}{2}\xi_{0,0}(s_{11}^2)_k + \sum_0 \xi_{0,k'}\left(\mu_{33} + \lambda_{33} + \frac{1}{2}s_{11}^2\right)_{k-k'},$$

$$\mathrm{B}'_{33,k} = \frac{1}{2}\eta_{0,0}(s_{11}^2)_k + \sum_0 \eta_{0,k'}\left(\mu_{33} - \lambda_{33} + \frac{1}{2}s_{11}^2\right)_{k-k'},$$

$$\mathrm{G}_{33,k} = \frac{1}{2}(\xi_0\rho_0^{-3})_0(s_{11}^2)_k + \sum_0 (\xi_0\rho_0^{-3})_{k'}\left(-2\mu_{33} + \lambda_{33} + \frac{1}{2}s_{11}^2\right)_{k-k'},$$

$$\mathrm{G}'_{33,k} = \frac{1}{2}(\eta_0\rho_0^{-3})_0(s_{11}^2)_k + \sum_0 (\eta_0\rho_0^{-3})_{k'}\left(-2\mu_{33} - \lambda_{33} + \frac{1}{2}s_{11}^2\right)_{k-k'},$$

où, comme toujours, $\sum_0$ indique que k' est différent de o, on a simplement :

$$\mu_{33,k}[q_k\xi_{0,0} - 2(\xi_0\rho_0^{-3})_0] + \lambda_{33,k}[q_k\xi_{0,0} + (\xi_0\rho_0^{-3})_0] + q_k\mathrm{B}_{33,k} + \mathrm{G}_{33,k} - \frac{3}{2}m^2\eta_{33,k+2} = 0,$$

$$\mu_{33,k}[q'_k\eta_{0,0} - 2(\eta_0\rho_0^{-3}]_0] + \lambda_{33,k}[-q'_k\eta_{0,0} - (\eta_0\rho_0^{-3})_0] + q'_k\mathrm{B}'_{33,k} + \mathrm{G}'_{33,k} - \frac{3}{2}m^2\xi_{33,k-2} = 0.$$

De même pour l'équation de Laplace. Si

$$b = \sum b_k \sigma^k = e^{-\mu_0},$$

$$h^{(1)} = \sum h_k^{(1)} \sigma^k = e^{2\mu_0},$$

on pourra poser

$$P_{33,k} = - b_0 \mu_{33,k} + P''_{33,k},$$

$$C_{33,k} = 2 h_0^{(1)} \mu_{33,k} + C''_{33,k},$$

avec

$$P''_{33,k} = - \sum_{0} b_{k'} \mu_{33,k-k'},$$

$$C''_{33,k} = 2 \sum_{0} h_{k'}^{(1)} \mu_{33,k-k'}.$$

Alors l'équation de Laplace s'écrit :

$$\mu_{33,k}[-2h_0^{(1)}\varphi^2_{33,k} - 4m^2 h_0^{(1)} + 2b_0] - (\varphi^2_{33,k} + 2m^2)C''_{33,k} - 2P''_{33,k} + 6m^2(\zeta^2_{11})_{33,k}$$
$$- 3m^2\left(1 + \frac{m}{\varphi_{33,k}}\right)(\xi^2)_{33,k-2} - 3m^2\left(1 - \frac{m}{\varphi_{33,k}}\right)(\eta^2)_{33,k+2} = 0$$

avec, ici :

$$(\zeta^2)_{33,k} = - \sum h_{k'}^{(1)} (s^2_{11})_{k-k'},$$

$$(\xi^2)_{33,k} = \sum (\xi^2_0)_{k'} [2\mu_{33} + 2\lambda_{33} + s^2_{11}]_{k-k'},$$

$$(\eta^2)_{33,k} = \sum (\eta^2_0)_{k'} [2\mu_{33} - 2\lambda_{33} + s^2_{11}]_{k-k'}.$$

J'ai dû pousser jusqu'en m^7 le calcul de $\xi_{33,0}$, ..., jusqu'en m^6 celui de $\xi_{33,-2}$, ...; cette approximation est nécessaire pour obtenir le terme en m^3 du coefficient à très longue période en $\gamma_1^2 \varepsilon_2^2$:

$$\xi_{33,0} = \frac{3}{2^3} m^2 - \frac{27}{2^5} m^3 - \frac{1.361}{2^9} m^4 - \frac{12.219}{2^{12}} m^5 + \frac{114.401}{2^{13}.3} m^6 + \frac{3.556.717}{2^{13}.3.5} m^7,$$

$$\eta_{33,0} = 1 - \frac{61}{2^3.3} m^2 + \frac{69}{2^5} m^3 + \frac{26.677}{2^9.3^2} m^4 + \frac{83.483}{2^{12}.3} m^5 + \frac{43.127.293}{2^{15}.3^4} m^6 + \frac{63.378.761}{2^{13}.3^3.5} m^7,$$

$$\mu_{33,0} = - m^2 + \frac{3}{2} m^3 + \frac{97}{2^5} m^4 + \frac{2.129}{2^8.3} m^5 - \frac{52.831}{2^{11}.3^2} m^6 - \frac{10.819.765}{2^{11}.3^3.5} m^7,$$

$$\lambda_{33,0} = - \frac{1}{2} + \frac{11}{2^3} m^2 - \frac{231}{2^7} m^3 - \frac{1.795}{2^9} m^4 + \frac{6.505}{2^{13}} m^5 + \frac{6.391.835}{2^{15}.3^2} m^{6**} + \frac{3.870.269.027}{2^{18}.3^3.5} m^{7**}.$$

$$\xi_{33,2} = \frac{25}{2^6} m^4 + \frac{6.799}{2^9.3.5} m^5,$$

$$\eta_{33,2} = \frac{3}{2^4} m^2 + \frac{7}{2^3} m^3 + \frac{475}{2^6.3} m^4 + \frac{255.487}{2^{10}.3^2.5} m^5,$$

$$\mu_{33,2} = -\frac{5}{2^2} m^4 - \frac{359}{2^5.5} m^5,$$

$$\lambda_{33,2} = -\frac{11}{2^4} m^2 - \frac{59}{2^3.3} m^3 - \frac{2.627}{2^6.3^2} m^4 - \frac{163.699}{2^7.3^3.5} m^5,$$

$$\xi_{33,-2} = -\frac{3}{2} m + \frac{111}{2^5} m^2 - \frac{227}{2^8} m^3 + \frac{7.837}{2^{11}} m^4 + \frac{162.979}{2^{11}.3} m^5 + \frac{15.086.951}{2^{16}.3} m^6 \quad (^1),$$

$$\eta_{33,-2} = \frac{3}{2^2} m - \frac{59}{2^5} m^2 - \frac{809}{2^6.3} m^3 - \frac{327.581}{2^{11}.3^2} m^4 - \frac{14.586.697}{2^{13}.3^3} m^5 - \frac{1.105.956.853}{2^{16}.3^4} m^6,$$

$$\mu_{33,-2} = \frac{3}{2} m^2 - \frac{9}{2^3} m^3 - \frac{401}{2^7} m^4 - \frac{17.761}{2^9.3} m^5 - \frac{1.861.165}{2^{12}.3^2} m^6 - \frac{73.946.807}{2^{14}.3^3} m^7,$$

$$\lambda_{33,-2} = -\frac{9}{2^3} m + \frac{11}{2^2} m^2 + \frac{2.939}{2^9.3} m^3 + \frac{115.679}{2^{10}.3^2} m^4 + \frac{22.136.689}{2^{14}.3^3} m^5 + \frac{198.157.331}{2^{14}.3^4} m^{6**},$$

$$\xi_{33,4} = 0 \,.\, m^5,$$

$$\eta_{33,4} = \frac{25}{2^8} m^4 + \frac{1.553}{2^7.3.5} m^5,$$

$$\mu_{33,4} = 0 \,.\, m^5,$$

$$\lambda_{33,4} = -\frac{443}{2^9} m^4 - \frac{1.947}{2^6.5} m^5,$$

$$\xi_{33,-4} = \frac{9}{2^6} m^2 + \frac{9}{2^7} m^3 - \frac{409}{2^{11}} m^4 - \frac{1.933}{2^{11}} m^5,$$

$$\eta_{33,-4} = \frac{27}{2^6} m^3 + \frac{231}{2^8} m^4 + \frac{2.567}{2^9.5} m^5,$$

$$\mu_{33,-4} = -\frac{3}{2^2} m^3 - \frac{39}{2^6} m^4 - \frac{179}{2^7.3} m^5,$$

$$\lambda_{33,-4} = \frac{9}{2^7} m^2 - \frac{255}{2^8} m^3 - \frac{5.425}{2^{12}} m^4 - \frac{79.579}{2^{13}.5} m^5,$$

$$\xi_{33,-6} = \frac{27}{2^{10}} m^4 + \frac{387}{2^{11}} m^5.$$

$$\eta_{33,-6} = \frac{375}{2^{10}} m^5,$$

---

(1) On a : $\xi_{33,-2} + \eta_{33,-2} = \ldots - \frac{497.727.847.489}{2^{20}.3^5.5} m^7.$

$$\mu_{33,-6} = -\frac{15}{2^4} m^5,$$

$$\lambda_{33,-6} = \frac{99}{2^{10}} m^4 - \frac{1.551}{2^{11}} m^5.$$

2° Termes en $\gamma_1 \gamma_2 = M_{34} = M_{11} M_{12}$.

On a :

$$\Phi = \frac{3}{8} m^2 [\xi^2 \sigma^2 + \eta^2 \sigma^{-2}],$$

$$f_{34,k} = \varphi_{34,k} = k(1 - m).$$

Par symétrie, on aura :

$$\xi_{34,k} = \eta_{34,-k},$$
$$\mu_{34,k} = \mu_{34,-k},$$
$$\lambda_{34,k} = -\lambda_{34,-k}.$$

Il suffira donc de donner à k des valeurs positives, zéro compris. Il serait superflu d'écrire explicitement les diverses équations relatives à ce groupe : elles se déduisent immédiatement de celles relatives au groupe précédent en y remplaçant l'indice 33 par l'indice 34, $(\zeta_{11}^2)_k$ et $(s_{11}^2)_k$ respectivement par $(2\zeta_{11}\zeta_{12})_k$ et $(2 s_{11} s_{12})_k$. Nous obtenons ainsi :

$$\xi_{34,0} = \eta_{34,0} = -1 + \frac{5}{2^6.3} m^2 - \frac{57}{2^7} m^3 - \frac{47.887}{2^{11}.3^2} m^4 - \frac{106.699}{2^{12}.3} m^5,$$

$$\mu_{34,0} = -m^4 - \frac{67}{2^2.3} m^5,$$

$$\lambda_{34,0} = 0,$$

$$\xi_{34,2} = -\frac{9}{2^4} m^2 - \frac{75}{2^5} m^3 - \frac{6.073}{2^{10}} m^4 - \frac{33.245}{2^{10}.3} m^5,$$

$$\eta_{34,2} = \frac{3}{2^2} m + \frac{15}{2^2} m^2 + \frac{2.343}{2^8} m^3 + \frac{23.831}{2^9.3} m^4 + \frac{1.349.011}{2^{13}.3^2} m^5,$$

$$\mu_{34,2} = m^2 + \frac{29}{2^2.3} m^3 + \frac{1.765}{2^6.3^2} m^4 + \frac{683}{2^8.3^3} m^5,$$

$$\lambda_{34,2} = -\frac{3}{2^3} m - \frac{47}{2^5} m^2 - \frac{5.149}{2^9.3} m^3 - \frac{88.181}{2^{11}.3^2} m^4 - \frac{552.089}{2^{14}.3^3} m^5,$$

$$\xi_{34,4} = -\frac{125}{2^8} m^4 - \frac{2.881}{2^8.3} m^5,$$

$$\eta_{34,4} = \frac{9}{2^6} m^3 + \frac{213}{2^8} m^4 + \frac{11.133}{2^{12}} m^5.$$

$$\mu_{34,4} = \frac{5}{2^2} m^4 + \frac{73}{2.5} m^5,$$

$$\lambda_{34,4} = -\frac{33}{2^6} m^3 - \frac{925}{2^8} m^4 - \frac{891.131}{2^{12}.3.5} m^5,$$

$$\xi_{34,6} = 0.\, m^5,$$

$$\eta_{34,6} = \frac{75}{2^{10}} m^5,$$

$$\mu_{34,6} = 0.\, m^5,$$

$$\lambda_{34,6} = -\frac{1.329}{2^{11}} m^5.$$

On sait, en vertu du théorème d'Adams, que $\left(\frac{1}{\rho}\right)_{34,0}$ doit être nul. Vérifions cette égalité autant que c'est possible, c'est-à-dire jusqu'à m^5 inclus. On a :

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)_{34,0} = (e^{-\mu})_{34,0} = -(e^{-\mu_0}\mu_{34})_0 = -(b\mu_{34})_0.$$

Mais, aux termes du sixième ordre près,

$$(b\mu_{34})_0 = b_0\mu_{34,0} + b_{-2}\mu_{34,2} + b_2\mu_{34,-2} = b_0\mu_{34,0} + 2b_2\mu_{34,2},$$

puisque

$$b_2 = b_{-2}, \qquad \mu_{34,2} = \mu_{34,-2}.$$

Or,

$$b_0 = 1 + 0.m,$$

$$b_2 = \frac{1}{2} m^2 + \frac{19}{2^2.3} m^3.$$

Donc

$$b_0\mu_{34,0} = -m^4 - \frac{67}{2^2.3} m^5,$$

$$2b_2\mu_{34,2} = m^4 + \frac{67}{2^2.3} m^5,$$

d'où

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)_{34,0} = 0.$$

II. *Termes en* $\gamma^2 \varepsilon$.

On distingue :

1° Les termes en $\gamma_1^2 \varepsilon_1 = M_{36}$;
2° » $\gamma_1^2 \varepsilon_2 = M_{37}$;
3° » $\gamma_1 \gamma_2 \varepsilon_1 = M_{38}$;
4° » $\gamma_1 \gamma_2 \varepsilon_2 = M_{39}$;
5° » $\gamma_2^2 \varepsilon_1 = M_{40}$;
6° » $\gamma_2^2 \varepsilon_2 = M_{41}$.

Nous déterminerons les coefficients des trois premiers groupes.

1° Termes en $\gamma_1^2 = M_{36} = M_2 M_{33} = (M_{11})^2 M_2 = M_{11} M_{13}$.

On a :

$$\Phi = \frac{3}{8} m^2 [\xi^2 \sigma^2 + \eta^2 \sigma^{-2}],$$

$$f_{36,k} = k(1 - m) + (1 - g) + 2(1 - h),$$

$$\varphi_{36,k} = k(1 - m) + (1 - g_0) + 2(1 - h_0).$$

Les équations s'écrivent immédiatement :

$$\xi_{36\,k}\left[-(1 + \varphi_{36,k})^2 - \frac{m^2}{2} - \frac{1}{2} a_0\right] + f_0 \eta_{36,k} - \frac{3}{2} m^2 \eta_{36,k+2} + R_{36,k} = 0;$$

$$f_0 \xi_{36,k} + \eta_{36,k}\left[-(1 - \varphi_{36,k})^2 - \frac{m^2}{2} - \frac{1}{2} a_0\right] - \frac{3}{2} m^2 \xi_{36,k-2} + R'_{36,k} = 0,$$

avec

$$\begin{aligned} R_{36,k} = & -\frac{1}{2} \sum_0 a_{k'} \xi_{36,k-k'} + \sum_0 f_{k'} \eta_{36,k-k'} \\ & + \frac{1}{2} \sum e_{-k'} (\xi_2 \xi_{33})_{k-k'} + \sum i_{k'} (\eta_2 \eta_{33})_{k-k'} + \frac{1}{2} \sum e_{k'} (\xi_2 \eta_{33} + \eta_2 \xi_{33})_{k-k'} \\ & + 2 \sum e_{k'} (\zeta_{11} \zeta_{13})_{k-k'} - \frac{1}{2} \sum l_{k'} (\zeta_{11}^2 \zeta_2)_{k-k'} - \frac{1}{2} \sum K_{k'} (\zeta_{12}^2 \eta_2)_{k-k'}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R'_{36,k} = & \sum_0 f_{-k'} \xi_{36,k-k'} - \frac{1}{2} \sum_0 a_{-k'} \eta_{36,k-k'} \\ & + \sum i_{-k'} (\xi_2 \xi_{33})_{k-k'} + \frac{1}{2} \sum e_{k'} (\eta_2 \eta_{33})_{k-k'} + \frac{1}{2} \sum e_{-k'} (\xi_2 \eta_{33} + \eta_2 \xi_{33})_{k-k'} \\ & + 2 \sum e_{-k'} (\zeta_{11} \zeta_{13})_{k-k'} - \frac{1}{2} \sum K_{-k'} (\zeta_{11}^2 \xi_2)_{k-k'} - \frac{1}{2} \sum l_{-k'} (\zeta_{11}^2 \eta_2)_{k-k'}, \end{aligned}$$

où

$$i = \sum i_k \sigma^k = \frac{15}{2^2} \xi_0^{-\frac{1}{2}} \eta_0^{-\frac{7}{2}},$$

$$l = \sum l_k \sigma_k = \frac{9}{2} (\xi_0 \eta_0)^{-\frac{5}{2}},$$

$$K = \sum K_k \sigma^k = \frac{15}{2} \xi_0^{-\frac{3}{2}} \eta_0^{-\frac{7}{2}}. \quad (^1)$$

