ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

D. SAINT-BLANCAT

Action d'une masse intramercurielle sur la longitude de la Lune

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 2e série, tome 9 (1907), p. 1-103
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1907_2_9__1_0>

ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES

DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE.

ACTION D'UNE MASSE INTRAMERCURIELLE

SUR

LA LONGITUDE DE LA LUNE,

PAR M. D. SAINT-BLANCAT,

Astronome-Adjoint à l'Observatoire de Toulouse.

AVANT-PROPOS.

La théorie de la Lune est loin de concorder avec l'observation, qui a mis en évidence d'importantes perturbations ne pouvant, selon toute apparence, se rattacher aux actions des masses connues du système solaire.

L'une de ces inégalités a, comme on sait, une amplitude d'environ une demi-minute d'arc, avec une période évaluée à 273 ans. D'autres, à coefficients plus faibles, sont manifestes. En outre, la valeur théorique de l'accélération séculaire n'est pas vérifiée par l'ensemble des observations d'anciennes éclipses.

N'y a-t-il pas lieu de se demander si, parmi les causes capables de produire ces écarts entre le calcul et l'observation, il ne conviendrait pas de considérer l'action d'une masse voisine du Soleil?

Sans rien préjuger de l'existence d'un tel corps, j'ai cru intéressant de rechercher l'ordre de grandeur des perturbations que pourrait occasionner sur la longitude de la Lune une planète intramercurielle convenablement placée. Il s'agit d'inégalités à longue période, les seules qui puissent être sensibles dans ce cas.

J'ai trouvé que, pour une trentaine d'orbites d'un tel astre, l'inégalité de 273 ans de période pourrait être attribuée à une masse au plus égale à celle de Mercure. Dans le cas de plusieurs orbites, la masse nécessaire serait voisine de celle de notre satellite. Pour deux d'entre elles, la douzième partie de Mercure suffirait. Enfin, des masses beaucoup plus faibles fourniraient de fortes inégalités à très longue période.

Les résultats auxquels je suis parvenu montrent donc quelle serait l'importance, au point de vue du mouvement de la Lune, de l'existence de faibles masses intramercurielles, pour des orbites déterminées.

L'explication des anomalies du mouvement de la Lune préoccupe les astronomes depuis un demi-siècle. Pensant que, dans l'état actuel, nulle tentative en vue d'une solution possible ne doit être négligée, il m'a semblé que ces nouvelles recherches n'étaient pas superflues et pouvaient avoir de l'intérêt.

Je tiens à dire que, si ce travail obtient quelque estime, la meilleure part en reviendra à mon jeune maître, M. Andoyer. Je lui exprime toute ma reconnaissance pour avoir bien voulu m'aider de ses précieux conseils et de ses bienveillants encouragements (1).

INTRODUCTION.

Considérons la fonction perturbatrice du mouvement de la Lune relative à l'action d'une planète,

$$R = \sum A \cos\theta, \qquad \theta = i\mathrm{L} + i'\mathrm{L}' + i''\mathrm{L}'' + \omega,$$

où L, L′, L″ désignent les longitudes moyennes de la Lune, de la Terre et de la planète; i, i', i'' trois nombres entiers positifs, négatifs ou égaux à zéro; A et ω des quantités dépendant des autres éléments des orbites des trois corps.

Soit $\delta\varphi$ le mouvement diurne d'un angle variable φ. La période de l'argument θ, exprimée en années, sera $p = \dfrac{\delta \mathrm{L}'}{\delta\theta}$.

Supposons le mouvement diurne $\delta\mathrm{L}''$ de la planète tel que, pour un système de valeurs de i, i', i'', p soit très grand et A d'un ordre peu élevé par rapport aux excentricités et aux inclinaisons. On conçoit qu'alors le terme $A\cos\theta$ puisse donner lieu à une inégalité sensible de la longitude de la Lune. Il est aisé de voir que ce fait ne pourra se produire pour une planète intérieure à Mercure si l'on n'a pas simultanément i et i'' différents de zéro.

On est ainsi conduit à envisager l'équation

$$\delta\theta = \varepsilon,$$

(1) Je dois remercier aussi le Comité des *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, et en particulier son secrétaire, M. Cosserat, du symptahique accueil qu'ils ont fait à mon travail en l'acceptant pour leur Revue.

ε désignant un très petit angle, de quelques secondes seulement. Si l'on prend $\varepsilon = 13''$, on a une période de 273 ans. C'est le cas de l'inégalité empirique bien connue de la longitude de la Lune.

L'équation précédente détermine le moyen mouvement $\delta L''$ d'une planète supposée. On peut en déduire le demi-grand axe et par suite le coefficient A, en laissant arbitraires au besoin l'excentricité et l'inclinaison. Il ne reste ensuite qu'à étudier par les procédés habituels la grandeur de l'inégalité correspondante, suivant la masse assignée à la planète.

Nous avons examiné à ce point de vue tous les termes de R jusqu'au second ordre.

Pour nos calculs numériques, nous avons fait le choix particulier de la période de 273 ans, dont nous venons de parler. Nous avons adopté en outre, dans tous les cas, une masse agissante égale à $\frac{1}{5000000}$, très voisine de celle de Mercure.

Mais nous montrerons comment on peut passer à une période et à une masse différentes, en partant des résultats obtenus dans l'hypothèse précédente. Nous déterminerons par exemple, pour chaque orbite supposée, la masse capable de produire l'inégalité empirique.

J'indiquerai l'ordre de ce travail par l'énumération succincte des matières qui composent les six paragraphes dans lesquels je l'ai divisé.

I. Développement de la fonction perturbatrice relative à l'action directe. Je me suis borné aux termes du second ordre, ceux d'ordre supérieur ne pouvant donner lieu qu'à des inégalités très faibles. En outre, je n'ai conservé dans chaque coefficient que les termes principaux.

II. Fonction perturbatrice relative à l'action indirecte. En appelant R′ la fonction perturbatrice du mouvement de la Lune correspondant au Soleil, j'ai développé $\delta R'$ au même degré d'approximation que R. En ce qui concerne les perturbations produites par la planète sur les coordonnées de la Terre, j'ai poussé le développement jusqu'au second ordre également.

III. J'expose dans ce paragraphe une méthode inédite, due à M. Andoyer, sur le mouvement d'un système formé de deux couples de corps éloignés, tel que le système Soleil-planète d'une part et Terre-Lune d'autre part. Cette nouvelle méthode m'a permis d'avoir une vérification de l'ensemble de mes calculs.