L'équation de Laplace devient :

$$\begin{aligned} &\xi_{36,k}[J'_{0,0} - \varphi^2_{36,k}\eta_{0,0} - 2m^2\eta_{0,0}] + \eta_{36,k}[J_{0,0} - \varphi^2_{36,k}\xi_{0,0} - 2m^2\xi_{0,0}] \\ &\quad - 2P'_{36,k} - (\varphi^2_{36,k} + 2m^2)C'_{36,k} - 12m^2(\zeta_{11}\zeta_{13})_k \\ &\quad - 3m^2\left(1 + \frac{m}{\varphi_{36,k}}\right)(\xi^2)_{36,k-2} - 3m^2\left(1 - \frac{m}{\varphi_{36,k}}\right)(\eta^2)_{36,k+2} = 0 \end{aligned}$$

avec

$$C'_{36,k} = \sum_0 \eta_{0,k'}\xi_{36,k-k'} + \sum_0 \xi_{0,k'}\eta_{36,k-k'} + (\xi_2\eta_{33} + \eta_2\xi_{33})_k - 2(\zeta_{11}\zeta_{13})_k,$$

$$\begin{aligned} P'_{36,k} = &-\frac{1}{2}\sum_0 J'_{0,k'}\xi_{36,k-k'} - \frac{1}{2}\sum_0 J_{0,k'}\eta_{36,k-k'} + \sum a_{k'}(\zeta_{11}\zeta_{13})_{k-k'} \\ &-\frac{1}{2}\sum f_{-k'}(\xi_2\xi_{33})_{k-k'} + \frac{1}{4}\sum a_{k'}(\xi_2\eta_{33} + \eta_2\xi_{33})_{k-k'} - \frac{1}{2}\sum f_{k'}(\eta_2\eta_{33})_{k-k} \\ &-\frac{1}{2}\sum e_{-k'}(\zeta^2_{11}\xi_2)_{k-k'} - \frac{1}{2}\sum e_{k'}(\zeta^2_{11}\eta_2)_{k-k'}, \end{aligned}$$

$$(\xi^2)_{36,k} = 2\sum \xi_{0,k'}\xi_{36,k-k'} + 2(\xi_2\xi_{33})_k,$$

$$(\eta^2)_{36,k} = 2\sum \eta_{0,k'}\eta_{36,k-k'} + 2(\eta_2\eta_{33})_k.$$

Les produits auxiliaires à déterminer sont les $(\zeta_{11}\zeta_{13})_k$, $(\xi_2\xi_{33})_k$, $(\xi_2\eta_{33} + \eta_2\xi_{33})_k$, $(\eta_2\eta_{33})_k$, $(\zeta^2_{11}\xi_2)_k$, $(\zeta^2_{11}\eta_2)_k$.

Passons maintenant aux équations en μ et λ; nous pouvons poser :

$$\begin{aligned} \xi_{36,k} &= [e^{\mu+i\lambda}\cos s]_{36,k} = \xi_{0,0}[\mu_{36,k} + \lambda_{36,k}] + B_{36,k}, \\ \eta_{36,k} &= [e^{\mu-i\lambda}\cos s]_{36,k} = \eta_{0,0}[\mu_{36,k} - \lambda_{36,k}] + B'_{36,k}, \\ H_{36,k} &= [e^{-2\mu+i\lambda}\cos s]_{36,k} = [\xi_0\rho_0^{-3}]_0[-2\mu_{36,k} + \lambda_{36,k}] + G_{36,k}, \\ H'_{36,k} &= [e^{-2\mu-i\lambda}\cos s]_{36,k} = [\eta_0\rho_0^{-3}]_0[-2\mu_{36,k} - \lambda_{36,k}] + G'_{36,k}. \end{aligned}$$

---

(1) Je mets K pour éviter toute confusion avec k.

avec

$$B_{36,k} = \xi_{0,0}(s_{11}s_{13})_k + \sum_0 \xi_{0,k'}(\mu_{36} + \lambda_{36} + s_{11}s_{13})_{k-k'}$$
$$+ \sum \xi_{0,k'}(\mu_2\mu_{33} + \lambda_2\mu_{33} + \mu_2\lambda_{32} + \lambda_2\lambda_{33} + \frac{1}{2}s_{11}^2\mu_2 + \frac{1}{2}s_{11}^2\lambda_2)_{k-k'},$$

$$B'_{36,k} = \eta_{0,0}(s_{11}s_{13})_k + \sum_0 \eta_{0,k'}(\mu_{36} - \lambda_{36} + s_{11}s_{13})_{k-k'}$$
$$+ \sum \eta_{0,k'}(\mu_2\mu_{33} - \lambda_2\mu_{33} - \mu_2\lambda_{33} + \lambda_2\lambda_{33} + \frac{1}{2}s_{11}^2\mu_2 - \frac{1}{2}s_{11}^2\lambda_2)_{k-k'},$$

$$G_{36,k} = (\xi_0\rho_0^{-3})_0(s_{11}s_{13})_k + \sum_0 (\xi_0\rho_0^{-3})_{k'}(-2\mu_{36} + \lambda_{36} + s_{11}s_{13})_{k-k'}$$
$$+ \sum (\xi_0\rho_0^{-3})_{k'}(4\mu_2\mu_{33} - 2\lambda_2\mu_{33} - 2\mu_2\lambda_{33} + \lambda_2\lambda_{33} - s_{11}^2\mu_2 + \frac{1}{2}s_{11}^2\lambda_2)_{k-k'},$$

$$G'_{36,k} = (\eta_0\rho_0^{-3})_0(s_{11}s_{13})_k + \sum_0 (\eta_0\rho_0^{-3})_{k'}(-2\mu_{36} - \lambda_{36} + s_{11}s_{13})_{k-k'}$$
$$+ \sum (\eta_0\rho_0^{-3})_{k'}(4\mu_2\mu_{33} + 2\lambda_2\mu_{33} + 2\mu_2\lambda_{33} + \lambda_2\lambda_{33} - s_{11}^2\mu_2 - \frac{1}{2}s_{11}^2\lambda_2)_{k-k'}.$$

Faisons, comme pour M_{33},

$$q_k = -(1 + \varphi_{36,k})^2 - \frac{m^2}{2},$$
$$q'_k = -(1 - \varphi_{36,k})^2 - \frac{m^2}{2};$$

nous aurons

$$\mu_{36,k}[q_k\xi_{0,0} - 2(\xi_0\rho_0^{-3})_0] + \lambda_{36,k}[q_k\xi_{0,0} + (\xi_0\rho_0^{-3})_0] + q_kB_{36,k} + G_{36,k} - \frac{3}{2}m^2\eta_{36,k+2} = 0,$$
$$\mu_{36,k}[q'_k\eta_{0,0} - 2(\eta_0\rho_0^{-3})_0] + \lambda_{36,k}[-q'_k\eta_{0,0} - (\eta_0\rho_0^{-3})_0] + q'_kB'_{36,k} + G'_{36,k} - \frac{3}{2}m^2\xi_{36,k-2} = 0.$$

L'équation de Laplace s'écrira encore :

$$\mu_{36,k}[-2h_0^{(1)}\varphi_{36,k}^2 - 4m^2h_0^{(1)} + 2b_0] - (\varphi_{36,k}^2 + 2m^2)C''_{36,k} - 2P''_{36,k} + 6m^2(\zeta^2)_{36,k}$$
$$- 3m^2\left(1 + \frac{m}{\varphi_{36,k}}\right)(\xi^2)_{36,k-2} - 3m^2\left(1 - \frac{m}{\varphi_{36,k}}\right)(\eta^2)_{36,k+2} = 0$$

avec

$$P''_{36,k} = -\sum_{0} b_{k'}\mu_{36,k-k'} + \sum b_{k'}(\mu_2\mu_{33})_{k-k'},$$

$$C''_{36,k} = 2\sum_{0} h_{k'}^{(1)}\mu_{36,k-k'} + 4\sum h_{k'}^{(1)}(\mu_2\mu_{33})_{k-k'},$$

$$(\zeta^2)_{36,k} = -2\sum h_{k'}^{(1)}(s_{11}s_{13})_{k-k'},$$

$$(\xi^2)_{36,k} = \sum (\xi_0^2)_{k'}[2\mu_{36} + 2\lambda_{36} + 4\mu_2\mu_{33} + 4\mu_2\lambda_{33} + 4\lambda_2\mu_{33} + 4\lambda_2\lambda_{33} + 2s_{11}s_{13} + 2s_{11}^2\mu_2 + 2s_{11}^2\lambda_2]_{k-k'},$$

$$(\eta^2)_{36,k} = \sum (\eta_0^2)_{k'}[2\mu_{36} - 2\lambda_{36} + 4\mu_2\mu_{33} - 4\mu_2\lambda_{33} - 4\lambda_2\mu_{33} + 4\lambda_2\lambda_{33} + 2s_{11}s_{13} + 2s_{11}^2\mu_2 - 2s_{11}^2\lambda_2]_{k-k'}.$$

Les produits auxiliaires à former sont les $(s_{11}s_{13})_k$, $(\mu_2\mu_{33})_k$, $(\mu_2\lambda_{33} + \lambda_2\mu_{33})_k$, $(\lambda_2\lambda_{33})_k$, $(s_{11}^2\mu_2)_k$, $(s_{11}^2\lambda_2)_k$.

Je n'ai pas été amené, toutefois, à recourir à cette équation ; et les résultats, obtenus sans difficulté spéciale, concordent pour les $\lambda_{36,k}$ avec ceux de Delaunay, sauf $\lambda_{36,4}$:

$$\xi_{36,0} = \frac{3}{2^2}m^2 - \frac{171}{2^6}m^3 - \frac{1.051}{2^7}m^4,$$

$$\eta_{36,0} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}m^2 + \frac{615}{2^8}m^3 + \frac{86.545}{2^{10}.3^2}m^4,$$

$$\mu_{36,0} = -\frac{25}{2^4}m^2 + \frac{1.125}{2^8}m^3 + \frac{11.017}{2^{10}}m^4,$$

$$\lambda_{36,0} = -1 + \frac{19}{2^3}m^2 - \frac{381}{2^7}m^3 + \frac{2.047}{2^9}m^4,$$

$$\xi_{36,2} = \frac{177}{2^7}m^4,$$

$$\eta_{36,2} = \frac{3}{2^3}m^2 + \frac{51}{2^5}m^3 + \frac{3.295}{2^8.3}m^4,$$

$$\mu_{36,2} = -\frac{493}{2^7}m^4,$$

$$\lambda_{36,2} = -\frac{39}{2^4}m^2 - \frac{135}{2^4}m^3 - \frac{5.891}{2^7.3}m^4,$$

$$\xi_{36,-2} = -\frac{33}{2^4}m + 3m^2 - \frac{2.291}{2^8}m^3 - \frac{97.877}{2^{12}}m^4,$$

$$\eta_{36,-2} = -\frac{339}{2^6}m^2 - \frac{10.303}{2^{10}}m^3 - \frac{31.015}{2^9.3}m^4,$$

$$\mu_{36,-2} = \frac{21}{2^4} m + \frac{63}{2^6} m^2 + \frac{3.927}{2^9} m^3 + \frac{4.229}{2^7} m^4,$$

$$\lambda_{36,-2} = -\frac{3}{2^2} m + \frac{61}{2^3} m^2 + \frac{24.287}{2^9.3} m^3 + \frac{871.447}{2^{11}.3^2} m^4,$$

$$\xi_{36,4} = 0 \,.\, m^4,$$

$$\eta_{36,4} = \frac{177}{2^9} m^4,$$

$$\mu_{36,4} = 0 \,.\, m^4,$$

$$\lambda_{36,4} = -\frac{563}{2^7} m^4 *,$$

$$\xi_{36,-4} = \frac{243}{2^7} m^2 + \frac{5.067}{2^9} m^3 + \frac{459.051}{2^{13}} m^4,$$

$$\eta_{36,-4} = \frac{45}{2^5} m^2 + \frac{1.059}{2^9} m^3 - \frac{84.543}{2^{13}} m^4,$$

$$\mu_{36,-4} = -\frac{45}{2^6} m^2 + \frac{387}{2^8} m^3 + \frac{54.837}{2^{13}} m^4,$$

$$\lambda_{36,-4} = -\frac{99}{2^6} m^2 + \frac{129}{2^7} m^3 + \frac{84.431}{2^{12}} m \,,$$

$$\xi_{36,-6} = \frac{135}{2^{10}} m^3 + \frac{4.383}{2^{12}} m^4,$$

$$\eta_{36,-6} = \frac{135}{2^6} m^4,$$

$$\mu_{36,-6} = -\frac{3.375}{2^{10}} m^4,$$

$$\lambda_{36,-6} = \frac{135}{2^9} m^3 - \frac{6.579}{2^{11}} m^4.$$

2° Termes en $\gamma_1^2 \varepsilon^1 = M_{37} = M_3 M_{33} = (M_{11})^2 M_3 = M_{11} M_{14}$.

On a :

$$\Phi = \frac{3}{8} m^2 [\xi^2 \sigma^2 + \eta^2 \sigma^{-2}],$$

$$f_{37,k} = k(1-m) - (1-g) + 2(1-h),$$

$$\varphi_{37,k} = k(1-m) - (1-g_0) + 2(1-h_0).$$

Les équations se déduisent de celles du groupe précédent en y remplaçant les termes en M_2 et en M_{13} par les termes en M_3 et M_{14} correspondants. Le terme en m^4 de $\lambda_{37,0}$ diffère de celui trouvé par Delaunay.

D'autre part, pour obtenir le terme en m^3 du coefficient à très longue période en $\gamma_1^2 \varepsilon_2^2$, il faut calculer le terme en m^5 de $\xi_{37,0}$, $\eta_{37,0}$, $\mu_{37,0}$, $\lambda_{37,0}$. Les équations qui donnent ces inconnues contiennent m^2 en facteur au dénominateur, d'où la nécessité de pousser jusqu'en m^7 le calcul du numérateur. Ceci nous amène à déterminer les termes en m^5 de $\xi_{37,2}$, ..., $\xi_{37,-2}$ ....

L'opération se fait sans difficulté pour $\xi_{37,2}$ .... Mais, dans le calcul de $\xi_{37,-2}$, ..., m se trouve en facteur au dénominateur. Il faut donc obtenir les termes en m^6 du numérateur. Ici se rencontre une difficulté nouvelle, que j'avais déjà signalée : dans le calcul des quantités auxiliaires, j'avais déterminé, en prévision du dénominateur m, un ordre de plus que celui des inconnues; les termes en $\gamma_1^2 \varepsilon_2$ étant évalués jusqu'à m^4 inclusivement, j'avais calculé les termes en m^5 des quantités auxiliaires, et j'en avais fait une vérification sommaire. Pour les termes en m^6, pareille vérification eût été très longue et très laborieuse; je me bornai donc à revoir soigneusement mes calculs. Or, il m'arriva de laisser passer, à plusieurs reprises, une erreur dans l'un d'eux sans la découvrir, si bien que les deux déterminations du terme en m^5 de $\xi_{37,-2}$ ne concordaient pas. C'est à la longue seulement que je parvins à les concilier.

Je signale ce fait, bien connu des calculateurs, pour montrer l'intérêt pratique qu'offre la méthode de M. Andoyer. A la vérité, j'aurais dû recourir à la preuve par 11, ce nombre n'entrant pas en dénominateur dans les expressions que j'avais à former.

Quant au terme en m^5 de $\xi_{37,0}$, il nécessita le calcul, pour les quantités auxiliaires, des termes en m^6 et en m^7, et donna lieu, par suite, à des difficultés d'exécution encore plus grandes, les termes en m^7 atteignant des valeurs numériques élevées.

Les produits auxiliaires à déterminer sont d'ailleurs :

Pour les $\xi_{37,k}$, $\eta_{37,k}$: les $(\zeta_{11}\zeta_{14})_k$, $(\xi_3\xi_{33})_k$, $(\xi_3\eta_{33} + \eta_3\xi_{33})_k$, $(\eta_3\eta_{33})_k$, $(\zeta_{11}^2\xi_3)_k$, $(\zeta_{11}^2\eta_3)_k$;

Pour les $\mu_{37,k}$, λ_{37k} : les $(s_{11}s_{14})_k$, $(\mu_3\mu_3)_k$, $(\mu_3\lambda_{33} + \lambda_3\mu_{33})_k$, $(\lambda_3\lambda_{33})_k$, $(s_{11}^2\mu_3)_k$, $(s_{11}^2\lambda_3)_k$.

$$\xi_{37,0} = -\frac{5}{2^2} + \frac{135}{2^5}m + \frac{1.639}{2^8.3}m^2 - \frac{19.185}{2^{11}}m^3 - \frac{876.089}{2^{13}.3^2}m^4 + \frac{3.878.547}{2^{16}}m^5,$$

$$\eta_{37,0} = \frac{9}{2^2} - \frac{405}{2^5}m - \frac{699}{2^8}m^2 + \frac{32.283}{2^{11}}m^3 - \frac{63.761}{2^{13}}m^4 - \frac{14.361.509}{2^{16}}m^5,$$

$$\mu_{37,0} = \frac{5}{2^2} - \frac{135}{2^5}m - \frac{5}{2^8}m^2 + \frac{2.937}{2^{11}}m^3 - \frac{46.295}{2^{13}}m^4 - \frac{12.759.461}{2^{16}.3}m^5,$$

$$\lambda_{37,0} = -\frac{3}{2} + \frac{135}{2^4}m + \frac{213}{2^7}m^2 - \frac{8.385}{2^{10}}m^3 + \frac{74.947}{2^{12}}m^{4*} + \frac{7.563.603}{2^{15}}m^{5**},$$

$$\xi_{37,2} = -\frac{15}{2^4}m^2 + \frac{75}{2^7}m^3 + \frac{24.401}{2^{10}.3}m^4 + \frac{7.398.113}{2^{13}.3^2.5}m^5,$$

$$\eta_{37,2} = \frac{15}{2^4}m + \frac{347}{2^6}m^2 + \frac{58.741}{2^{10}.3}m^3 + \frac{2.171.051}{2^{12}.3^2}m^4 + \frac{670.034.563}{2^{15}.3^3.5}m^5.$$

$$\mu_{37,2} = \frac{125}{2^6} m^2 - \frac{5.545}{2^9.3} m^3 - \frac{613.357}{2^{12}.3^2} m^4 - \frac{179.039.873}{2^{15}.3^3.5} m^5,$$

$$\lambda_{37,2} = -\frac{15}{2^3} m - \frac{19}{2} m^2 - \frac{33.575}{2^9.3} m^3 - \frac{9.545}{2^4.3^2} m^4 - \frac{722.927}{2^7.3^3} m^{5**},$$

$$\xi_{37,-2} = \frac{171}{2^5} m - \frac{2.253}{2^8} m^2 - \frac{10.165}{2^9} m^3 - \frac{567.275}{2^{13}.3} m^4 - \frac{7.714.861}{2^{17}.3^2} m^5,$$

$$\eta_{37,-2} = -\frac{21}{2^5} m - \frac{457}{2^8} m^2 + \frac{9.931}{2^{10}.3} m^3 + \frac{173.209}{2^{13}.3^2} m^4 - \frac{118.458.865}{2^{17}.3^3} m^5.$$

$$\mu_{37,-2} = \frac{33}{2^5} m - \frac{855}{2^8} m^2 - \frac{7.495}{2^{10}} m^3 + \frac{103.505}{2^{13}.3} m^4 + \frac{39.014.359}{2^{17}.3^2} m^5,$$

$$\lambda_{37,-2} = \frac{33}{2^4} m - \frac{231}{2^7} m^2 - \frac{3.181}{2^8} m^3 - \frac{127.249}{2^{12}.3} m^4 + \frac{4.002.215}{2^{16}.3} m^{5**},$$

$$\xi_{37,4} = -\frac{885}{2^{10}} m^4,$$

$$\eta_{37,4} = \frac{45}{2^6} m^3 + \frac{3.247}{2^9} m^4,$$

$$\mu_{37,4} = \frac{2.465}{2^{10}} m^4,$$

$$\lambda_{37,4} = -\frac{585}{2^7} m^3 - \frac{9.433}{2^8} m^4,$$

$$\xi_{37,-4} = \frac{9}{2^7} m^2 + \frac{45}{2^7} m^3 + \frac{5.541}{2^{12}} m^4,$$

$$\eta_{37,-4} = \frac{9}{2^7} m^3 - \frac{1.645}{2^{10}} m^4,$$

$$\mu_{37,-4} = \frac{225}{2^9} m^3 + \frac{7.161}{2^{12}} m^4,$$

$$\lambda_{37,-4} = \frac{9}{2^6} m^2 + \frac{195}{2^8} m^3 + \frac{861}{2^8} m^4,$$

$$\xi_{37,-6} = \frac{27}{2^9} m^4,$$

$$\eta_{37,-6} = 0 \,.\, m^4,$$

$$\mu_{37,-6} = 0 \,.\, m^4.$$

$$\lambda_{37,-6} = \frac{351}{2^{10}} m^4.$$

3° Termes en $\gamma_1\gamma_2\varepsilon_1 = M_{38} = M_2 M_{34} = M_{11} M_{12} M_2 = M_{11} M_{15} = M_{12} M_{13}$.

On a :

$$\Phi = \frac{3}{8} m^2 [\xi^2 \sigma^2 + \eta^2 \sigma^{-2}],$$

$$f_{p,k} = k(1-m) + (1-g),$$

$$\varphi_{p,k} = k(1-m) + (1-g_0).$$

Par convention $\lambda_{38,0} = 0$. Cette relation nous permettra de déterminer le coefficient g_{34} de $\gamma_1\gamma_2$ dans le développement de g.

La partie de $f_{p,k}$ que nous utiliserons sera $\varphi_{p,k} - g_{34}\gamma_1\gamma_2$. Prenons la première des équations en $\xi_{38,k}$. Nous aurons :

$$-(1+f_{p,k})^2 = -(1+\varphi_{p,k})^2 + 2(1+\varphi_{p,k}) g_{34}\gamma_1\gamma_2 + \text{des termes inutilisables.}$$

Cela donne :

$$[-\xi(1+f_{p,k})^2]_{38,k} = -\xi_{38,k}(1+\varphi_{p,k})^2 + 2(1+\varphi_{p,k}) g_{34}\gamma_1\gamma_2\xi_{2,k}.$$

On déterminerait de même, sans la moindre difficulté, l'influence de g_{34} sur les cinq autres équations.

Cela donne :

$$\begin{aligned}
&\xi_{38,k}\Big[-(1+\varphi_{38,k})^2 - \frac{m^2}{2} - \frac{1}{2}a_0\Big] + f_0\eta_{38,k} - \frac{3}{2}m^2\eta_{38,k+2} + R_{38,k}\\
&\qquad + 2(1+\varphi_{38,k}) g_{34}\gamma_1\gamma_2\xi_{2,k} = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&f_0\xi_{38,k} + \eta_{38,k}\Big[-(1-\varphi_{38,k})^2 - \frac{m^2}{2} - \frac{1}{2}a_0\Big] - \frac{3}{2}m^2\xi_{38,k-2} + R'_{38,k}\\
&\qquad + 2(\varphi_{38,k} - 1) g_{34}\gamma_1\gamma_2\eta_{2,k} = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\xi_{38,k}[J'_{0,0} - \varphi^2_{38,k}\eta_{0,0} - 2m^2\eta_{0,0}] + \eta_{38,k}[J_{0,0} - \varphi^2_{38,k}\xi_{0,0} - 2m^2\xi_{0,0}]\\
&\qquad - 2P'_{38,k} - (\varphi^2_{38,k} + 2m^2)C'_{38,k} - 12m^2(\zeta_{11}\zeta_{15} + \zeta_{12}\zeta_{13})_k\\
&\qquad - 3m^2\left(1 + \frac{m}{\varphi_{38,k}}\right)(\xi^2)_{38,k-2} - 3m^2\left(1 - \frac{m}{\varphi_{38,k}}\right)(\eta^2)_{38,k+2}\\
&\qquad + 2\varphi_{38,k} g_{34}\gamma_1\gamma_2(\xi_0\eta_2 + \xi_2\eta_0)_k - \frac{6m^3}{(\varphi_{38,k})^2} g_{34}\gamma_1\gamma_2(\xi_0\xi_2)_{k-2}\\
&\qquad + \frac{6m^3}{(\varphi_{38,k})^2} g_{34}\gamma_1\gamma_2(\eta_0\eta_2)_{k+2} = 0.
\end{aligned}$$

Posant toujours

$$q_k = -(1+\varphi_{38,k})^2 - \frac{m^2}{2},$$

$$q'_k = -(1-\varphi_{38,k})^2 - \frac{m^2}{2},$$

nous aurons, pour déterminer les $\lambda_{38,k}$ et les $\mu_{38,k}$:

$$\mu_{38,k}[q_k\xi_{0,0}-2(\xi_0\rho_0^{-3})_0]+\lambda_{38,k}[q_k\xi_{0,0}+(\xi_0\rho_0^{-3})_0]+q_k\mathrm{B}_{38,k}+\mathrm{G}_{38,k}$$
$$-\frac{3}{2}m^2\eta_{38,k+2}+2(1+\varphi_{38,k})g_{34}\gamma_1\gamma_2[\xi_0(\lambda_2+\mu_2)]_k=0,$$

$$\mu_{38,k}[q'_k\eta_{0,0}-2(\eta_0\rho_0^{-3})_0]+\lambda_{38,k}[-q'_k\eta_{0,0}-(\eta_0\rho_0^{-3})_0]+q'_k\mathrm{B}_{38,k}+\mathrm{G}'_{38,k}$$
$$-\frac{3}{2}m^2\xi_{38,k-2}+2(\varphi_{38,k}-1)g_{34}\gamma_1\gamma_2[\eta_0(\mu_2-\lambda_2)]_k=0,$$

$$\mu_{38,k}[-2h_0^{(1)}\varphi_{38,k}^2-4m^2h_0^{(1)}+2b_0]-(\varphi_{38,k}^2+2m^2)\mathrm{C}''_{38,k}-2\mathrm{P}''_{38,k}+6m^2(\zeta^2)_{38,k}$$
$$-3m^2\left(1+\frac{m}{\varphi_{38,k}}\right)(\xi^2)_{38,k-2}-3m^2\left(1-\frac{m}{\varphi_{38,k}}\right)(\eta^2)_{38,k+2}$$
$$+2\varphi_{38,k}g_{34}\gamma_1\gamma_2[\xi_0^2(\mu_2-\lambda_2)+\eta_0^2(\mu_2+\lambda_2)]_k-\frac{6m^3}{(\varphi_{38,k})^2}g_{34}\gamma_1\gamma_2[\xi_0^2(\mu_2+\lambda_2)]_{k-2}$$
$$+\frac{6m^3}{(\varphi_{38,k})^2}g_{34}\gamma_1\gamma_2[\eta_0^2(\mu_2-\lambda_2)]_{k+2}=0.$$

Les $\mathrm{R}_{38,k}$, ... se déduisent immédiatement des $\mathrm{R}_{36,k}$, ..., étant donnés les produits auxiliaires à déterminer, qui sont :

Pour les $\xi_{38,k}$, $\eta_{38,k}$: les $(\zeta_{11}\zeta_{13}+\zeta_{12}\zeta_{13})_k$, $(\xi_2\xi_{34})_k$, $(\xi_2\eta_{34}+\eta_2\xi_{34})_k$, $(\eta_2\eta_{34})_k$, $(\zeta_{11}\zeta_{12}\xi_2)_k$, $(\zeta_{11}\zeta_{12}\eta_2)_k$;

Pour les $\mu_{38,k}$, $\lambda_{38,k}$: les $(s_{11}s_{13}+s_{12}s_{13})_k$, $(\mu_2\mu_{34})_k$, $(\mu_2\lambda_{34}+\lambda_2\mu_{34})_k$, $(\lambda_2\lambda_{34})_k$, $(s_{11}s_{12}\mu_2)_k$, $(s_{11}s_{12}\lambda_2)_k$.

Si on fait $k=0$, les deux premières équations en μ et en λ nous donneront $\mu_{38,0}$ et g_{34}. J'ai calculé cette dernière quantité avec la même approximation que Delaunay, c'est-à-dire jusqu'en m^5 inclusivement; j'ai trouvé le même résultat que lui. Ce résultat est d'ailleurs contrôlable en déterminant $\xi_{38,0}$, $\eta_{38,0}$ avec la même approximation. Ici se place une petite difficulté. En effet, si dans les deux premières équations en ξ et en η nous faisons $k=0$, elles deviennent :

$$(a)\qquad \begin{cases}\left(-\frac{9}{2}+0\,.\,m\right)\xi_{38,0}+\left(-\frac{3}{2}+0\,.\,m\right)\eta_{38,0}+\mathrm{A}=0,\\ \left(-\frac{3}{2}+0\,.\,m\right)\xi_{38,0}+\left(-\frac{1}{2}+0\,.\,m\right)\eta_{38,0}+\mathrm{B}=0.\end{cases}$$

La résolution de ce système nous donnerait m^2 au dénominateur. J'ai tourné la difficulté en portant dans chacune des deux équations les valeurs de $\xi_{38,0}$, $\eta_{38,0}$ calculées à l'aide des μ et des λ; la vérification est satisfaisante.

On pourrait, il est vrai, élever contre ce procédé l'objection suivante : Dans les premiers membres des équations (a), les termes en m^5 de $\xi_{38,0}$, $\eta_{38,0}$ interviennent par le facteur $3\xi_{38,0}+\eta_{38,0}$. Ne pourrait-on pas avoir commis sur les inconnues des erreurs qui se compensent, savoir : $\varepsilon\,.\,m^5$ sur $\xi_{38,0}$, $-\frac{\varepsilon}{3}m^5$ sur $\eta_{38,0}$? Cela est impossible.

En effet, les équations qui donnent $\xi_{38,0}$, $\eta_{38,0}$ en fonction des μ et des λ sont de la forme

$$\xi_{38,0} = \xi_{0,0} \cdot \mu_{38,0} + \mathrm{P},$$
$$\eta_{38,0} = \eta_{0,0} \cdot \mu_{38,0} + \mathrm{Q}.$$

P et Q étant des expressions indépendantes de $\mu_{38,0}$ et rigoureusement connues. Puisque

$$\xi_{0\,0} = \eta_{0,0},$$

les erreurs que l'on pourrait commettre sur $\xi_{38,0}$, $\eta_{38,0}$ seraient forcément égales. Si l'on envisage la première des équations (a), il y aurait encore une incertitude provenant de ce qu'on ne serait pas sûr du terme en m^5 de $2(2 - g_0)g_{34}\gamma_1\gamma_2\xi_{2,0}$. Cette incertitude disparaît si on considère la seconde, puisque g_{34} y est multiplié par $-2g_0\gamma_1\gamma_2\eta_{2\,0}$; g_0 commençant par un terme en m^2, on n'utilise dans ce produit que le terme en m^3 de g_{34}:

$$\xi_{38,0} = -\frac{1}{2} - \frac{1.561}{2^7.3} m^2 - \frac{1.845}{2^7} m^3 - \frac{2.176.729}{2^{12}.3^2} m^4 - \frac{2.189.367}{2^{13}} m^5,$$

$$\eta_{38,0} = \frac{3}{2} - \frac{437}{2^7} m^2 - \frac{189}{2^3} m^3 - \frac{35.813}{2^{12}.3} m^4 - \frac{28.637}{2^{12}} m^5,$$

$$\mu_{38,0} = -\frac{19}{2^6} m^2 - \frac{129}{2^5} m^3 - \frac{80.525}{2^{11}} m^4 - \frac{6.270.129}{2^{13}.3} m^5,$$

$$g_{34} = -6m^2 - \frac{189}{2^3} m^3 - \frac{3.963}{2^5} m^4 - \frac{335.403}{2^9} m^5,$$

$$\xi_{38,2} = -\frac{9}{2^3} m^2 - \frac{135}{2^5} m^3 - \frac{6.073}{2^9} m^4,$$

$$\eta_{38,2} = \frac{3}{2^3} m + \frac{25}{2^5} m^2 + \frac{797}{2^9.3} m^3 + \frac{7.597}{2^{11}.3^2} m^4,$$

$$\mu_{38,2} = \frac{25}{2^4} m^2 + \frac{683}{2^6.3} m^3 + \frac{30.053}{2^9.3^2} m^4,$$

$$\lambda_{38,2} = -\frac{3}{2^2} m - \frac{41}{2^4} m^2 - \frac{3.925}{2^8.3} m^3 - \frac{36.869}{2^{10}.3^2} m^4,$$

$$\xi_{38,-2} = \frac{117}{2^4} m + \frac{2.709}{2^6} m^2 + \frac{93.387}{2^9} m^3 + \frac{386.827}{2^9} m^4,$$

$$\eta_{38,-2} = -\frac{45}{2^4} m - \frac{1.281}{2^6} m^2 - \frac{5.633}{2^6} m^3 - \frac{1.965.119}{2^{11}.3} m^4,$$

$$\mu_{38,-2} = \frac{15}{2^3} m + \frac{153}{2^4} m^2 + \frac{19.355}{2^9} m^3 + \frac{3.396.423}{2^{11}.3^2} m^4,$$

$$\lambda_{38,-2} = 3m + \frac{359}{2^4} m^2 + \frac{19.909}{2^6.3} m^3 + \frac{1.002.041}{2^8.3^2} m^4,$$

$$\xi_{38,4} = -\frac{885}{2^9} m^4,$$

$$\eta_{38,4} = \frac{9}{2^3} m^3 + \frac{373}{2^8} m^4,$$

$$\mu_{38,4} = \frac{493}{2^7} m^4,$$

$$\lambda_{38,4} = -\frac{117}{2^6} m^3 - \frac{3.113}{2^8} m^4,$$

$$\xi_{38,-4} = \frac{45}{2^6} m^2 + \frac{723}{2^7} m^3 + \frac{57.875}{2^{11}} m^4,$$

$$\eta_{38,-4} = -\frac{225}{2^6} m^3 - \frac{545}{2^4} m^4,$$

$$\mu_{38,-4} = \frac{375}{2^6} m^3 + \frac{5.869}{2^7} m^4,$$

$$\lambda_{38,-4} = \frac{45}{2^5} m^2 + \frac{891}{2^6} m^3 + \frac{87.855}{2^{10}} m^4,$$

$$\xi_{38,-6} = \frac{135}{2^8} m^4,$$

$$\eta_{38,-6} = 0 . m^4,$$

$$\mu_{38,-6} = 0 . m^4,$$

$$\lambda_{38,-6} = \frac{1.755}{2^9} m^4.$$

III. *Termes en* $\gamma^2 \varepsilon'$.

On en compte six groupes :

$$\begin{aligned} M_{42} &= \gamma_1^2 \varepsilon_1', \\ M_{43} &= \gamma_1^2 \varepsilon_2', \\ M_{44} &= \gamma_1 \gamma_2 \varepsilon_1', \\ M_{45} &= \gamma_1 \gamma_2 \varepsilon_2', \\ M_{46} &= \gamma_2^2 \varepsilon_1', \\ M_{47} &= \gamma_2^2 \varepsilon_2'. \end{aligned}$$

Nous calculerons les coefficients des trois premiers groupes.