IV. Recherche des inégalités numériques des ordres zéro et un.

V. Étude des inégalités du second ordre.

VI. Formes diverses des résultats.

I. — Fonction perturbatrice relative a l'action directe.

1. Soient, parallèlement à trois axes rectangulaires de directions invariables, x, y, z et ξ, η, ζ les coordonnées géocentriques de la Lune et de la planète perturbatrice, x', y', z' et x'', y'', z'' les coordonnées héliocentriques de la Terre et de la planète. Soient, en outre, r le rayon vecteur de la Lune rapportée à la Terre, r' et r'' ceux de la Terre et de la planète rapportées au Soleil.

Nous désignons par f le coefficient d'attraction, par m'' la masse de la planète, et nous posons

$$\Delta^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2, \qquad D^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2.$$

On a alors, pour la fonction perturbatrice du mouvement de la Lune relative à l'action de la planète, l'expression suivante

$$R = fm''\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{x\xi + y\eta + z\zeta}{D^3}\right).$$

En posant

$$r\sigma = x\xi + y\eta + z\zeta,$$

nous avons

$$\Delta^2 = D^2 + r^2 - 2r\sigma$$

et, par suite,

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{D}\left(1 + \frac{r^2 - 2r\sigma}{D^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Il nous suffit de développer le crochet du second membre jusqu'au quatrième terme, en négligeant les termes en r^4. Il vient

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{D} - \frac{1}{2}\frac{r^2}{D^3} + \frac{r\sigma}{D^3} - \frac{3}{2}\frac{r^3\sigma}{D^5} + \frac{3}{2}\frac{r^2\sigma^2}{D^5} + \frac{5}{2}\frac{r^3\sigma^3}{D^7}.$$

Nous pouvons supprimer dans R le terme $\frac{1}{D}$, qui est indépendant des coordonnées de la Lune. Nous écrirons

$$R = fm''(R_1 + R_2),$$

en posant

$$(1) \qquad R_1 = -\frac{1}{2}\frac{r^2}{D^3} + \frac{3}{2}\frac{r^2\sigma^2}{D^5}, \qquad R_2 = -\frac{3}{2}\frac{r^3\sigma}{D^5} + \frac{5}{2}\frac{r^3\sigma^3}{D^7}.$$

R_1 est de l'ordre de $\frac{r^2}{r'^3}$ et R_2, de l'ordre de $\frac{r^3}{r'^4}$. Cette dernière partie de la fonction perturbatrice a en facteur la parallaxe solaire. Les termes qui lui correspondent, dits *termes parallactiques,* peuvent être considérés comme du second ordre. Par conséquent nous n'avons pas à développer R_2 par rapport aux inclinaisons et aux excentricités, puisque nous nous proposons d'obtenir le développement de R jusqu'au second ordre seulement.

Considérons l'expression ci-dessus de R_1. En ajoutant et retranchant $\frac{3}{4}\frac{r^2}{D^3}$ et désignant $2\sigma^2 - D^2$ par P, nous pouvons écrire

$$\frac{R_1}{r^2} = \frac{1}{4}D^{-3} + \frac{3}{4}PD^{-5}.$$

Nous avons à développer cette quantité par rapport aux inclinaisons et aux excentricités, en négligeant le troisième ordre.

2. Désignons par H, H', H'' les angles des couples de rayons vecteurs r' et r'', r'' et r, r et r', respectivement.

Soient v la longitude vraie de la Lune, rapportée à la Terre, v' et v'' celles de la Terre et de la planète, rapportées au Soleil; s, s', s'' les latitudes correspondantes; $\lambda, \lambda', \lambda''$ les longitudes dans l'orbite, en prenant pour plan fondamental des coordonnées l'écliptique à une certaine date.

Soient, en outre, E le pôle de cet écliptique, M, M', M'' les points où les rayons r, r', r'' percent la sphère céleste. Alors le triangle sphérique EM'M'' donne

$$\cos H = \sin s' \sin s'' + \cos s' \cos s'' \cos(v' - v'').$$

Or, en désignant par i, i', i'' les inclinaisons des trois orbites sur l'écliptique et par h, h', h'' les longitudes des nœuds, on a

$$\begin{aligned}
\sin s' &= \sin i' \sin(\lambda' - h'), & \sin s'' &= \sin i'' \sin(\lambda'' - h''),\\
\cos s' \cos(v' - h') &= \cos(\lambda' - h'), & \cos s'' \cos(v'' - h'') &= \cos(\lambda'' - h''),\\
\cos s' \sin(v' - h') &= \cos i' \sin(\lambda' - h'), & \cos s'' \sin(v'' - h'') &= \cos i'' \sin(\lambda'' - h'').
\end{aligned}$$

Par suite, en désignant $\sin\frac{i'}{2}$, $\sin\frac{i''}{2}$ par γ' et γ'', on obtient, toutes réductions faites,

$$\begin{aligned}
\cos H = \cos(\lambda' - \lambda'') &- 2\gamma'^2 \sin(\lambda' - h')\sin(\lambda'' - h') - 2\gamma''^2 \sin(\lambda'' - h'')\sin(\lambda' - h''\\
&+ 4\gamma'\gamma''\sqrt{1-\gamma'^2}\sqrt{1-\gamma''^2}\sin(\lambda' - h')\sin(\lambda'' - h'')\\
&+ 4\gamma'^2\gamma''^2 \sin(\lambda' - h')\sin(\lambda'' - h'')\cos(h' - h'').
\end{aligned}$$

Cette formule est rigoureuse. En ne conservant que les termes du second ordre et en remplaçant les produits de sinus par des sommes de cosinus, d'après les formules connues, il vient

$$(2)\quad \begin{aligned}\cos H = \cos(\lambda' - \lambda'') &+ \gamma'^2[\cos(\lambda' + \lambda'' - 2h') - \cos(\lambda' - \lambda'')]\\ &+ \gamma''^2[\cos(\lambda' + \lambda'' - 2h'') - \cos(\lambda' - \lambda'')]\\ &- 2\gamma'\gamma''[\cos(\lambda' + \lambda'' - h' - h'') - \cos(\lambda' - \lambda'' - h' + h'')].\end{aligned}$$

On aura les expressions analogues de $\cos H'$, $\cos H''$ en accentuant convenablement les lettres dans la formule précédente.

Retenons seulement pour l'instant que, α, α', α'' désignant des quantités du second ordre par rapport aux inclinaisons, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}\cos H &= \cos(\lambda' - \lambda'') + \alpha,\\ \cos H' &= \cos(\lambda'' - \lambda) + \alpha',\\ \cos H'' &= \cos(\lambda - \lambda') + \alpha''.\end{aligned}$$

3. Revenons à D et P. On peut écrire d'abord

$$D^2 = r'^2 + r''^2 - 2r'r''\cos H;$$

puis, comme

$$\xi = x'' - x', \qquad \eta = y'' - y', \qquad \zeta = z'' - z',$$

nous aurons

$$\sigma = r''\left(\frac{x}{r}\frac{x''}{r''} + \frac{y}{r}\frac{y''}{r''} + \frac{z}{r}\frac{z''}{r''}\right) - r'\left(\frac{x}{r}\frac{x'}{r'} + \frac{y}{r}\frac{y'}{r'} + \frac{z}{r}\frac{z'}{r'}\right) = r''\cos H' - r'\cos H''$$

et, enfin,

$$P = 2\sigma^2 - D^2 = r'^2\cos 2H'' + r''^2\cos 2H' - 2r'r''(2\cos H'\cos H'' - \cos H).$$

Désignons par d et p ce que deviennent D et P lorsqu'on fait $\alpha = \alpha' = \alpha'' = 0$, c'est-à-dire $\gamma = \gamma' = \gamma'' = 0$; en d'autres termes, quand on remplace $\cos H$, $\cos H'$, $\cos H''$ respectivement par $\cos(\lambda' - \lambda'')$, $\cos(\lambda'' - \lambda)$, $\cos(\lambda - \lambda')$.

En posant

$$\lambda' - \lambda'' = \varphi, \qquad 2\lambda - \lambda' - \lambda'' = \psi,$$

on a

$$\begin{aligned}d^2 &= r'^2 + r''^2 - 2r'r''\cos\varphi,\\ p &= r'^2\cos(\psi - \varphi) + r''^2\cos(\psi + \varphi) - 2r'r''\cos\psi.\end{aligned}$$

Des relations qui définissent φ et ψ on tire

$$\lambda - \lambda'' = \frac{\psi + \varphi}{2}, \qquad \lambda - \lambda' = \frac{\psi - \varphi}{2}.$$

Par conséquent, pour déduire les expressions de D et P de celles de d et p, il suffit de donner à $\cos\varphi$, $\cos\frac{\psi+\varphi}{2}$, $\cos\frac{\psi-\varphi}{2}$ les accroissements α, α', α''.

Or on a, pour les accroissements de d et p correspondants,

$$\delta d = -\frac{r'r''\alpha}{d},$$

$$\begin{aligned}\delta p &= 4r'^2\cos\frac{\psi-\varphi}{2}\alpha'' + 4r''^2\cos\frac{\psi+\varphi}{2}\alpha' - 2r'r''\left(2\alpha'\cos\frac{\psi-\varphi}{2} + 2\alpha''\cos\frac{\psi+\varphi}{2} - \alpha\right)\\ &= 4(r''\alpha' - r'\alpha'')\left(r''\cos\frac{\psi+\varphi}{2} - r'\cos\frac{\psi-\varphi}{2}\right) + 2r'r''\alpha.\end{aligned}$$

Alors $\frac{R_1}{r^2}$ peut s'écrire

$$\frac{R_1}{r^2} = \frac{1}{4}d^{-3} + \frac{3}{4}pd^{-5} + \delta\left(\frac{1}{4}d^{-3} + \frac{3}{4}pd^{-5}\right).$$

L'expression de l'accroissement est

$$\begin{aligned}&\delta\left(\frac{1}{4}d^{-3} + \frac{3}{4}pd^{-5}\right)\\ &\quad = -\frac{3}{4}d^{-4}\delta d - \frac{15}{4}pd^{-6}\delta d + \frac{3}{4}d^{-5}\delta p\\ &\quad = \frac{9}{4}r'r''\alpha d^{-5} + 3(r''\alpha' - r'\alpha'')\left(r''\cos\frac{\psi+\varphi}{2} - r'\cos\frac{\psi-\varphi}{2}\right)d^{-5} + \frac{15}{4}r'r''p\alpha d^{-7}.\end{aligned}$$

Pour avoir le développement de cette expression, il suffit de remplacer α, α', α'' par leurs valeurs précédemment trouvées, que l'on peut d'ailleurs simplifier en faisant $\gamma' = 0$. On a ainsi

$$\alpha = \gamma''^2[\cos(\lambda' + \lambda'' - 2h'') - \cos(\lambda' - \lambda'')],$$

$$\begin{aligned}\alpha' = {}&\gamma''^2[\cos(\lambda + \lambda'' - 2h'') - \cos(\lambda - \lambda'')] + \gamma^2[\cos(\lambda + \lambda'' - 2h) - \cos(\lambda - \lambda'')]\\ &- 2\gamma\gamma''[\cos(\lambda + \lambda'' - h - h'') - \cos(\lambda'' - \lambda - h'' + h)],\end{aligned}$$

$$\alpha'' = \gamma^2\,[\cos(\lambda' + \lambda - 2h) - \cos(\lambda' - \lambda)].$$

Il faut aussi substituer à d^{-5} et d^{-7} les développements bien connus et définis par les formules suivantes

$$r'^5 d^{-5} = \frac{1}{2}\sum e^{(i)}\cos i\varphi, \qquad r'^7 d^{-7} = \frac{1}{2}\sum f^{(i)}\cos i\varphi.$$

On obtient alors, en faisant $\frac{r''}{r'} = \beta$,

$$(3)\quad r^2\delta\left(\frac{1}{4}d^{-3} + \frac{3}{4}pd^{-5}\right)$$
$$= \frac{r^2}{r'^3}\sum\Big\{\frac{9}{8}\beta\alpha e^{(i)}\cos i\varphi$$
$$+\frac{15}{8}\beta[\cos(\psi-\varphi)+\beta^2\cos(\psi+\varphi)-2\beta\cos\psi]\,\alpha f^{(i)}\cos i\varphi$$
$$+\frac{3}{2}\beta\left(\beta\cos\frac{\psi+\varphi}{2}-\cos\frac{\psi-\varphi}{2}\right)\alpha' e^{(i)}\cos i\varphi$$
$$-\frac{3}{2}\left(\beta\cos\frac{\psi+\varphi}{2}-\cos\frac{\psi-\varphi}{2}\right)\alpha'' e^{(i)}\cos i\varphi\Big\}$$

et, en remplaçant les produits de cosinus par des sommes,

$$(4)\quad r^2\delta\left(\frac{1}{4}d^{-3} + \frac{3}{4}pd^{-5}\right)$$
$$= \frac{r^2}{r'^3}\sum\Big[\frac{9}{8}\beta\alpha e^{(i)}\cos i\varphi + \frac{15}{8}\beta\alpha f^{(i)}\cos(i\varphi+\psi-\varphi)$$
$$+\frac{15}{8}\beta^3\alpha f^{(i)}\cos(i\varphi+\psi+\varphi) - \frac{15}{4}\beta^2\alpha f^{(i)}\cos(i\varphi+\psi)$$
$$+\frac{3}{2}\beta^2\alpha' e^{(i)}\cos\left(i\varphi+\frac{\psi+\varphi}{2}\right) - \frac{3}{2}\beta\alpha' e^{(i)}\cos\left(i\varphi+\frac{\psi-\varphi}{2}\right)$$
$$-\frac{3}{2}\beta\alpha'' e^{(i)}\cos\left(i\varphi+\frac{\psi+\varphi}{2}\right) + \frac{3}{2}\alpha'' e^{(i)}\cos\left(i\varphi+\frac{\psi-\varphi}{2}\right)\Big].$$