1° Termes en $\gamma_1^2 \varepsilon_1' = M_{42} = M_{11} M_{17} = M_4 M_{33} = (M_{11})^2 M_4$.

Ce qui distingue ce nouveau groupe des groupes précédents en $\gamma^2 \varepsilon$, c'est la valeur de

$$\Phi = \frac{3}{8} m^2 [\xi^2 \sigma^2 + \eta^2 \sigma^{-2}] + \frac{3}{8} m^2 \varepsilon_1' (\xi\eta - 2\zeta^2) - \frac{3}{16} m^2 \varepsilon_1' \xi^2 \sigma^2 + \frac{21}{16} m^2 \varepsilon_1' \eta^2 \sigma^{-2}.$$

On a ici :

$$f_{42,k} = k(1-m) + m + 2(1-h),$$
$$\varphi_{42,k} = k(1-m) + m + 2(1-h_0).$$

Posons :

$$\Delta\Phi = \frac{3}{8} m^2 \varepsilon'_1 (\xi\eta - 2\zeta^2) - \frac{3}{16} m^2 \varepsilon'_1 \xi^2 \sigma^2 + \frac{21}{16} m^2 \varepsilon'_1 \eta^2 \sigma^{-2}.$$

Nous devrons, pour former les équations du groupe, déterminer l'influence de $\Delta\Phi$ sur chacune d'elles, ce qui est immédiat. Après quoi, nous remarquerons que les $R_{42,k}$, $R'_{42,k}$, ... se déduisent des $R_{36,k}$, $R'_{36,k}$, ... en y remplaçant les termes en M_2 et en M_{13} par les termes correspondants en M_4 et en M_{17}.

Nous obtenons ainsi :

$$\xi_{42,k}\left[-(1+\varphi_{42,k})^2 - \frac{m^2}{2} - \frac{1}{2}a_0\right] + f_0 \eta_{42,k} - \frac{3}{2} m^2 \eta_{42,k+2} + R_{42,k}$$
$$- \frac{3}{4} m^2 \varepsilon'_1 \xi_{33,k} - \frac{21}{4} m^2 \varepsilon'_1 \eta_{33,k+2} = 0,$$

$$f_0 \xi_{42,k} + \eta_{42,k}\left[-(1-\varphi_{42,k})^2 - \frac{m^2}{2} - \frac{1}{2}a_0\right] - \frac{3}{2} m^2 \xi_{42,k-2} + R'_{42,k}$$
$$- \frac{3}{4} m^2 \varepsilon'_1 \eta_{33,k} + \frac{3}{4} m^2 \varepsilon'_1 \xi_{33,k-2} = 0,$$

$$\xi_{42,k}[J'_{0,0} - \varphi^2_{42,k}\eta_{0,0} - 2m^2\eta_{0,0}] + \eta_{42,k}[J_{0,0} - \varphi^2_{42,k}\xi_{0,0} - 2m^2\xi_{0,0}] - 2P'_{42,k}$$
$$- (\varphi^2_{42,k} + 2m^2)C'_{42,k} - 12m^2(\zeta_{11}\zeta_{17})_k - 3m^2\left(1 + \frac{m}{\varphi_{42,k}}\right)(\xi^2)_{42,k-2}$$
$$- 3m^2\left(1 - \frac{m}{\varphi_{42,k}}\right)(\eta^2)_{42,k+2} - 3m^2\varepsilon'_1[\xi_0\eta_{33} + \eta_0\xi_{33}]_k\left(1 - \frac{m}{2\varphi_{42,k}}\right)$$
$$- 6m^2(\zeta^2_{11})_k\varepsilon'_1\left(1 - \frac{m}{2\varphi_{42,k}}\right) + m^2\varepsilon'_1(\xi_0\xi_{33})_{k-2}\left(3 + \frac{3m}{2\varphi_{42,k}}\right)$$
$$- (\eta_0\eta_{33})_{k+2}\varepsilon'_1\left(21m^2 - \frac{63m^3}{2\varphi_{42,k}}\right) = 0.$$

Faisant

$$q_k = -(1+\varphi_{42,k})^2 - \frac{m^2}{2},$$

$$q'_k = -(1-\varphi_{42,k})^2 - \frac{m^2}{2},$$

les $\mu_{42,k}$, $\lambda_{42,k}$ sont donnés par les formules

$$\mu_{42,k}[q_k\xi_{0,0} - 2(\xi_0\rho_0^{-3})_0] + \lambda_{42,k}[q_k\xi_{0,0} + (\xi_0\rho_0^{-3})_0] + q_k B_{42,k} + G_{42,k}$$
$$- \frac{3}{2} m^2 \eta_{42,k+2} - \frac{3}{4} m^2 \varepsilon'_1 \left[\xi_0\left(\mu_{33} + \lambda_{33} + \frac{1}{2}s^2_{11}\right)\right]_k$$
$$- \frac{21}{4} m^2 \varepsilon'_1 \left[\eta_0\left(\mu_{33} - \lambda_{33} + \frac{1}{2}s^2_{11}\right)\right]_{k+2} = 0,$$

$$\mu_{42,k}[q'_k\eta_{0,0} - 2(\eta_0\rho_0^{-3})_0] + \lambda_{42,k}[-q'_k\eta_{0,0} - (\eta_0\rho_0^{-3})_0] + q'_k B'_{42,k} + G'_{42,k}$$
$$- \frac{3}{2} m^2 \xi_{42,k-2} - \frac{3}{4} m^2 \varepsilon'_1 [\eta_0(\mu_{33} - \lambda_{33} + \frac{1}{2} s_{11}^2)]_k$$
$$+ \frac{3}{4} m^2 \varepsilon'_1 [\xi_0(\mu_{33} + \lambda_{33} + \frac{1}{2} s_{11}^2)]_{k-2} = 0,$$

$$\mu_{42,k}[-2h_0^{(1)}\varphi_{42,k}^2 - 4m^2 h_0^{(1)} + 2b_0] - (\varphi_{42,k}^2 + 2m^2)C''_{42,k} - 2P''_{42,k} + 6m^2(\zeta^2)_{42,k}$$
$$- 3m^2\left(1 + \frac{m}{\varphi_{42,k}}\right)(\xi^2)_{42,k-2} - 3m^2\left(1 - \frac{m}{\varphi_{42,k}}\right)(\eta^2)_{42,k+2}$$
$$- 3m^2\varepsilon'_1[\xi_0\eta_0(\mu_{33} + \lambda_{33} + \frac{1}{2} s_{11}^2) + \xi_0\eta_0(\mu_{33} - \lambda_{33} + \frac{1}{2} s_{11}^2)]_k\left(1 - \frac{m}{2\varphi_{42,k}}\right)$$
$$- 6m^2\varepsilon'_1[h^{(1)} s_{11}^2]_k\left(1 - \frac{m}{2\varphi_{42,k}}\right) + m^2\varepsilon'_1[\xi_0^2(\mu_{33} + \lambda_{33} + \frac{1}{2} s_{11}^2)]_{k-2}\left(3 + \frac{3m}{2\varphi_{42,k}}\right)$$
$$- m^2\varepsilon'_1[\eta_0^2(\mu_{33} - \lambda_{33} + \frac{1}{2} s_{11}^2)_{k+2}\left(21 - \frac{63m}{2\varphi_{42,k}}\right) = 0.$$

Cette équation sert à déterminer $\lambda_{42,-2}$, le seul coefficient dont le terme en m^4 soit différent de celui trouvé par Delaunay.

Nous aurons d'ailleurs à calculer :

D'une part, les $(\zeta_{14}\zeta_{17})_k$, $(\xi_4\xi_{33})_k$, $(\xi_4\eta_{33} + \eta_4\xi_{33})_k$, $(\eta_4\eta_{33})_k$, $(\zeta_{11}^2\xi_4)_k$, $(\zeta_{11}^2\eta_4)_k$;

D'autre part, les $(s_{11}s_{17})_k$, $(\mu_4\mu_{33})_k$, $(\mu_4\lambda_{33} + \lambda_4\mu_{33})_k$, $(\lambda_4\lambda_{33})_k$, $(s_{11}^2\mu_4)_k$, $(s_{11}^2\lambda_4)_k$.

$$\xi_{42,0} = \frac{9}{2^4} m^2 - \frac{237}{2^6} m^3 - \frac{857}{2^{10}} m^4,$$

$$\eta_{42,0} = \frac{3}{2^2} m - \frac{159}{2^5} m^2 + \frac{709}{2^5} m^3 + \frac{688.375}{2^{11}.3} m^4,$$

$$\mu_{42,0} = -\frac{3}{2} m^2 + \frac{47}{2^3} m^3 + \frac{341}{2^6.3} m^4,$$

$$\lambda_{42,0} = \frac{3}{2^3} m + \frac{201}{2^6} m^2 - \frac{6.793}{2^8} m^3 - \frac{1.732.865}{2^{12}.3} m^4,$$

$$\xi_{42,2} = \frac{25}{2^6} m^4,$$

$$\eta_{42,2} = -\frac{3}{2^3} m^2 - \frac{41}{2^6} m^3 - \frac{3.265}{2^9.3} m^4,$$

$$\mu_{42,2} = -\frac{5}{2^2} m^4,$$

$$\lambda_{42,2} = \frac{11}{2^5} m^2 + \frac{613}{2^6.3} m^3 + \frac{52.235}{2^9.3^2} m^4.$$

$$\xi_{42,-2} = -\frac{7}{2}m + \frac{293}{2^5}m^2 - \frac{8.339}{2^8.3}m^3 + \frac{33.623}{2^9.3}m^4, \quad (^1)$$

$$\eta_{42,-2} = \frac{7}{2^2}m - \frac{37}{2^4}m^2 - \frac{1.945}{2^5.3}m^3 - \frac{912.503}{2^{11}.3}m^4,$$

$$\mu_{42,-2} = \frac{21}{2^2}m^2 - \frac{15}{2^4}m^3 - \frac{167}{2^8}m^4 - \frac{103.317}{2^{10}}m^5,$$

$$\lambda_{42,-2} = -\frac{21}{2^3}m + \frac{11}{2}m^2 + \frac{4.523}{2^9}m^3 + \frac{12.837}{2^7}m^{4}*,$$

$$\xi_{42,4} = 0 \,.\, m^4,$$

$$\eta_{42,4} = -\frac{25}{2^8}m^4,$$

$$\mu_{42,4} = 0 \,.\, m^4,$$

$$\lambda_{42,4} = \frac{443}{2^9}m^4,$$

$$\xi_{42,-4} = \frac{21}{2^5}m^2 + \frac{291}{2^8}m^3 - \frac{1.359}{2^{11}}m^4,$$

$$\eta_{42,-4} = \frac{315}{2^7}m^3 + \frac{705}{2^6}m^4,$$

$$\mu_{42,-4} = -\frac{35}{2^3}m^3 - \frac{4.147}{2^7.3}m^4,$$

$$\lambda_{42,-4} = \frac{21}{2^6}m^2 - \frac{2.735}{2^9}m^3 - \frac{219.065}{2^{12}.3}m^4,$$

$$\xi_{42,-6} = \frac{441}{2^{11}}m^4,$$

$$\eta_{42,-6} = 0 \,.\, m^4,$$

$$\mu_{42,-6} = 0 \,.\, m^4,$$

$$\lambda_{42,-6} = \frac{1.617}{2^{11}}m^4.$$

2° Termes en $\gamma_1^2\varepsilon_2' = M_{43} = M_{11}M_{18} = M_5M_{33} = (M_{11})^2M_5$.

La valeur de Φ est de

$$\frac{3}{8}m^2[\xi^2\sigma^2 + \eta^2\sigma^{-2}] + \frac{3}{8}m^2\varepsilon_2'(\xi\eta - 2\zeta^2) + \frac{21}{16}m^2\varepsilon_2'\xi^2\sigma^2 - \frac{3}{16}m^2\varepsilon_2'\eta^2\sigma^{-2}.$$

---

(1) $\xi_{42,-2} + \eta_{42,-2} = \ldots - \frac{48.574.111}{2^{13}.3^2}m^5.$

On a, d'ailleurs :

$$f_{p,k} = k(1-m) - m + 2(1-h),$$
$$\varphi_{p,k} = k(1-m) - m + 2(1-h_0).$$

Les équations [1] peuvent encore se calquer sur celles du groupe M_{36} : on remplace les termes en M_2 et en M_{13} par les termes correspondants en M_5 et en M_{18} ; de plus, la portion $\Delta\Phi$ de Φ qui dépend de ε_2' introduit dans les premiers membres des équations en $\xi_{33,k}$ $\eta_{33,k}$ les expressions

$$\text{I.} \quad -\frac{3}{4} m^2 \varepsilon_2' \xi_{33,k} + \frac{3}{4} m^2 \varepsilon_2' \eta_{33,k+2},$$

$$\text{II.} \quad -\frac{3}{4} m^2 \varepsilon_2' \eta_{33,k} - \frac{21}{4} m^2 \varepsilon_2' \xi_{33,k-2},$$

$$\begin{aligned}\text{III.} \quad & -3m^2 \varepsilon_2' (\xi_0 \eta_{33} + \eta_0 \xi_{33})_k \left(1 + \frac{m}{2\varphi_{43,k}}\right) - 6m^2 \varepsilon_2' (\zeta_{11}^2)_k \left(1 + \frac{m}{2\varphi_{43,k}}\right) \\ & - 21 m^2 \varepsilon_2' (\xi_0 \xi_{33})_{k-2} \left(1 + \frac{3m}{2\varphi_{43,k}}\right) + 3m^2 \varepsilon_2' (\eta_0 \eta_{33})_{k+2} \left(1 - \frac{m}{2\varphi_{43,k}}\right),\end{aligned}$$

qu'il est facile d'évaluer en fonction des μ et des λ, et par suite d'utiliser pour les équations en $\mu_{43,k}$, $\lambda_{43,k}$.

Les seuls coefficients pour lesquels il soit nécessaire de recourir à l'équation de Laplace sont d'ailleurs $\xi_{43,-2}$, $\eta_{43,-2}$, $\mu_{43,-2}$, $\lambda_{43,-2}$.

$$\xi_{43,0} = \frac{9}{2^4} m^2 + \frac{3}{2^6} m^3 - \frac{9.773}{2^{10}} m^4,$$

$$\eta_{43,0} = -\frac{3}{2^2} m - \frac{81}{2^5} m^2 - \frac{665}{2^6} m^3 - \frac{726.287}{2^{11}.3} m^4,$$

$$\mu_{43,0} = -\frac{3}{2} m^2 + \frac{5}{2^3} m^3 + \frac{1.357}{2^6.3} m^4,$$

$$\lambda_{43,0} = -\frac{3}{2^3} m + \frac{123}{2^6} m^2 + \frac{4.481}{2^8} m^3 + \frac{1.529.549}{2^{12}.3} m^4,$$

$$\xi_{43,2} = \frac{125}{2^6} m^4,$$

$$\eta_{43,2} = \frac{21}{2^5} m^2 + \frac{321}{2^6} m^3 + \frac{11.647}{2^9} m^4,$$

$$\mu_{43,2} = -\frac{25}{2^2} m^4,$$

$$\lambda_{43,2} = -\frac{77}{2^5} m^2 - \frac{991}{2^6} m^3 - \frac{27.047}{2^9} m^4,$$

---

[1] Et aussi les produits auxiliaires.

$$\xi_{43,-2} = \frac{3}{2}m + \frac{75}{2^5}m^2 - \frac{403}{2^8}m^3 + \frac{54.257}{2^{10}}m^4. \quad (^1)$$

$$\eta_{43,-2} = -\frac{3}{2^2}m - 4m^2 + \frac{487}{2^5.3}m^3 + \frac{69.301}{2^{11}.3^2}m^4,$$

$$\mu_{43,-2} = -\frac{3}{2^2}m^2 - \frac{63}{2^4}m^3 - \frac{271}{2^8}m^4 - \frac{16.639}{2^{10}.3}m^5,$$

$$\lambda_{43,-2} = \frac{9}{2^3}m + \frac{59}{2^4}m^2 - \frac{5.885}{2^9.3}m^3 + \frac{162.137}{2^{10}.3^2}m^4.$$

$$\xi_{43,4} = 0 \,.\, m^4,$$

$$\eta_{43,4} = \frac{175}{2^8}m^4,$$

$$\mu_{43,4} = 0 \,.\, m^4,$$

$$\lambda_{43,4} = -\frac{3.101}{2^9}m^4,$$

$$\xi_{43,-4} = -\frac{9}{2^5}m^2 - \frac{243}{2^8}m^3 + \frac{2.635}{2^{11}}m^4,$$

$$\eta_{43,-4} = -\frac{81}{2^7}m^3 - \frac{1.383}{2^8}m^4,$$

$$\mu_{43,-4} = \frac{9}{2^3}m^3 + \frac{919}{2^7}m^4,$$

$$\lambda_{43,-4} = -\frac{9}{2^6}m^2 + \frac{495}{2^9}m^3 + \frac{41.871}{2^{12}}m^4,$$

$$\xi_{43,-6} = -\frac{135}{2^{11}}m^4,$$

$$\eta_{43,-6} = 0 \,.\, m^4,$$

$$\mu_{43,-6} = 0 \,.\, m^4,$$

$$\lambda_{43,-6} = -\frac{495}{2^{11}}m^4.$$

---

(1) $\xi_{43,-2} + \eta_{43,-2} = \frac{54.964.093}{2^{13}.3^3}m^5.$

3° Termes en $\gamma_1\gamma_2\varepsilon'_1 = M_{44} = M_{12}M_{17} = M_{11}M_{19} = M_4M_{34} = M_{11}M_{12}M_4$.

L'expression de Φ est la même que pour M_{42}.

On a :

$$f_{p,k} = \varphi_{p,k} = k(1-m) + m.$$

Les équations et les produits auxiliaires de ce groupe se déduisent immédiatement de ceux du groupe M_{42} par les modifications suivantes :

1° Les $(\zeta_{11}\zeta_{17})_k$ et les $(s_{11}s_{17})_k$ devront être remplacés par les $(\zeta_{12}\zeta_{17} + \zeta_{11}\zeta_{19})_k$ et par les $(s_{12}s_{17} + s_{11}s_{19})_k$;

2° Les termes en M_{33} devront être remplacés par les termes en M_{34} correspondants;

3° Les $(\zeta_{11}^2)_k$ et les $(s_{11}^2)_k$ devront être remplacés par les $(2\zeta_{11}\zeta_{12})_k$ et les $(2s_{11}s_{12})_k$.

On obtient ainsi :

$$\xi_{44,0} = \frac{33}{2^2}m - \frac{189}{2^4}m^2 - \frac{24.581}{2^8}m^3 - \frac{1.909.499}{2^{10}.3}m^4, \quad (1)$$

$$\eta_{44,0} = -\frac{33}{2^2}m + \frac{45}{2^4}m^2 + \frac{25.993}{2^8}m^3 + \frac{742.357}{2^{10}}m^4,$$

$$\mu_{44,0} = -\frac{9}{2}m^2 + \frac{39}{2^3}m^3 + \frac{6.459}{2^7}m^4 + \frac{491.647}{2^9.3}m^5,$$

$$\lambda_{44,0} = \frac{27}{2^2}m - \frac{117}{2^4}m^2 - \frac{19.097}{2^8}m^3 - \frac{1.588.069}{2^{10}.3}m^4,$$

$$\xi_{44,2} = \frac{9}{2^5}m^2 + \frac{57}{2^3}m^3 + \frac{42.529}{2^{11}}m^4,$$

$$\eta_{44,2} = -\frac{3}{2^2}m - \frac{123}{2^5}m^2 - \frac{4.551}{2^8}m^3 + \frac{16.979}{2^{11}.3}m^4,$$

$$\mu_{44,2} = -\frac{1}{2}m^2 - \frac{131}{2^2.3}m^3 - \frac{17.737}{2^7.3^2}m^4,$$

$$\lambda_{44,2} = \frac{3}{2^3}m + \frac{73}{2^5}m^2 + \frac{24.397}{2^9.3}m^3 + \frac{197.983}{2^{11}.3^2}m^4,$$

$$\xi_{44,-2} = \frac{7}{2^2}m + \frac{473}{2^5}m^2 + \frac{52.489}{2^8.3}m^3 + \frac{1.293.527}{2^{11}.3}m^4,$$

$$\eta_{44,-2} = -\frac{63}{2^5}m^2 - \frac{609}{2^5}m^3 - \frac{164.919}{2^{11}}m^4,$$

$$\mu_{44,-2} = \frac{7}{2}m^2 + \frac{47}{2}m^3 + \frac{8.319}{2^7}m^4,$$

(1) $\xi_{44,0} + \eta_{44,0} = \frac{26.914.685}{2^{12}.3^2}m^5$.

$$\lambda_{44,-2} = \frac{7}{2^3} m + \frac{209}{2^5} m^2 + \frac{17.587}{2^9} m^3 + \frac{178.215}{2^{11}} m^4,$$

$$\xi_{44,4} = \frac{125}{2^8} m^4,$$

$$\eta_{44,4} = -\frac{27}{2^7} m^3 - \frac{915}{2^9} m^4,$$

$$\mu_{44,4} = -\frac{5}{2^2} m^4,$$

$$\lambda_{44,4} = \frac{99}{2^7} m^3 + \frac{3.967}{2^9} m^4,$$

$$\xi_{44,-4} = \frac{105}{2^7} m^3 + \frac{3.553}{2^9} m^4,$$

$$\eta_{44,-4} = -\frac{875}{2^8} m^4,$$

$$\mu_{44,-4} = \frac{35}{2^2} m^4,$$

$$\lambda_{44,-4} = \frac{385}{2^7} m^3 + \frac{45.815}{2^9.3} m^4.$$

CHAPITRE IV.

Termes en $\gamma^2\varepsilon^2$ et en $\gamma^2\alpha$.

I. *Termes en* $\gamma^2\varepsilon^2$.

On distingue :

1° Les termes en $\gamma_1^2\varepsilon_1^2 = M_{48}$;
2° » $\gamma_1^2\varepsilon_1\varepsilon_2 = M_{49}$;
3° » $\gamma_1^2\varepsilon_2^2 = M_{50}$;
4° » $\gamma_1\gamma_2\varepsilon_1^2 = M_{51}$;
5° » $\gamma_1\gamma_2\varepsilon_1\varepsilon_2 = M_{52}$;
6° » $\gamma_1\gamma_2\varepsilon_2^2 = M_{53}$;
7° » $\gamma_2^2\varepsilon_1^2 = M_{54}$;
8° » $\gamma_2^2\varepsilon_1\varepsilon_2 = M_{55}$;
9° » $\gamma_2^2\varepsilon_2^2 = M_{56}$.

Ce sont les cinq premiers groupes de coefficients que nous déterminerons :

1° Termes en $\gamma_1^2\varepsilon_1^2 = M_{48} = M_{13}^2 = M_{11}M_{21} = M_6M_{33} = M_2M_{36} = M_{11}^2M_6 = M_{11}M_{13}M_2$
$= M_2^2M_{33} = M_2^2M_{11}^2$.

Nous avons :

$$\Phi = \frac{3}{8}m^2[\xi^2\sigma^2 + \eta^2\sigma^{-2}],$$

$$f_{48,k} = k(1-m) + 2(1-g) + 2(1-h),$$
$$\varphi_{48,k} = k(1-m) + 2(1-g_0) + 2(1-h_0).$$

Φ ayant la même expression que pour M_{36}, les équations en M_{48} pourront se déduire des équations en M_{36} en y remplaçant l'indice 36 par l'indice 48. Il est donc inutile de les écrire. Donnons simplement l'expression des quantités $R_{48,k}$, $R'_{48,k}$, ...

On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{R}_{48,k} = & -\frac{1}{2}\sum_0 a_{k'}\xi_{48,k-k'} + \sum_0 f_{k'}\eta_{48,k-k'} + \frac{1}{2}\sum e_{-k'}(\xi_2\xi_{36} + \xi_6\xi_{33})_{k-k'} \\
& + \sum i_{k'}(\eta_2\eta_{36} + \eta_6\eta_{33})_{k-k'} + \frac{1}{2}\sum e_{k'}(\xi_2\eta_{36} + \eta_2\xi_{36} + \xi_6\eta_{33} + \eta_6\xi_{33})_{k-k'} \\
& + \sum e_{k'}(\zeta_{13}^2 + 2\zeta_{11}\zeta_{21})_{k-k'} - \frac{1}{2}\sum l_{k'}(\zeta_{11}^2\xi_6 + 2\zeta_{11}\zeta_{13}\xi_2)_{k-k'} \\
& - \frac{1}{2}\sum \mathrm{K}_{k'}(\zeta_{11}^2\eta_6 + 2\zeta_{11}\zeta_{13}\eta_2)_{k-k'} - \frac{1}{8}\sum \mathrm{K}_{-k'}(\xi_2^2\xi_{33})_{k-k'} \\
& - \frac{1}{8}\sum l_{k'}(\xi_2^2\eta_{33} + 2\xi_2\eta_2\xi_{33})_{k-k'} - \frac{1}{8}\sum \mathrm{K}_{k'}(\eta_2^2\xi_{33} + 2\xi_2\eta_2\eta_{33})_{k-k'} \\
& + \frac{1}{2}\sum m_{k'}^{(1)}(\eta_2^2\eta_{33})_{k-k'} - \frac{1}{4}\sum n_{k'}^{(1)}(\zeta_{11}^2\xi_2^2)_{k-k'} - \frac{1}{4}\sum \mathrm{o}_{k'}(\zeta_{11}^2\eta_2^2)_{k-k'} \\
& - \frac{1}{2}\sum n_{-k'}^{(1)}(\zeta_{11}^2\xi_2\eta_2)_{k-k'};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{R}'_{48,k} = & \sum_0 f_{-k'}\xi_{48,k-k'} - \frac{1}{2}\sum_0 a_{-k'}\eta_{48,k-k'} + \sum i_{-k'}(\xi_2\xi_{36} + \xi_6\xi_{33})_{k-k'} \\
& + \frac{1}{2}\sum e_{k'}(\eta_2\eta_{36} + \eta_6\eta_{33})_{k-k'} + \frac{1}{2}\sum e_{-k'}(\xi_2\eta_{36} + \eta_2\xi_{36} + \xi_6\eta_{33} + \eta_6\xi_{33})_{k-k'} \\
& + \sum e_{-k'}(\zeta_{13}^2 + 2\zeta_{11}\zeta_{21})_{k-k'} - \frac{1}{2}\sum \mathrm{K}_{-k'}(\zeta_{11}^2\xi_6 + 2\zeta_{11}\zeta_{13}\xi_2)_{k-k'} \\
& - \frac{1}{2}\sum l_{-k'}(\xi_{11}^2\eta_6 + 2\zeta_{11}\zeta_{13}\eta_2)_{k-k'} + \frac{1}{2}\sum m_{-k'}^{(1)}(\xi_2^2\xi_{33})_{k-k'} \\
& - \frac{1}{8}\sum \mathrm{K}_{-k'}(\xi_2^2\eta_{33} + 2\xi_2\eta_2\xi_{33})_{k-k'} - \frac{1}{8}\sum l_{-k'}(\eta_2^2\xi_{33} + 2\xi_2\eta_2\eta_{33})_{k-k'} \\
& - \frac{1}{8}\sum \mathrm{K}_{k'}(\eta_2^2\eta_{33})_{k-k'} - \frac{1}{4}\sum \mathrm{o}_{-k'}(\zeta_{11}^2\xi_2^2)_{k-k'} - \frac{1}{4}\sum n_{-k'}^{(1)}(\zeta_{11}^2\eta_2^2)_{k-k'} \\
& - \frac{1}{2}\sum n_{k'}^{(1)}(\zeta_{11}^2\xi_2\eta_2)_{k-k'},
\end{aligned}$$

où

$$m^{(1)} = \sum m_k^{(1)}\sigma^k = -\frac{105}{8}\xi_0^{-\frac{1}{2}}\eta_0^{-\frac{9}{2}},$$

$$n^{(1)} = \sum n_k^{(1)}\sigma^k = -\frac{45}{4}\xi_0^{-\frac{7}{2}}\eta_0^{-\frac{5}{2}},$$

$$\mathrm{o} = \sum \mathrm{o}_k\sigma^k = -\frac{105}{4}\xi_0^{-\frac{3}{2}}\eta_0^{-\frac{9}{2}}.$$

D'autre part,

$$C'_{48,k}=\sum_0 \eta_{0,k'}\xi_{48,k-k'}+\sum_0 \xi_{0,k'}\eta_{48,k-k'}+(\xi_2\eta_{36}+\eta_2\xi_{36}+\xi_6\eta_{33}+\eta_6\xi_{33})_k-(\zeta_{13}^2+2\zeta_{11}\zeta_{21})_k.$$

$$\begin{aligned}P'_{48,k}=&-\frac{1}{2}\sum_0 J'_{0,k'}\xi_{48,k-k'}-\frac{1}{2}\sum_0 J_{0,k'}\eta_{48,k-k'}+\frac{1}{2}\sum a_{k'}(\zeta_{13}^2+2\zeta_{11}\zeta_{21})_{k-k'}\\
&-\frac{1}{2}\sum f_{-k'}(\xi_2\xi_{36}+\xi_6\xi_{33})_{k-k'}+\frac{1}{4}\sum a_{k'}(\xi_2\eta_{36}+\eta_2\xi_{36}+\xi_6\eta_{33}+\eta_6\xi_{33})_{k-k'}\\
&-\frac{1}{2}\sum f_{k'}(\eta_2\eta_{36}+\eta_6\eta_{33})_{k-k'}-\frac{1}{2}\sum e_{-k'}(\zeta_{11}^2\xi_6+2\zeta_{11}\zeta_{13}\xi_2)_{k-k'}\\
&-\frac{1}{2}\sum e_{k'}(\zeta_{11}^2\eta_6+2\zeta_{11}\zeta_{13}\eta_2)_{k-k'}-\frac{1}{4}\sum i_{-k'}(\xi_2^2\xi_{33})_{k-k'}\\
&-\frac{1}{8}\sum e_{-k'}(\xi_2^2\eta_{33}+2\xi_2\eta_2\xi_{33})_{k-k'}-\frac{1}{8}\sum e_{k'}(\eta_2^2\xi_{33}+2\xi_2\eta_2\eta_{33})_{k-k'}\\
&-\frac{1}{4}\sum i_{k'}(\eta_2^2\eta_{33})_{k-k'}+\frac{1}{8}\sum K_{-k'}(\zeta_{11}^2\xi_2^2)_{k-k'}+\frac{1}{8}\sum K_{k'}(\zeta_{11}^2\eta_2^2)_{k-k'}\\
&+\frac{1}{4}\sum l_{k'}(\zeta_{11}^2\xi_2\eta_2)_{k-k'}\end{aligned}$$

$$(\xi^2)_{48,k}=2\sum \xi_{0,k'}\xi_{48,k-k'}+2(\xi_2\xi_{36}+\xi_6\xi_{33})_k.$$

$$(\eta^2)_{48,k}=2\sum \eta_{0,k'}\eta_{48,k-k'}+2(\eta_2\eta_{36}+\eta_6\eta_{33})_k$$

Les expressions qui permettent de calculer les $\mu_{48,k}$, $\lambda_{48,k}$ sont :

$$\begin{aligned}B_{48,k}=&\frac{1}{2}\xi_{0,0}(s_{13}^2+2s_{11}s_{21})_k+\sum_0 \xi_{0,k'}(\mu_{48}+\lambda_{48}+\frac{1}{2}s_{13}^2+s_{11}s_{21})_{k-k'}\\
&+\sum \xi_{0,k'}\Big[\mu_2\mu_{36}+\mu_6\mu_{33}+\mu_2\lambda_{36}+\lambda_2\mu_{36}+\mu_6\lambda_{33}+\lambda_6\mu_{33}+\lambda_2\lambda_{36}+\lambda_6\lambda_{33}\\
&\quad+\frac{1}{2}s_{11}^2\mu_6+s_{11}s_{13}\mu_2+\frac{1}{2}s_{11}^2\lambda_6+s_{11}s_{13}\lambda_2+\frac{1}{2}\mu_2^2\mu_{33}+\frac{1}{2}\mu_2^2\lambda_{33}+\lambda_2\mu_2\mu_{33}\\
&\quad+\frac{1}{2}\lambda_2^2\mu_{33}+\lambda_2\mu_2\lambda_{33}+\frac{1}{2}\lambda_2^2\lambda_{33}+\frac{1}{4}\mu_2^2s_{11}^2+\frac{1}{4}\lambda_2^2s_{11}^2+\frac{1}{2}\lambda_2\mu_2s_{11}^2\Big]_{k-k'};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B'_{48,k}=&\frac{1}{2}\eta_{0,0}(s_{13}^2+2s_{11}s_{21})_k+\sum_0 \eta_{0,k'}(\mu_{48}-\lambda_{48}+\frac{1}{2}s_{13}^2+s_{11}s_{21})_{k-k'}\\
&+\sum \eta_{0,k'}\Big[\mu_2\mu_{36}+\mu_6\mu_{33}-\mu_2\lambda_{36}-\lambda_2\mu_{36}-\mu_6\lambda_{33}-\lambda_6\mu_{33}+\lambda_2\lambda_{36}+\lambda_6\lambda_{33}\\
&+\frac{1}{2}s_{11}^2\mu_6+s_{11}s_{13}\mu_2-\frac{1}{2}s_{11}^2\lambda_6-s_{11}s_{13}\lambda_2+\frac{1}{2}\mu_2^2\mu_{33}-\frac{1}{2}\mu_2^2\lambda_{33}-\lambda_2\mu_2\mu_{33}\\
&+\frac{1}{2}\lambda_2^2\mu_{33}+\lambda_2\mu_2\lambda_{33}-\frac{1}{2}\lambda_2^2\lambda_{33}+\frac{1}{4}s_{11}^2\mu_2^2+\frac{1}{4}s_{11}^2\lambda_2^2-\frac{1}{2}s_{11}^2\lambda_2\mu_2\Big]_{k-k'},\end{aligned}$$