J'ai établi cette formule parce qu'elle sera utile au paragraphe III, pour l'application de la méthode de M. Andoyer. Pour le développement que nous poursuivons, il n'était pas nécessaire de passer par cette forme de l'accroissement en fonction des inclinaisons. Que l'on parte, en effet, de l'une ou de l'autre des expressions (3) et (4), les calculs sont également simples, en tenant compte des relations

$$\cos p\sum k^{(i)}\cos i\mathrm{K} = \sum k^{(i)}\cos(i\mathrm{K}+p),$$
$$\cos p\cos q\sum k^{(i)}\cos i\mathrm{K} = \frac{1}{2}\sum k^{(i)}[\cos(i\mathrm{K}+p+q)+\cos(i\mathrm{K}+p-q)].$$

Dans l'expression définitive du développement, on peut remplacer les rayons vecteurs r, r', r'' par les demi-grands axes a, a', a'' et les longitudes λ, λ', λ'' par les longitudes moyennes L, L′, L″.

Nous poserons

$$(5)\qquad \delta = \mathrm{L}'-\mathrm{L}'', \qquad \delta_1 = 2\mathrm{L}-\mathrm{L}'-\mathrm{L}'';$$

δ et δ_1 sont les valeurs de φ et ψ quand on néglige les excentricités.

Dans les termes où l'argument est $i\delta$ ou $i\delta + 2L - 2h$, il s'introduit au coefficient le facteur

$$(1+\beta^2)e^{(i)} - \beta(e^{(i+1)} + e^{(i-1)}).$$

Si l'on considère le développement

$$(1+\beta^2 - 2\beta\cos\varphi)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}\sum c^{(i)}\cos i\varphi,$$

l'expression précédente n'est autre chose que $c^{(i)}$. En effet, on a

$$\begin{aligned}\sum c^{(i)}\cos i\varphi &= (1+\beta^2-2\beta\cos\varphi)\sum e^{(i)}\cos i\varphi\\ &= (1+\beta^2)\sum e^{(i)}\cos i\varphi - \beta\sum e^{(i)}[\cos(i+1)\varphi + \cos(i-1)\varphi]\\ &= (1+\beta^2)\sum e^{(i)}\cos i\varphi - \beta\sum e^{(i-1)}\cos i\varphi - \beta\sum e^{(i+1)}\cos i\varphi,\end{aligned}$$

égalité qui met en évidence la relation à démontrer.

Nous avons tenu compte de cette simplification.

On a finalement, pour le développement cherché,

$$\text{(A)}\quad \begin{aligned}\frac{a^2}{a'^3}\sum\Big\{&\cos i\delta\left[-\frac{3}{4}\gamma^2 c^{(i)} - \frac{3}{4}\gamma''^2\left(\beta^2 e^{(i)} + \frac{1}{2}\beta e^{(i-1)}\right)\right]\\
&+\cos(i\delta+\delta_1)\quad\left[-\gamma^2\left(\frac{3}{4}e^{(i+1)} - \frac{3\beta}{2}e^{(i)} + \frac{3}{4}\beta^2 e^{(i-1)}\right)\right.\\
&\qquad + \gamma''^2\left(\frac{3}{4}\beta e^{(i)} - \frac{3}{4}\beta^2 e^{(i-1)}\right)\\
&\qquad - \gamma''^2\left(\frac{15}{16}\beta f^{(i)} - \frac{15}{8}\beta^2 f^{(i-1)} + \frac{15}{16}\beta^3 f^{(i-2)}\right)\\
&\qquad \left. - \gamma''^2\left(\frac{15}{16}\beta f^{(i+2)} - \frac{15}{8}\beta^2 f^{(i+1)} + \frac{15}{16}\beta^3 f^{(i)}\right)\right]\\
&+\cos(i\delta+2L-2h)\quad\left(+\frac{3}{4}\gamma^2 e^{(i)}\right)\\
&+\cos(i\delta+2L''-2h'')\quad\left[\gamma''^2\left(\frac{3}{4}\beta^2 e^{(i)} + \frac{3}{8}\beta e^{(i-1)}\right)\right]\\
&+\cos(i\delta+2L-2L''-h+h'')\left[\gamma\gamma''\left(-\frac{3}{2}\beta e^{(i+1)} + \frac{3}{2}\beta^2 e^{(i)}\right)\right]\\
&+\cos(i\delta+2L-h-h'')\quad\left[\gamma\gamma''\left(-\frac{3}{2}\beta^2 e^{(i)} + \frac{3}{2}\beta e^{(i+1)}\right)\right]\\
&+\cos(i\delta-2L''+h+h'')\quad\left[\gamma\gamma''\left(-\frac{3}{2}\beta^2 e^{(i)} + \frac{3}{2}\beta e^{(i+1)}\right)\right]\\
&+\cos(i\delta+h-h'')\quad\left[\gamma\gamma''\left(\frac{3}{2}\beta^2 e^{(i)} - \frac{3}{2}\beta e^{(i+1)}\right)\right]\end{aligned}$$

$$\text{(A)}\ \text{(suite)}\quad \frac{a^2}{a'^3}\sum\Big\{$$

$$+\cos(i\delta+\delta_1+2L''-2h'')\Big[\gamma''^2\Big(\frac{15}{16}\beta f^{(i)}-\frac{15}{8}\beta^2 f^{(i-1)}+\frac{15}{16}\beta^3 f^{(i-2)}+\frac{3}{4}\beta^2 e^{(i-1)}-\frac{3}{4}\beta e^{(i)}\Big)\Big]$$

$$+\cos(i\delta+\delta_1-2L''+2h'')\Big[\gamma''^2\Big(\frac{15}{16}\beta f^{(i+2)}-\frac{15}{8}\beta^2 f^{(i+1)}+\frac{15}{16}\beta^3 f^{(i)}\Big)\Big]$$

$$+\cos(i\delta+\delta_1-2L+2h)\Big[\gamma^2\Big(\frac{3}{4}e^{(i+1)}-\frac{3}{2}\beta e^{(i)}+\frac{3}{4}\beta^2 e^{(i-1)}\Big)\Big]\Big\}.$$