$$G_{48,k}=\frac{1}{2}(\xi_0\rho_0^{-3})_0(s_{13}^2+2s_{11}s_{21})_k+\sum_0(\xi_0\rho_0^{-3})_{k'}(-2\mu_{48}+\lambda_{48}+\frac{1}{2}s_{13}^2+s_{11}s_{21})_{k-k'}$$

$$+\sum(\xi_0\rho_0^{-3})_{k'}[4\mu_2\mu_{36}+4\mu_6\mu_{33}-2\mu_2\lambda_{36}-2\lambda_2\mu_{36}-2\mu_6\lambda_{33}-2\lambda_6\mu_{33}$$

$$+\lambda_2\lambda_{36}+\lambda_6\lambda_{33}-s_{11}^2\mu_6-2s_{11}s_{13}\mu_2+\frac{1}{2}s_{11}^2\lambda_6+s_{11}s_{13}\lambda_2-4\mu_2^2\mu_{33}$$

$$+2\mu_2^2\lambda_{33}+4\lambda_2\mu_2\mu_{33}-\lambda_2^2\mu_{33}-2\lambda_2\mu_2\lambda_{33}+\frac{1}{2}\lambda_2^2\lambda_{33}+s_{11}^2\mu_2^2$$

$$+\frac{1}{4}s_{11}^2\lambda_2^2-\lambda_2\mu_2s_{11}^2]_{k-k'},$$

$$G'_{48,k}=\frac{1}{2}(\eta_0\rho_0^{-3})_0(s_{13}^2+2s_{11}s_{21})_k+\sum_0(\eta_0\rho_0^{-3})_{k'}(-2\mu_{48}-\lambda_{48}+\frac{1}{2}s_{13}^2+s_{11}s_{21})_{k-k'}$$

$$+\sum(\eta_0\rho_0^{-3})_{k'}[4\mu_2\mu_{36}+4\mu_6\mu_{33}+2\mu_2\lambda_{36}+2\lambda_2\mu_{36}+2\mu_6\lambda_{33}+2\lambda_6\mu_{33}+\lambda_2\lambda_{36}$$

$$+\lambda_6\lambda_{33}-s_{11}^2\mu_6-2s_{11}s_{13}\mu_2-\frac{1}{2}s_{11}^2\lambda_6-s_{11}s_{13}\lambda_2-4\mu_2^2\mu_{33}-2\mu_2^2\lambda_{33}$$

$$-4\lambda_2\mu_2\mu_{33}-\lambda_2^2\mu_{33}-2\lambda_2\mu_2\lambda_{33}-\frac{1}{2}\lambda_2^2\lambda_{33}+s_{11}^2\mu_2^2+\frac{1}{4}s_{11}^2\lambda_2^2+s_{11}^2\lambda_2\mu_2]_{k-k'},$$

$$P''_{48,k}=-\sum_0 b_{k'}\mu_{48,k-k'}+\sum b_{k'}(\mu_2\mu_{36}+\mu_6\mu_{33})_{k-k'}-\frac{1}{2}\sum b_{k'}(\mu_2^2\mu_{33})_{k-k'},$$

$$C''_{48,k}=2\sum_0 h_{k'}^{(1)}\mu_{48,k-k'}+4\sum h_{k'}^{(1)}(\mu_2\mu_{36}+\mu_6\mu_{33})_{k-k'}+4\sum h_{k'}^{(1)}(\mu_2^2\mu_{33})_{k-k'},$$

$$(\zeta^2)_{48,k}=-\sum h_{k'}^{(1)}(s_{13}^2+2s_{11}s_{21})_{k-k'},$$

$$\begin{aligned}(\xi^2)_{48,k}=\sum(\xi_0^2)_{k'}[&2\mu_{48}+2\lambda_{48}+4\mu_2\mu_{36}+4\mu_6\mu_{33}+4\mu_2\lambda_{36}+4\lambda_2\mu_{36}+4\mu_6\lambda_{33}+4\lambda_6\mu_{33}\\&+4\lambda_2\lambda_{36}+4\lambda_6\lambda_{33}+s_{13}^2+2s_{11}s_{21}+2s_{11}^2\mu_6+4s_{11}s_{13}\mu_2+2s_{11}^2\lambda_6\\&+4s_{11}s_{13}\lambda_2+4\mu_2^2\mu_{33}+4\mu_2^2\lambda_{33}+8\lambda_2\mu_2\mu_{33}+4\lambda_2^2\mu_{33}+8\lambda_2\mu_2\lambda_{33}\\&+4\lambda_2^2\lambda_{33}+2s_{11}^2\mu_2^2+2s_{11}^2\lambda_2^2+4s_{11}^2\lambda_2\mu_2]_{k-k'},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\eta^2)_{8,k}=\sum(\eta_0^2)_{k'}[&2\mu_{48}-2\lambda_{48}+4\mu_2\mu_{36}+4\mu_6\mu_{33}-4\mu_2\lambda_{36}-4\lambda_2\mu_{36}-4\mu_6\lambda_{33}-4\lambda_6\mu_{33}\\&+4\lambda_2\lambda_{36}+4\lambda_6\lambda_{33}+s_{13}^2+2s_{11}s_{21}+2s_{11}^2\mu_6+4s_{11}s_{13}\mu_2-2s_{11}^2\lambda_6\\&-4s_{11}s_{13}\lambda_2+4\mu_2^2\mu_{33}-4\mu_2^2\lambda_{33}-8\lambda_2\mu_2\mu_{33}+4\lambda_2^2\mu_{33}+8\lambda_2\mu_2\lambda_{33}\\&-4\lambda_2^2\lambda_{33}+2s_{11}^2\mu_2^2+2s_{11}^2\lambda_2^2-4s_{11}^2\lambda_2\mu_2]_{k-k'}.\end{aligned}$$

Ces diverses formules montrent nettement quels sont les produits auxiliaires à déterminer ; il serait superflu de les énumérer. Bornons-nous à dire que l'équation de Laplace intervient seulement pour $k=-4$.

Les résultats, obtenus sans difficulté, sont les suivants :

$$\xi_{48,0}=\frac{75}{2^6}m^2-\frac{2.925}{2^9}m^3,$$

$$\eta_{48,0}=\frac{3}{2^3}-\frac{7}{2^6}m^2+\frac{153}{2^9}m^3,$$

$$\mu_{48,0}=-\frac{71}{2^5}m^2+\frac{2.343}{2^8}m^3,$$

$$\lambda_{48,0}=-\frac{13}{2^3}+\frac{15}{2^2}m^2+\frac{207}{2^6}m^3,$$

$$\xi_{48,2}=0\,.\,m^3,$$

$$\eta_{48,2}=\frac{75}{2^7}m^2+\frac{75}{2^5}m^3,$$

$$\mu_{48,2}=0\,.\,m^3,$$

$$\lambda_{48,2}=-\frac{187}{2^5}m^2-\frac{3.799}{2^6.3}m^3,$$

$$\xi_{48,-2}=-\frac{81}{2^5}m+\frac{603}{2^8}m^2-\frac{29.571}{2^{11}}m^3,$$

$$\eta_{48,-2}=-\frac{33}{2^5}m-\frac{1.445}{2^8}m^2-\frac{174.791}{2^{11}.3}m^3,$$

$$\mu_{48,-2}=\frac{63}{2^5}m+\frac{93}{2^7}m^2+\frac{15.305}{2^{10}}m^3,$$

$$\lambda_{48,-2}=\frac{15}{2^4}m+\frac{1.271}{2^6}m^2+\frac{215.449}{2^{10}.3}m^3,$$

$$\xi_{48,-4}=\frac{2.349}{2^9}m^2+\frac{10.731}{2^9}m^3, \quad (1)$$

$$\eta_{48,-4}=\frac{405}{2^9}m^2-\frac{423}{2^9}m^3,$$

$$\mu_{48,-4}=-\frac{225}{2^8}m^2-\frac{3.135}{2^9}m^3-\frac{357.757}{2^{13}}m^4,$$

$$\lambda_{48,-4}=-\frac{189}{2^8}m^2+\frac{189}{2^6}m^3,$$

---

(1) $\xi_{48,-4}+\eta_{48,-4}=\frac{1.138.799}{2^{13}}m^4.$

$$\xi_{48,-6} = \frac{1.485}{2^{11}} m^3,$$

$$\eta_{48,-6} = \frac{6.075}{2^{11}} m^3,$$

$$\mu_{48,-6} = -\frac{2.025}{2^{10}} m^3,$$

$$\lambda_{48,-6} = -\frac{3.375}{2^{10}} m^3.$$

2° Termes en $\gamma_1^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 = M_{49} = M_{11}M_{22} = M_{13}M_{14} = M_7M_{33} = M_3M_{36} = M_2M_{37} = M_{11}^2M_7$
$= M_{11}M_{14}M_2 = M_{11}M_{13}M_3 = M_2M_3M_{33} = M_{11}^2M_2M_3$.

On a :

$$\Phi = \frac{3}{8} m^2 [\xi^2 \sigma^2 + \eta^2 \sigma^{-2}],$$

$$f_{49,k} = k(1-m) + 2(1-h),$$

$$\varphi_{49,k} = k(1-m) + 2(1-h_0).$$

Il serait fastidieux de montrer comment, des $R_{48,k}$, $R'_{48,k}$, ..., on passe aux $R_{49,k}$, $R'_{49,k}$, ... Il suffit de comparer la décomposition de M_{48} et de M_{49}.

Toutefois, il y a une légère différence entre la forme des équations. En effet, la partie de $f_{49,k}$ que nous utilisons est égale à $\varphi_{49,k} - 2h_7\varepsilon_1\varepsilon_2$. Ceci nous amène à ajouter aux premiers membres des équations en $\xi_{49,k}$, $\eta_{49,k}$ les expressions

I. $4(1+\varphi_{49,k})h_7\varepsilon_1\varepsilon_2\xi_{33,k}$;

II. $4(\varphi_{49,k}-1)h_7\varepsilon_1\varepsilon_2\eta_{33,k}$;

III. $$4\varphi_{49,k}h_7\varepsilon_1\varepsilon_2(\xi_0\eta_{33}+\eta_0\xi_{33})_k - 4\varphi_{49,k}h_7\varepsilon_1\varepsilon_2(\zeta_{11}^2)_k$$
$$-\frac{12m^3}{\varphi_{49,k}^2}h_7\varepsilon_1\varepsilon_2(\xi_0\xi_{33})_{k-2}$$
$$+\frac{12m^3}{\varphi_{49,k}^2}h_7\varepsilon_1\varepsilon_2(\eta_0\eta_{33})_{k+2}$$

dont il est facile de donner l'expression en fonction des $\mu_{33,k}$, $\lambda_{33,k}$.

On trouve ainsi :

$$\xi_{49,0} = -\frac{15}{2^3} + \frac{405}{2^6} m - \frac{1.499}{2^9} m^2 - \frac{92.583}{2^{12}} m^3,$$

$$\eta_{49,0} = -\frac{9}{2^3} + \frac{135}{2^6} m + \frac{2.539}{2^9} m^2 + \frac{30.267}{2^{12}} m^3,$$

$$\mu_{49,0} = \frac{15}{2^3} - \frac{405}{2^6} m + \frac{1.619}{2^9} m^2 - \frac{693}{2^{12}} m^3,$$

$$\lambda_{49,0} = -\frac{9}{2^3} + \frac{675}{2^6}m - \frac{1.187}{2^9}m^2 + \frac{55.683}{2^{12}}m^3,$$

$$\xi_{49,2} = -\frac{375}{2^7}m^2 + \frac{2.625}{2^{10}}m^3,$$

$$\eta_{49,2} = \frac{45}{2^5}m + \frac{105}{2^4}m^2 + \frac{48.347}{2^{11}}m^3,$$

$$\mu_{49,2} = \frac{355}{2^6}m^2 - \frac{16.055}{2^9.3}m^3,$$

$$\lambda_{49,2} = -\frac{195}{2^5}m - \frac{3.531}{2^7}m^2 - \frac{128.563}{2^{11}}m^3,$$

$$\xi_{49,-2} = \frac{345}{2^5}m - \frac{3.731}{2^8}m^2 + \frac{185.485}{2^{11}.3}m^3, \quad (^1)$$

$$\eta_{49,-2} = -\frac{33}{2^4}m + \frac{1.805}{2^8}m^2 - \frac{121.543}{2^{11}.3}m^3,$$

$$\mu_{49,-2} = -\frac{75}{2^5}m - \frac{1.685}{2^8}m^2 + \frac{32.483}{2^{10}.3}m^3 - \frac{731.695}{2^{13}.3^2}m^4,$$

$$\lambda_{49,-2} = \frac{75}{2^4}m - \frac{2.333}{2^8}m^2 + \frac{17.029}{2^9.3}m^3,$$

$$\xi_{49,4} = 0\,.\,m^3,$$

$$\eta_{49,4} = \frac{1.125}{2^9}m^3,$$

$$\mu_{49,4} = 0\,.\,m^3,$$

$$\lambda_{49,4} = -\frac{2.805}{2^7}m^3,$$

$$\xi_{49,-4} = -\frac{423}{2^9}m^2 - \frac{16.305}{2^{12}}m^3,$$

$$\eta_{49,-4} = -\frac{405}{2^9}m^2 - \frac{56.403}{2^{12}}m^3,$$

$$\mu_{49,-4} = \frac{945}{2^9}m^2 + \frac{26.727}{2^{12}}m^3,$$

$$\lambda_{49,-4} = \frac{1,575}{2^9}m^2 + \frac{74.169}{2^{12}}m^3.$$

$$\xi_{49,-6} = \frac{405}{2^{11}}m^3,$$

---

(1) $\xi_{49,-2} + \eta_{49,-2} = -\frac{1.334.921}{2^{12}.3}m^4.$

$$\eta_{49,-6} = 0 \,.\, m^3,$$

$$\mu_{49,-6} = 0 \,.\, m^3,$$

$$\lambda_{49,-6} = \frac{1.755}{2^{11}} m^3.$$

3° Termes en $\gamma_1^2 \varepsilon_2^2 = M_{50} = M_{14}^2 = M_{11}M_{25} = M_3 M_{37} = M_8 M_{33} = M_{11}^2 M_8 = M_{11} M_{14} M_3 = M_3^2 M_{33} = M_{11}^2 M_3^2$.

On a :

$$\Phi = \frac{3}{8}[\xi^2\sigma^2 + \eta^2\sigma^{-2}],$$

$$f_{50,k} = k(1-m) - 2(1-g) + 2(1-h),$$
$$\varphi_{50,k} = k(1-m) - 2(1-g_0) + 2(1-h_0).$$

Les équations de ce groupe se déduisent immédiatement de celles du groupe M_{48}, et, pour $k \gtrless 0$, ne présentent aucune difficulté.

Mais il y en a une de très grande pour $k=0$. Dans ce cas,

$$\varphi_{p,k} = 2(g_0 - h_0)$$

contient m^2 en facteur. Pour obtenir le terme en m^3 de $\xi_{50,0}$, $\eta_{50,0}$, $\mu_{50,0}$, $\lambda_{50,0}$, il faudra faire intervenir l'équation de Laplace, et calculer jusqu'en m^5 les termes du numérateur. J'ai montré successivement, pour chacun des monômes qui divisent M_{50}, à quels suppléments de calculs j'avais été conduit. Dans le groupe actuel, j'ai été amené également par la présence des facteurs $\frac{6m^3}{\varphi_{p,k}}\xi_{0,0}$ ou $\frac{6m^3}{\varphi_{p,k}}(\xi_0^2)_0$, $\frac{6m^3}{\varphi_{p,k}}\eta_{0,0}$ ou $\frac{6m^3}{\varphi_{p,k}}(\eta_0^2)_0$, *qui commencent par un terme en m seulement,* à déterminer les termes en m^4 de $\xi_{50,-2}$, $\eta_{50,-2}$, $\xi_{50,2}$ $\eta_{50,2}$; $\mu_{50,-2}$, $\lambda_{50,-2}$, $\mu_{50,2}$, $\lambda_{50,2}$.