Nous montrerons plus loin que les fonctions de $e^{(i)}$ et $f^{(i)}$ qui entrent dans les coefficients peuvent être exprimées par des séries ordonnées suivant les puissances de β, de même que $e^{(i)}$ et $f^{(i)}$. Dans l'article suivant, l'une de ces fonctions a une importance plus grande que dans le développement précédent, parce qu'elle intervient, en outre, par ses dérivées successives par rapport à β. C'est l'expression

$$e^{(i+1)}-2\beta e^{(i)}+\beta^2 e^{(i-1)},$$

qui est facteur de γ^2 dans les termes ci-dessus ayant pour arguments $i\delta+\delta_1$ et $i\delta+\delta_1-2L+2h$.

4. Nous avons encore à développer

$$r^2\Big(\frac{1}{4}d^{-3}+\frac{3}{4}pd^{-5}\Big),$$

suivant les puissances des excentricités. On a

$$r^2\ d^{-3}=\frac{r^2}{r'^3}\sum\frac{1}{2}c^{(i)}\cos i\varphi$$

$$r^2pd^{-5}=\frac{r^2}{r'^3}[\cos(\psi-\varphi)-2\beta\cos\psi+\beta^2\cos(\psi+\varphi)]\sum\frac{1}{2}e^{(i)}\cos i\varphi$$

$$=\frac{r^2}{r'^3}\,\frac{1}{2}\sum\cos(i\varphi+\psi)\,(e^{(i+1)}-2\beta e^{(i)}+\beta^2 e^{(i-1)})$$

$$=\frac{r^2}{r'^3}\,\frac{1}{2}\sum g^{(i)}\cos(i\varphi+\psi),$$

$$g^{(i)}=e^{(i+1)}-2\beta e^{(i)}+\beta^2 e^{(i-1)},\qquad g^{(-i)}=e^{(i-1)}-2\beta e^{(i)}+\beta^2 e^{(i+1)}.$$

Comme on le voit, $g^{(i)}$ et $g^{(-i)}$ sont généralement différents; ils ne sont égaux que pour $i=0$.

Il vient alors

$$(6)\qquad r\Big(\frac{1}{4}d^{-3}+\frac{3}{4}pd^{-5}\Big)=\frac{1}{8}\,\frac{r^2}{r'^3}\sum c^{(i)}\cos i\varphi+\frac{3}{8}\,\frac{r^2}{r'^3}\sum g^{(i)}\cos(i\varphi+\psi).$$

Nous poserons

$$g_1^{(i)} = \beta \frac{dg^{(i)}}{d\beta}, \qquad g_2^{(i)} = \beta^2 \frac{d^2 g^{(i)}}{d\beta^2},$$

de même que

$$c_1^{(i)} = \beta \frac{dc^{(i)}}{d\beta}, \qquad c_2^{(i)} = \beta^2 \frac{d^2 c^{(i)}}{d\beta^2}.$$

Les termes du second membre de (6) sont de la forme

$$\mathrm{F} = \frac{r^2}{r'^3} m \cos \mathrm{M},$$

où m désigne soit $c^{(i)}$, soit $g^{(i)}$ et M l'un des angles $i\varphi$ et $i\varphi + \psi$. Le coefficient m est une fonction de β.

Proposons-nous de développer cette fonction F par la formule de Taylor, jusqu'au second ordre. C'est une fonction des quatre variables r, r', r'', M.

Les dérivées du premier ordre sont

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial r} = \frac{2r}{r'^3} m \cos \mathrm{M}, \qquad \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial r'} = -\frac{3r^2}{r'^4} m \cos \mathrm{M} - \frac{r^2 r''}{r'^5} m' \cos \mathrm{M},$$

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial r''} = \frac{r^2}{r'^4} m' \cos \mathrm{M}, \qquad \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{M}} = -\frac{r^2}{r'^3} m \sin \mathrm{M}$$

en désignant par m' la dérivée de m par rapport à β.

Soit de même m'' la dérivée seconde; nous poserons aussi

$$m_1 = \beta \frac{dm}{d\beta}, \qquad m_2 = \beta^2 \frac{d^2 m}{d\beta^2}.$$

On a alors pour les dérivées secondes de F

$$\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial r^2} = \frac{2}{r'^3} m \cos \mathrm{M}, \qquad \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial r'^2} = \frac{12 r^2}{r'^5} m \cos \mathrm{M} + \frac{8 r^2 r''}{r'^6} m' \cos \mathrm{M} + \frac{r^2 r''^2}{r'^7} m'' \cos \mathrm{M},$$

$$\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial r''^2} = \frac{r^2}{r'^5} m'' \cos \mathrm{M}, \qquad \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial \mathrm{M}^2} = -\frac{r^2}{r'^3} m \cos \mathrm{M},$$

$$\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial r\, \partial r'} = -\frac{6r}{r'^4} m \cos \mathrm{M} - \frac{2 r r''}{r'^5} m' \cos \mathrm{M},$$

$$\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial r\, \partial r''} = \frac{2r}{r'^4} m' \cos \mathrm{M}, \qquad \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial r\, \partial \mathrm{M}} = -\frac{2r}{r'^3} m \sin \mathrm{M},$$

$$\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial r'\, \partial r''} = -\frac{4 r^2}{r'^5} m' \cos \mathrm{M} - \frac{r^2 r''}{r'^6} m'' \cos \mathrm{M},$$

$$\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial r'\, \partial \mathrm{M}} = \frac{3r^2}{r'^4} m \sin \mathrm{M} + \frac{r^2 r''}{r'^5} m' \sin \mathrm{M}, \qquad \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial r''\, \partial \mathrm{M}} = -\frac{r^2}{r'^4} m' \sin \mathrm{M}.$$

Soient $r\rho$, $r'\rho'$, $r''\rho''$ les accroissements de r, r', r'', μ celui de M. Il vient alors, pour le développement cherché,

$$(7)\quad \begin{aligned} \mathrm{F}=\frac{a^2}{a'^3}\Big[\cos \mathrm{M}\Big(& m+2\rho m-3\rho' m-\rho' m_1+\rho'' m_1+\rho^2 m+6\rho'^2 m+4\rho'^2 m_1\\ &+\frac{1}{2}\rho'^2 m_2+\frac{1}{2}\rho''^2 m_2-\frac{1}{2}\mu^2 m-6\rho\rho' m\\ &-2\rho\rho' m_1+2\rho\rho'' m_1-4\rho'\rho'' m_1-\rho'\rho'' m_2\Big)\\ &+\sin \mathrm{M}\Big(-\mu m-2\rho\mu m+3\mu\rho' m+\mu\rho' m_1-\mu\rho'' m_1\Big)\Big]. \end{aligned}$$

Nous allons appliquer cette formule au développement de $\frac{r^2}{r'^3}c^{(i)}\cos i\varphi$ et de $\frac{r^2}{r'^3}g^{(i)}\cos(i\varphi+\psi)$ successivement, en donnant aux accroissements ρ, ρ', ... les valeurs convenables.