Quant au terme en m^3 de $\xi_{50,0}$, $\eta_{50,0}$, $\mu_{50,0}$, $\lambda_{50,0}$, il nécessite le calcul jusqu'en m^5 des produits auxiliaires dont il dépend. On se trouve encore dans un cas exceptionnel. Néanmoins, la valeur de $\lambda_{50,0}$ concorde avec celle donnée par Delaunay, ce qui vérifie de nouveau les termes en m^4 de $s_{23,0}$ et de $\lambda_{37,0}$ qui interviennent dans sa détermination et dont les valeurs ne sont pas celles de Delaunay.

$$\xi_{50,0} = \frac{5}{2^2} + \frac{135}{2^6}m - \frac{2.305}{2^8.3}m^2 - \frac{103.557}{2^{11}}m^3, \quad (1)$$

$$\eta_{50,0} = \frac{1}{2^3} - \frac{405}{2^6}m + \frac{749}{2^8.3}m^2 + \frac{133.611}{2^{11}}m^3,$$

---

(1) $\xi_{50,0} + \eta_{50,0} = -\frac{11.237.477}{2^{15}.3^2}m^4 - \frac{77.205.337}{2^{17}.3}m^5.$

$$\mu_{50,0} = -\frac{5}{2^3} + \frac{135}{2^6}m + \frac{3}{2^8}m^2 - \frac{31.407}{2^{11}}m^3 - \frac{5.123.955}{2^{15}.3}m^4 - \frac{61.139.615}{2^{18}.3}m^5,$$

$$\lambda_{50,0} = \frac{1}{2^2} + \frac{135}{2^5}m + \frac{7}{2^3}m^2 - \frac{57.765}{2^{10}}m^3,$$

$$\xi_{50,2} = -\frac{225}{2^6}m - \frac{2.475}{2^9}m^2 + \frac{5.955}{2^{11}}m^3 + \frac{10.369}{2^8}m^4,$$

$$\eta_{50,2} = -\frac{15}{2^6}m - \frac{2.259}{2^9}m^2 - \frac{13.777}{2^{11}}m^3 + \frac{667.189}{2^{12}.3}m^4,$$

$$\mu_{50,2} = \frac{225}{2^6}m - \frac{725}{2^9}m^2 - \frac{33.385}{2^{11}.3}m^3 - \frac{691.567}{2^{14}.3^2}m^4.$$

$$\lambda_{50,2} = -\frac{15}{2^2}m + \frac{2.395}{2^8}m^2 + \frac{98.159}{2^{10}.3}m^3 + \frac{4.225.745}{2^{13}.3^2}m^{4**},$$

$$\xi_{50,-2} = -\frac{15}{2^6}m - \frac{333}{2^9}m^2 + \frac{12.677}{2^{11}}m^3 + \frac{49.195}{2^{10}.3}m^4,$$

$$\eta_{50,-2} = -\frac{81}{2^6}m - \frac{225}{2^9}m^2 + \frac{9.189}{2^{11}}m^3 - \frac{307.401}{2^{12}.5}m^4,$$

$$\mu_{50,-2} = \frac{99}{2^6}m - \frac{2.089}{2^9}m^2 - \frac{23.477}{2^{11}.3}m^3 + \frac{3.315.505}{2^{14}.3^2}m^4,$$

$$\lambda_{50,-2} = \frac{45}{2^4}m - \frac{1.223}{2^8}m^2 - \frac{34.267}{2^{10}.3}m^3 + \frac{7.078.171}{2^{13}.3^2.5}m^{4**},$$

$$\xi_{50,4} = -\frac{5.625}{2^{10}}m^3,$$

$$\eta_{50,4} = \frac{675}{2^9}m^2 + \frac{3.375}{2^8}m^3,$$

$$\mu_{50,4} = \frac{5.325}{2^9}m^3,$$

$$\lambda_{50,4} = -\frac{2.925}{2^9}m^2 - \frac{57.255}{2^{10}}m^3,$$

$$\xi_{50,-4} = \frac{27}{2^9}m^2 + \frac{81}{2^9}m^3,$$

$$\eta_{50,-4} = -\frac{1.125}{2^{10}}m^3,$$

$$\mu_{50,-4} = \frac{1.491}{2^9}m^3,$$

$$\lambda_{50,-4} = \frac{117}{2^9}m^2 + \frac{4.653}{2^{10}}m^3.$$

4° Termes en $\gamma_1\gamma_2\varepsilon_1^2 = M_{51} = M_{13}M_{15} = M_{11}M_{24} = M_{12}M_{21} = M_2M_{38} = M_6M_{34} = M_{11}M_{12}M_6$
$= M_{12}M_{13}M_2 = M_{11}M_{15}M_2 = M_2^2M_{34} = M_{11}M_{12}M_2^2$.

On a :

$$\Phi = \frac{3}{8}m^2[\xi^2\sigma^2 + \eta^2\sigma^{-2}],$$

$$f_{51,k} = k(1-m) + 2(1-g),$$
$$\varphi_{51,k} = k(1-m) + 2(1-g_0).$$

Les équations de ce groupe se déduisent sans peine de celles en M_{48}. Les expressions de R, R′, ... sont les mêmes, aux changements d'indices près. Mais il se produit en outre la particularité suivante : la partie utilisée de $f_{p,k}$ est :

$$\varphi_{p,k} - 2g_{34}\gamma_1\gamma_2.$$

D'où, par exemple, envisageant la première équation en $\xi_{51,k}$, $\eta_{51,k}$:

$$-[(1+f_{51,k})^2\xi]_{51,k} = -(1+\varphi_{51,k})^2\xi_{51,k} + 4(1+\varphi_{51,k})g_{34}\gamma_1\gamma_2\xi_{6,k}.$$

Si l'on déduit, par des modifications d'indices convenables et d'ailleurs immédiates, les équations de ce groupe des équations du groupe M_{48}, il faudra donc ajouter aux premiers membres les quantités suivantes :

Pour $\xi_{51,k}$, $\eta_{51,k}$:

I. $\quad 4(1+\varphi_{51,k})g_{34}\gamma_1\gamma_2\xi_{6,k}$;

II. $\quad 4(\varphi_{51,k}-1)g_{34}\gamma_1\gamma_2\eta_{6,k}$;

III. $$4\varphi_{51,k}g_{34}\gamma_1\gamma_2[\xi_0\eta_6 + \eta_0\xi_6 + \xi_2\eta_2]_k + \frac{12m^3}{(\varphi_{51,k})^2}g_{34}\gamma_1\gamma_2\left[-(\xi_0\xi_6)_{k-2} - \frac{(\xi_2^2)_{k-2}}{2} + (\eta_0\eta_6)_{k+2} + \frac{(\eta_2^2)_{k+2}}{2}\right]$$

qui se transforment immédiatement pour le calcul des $\mu_{51,k}$ $\lambda_{51,k}$.

On obtient alors :

$$\xi_{51,0} = -\frac{3}{2^3} - \frac{2.071}{2^9}m^2 - \frac{11.259}{2^{10}}m^3,$$

$$\eta_{51,0} = \frac{9}{2^3} - \frac{135}{2^5}m - \frac{3.967}{2^9}m^2 - \frac{10.581}{2^{11}}m^3,$$

$$\mu_{51,0} = -\frac{25}{2^7}m^2 - \frac{453}{2^7}m^3,$$

$$\lambda_{51,0} = -\frac{5}{2^3} + \frac{135}{2^6}m + \frac{3.319}{2^9}m^2 + \frac{69.399}{2^{12}}m^3,$$

$$\xi_{51,2} = -\frac{225}{2^7}m^2 - \frac{1.575}{2^8}m^3,$$

$$\eta_{51,2}=\frac{9}{2^3}m+\frac{39}{2^6}m^2+\frac{529}{2^{11}}m^3,$$

$$\mu_{51,2}=\frac{71}{2^5}m^2+\frac{1.909}{2^7.3}m^3,$$

$$\lambda_{51,2}=-\frac{39}{2^5}m-\frac{601}{2^7}m^2-\frac{43.661}{2^{11}.3}m^3,$$

$$\xi_{51,-2}=\frac{27}{2^3}m+\frac{6.555}{2^7}m^2+\frac{517.631}{2^{11}}m^3, \quad (^1)$$

$$\eta_{51,-2}=-\frac{15}{2^5}m-\frac{2.197}{2^7}m^2-\frac{768.359}{2^{11}.3}m^3,$$

$$\mu_{51,-2}=-\frac{15}{2^4}m-\frac{229}{2^5}m^2-\frac{75.821}{2^9.3}m^3-\frac{3.353.413}{2^{11}.3^2}m^4,$$

$$\lambda_{51,-2}=\frac{3}{2^2}m+\frac{8.313}{2^8}m^2+\frac{164.265}{2^{10}}m^3,$$

$$\xi_{51,4}=0\,.\,m^3,$$

$$\eta_{51,4}=\frac{225}{2^9}m^3,$$

$$\mu_{51,4}=0\,.\,m^3,$$

$$\lambda_{51,4}=-\frac{561}{2^7}m^3,$$

$$\xi_{51,-4}=\frac{45}{2^9}m^2-\frac{23.217}{2^{11}}m^3,$$

$$\eta_{51,-4}=-\frac{3.375}{2^9}m^2-\frac{79.785}{2^{10}}m^3,$$

$$\mu_{51,-4}=\frac{675}{2^7}m^2+\frac{24.525}{2^9}m^3.$$

$$\lambda_{51,-4}=\frac{4.095}{2^9}m^2+\frac{336.645}{2^{12}}m^3,$$

$$\xi_{51,-6}=\frac{2.025}{2^{11}}m^3,$$

$$\eta_{51,-6}=0\,.\,m^3,$$

$$\mu_{51,-6}=0\,.\,m^3,$$

$$\lambda_{51,-6}=\frac{8.775}{2^{11}}m^3.$$

---

(1) $\xi_{51,-2}+\eta_{51,-2}=\dfrac{5.184.283}{2^{10}.3^2}m^4.$

5° Termes en $\gamma_1\gamma_2\varepsilon_1\varepsilon_2 = M_{52} = M_{11}M_{25} = M_{12}M_{22} = M_{13}M_{16} = M_{14}M_{15} = M_7M_{34} = M_2M_{39}$
$= M_3M_{38} = M_{11}M_{12}M_7 = M_{11}M_{15}M_3 = M_{11}M_{16}M_2 = M_{12}M_{13}M_3$
$= M_{12}M_{14}M_2 = M_2M_3M_{34} = M_2M_3M_{11}M_{12}$.

On a :

$$\Phi = \frac{3}{8}m^2[\xi^2\sigma^2 + \eta^2\sigma^{-2}],$$

$$f_{52,k} = \varphi_{52,k} = k(1 - m).$$

On déduit sans la moindre difficulté les équations de ce groupe de celles du groupe M_{48}. On a :

$$\xi_{52,k} = \eta_{52,-k},$$

$$\mu_{52,k} = \mu_{52,-k},$$

$$\lambda_{52,k} = -\lambda_{52,-k}.$$

Les calculs ne présentent aucune particularité, si ce n'est que pour déterminer $\xi_{52,0} = \eta_{52,0}$ d'une part, $\mu_{52,0}$ ($\lambda_{52,0} = 0$) d'autre part, une seule équation suffit.

$$\xi_{52,0} = \frac{1}{2} + \frac{265}{2^3.3}m^2 + \frac{669}{2^3}m^3,$$

$$\mu_{52,0} = -\frac{167}{2^5}m^2 - \frac{10.059}{2^8}m^3,$$

$$\xi_{52,2} = -\frac{135}{2^5}m - \frac{3.375}{2^7}m^2 - \frac{123.057}{2^{10}}m^3,$$

$$\eta_{52,2} = -\frac{9}{2^5}m - \frac{589}{2^7}m^2 - \frac{61.495}{2^{10}.3}m^3,$$

$$\mu_{52,2} = \frac{45}{2^4}m + \frac{235}{2^4}m^2 + \frac{97.939}{2^9.3}m^3,$$

$$\lambda_{52,2} = -\frac{63}{2^4}m - \frac{1.761}{2^6}m^2 - \frac{124.847}{2^{10}}m^3,$$

$$\xi_{52,4} = -\frac{5.625}{2^9}m^3,$$

$$\eta_{52,4} = \frac{135}{2^7}m^2 + \frac{3.339}{2^9}m^3,$$

$$\mu_{52,4} = \frac{1.065}{2^6}m^2,$$

$$\lambda_{52,4} = -\frac{585}{2^7}m^2 - \frac{2.667}{2^6}m^3.$$

II. *Termes en* $\gamma^2\alpha$.

Les expressions de R, R′, ... ont même forme que pour les termes en $\gamma^2\varepsilon$, et, dans la formation des équations, on pourra se guider sur celles du groupe M_{36}. Ce qui distingue les termes en $\gamma^2\alpha$, c'est la valeur de Φ :

$$\Phi = \frac{3}{8} m^2 [\xi^2 \sigma^2 + \eta^2 \sigma^{-2}]$$

$$+ \alpha\beta m^2 \left[\frac{3}{16}(\xi^2\eta - 4\xi\zeta^2)\sigma + \frac{3}{16}(\xi\eta^2 - 4\eta\zeta^2)\sigma^{-1} + \frac{5}{16}\xi^3\sigma^3 + \frac{5}{16}\eta^3\sigma^{-3}\right].$$

Il faudra, après avoir par des changements convenables d'indices transformé les équations du groupe M_{36}, déterminer pour chacune d'elles l'influence de $\Delta\Phi$, $\Delta\Phi$ représentant la portion de Φ qui contient $\alpha\beta$ en facteur.

On aura trois groupes de coefficients, savoir :

1° Les termes en $\gamma_1^2\alpha = M_{57}$;

2° » $\gamma_1\gamma_2\alpha = M_{58}$;

3° » $\gamma_2^2\alpha = M_{59}$.

Il suffit naturellement de calculer les deux premiers.

1° Termes en $\gamma_1^2\alpha = M_{57} = M_{11}M_{27} = M_1 M_{33} = M_{11}^2 M_1$.

On a :

$$f_{57,k} = k(1-m) + 2(1-h),$$
$$\varphi_{57,k} = k(1-m) + 2(1-h_0),$$

k étant impair.

Les équations en $\xi_{57,k}$, $\eta_{55,k}$ s'écrivent immédiatement :

$$\xi_{57,k}\left[-(1+\varphi_{57,k})^2 - \frac{m^2}{2} - \frac{1}{2}a_0\right] + f_0\eta_{57,k} - \frac{3}{2}m^2\eta_{57,k+2} + R_{57,k}$$
$$+ m^2\left[-\frac{3}{4}(\xi_0\xi_{33})_{k-1} - \frac{3}{4}(\xi_0\eta_{33} + \eta_0\xi_{33})_{k+1} - \frac{3}{2}(\zeta_{11}^2)_{k+1} - \frac{15}{4}(\eta_0\eta_{33})_{k+3}\right] = 0,$$

$$f_0\xi_{57,k} + \eta_{57,k}\left[-(1-\varphi_{57,k})^2 - \frac{m^2}{2} - \frac{1}{2}a_0\right] - \frac{3}{2}m^2\xi_{57,k-2} + R'_{57,k}$$
$$+ m^2\left[-\frac{3}{4}(\xi_0\eta_{33} + \eta_0\xi_{33})_{k-1} - \frac{3}{2}(\zeta_{11}^2)_{k-1} - \frac{3}{4}(\eta_0\eta_{33})_{k+1} - \frac{15}{4}(\xi_0\xi_{33})_{k-3}\right] = 0,$$

où

$$R_{57,k} = -\frac{1}{2}\sum_0 a_{k'}\xi_{57,k-k'} + \sum_0 f_{k'}\eta_{57,k-k'} + \frac{1}{2}\sum e_{-k'}(\xi_1\xi_{33})_{k-k'}$$
$$+\frac{1}{2}\sum e_{k'}(\xi_1\eta_{33}+\eta_1\xi_{33})_{k-k'} + \sum i_{k'}(\eta_1\eta_{33})_{k-k'} + 2\sum e_{k'}(\zeta_{11}\zeta_{27})_{k-k'}$$
$$-\frac{1}{2}\sum l_{k'}(\zeta_{11}^2\xi_1)_{k-k'} - \frac{1}{2}\sum K_{k'}(\zeta_{11}^2\eta_1)_{k-k'};$$

$$R'_{57,k} = \sum_0 f_{-k'}\xi_{57,k-k'} - \frac{1}{2}\sum_0 a_{-k'}\eta_{57,k-k'}$$
$$+\sum i_{-k'}(\xi_1\xi_{33})_{k-k'} + \frac{1}{2}\sum e_{k'}(\eta_1\eta_{33})_{k-k'} + \frac{1}{2}\sum e_{-k'}(\xi_1\eta_{33}+\eta_1\xi_{33})_{k-k'}$$
$$+2\sum e_{-k'}(\zeta_{11}\zeta_{27})_{k-k'} - \frac{1}{2}\sum K_{-k'}(\zeta_{11}^2\xi_1)_{k-k'} - \frac{1}{2}\sum l_{-k'}(\zeta_{11}^2\eta_1)_{k-k'}.$$