5. Occupons-nous d'abord de la première de ces deux expressions. On a, e désignant l'excentricité, l l'anomalie moyenne,

$$\rho=-e\cos l+\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{2}\cos 2l,\qquad \delta\lambda=2e\sin l+\frac{5}{4}e^2\sin 2l,$$

et les quantités analogues ρ', ρ'', ..., en accentuant les lettres.

On en déduit, jusqu'aux termes du second ordre,

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &\rho^2=\frac{e^2}{2}+\frac{e^2}{2}\cos 2l,\qquad \rho\rho'=\frac{ee'}{2}\cos(l+l')+\frac{ee'}{2}\cos(l-l'),\\ &\mu\ =i\Big(2e'\sin l'-2e''\sin l''+\frac{5}{4}e'^2\sin 2l'-\frac{5}{4}e''^2\sin 2l''\Big),\\ &\mu^2\ =i^2[2e'^2+2e''^2-2e'^2\cos 2l'-2e''^2\cos 2l''+4e'e''\cos(l'+l'')-4e'e''\cos(l'-l'')],\\ &\mu\rho=-iee'[\sin(l'+l)+\sin(l'-l)]+iee''[\sin(l''+l)+\sin(l''-l)],\\ &\mu\rho'=-ie'^2\sin 2l'+ie'e''[\sin(l''+l')+\sin(l''-l')],\\ &\mu\rho''=-ie'e''[\sin(l'+l'')+\sin(l'-l'')]+ie''^2\sin 2l''. \end{aligned}\right.$$

Il vient alors, en remplaçant M par $i\delta$ et en ne conservant que les termes principaux dans chaque coefficient, s'il en existe de plusieurs ordres,

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{B})\quad & \frac{1}{8}\frac{r^2}{r'^3}\sum c^{(i)}\cos i\varphi \\
&= \frac{a^2}{a'^3}\sum\Big[\cos i\delta \left(\frac{1}{8}c^{(i)}\right) + e\cos(i\delta+l)\left(-\frac{1}{4}c^{(i)}\right) \\
&\quad + e' \cos(i\delta+l') \left(\frac{3+2i}{8}c^{(i)} + \frac{1}{8}c_1^{(i)}\right) \\
&\quad + e'' \cos(i\delta+l'') \left(-\frac{i}{4}c^{(i)} - \frac{1}{8}c_1^{(i)}\right) \\
&\quad + e^2 \cos(i\delta+2l) \left(-\frac{1}{16}c^{(i)}\right) \\
&\quad + e'^2 \cos(i\delta+2l') \left(\frac{4i^2+17i+18}{32}c^{(i)} + \frac{2i+5}{16}c_1^{(i)} + \frac{1}{32}c_2^{(i)}\right) \\
&\quad + e''^2 \cos(i\delta+2l'') \left(\frac{4i^2-5i}{32}c^{(i)} + \frac{2i-1}{16}c_1^{(i)} + \frac{1}{32}c_2^{(i)}\right) \\
&\quad + e\,e' \cos(i\delta+l+l') \left(-\frac{2i+3}{8}c^{(i)} - \frac{1}{8}c_1^{(i)}\right) \\
&\quad + e\,e' \cos(i\delta+l-l') \left(\frac{2i-3}{8}c^{(i)} - \frac{1}{8}c_1^{(i)}\right) \\
&\quad + e\,e'' \cos(i\delta+l+l'') \left(\frac{i}{4}c^{(i)} + \frac{1}{8}c_1^{(i)}\right) \\
&\quad + e\,e'' \cos(i\delta+l-l'') \left(-\frac{i}{4}c^{(i)} + \frac{1}{8}c_1^{(i)}\right) \\
&\quad + e'e'' \cos(i\delta+l'+l'') \left(-\frac{2i^2+3i}{8}c^{(i)} - \frac{i+1}{4}c_1^{(i)} - \frac{1}{16}c_2^{(i)}\right) \\
&\quad + e'e'' \cos(i\delta+l'-l'') \left(\frac{2i^2+3i}{8}c^{(i)} - \frac{1}{4}c_1^{(i)} - \frac{1}{16}c_2^{(i)}\right)\Big].
\end{aligned}
$$

6. Passons au développement de $\frac{3}{8}\frac{r^2}{r'^3}g^{(i)}\cos(i\varphi+\psi)$. Nous avons les mêmes expressions de ρ, ρ', ρ''. Quant à μ, c'est l'accroissement de $i(\lambda-\lambda'')+2\lambda-\lambda'-\lambda''$. On a alors

$$
\begin{aligned}
\mu = 4e\sin l + \frac{5}{2}e^2\sin 2l + (i-1)\left(2e'\sin l' + \frac{5}{4}e'^2\sin 2l'\right) \\
- (i+1)\left(2e''\sin l'' + \frac{5}{4}e''^2\sin 2l''\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mu^2 = {} & 8e^2 - 8e^2\cos 2l + 2(i-1)^2e'^2 - 2(i-1)^2e'^2\cos 2l' + 2(i+1)^2e''^2 \\
& - 2(i+1)^2e''^2\cos 2l'' - 8(i-1)ee'[\cos(l+l') - \cos(l-l')] \\
& + 8(i+1)ee''[\cos(l+l'') - \cos(l-l'')] \\
& + 4(i^2-1)e'e''[\cos(l'+l'') - \cos(l'-l'')],
\end{aligned}
$$

et

$$\begin{aligned}
\mu\rho &= -2e^2\sin 2l - (i-1)ee'[\sin(l'+l)+\sin(l'-l)] \\
&\quad + (i+1)ee''[\sin(l''+l)+\sin(l''-l)], \\
\mu\rho' &= -2ee'[\sin(l+l')+\sin(l-l')] - (i-1)e'^2\sin 2l' \\
&\quad + (i+1)e'e''[\sin(l''+l')+\sin(l''-l')], \\
\mu\rho'' &= -2ee''[\sin(l+l'')+\sin(l-l'')] \\
&\quad - (i-1)e'e''[\sin(l'+l'')+\sin(l'-l'')] + (i+1)e''^2\sin 2l''.
\end{aligned}$$

Il ne faut pas oublier, pour opérer les réductions de termes semblables, que $g^{(-i)}$ est différent de $g^{(i)}$.

Par suite des relations (5), $i\varphi+\psi$ devient $i\delta+\delta_1$. On n'a conservé dans le coefficient de $\cos(i\delta+\delta_1)$ que les termes principaux.

Ici m, m_1, m_2 doivent être remplacés par $g^{(i)}$, $g_1^{(i)}$, $g_2^{(i)}$, dans l'application de la formule (7). Il vient

$$(\mathrm{C})\qquad \frac{3}{8}\frac{r^2}{r'^3}\sum g^{(i)}\cos(i\varphi+\psi)$$

$$\begin{aligned}
= \frac{3}{8}\frac{a^2}{a'^3}\sum\Big\{ &\quad \cos(i\delta+\delta_1)\ (g^{(i)}) + e\cos(i\delta+\delta_1+l)\,(g^{(i)}) \\
&+e\ \cos(i\delta+\delta_1-l)\ (-3g^{(i)}) \\
&+e'\ \cos(i\delta+\delta_1+l')\left[\left(i+\frac{1}{2}\right)g^{(i)}+\frac{1}{2}g_1^{(i)}\right] \\
&+e'\ \cos(i\delta+\delta_1-l')\left[-\left(i-\frac{5}{2}\right)g^{(i)}+\frac{1}{2}g_1^{(i)}\right] \\
&+e''\ \cos(i\delta+\delta_1+l'')\left[-(i+1)\ g^{(i)}-\frac{1}{2}g_1^{(i)}\right] \\
&+e''\ \cos(i\delta+\delta_1-l'')\left[(i+1)\ g^{(i)}-\frac{1}{2}g_1^{(i)}\right] \\
&+e^2\ \cos(i\delta+\delta_1+2l)\ (g^{(i)}) + e^2\cos(i\delta+\delta_1-2l)\left(\frac{5}{2}g^{(i)}\right) \\
&+e'^2\ \cos(i\delta+\delta_1+2l')\left(\frac{4i^2+9i+5}{8}g^{(i)}+\frac{2i+3}{4}g_1^{(i)}+\frac{1}{8}g_2^{(i)}\right) \\
&+e'^2\ \cos(i\delta+\delta_1-2l')\left(\frac{4i^2-25i+39}{8}g^{(i)}+\frac{7-2i}{4}g_1^{(i)}+\frac{1}{8}g_2^{(i)}\right) \\
&+e''^2\ \cos(i\delta+\delta_1+2l'')\left(\frac{4i^2+3i-1}{8}g^{(i)}+\frac{2i+1}{4}g_1^{(i)}+\frac{1}{8}g_2^{(i)}\right) \\
&+e''^2\ \cos(i\delta+\delta_1-2l'')\left(\frac{4i^2+13i+9}{8}g^{(i)}-\frac{2i+3}{4}g_1^{(i)}+\frac{1}{8}g_2^{(i)}\right)
\end{aligned}$$

(C) (suite)
$$
\begin{aligned}
\frac{3}{8}\frac{r^2}{r'^3}\sum g^{(i)}\cos(i\varphi+\psi)
= \frac{3}{8}\frac{a^2}{a'^3}\sum\Big\{ & + e\,e'\cos(i\delta+\delta_1+l+l')\left(\frac{2i+1}{2}\,g^{(i)}+\frac{1}{2}g_1^{(i)}\right)\\
& + e\,e'\cos(i\delta+\delta_1-l-l')\left(\frac{6i-15}{2}\,g^{(i)}-\frac{3}{2}g_1^{(i)}\right)\\
& + e\,e'\cos(i\delta+\delta_1+l-l')\left(\frac{5-2i}{2}\,g^{(i)}+\frac{1}{2}g_1^{(i)}\right)\\
& + e\,e'\cos(i\delta+\delta_1-l+l')\left(-\frac{6i+3}{2}\,g^{(i)}-\frac{3}{2}g_1^{(i)}\right)\\
& + e\,e''\cos(i\delta+\delta_1+l+l'')\left[-(i+1)\,g^{(i)}-\frac{1}{2}g_1^{(i)}\right]\\
& + e\,e''\cos(i\delta+\delta_1-l-l'')\left[-3(i+1)\,g^{(i)}+\frac{3}{2}g_1^{(i)}\right]\\
& + c\,e''\cos(i\delta+\delta_1+l-l'')\left[(i+1)\,g^{(i)}-\frac{1}{2}g_1^{(i)}\right]\\
& + e\,e''\cos(i\delta+\delta_1-l+l'')\left[3(i+1)\,g^{(i)}+\frac{3}{2}g_1^{(i)}\right]\\
& + e'e''\cos(i\delta+\delta_1+l'+l'')\left[-\frac{2i^2+3i+1}{2}\,g^{(i)}-(i+1)\,g_1^{(i)}-\frac{1}{4}g_2^{(i)}\right]\\
& + e'e''\cos(i\delta+\delta_1-l'-l'')\left[\frac{-2i^2+3i+5}{2}\,g^{(i)}+(i-1)\,g_1^{(i)}-\frac{1}{4}g_2^{(i)}\right]\\
& + e'e''\cos(i\delta+\delta_1+l'-l'')\left[\frac{2i^2+3i+1}{2}\,g^{(i)}-\frac{1}{4}g_2^{(i)}\right]\\
& + e'e''\cos(i\delta+\delta_1-l'+l'')\left[\frac{2i^2-3i-5}{2}\,g^{(i)}-2g_1^{(i)}-\frac{1}{4}g_2^{(i)}\right)\Big\}.
\end{aligned}
$$

7. Il nous reste à trouver les termes parallactiques, qui sont donnés par la partie de la fonction perturbatrice que nous avons appelée R_2, formules (1).

On a

$$\frac{R_2}{r^3}=-\frac{3}{2}\frac{\sigma}{D^5}+\frac{5}{2}\frac{\sigma^3}{D^7}.$$

En posant

$$Q=\sigma^3-\frac{3}{4}D^2\sigma,$$

on peut écrire

$$\frac{R_2}{r^3}=\frac{3}{8}\sigma D^{-5}+\frac{5}{2}QD^{-7}.$$

Rappelons que nous avons posé

$$\sigma=r''\cos H'-r'\cos H'',\qquad D^2=r'^2+r''^2-2r'r''\cos H.$$

On peut faire ici

$$r = a, \qquad r' = a', \qquad r'' = a'', \qquad \cos \mathrm{H} = \cos(\lambda' - \lambda''), \qquad \ldots,$$

en négligeant les excentricités et les inclinaisons, les termes parallactiques ayant en facteur $\frac{a}{a'}$, considéré comme une quantité du second ordre.