L'équation de Laplace donne :

$$\xi_{57,k}[J'_{0,0} - \varphi_{57,k}^2\eta_{0,0} - 2m^2\eta_{0,0}] + \eta_{57,k}[J_{0,0} - \varphi_{57,k}^2\xi_{0,0} - 2m^2\xi_{0,0}]$$
$$-2P'_{57,k} - (\varphi_{57,k}^2 + 2m^2)C'_{57,k} - 12m^2(\zeta_{11}\zeta_{27})_k$$
$$-3m^2\left(1+\frac{m}{\varphi_{57,k}}\right)(\xi^2)_{57,k-2} - 3m^2\left(1-\frac{m}{\varphi_{57,k}}\right)(\eta^2)_{57,k+2}$$
$$+\left[-\frac{15}{8}m^2(\xi_0^2\eta_{33})_{k-1} - \frac{15}{4}m^2(\xi_0\xi_{33}\eta_0)_{k-1} - \frac{15}{2}m^2(\xi_0\zeta_{11}^2)_{k-1}\right]\left(1+\frac{2m}{5\varphi_{57,k}}\right)$$
$$+\left[-\frac{15}{8}m^2(\eta_0^2\xi_{33})_{k+1} - \frac{15}{4}(\xi_0\eta_0\eta_{33})_{k+1} - \frac{15}{2}m^2(\eta_0\zeta_{11}^2)_{k+1}\right]\left(1-\frac{2m}{5\varphi_{57,k}}\right)$$
$$-\frac{75}{8}m^2(\xi_0^2\xi_{33})_{k-3}\left(1+\frac{6m}{5\varphi_{57,k}}\right) - \frac{75}{8}m^2(\eta_0^2\eta_{33})_{k+3}\left(1-\frac{6m}{5\varphi_{57,k}}\right) = 0$$

avec

$$C'_{57,k} = \sum_0 \eta_{0,k'}\xi_{57,k-k'} + \sum_0 \xi_{0,k'}\eta_{57,k-k'} + (\xi_1\eta_{33}+\eta_1\xi_{33})_k - 2(\zeta_{11}\zeta_{27})_k;$$

$$P'_{57,k} = -\frac{1}{2}\sum_0 J'_{0,k'}\xi_{57,k-k'} - \frac{1}{2}\sum_0 J_{0,k'}\eta_{57,k-k'} + \sum a_{k'}(\zeta_{11}\zeta_{27})_{k-k'}$$
$$-\frac{1}{2}\sum f_{-k'}(\xi_1\xi_{33})_{k-k'} + \frac{1}{4}\sum a_{k'}(\xi_1\eta_{33}+\eta_1\xi_{33})_{k-k'} - \frac{1}{2}\sum f_{k'}(\eta_1\eta_{33})_{k-k}$$
$$-\frac{1}{2}\sum e_{-k'}(\zeta_{11}^2\xi_1)_{k-k'} - \frac{1}{2}\sum e_{k'}(\zeta_{11}^2\eta_1)_{k-k'};$$

$$(\xi^2)_{57,k} = 2\sum \xi_{0,k'}\xi_{57,k-k'} + 2(\xi_1\xi_{33})_k;$$

$$(\eta^2)_{57,k} = 2\sum \eta_{0,k'}\eta_{57,k-k'} + 2(\eta_1\eta_{33})_k.$$

Pour passer aux équations en $\mu_{57,k}$, $\lambda_{57,k}$, nous poserons toujours :

$$q_k = -(1+\varphi_{57,k})^2 - \frac{m^2}{2},$$

$$q'_k = -(1-\varphi_{57,k})^2 - \frac{m^2}{2},$$

$$\xi_{57,k} = \xi_{0,0}[\mu_{57,k} + \lambda_{57,k}] + B_{57,k},$$

$$\eta_{57,k} = \eta_{0,0}[\mu_{57,k} - \lambda_{57,k}] + B'_{57,k},$$

$$H_{57,k} = [\xi_0\rho_0^{-3}]_0[-2\mu_{57,k} + \lambda_{57,k}] + G_{57,k},$$

$$H'_{57,k} = [\eta_0\rho_0^{-3}]_0[-2\mu_{57,k} - \lambda_{57,k}] + G'_{57,k},$$

d'où

$$B_{57,k} = \xi_{0,0}(s_{11}s_{27})_k + \sum_0 \xi_{0,k'}(\mu_{57} + \lambda_{57} + s_{11}s_{27})_{k-k'}$$
$$+ \sum \xi_{0,k'}[\mu_1\mu_{33} + \mu_1\lambda_{33} + \lambda_1\mu_{33} + \lambda_1\lambda_{33} + \frac{1}{2}s_{11}^2\mu_1 + \frac{1}{2}s_{11}^2\lambda_1]_{k-k} ;$$

$$B'_{57,k} = \eta_{0,0}(s_{11}s_{27})_k + \sum_0 \eta_{0,k'}(\mu_{57} - \lambda_{57} + s_{11}s_{57})_{k-k'}$$
$$+ \sum \eta_{0,k'}[\mu_1\mu_{33} - \mu_1\lambda_{33} - \lambda_1\mu_{33} + \lambda_1\lambda_{33} + \frac{1}{2}s_{11}^2\mu_1 - \frac{1}{2}s_{11}^2\lambda_1]_{k-k'} ;$$

$$G_{57,k} = [\xi_0\rho_0^{-3}]_0(s_{11}s_{27})_k + \sum_0 [\xi_0\rho_0^{-3}]_{k'}(-2\mu_{57} + \lambda_{57} + s_{11}s_{27}]_{k-k'}$$
$$+ \sum (\xi_0\rho_0^{-3})_{k'}[4\mu_1\mu_{33} - 2\lambda_1\mu_{33} - 2\mu_1\lambda_{33} + \lambda_1\lambda_{33} - s_{11}^2\mu_1 + \frac{1}{2}s_{11}^2\lambda_1]_{k-k'} ;$$

$$G'_{57,k} = [\eta_0\rho_0^{-3}]_0(s_{11}s_{27})_k + \sum_0 [\eta_0\rho_0^{-3}]_{k'}(-2\mu_{57} - \lambda_{57} + s_{11}s_{27})_{k-k'}$$
$$+ \sum (\eta_0\rho_0^{-3})_{k'}[4\mu_1\mu_{33} + 2\lambda_1\mu_{33} + 2\mu_1\lambda_{33} + \lambda_1\lambda_{33} - s_{11}^2\mu_1 - \frac{1}{2}s_{11}^2\lambda_1]_{k-k'}.$$

Cela donne les équations :

$$\mu_{57,k}[q_k\xi_{0,0} - 2(\xi_0\rho_0^{-3})_0] + \lambda_{57,k}[q_k\xi_{0,0} + (\xi_0\rho_0^{-3})_0] + q_k B_{57,k} + G_{57,k} - \frac{3}{2}m^2\eta_{57,k+2}$$
$$- \frac{3}{4}m^2[\xi_0^2(\mu_{33} + \lambda_{33} + \frac{1}{2}s_{11}^2)]_{k-1} - \frac{3}{4}m^2[\xi_0\eta_0(2\mu_{33} + s_{11}^2)]_{k+1}$$
$$- \frac{3}{2}m^2[h^{(1)}s_{11}]_{k+1} - \frac{15}{4}m^2[\eta_0^2(\mu_{33} - \lambda_{33} + \frac{1}{2}s_{11}^2)]_{k+3} = 0.$$

$$\mu_{57,k}[q'_k\eta_{0,0}-2(\eta_0\rho_0^{-3})_0]+\lambda_{57,k}[-q'_k\eta_{0,0}-(\eta_0\rho_0^{-3})_0]+q'_k\mathrm{B}'_{57,k}+\mathrm{G}'_{57,k}-\frac{3}{2}m^2\xi_{57,k-2}$$
$$-\frac{3}{4}m^2[\xi_0\eta_0(2\mu_{33}+s_{11}^2)]_{k-1}-\frac{3}{2}m^2[h^{(1)}s_{11}^2]_{k-1}-\frac{3}{4}m^2[\eta_0^2(\mu_{33}-\lambda_{33}+\frac{1}{2}s_{11}^2)]_{k+1}$$
$$-\frac{15}{4}m^2[\xi_0^2(\mu_{33}+\lambda_{33}+\frac{1}{2}s_{11}^2)]_{k-3}=0.$$

L'équation de Laplace devient :

$$\mu_{57,k}[-2h_0^{(1)}\varphi_{57,k}^2-4m^2h_0^{(1)}+2b_0]-(\varphi_{57,k}^2+2m^2)\mathrm{C}''_{57,k}-2\mathrm{P}''_{57,k}$$
$$+6m^2(\zeta^2)_{57,k}-3m^2\left(1+\frac{m}{\varphi_{57,k}}\right)(\xi^2)_{57,k-2}-3m^2\left(1-\frac{m}{\varphi_{57,k}}\right)(\eta^2)_{57,k+2}$$
$$+\left\{-\frac{15}{8}[\xi_0^2\eta_0(\mu_{33}-\lambda_{33}+\frac{1}{2}s_{11}^2)_{k-1}-\frac{15}{4}m^2[\xi_0^2\eta_0(\mu_{33}+\lambda_{33}+\frac{1}{2}s_{11}^2)]_{k-1}-\frac{15}{2}m^2[\xi_0h^{(1)}s_{11}^2]_{k-1}\right\}\left(1+\frac{2m}{5\varphi_{57,k}}\right)$$
$$+\left\{-\frac{15}{8}m^2[\eta_0^2\xi_0(\mu_{33}+\lambda_{33}+\frac{1}{2}s_{11}^2)]_{k+1}-\frac{15}{4}m^2[\eta_0^2\xi_0(\mu_{33}-\lambda_{33}+\frac{1}{2}s_{11}^2)]_{k+1}-\frac{15}{2}m^2[\eta_0h^{(1)}s_{11}^2]_{k+1}\right\}\left(1-\frac{2m}{5\varphi_{57,k}}\right)$$
$$-\frac{75}{8}m^2[\xi_0^3(\mu_{33}+\lambda_{33}+\frac{1}{2}s_{11}^2)]_{k-3}\left(1+\frac{6m}{5\varphi_{57,k}}\right)-\frac{75}{8}[\eta_0^3(\mu_{33}-\lambda_{33}+\frac{1}{2}s_{11}^2)]_{k+3}\left(1-\frac{6m}{5\varphi_{57,k}}\right)=0$$

avec

$$\mathrm{P}''_{57,k}=-\sum_0 b_{k'}\mu_{57,k-k'}+\sum b_{k'}(\mu_1\mu_{33})_{k-k'},$$

$$\mathrm{C}''_{57,k}=\ 2\sum h_{k'}^{(1)}\mu_{57,k-k'}+4\sum h_{k'}^{(1)}(\mu_1\mu_{33})_{k-k},$$

$$(\zeta^2)_{57,k}=-2\sum h_{k'}^{(1)}(s_{11}s_{27})_{k-k'},$$

$$(\xi^2)_{57,k}=\sum(\xi_0^2)_{k'}[2\mu_{57}+2\lambda_{57}+4\mu_1\mu_{33}+4\mu_1\lambda_{33}+4\lambda_1\mu_{33}+4\lambda_1\lambda_{33}+2s_{11}s_{27}$$
$$+2s_{11}^2\mu_1+2s_{11}^2\lambda_1]_{k-k'},$$

$$(\eta^2)_{57,k}=\sum(\eta_0^2)_{k'}[2\mu_{57}-2\lambda_{57}+4\mu_1\mu_{33}-4\mu_1\lambda_{33}-4\lambda_1\mu_{33}+4\lambda_1\lambda_{33}+2s_{11}s_{27}$$
$$+2s_{11}^2\mu_1-2s_{11}^2\lambda_1]_{k-k'}.$$

Je n'ai pas été amené, d'ailleurs, à utiliser cette équation, et ai obtenu les résultats suivants :

$$\xi_{57,1}=\frac{15}{2^7}m^2+\frac{685}{2^9}m^3,$$

$$\eta_{57,1}=-\frac{15}{2^5}m-\frac{425}{2^7}m^2-\frac{5.249}{2^7.3}m^3,$$

$$\mu_{57,1} = -\frac{75}{2^7}m^2 - \frac{1.315}{2^9}m^3.$$

$$\lambda_{57,1} = \frac{15}{2^4}m + \frac{377}{2^6}m^2 + \frac{10.903}{2^7.3}m^3,$$

$$\xi_{57,-1} = \frac{45}{2^4}m - \frac{795}{2^7}m^2 + \frac{42.823}{2^{11}}m^3,$$

$$\eta_{57,-1} = -\frac{225}{2^5}m + \frac{1.065}{2^6}m^2 - \frac{6.645}{2^{11}}m^3,$$

$$\mu_{57,-1} = -\frac{45}{2^4}m + \frac{309}{2^7}m^2 - \frac{26.589}{2^{11}}m^3,$$

$$\lambda_{57,-1} = \frac{75}{2^4}m - \frac{825}{2^6}m^2 + \frac{5.649}{2^{10}}m^3,$$

$$\xi_{57,3} = 0 \, . \, m^3,$$

$$\eta_{57,3} = \frac{5}{2^7}m^2 - \frac{95}{2^9}m^3,$$

$$\mu_{57,3} = 0 \, . \, m^3,$$

$$\lambda_{57,3} = -\frac{15}{2^6}m^2 + \frac{205}{2^7}m^3,$$

$$\xi_{57,-3} = \frac{75}{2^5}m - \frac{135}{2^6}m^2 - \frac{1.345}{2^{11}}m^3,$$

$$\eta_{57,-3} = -\frac{25}{2^5}m - \frac{65}{2^5}m^2 - \frac{20.455}{2^{10}.3}m^3,$$

$$\mu_{57,-3} = \frac{25}{2^5}m - \frac{5}{2^2}m^2 + \frac{1.471}{2^9.3}m^3,$$

$$\lambda_{57,-3} = \frac{25}{2^4}m + \frac{55}{2^6}m^2 + \frac{22.489}{2^{10}.3}m^3,$$

$$\xi_{57,-5} = -\frac{1.555}{2^{11}}m^3,$$

$$\eta_{57,-5} = -\frac{15}{2^5}m^3,$$

$$\mu_{57,-5} = \frac{25}{2^5}m^3,$$

$$\lambda_{57,-5} = \frac{785}{2^{10}}m^3,$$

2° Termes en $\gamma_1\gamma_2\alpha = M_{38} = M_{12}M_{27} = M_{11}M_{28} = M_1M_{34} = M_1M_{11}M_{12}$.

Ici :

$$f_{p,k} = \varphi_{p,k} = k(1-m).$$

Ce groupe étant à lui-même son conjugué, on a :

$$\xi_{38,k} = \eta_{38,-k}, \qquad \mu_{38,k} = \mu_{38,-k}, \qquad \lambda_{38,k} = -\lambda_{38,-k}.$$

Il serait superflu d'écrire explicitement les équations, qui donnent :

$$\xi_{38,1} = \frac{45}{2^3}m + \frac{5.195}{2^7}m^2 + \frac{369.977}{2^9.3}m^3,$$

$$\eta_{38,1} = -\frac{135}{2^3}m - \frac{6.525}{2^6}m^2 - \frac{313.497}{2^9}m^3,$$

$$\mu_{38,1} = -\frac{165}{2^5}m - \frac{3.879}{2^7}m^2 - \frac{358.045}{2^{11}}m^3,$$

$$\lambda_{38,1} = \frac{165}{2^4}m + \frac{2.089}{2^5}m^2 + \frac{1.222.919}{2^{10}.3}m^3,$$

$$\xi_{38,3} = -\frac{5}{2^5}m^2 + \frac{2.225}{2^9}m^3,$$

$$\eta_{38,3} = \frac{15}{2^7}m^2 - \frac{65}{2^4}m^3,$$

$$\mu_{38,3} = \frac{75}{2^7}m^2 - \frac{4.305}{2^9}m^3,$$

$$\lambda_{38,3} = \frac{5}{2^3}m^2 + \frac{2.333}{2^7}m^3,$$

$$\xi_{38,5} = 0 \,.\, m^3,$$

$$\eta_{38,5} = \frac{15}{2^9}m^3,$$

$$\mu_{38,5} = 0 \,.\, m^3,$$

$$\lambda_{38,5} = -\frac{45}{2^8}m^3.$$

CONCLUSION.

Comme on le voit, les erreurs trouvées dans Delaunay sont en très petit nombre. Voici, d'ailleurs, le tableau complet des différentes corrections purement numériques qu'il faut apporter aux formules de Delaunay, en vertu des calculs ci-dessus. J'emploie les notations de Delaunay et la disposition adoptée par M. Andoyer [1].

S'il s'agit de la correction que doit subir le terme en $\gamma_1 \varepsilon'_1 m^5 \sin(2D + F + l')$ de la latitude, on trouvera dans la première colonne, (A), l'argument $2D + F + l'$; dans la seconde colonne, (M), le multiplicateur $\gamma_1 \varepsilon'_1 m^5$; dans la troisième colonne, (D), la valeur donnée par Delaunay pour le terme considéré ; dans la quatrième colonne, (E), la valeur exacte de ce terme ; enfin, dans la cinquième colonne, (C), la correction de ce terme, c'est-à-dire la différence entre sa valeur exacte et sa valeur donnée par Delaunay.

LATITUDE.

A	M	D	E	C
$2D + F + l'$	$\gamma_1 \varepsilon'_1 m^5$	$+ 0'',0183$	$+ 0'',0185$	$+ 0'',002$
$2D - F - l'$	$\gamma_1 \varepsilon'_1 m^4$	$+ 0,3730$	$+ 0,3751$	$+ 0,0021$
	$\gamma_1 \varepsilon'_1 m^5$	$+ 0,0492$	$+ 0,0496$	$+ 0,0004$
$F - l'$	$\gamma_1 \varepsilon'_2 m^5$	$- 0,4597$	$- 0,4666$	$- 0,0069$
$F + 2l$	$\gamma_1 \varepsilon^2_1 m^4$	$- 0,0955$	$- 0,0955$	0
$F - 2l$	$\gamma_1 \varepsilon^2_2 m^4$	$+ 0,0709$	$+ 0,0616$	$- 0,0093$

LONGITUDE.

A	M	D	E	C
$4D + 2F + l$	$\gamma^2_1 \varepsilon_1 m^4$	$- 0'',0052$	$- 0'',0063$	$- 0'',0011$
$2F - l$	$\gamma^2_1 \varepsilon_2 m^4$	$+ 0,0521$	$+ 0,0262$	$- 0,0259$
$2D - 2F - l'$	$\gamma^2_1 \varepsilon'_1 m^4$	$- 0,0468$	$- 0,0438$	$+ 0,0030$

[1] H. Andoyer, *Sur la Théorie de la Lune* (Bull. astr., 1901, pp. 207 et 208).

Ces corrections sont encore sans portée pratique, et, puisqu'à ce point de vue la méthode des calculs numériques est plus rapide, la révision des formules de Delaunay ne saurait avoir que l'intérêt de la rigueur théorique. Toutefois, il paraît intéressant à cet égard de poursuivre ce travail, étant donné surtout que la méthode de M. Andoyer, outre qu'elle permet d'éviter les erreurs de calcul (sauf évidemment dans le cas tout à fait exceptionnel où elles se compensent), donne les coordonnées rectangulaires et le rayon vecteur avec la même approximation que la longitude et la latitude.