Alors

$$\sigma = a'' \cos(\lambda'' - \lambda) - a' \cos(\lambda - \lambda'), \qquad \mathrm{D}^2 = a'^2 + a''^2 - 2a'a'' \cos(\lambda' - \lambda'');$$

par suite

$$\begin{aligned} \sigma^3 = {} & a''^3 \cos^3(\lambda'' - \lambda) - a'^3 \cos^3(\lambda - \lambda') \\ & - 3a'a''^2 \cos^2(\lambda'' - \lambda) \cos(\lambda - \lambda') + 3a'^2 a'' \cos(\lambda'' - \lambda) \cos^2(\lambda - \lambda'), \end{aligned}$$

et, en tenant compte des relations trigonométriques

$$\cos^3 \alpha = \frac{3}{4} \cos \alpha + \frac{1}{4} \cos 3\alpha,$$

$$\cos^2 \alpha \cos \alpha' = \frac{1}{2} \cos \alpha' + \frac{1}{4} \cos(2\alpha + \alpha') + \frac{1}{4} \cos(2\alpha - \alpha'),$$

il vient

$$\begin{aligned} \sigma^3 = {} & \frac{3}{4} a''^3 \cos(\lambda'' - \lambda) + \frac{1}{4} a''^3 \cos 3(\lambda'' - \lambda) - \frac{3}{4} a'^3 \cos(\lambda - \lambda') - \frac{1}{4} a'^3 \cos 3(\lambda - \lambda') \\ & - \frac{3}{2} a' a''^2 \cos(\lambda - \lambda') - \frac{3}{4} a' a''^2 \cos(2\lambda'' - \lambda - \lambda') - \frac{3}{4} a' a''^2 \cos(2\lambda'' - 3\lambda + \lambda') \\ & + \frac{3}{2} a'^2 a'' \cos(\lambda'' - \lambda) + \frac{3}{4} a'^2 a'' \cos(\lambda - 2\lambda' + \lambda'') + \frac{3}{4} a'^2 a'' \cos(3\lambda - 2\lambda' - \lambda''). \end{aligned}$$

On trouve pareillement

$$\begin{aligned} \mathrm{D}^2 \sigma = {} & (a'^2 + a''^2) a'' \cos(\lambda'' - \lambda) - (a'^2 + a''^2) a' \cos(\lambda - \lambda') - a' a''^2 \cos(\lambda' - \lambda) \\ & - a' a''^2 \cos(2\lambda'' - \lambda - \lambda') + a'^2 a'' \cos(\lambda - \lambda'') + a'^2 a'' \cos(\lambda + \lambda'' - 2\lambda'); \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathrm{Q} = {} & -\frac{1}{4} a'^3 \cos 3(\lambda - \lambda') + \frac{1}{4} a''^3 \cos 3(\lambda - \lambda'') \\ & - \frac{3}{4} a' a''^2 \cos(2\lambda'' - 3\lambda + \lambda') + \frac{3}{4} a'^2 a'' \cos(3\lambda - 2\lambda' - \lambda''). \end{aligned}$$

Les excentricités étant négligées, on peut remplacer λ, λ', λ'' par L, L', L'', ou plutôt par les expressions (5) de ces angles, déjà introduites dans l'autre partie de la fonction perturbatrice.

On obtient finalement pour les termes parallactiques

$$\text{(D)}\quad R_2 = \frac{a^3}{a'^4}\Bigg\{ \sum \cos\left(i\delta + \frac{\delta_1 - \delta}{2}\right)\cdot\frac{3}{16}\left(-e^{(i)} + \beta\, e^{(i-1)}\right)$$
$$+\sum \cos\left(i\delta + 3\,\frac{\delta_1 - \delta}{2}\right)\cdot\frac{5}{16}\left(-f^{(i)} + 3\beta f^{(i-1)} - 3\beta^2 f^{(i-2)} + \beta^3 f^{(i-3)}\right)\Bigg\}.$$

L'ensemble des termes des expressions (A), (B), (C), (D) constitue le développement, jusqu'au second ordre, de la fonction perturbatrice relative à l'action directe de la planète sur la Lune.

II. — Fonction perturbatrice relative a l'action indirecte.

8. Soit R' la fonction perturbatrice du mouvement de la Lune provenant du Soleil. Elle dépend des coordonnées héliocentriques de la Terre, x', y', z'. Les valeurs de x', y', z' qui entrent dans l'expression de R' sont celles qui résultent seulement des actions mutuelles du Soleil, de la Terre et de la Lune. C'est avec ces valeurs qu'est établie, dans une première approximation, la théorie de la Lune.

Mais, si l'on considère l'action d'une planète sur le système de ces trois corps, il peut en résulter pour x', y', z' des accroissements $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ très sensibles dans bien des cas et dont il faut tenir compte pour la théorie de la Lune.

On aura donc à adjoindre à la fonction perturbatrice R, étudiée dans le paragraphe précédent, la quantité

$$\delta R' = \frac{\partial R'}{\partial x'}\delta x' + \frac{\partial R'}{\partial y'}\delta y' + \frac{\partial R'}{\partial z'}\delta z'.$$

C'est $\delta R'$ qui est la source de l'action indirecte de la planète sur la Lune. On dit encore que c'est l'action de la planète réfléchie par le Soleil

La fonction perturbatrice R, étudiée dans le paragraphe précédent, contient aussi les coordonnées x', y', z'. Par suite, l'action indirecte de la planète a pour effet un accroissement de R,

$$\delta R = \frac{\partial R}{\partial x'}\delta x' + \frac{\partial R}{\partial y'}\delta y' + \frac{\partial R}{\partial z'}\delta z'.$$

Il semble donc que l'on doive tenir compte aussi de cette variation de R. Mais R a en facteur la masse m'' de la planète; par suite, un terme provenant de δR sera, par rapport au terme correspondant de $\delta R'$, de l'ordre de m''. Et, dans le cas spécial des planètes que nous considérons, cette masse est très faible, car nous ne recherchons que des masses au plus égales à celle de Mercure.

9. Revenons à R′. Soit F la distance angulaire du Soleil et de la Lune, vus de la Terre. Négligeons la masse de la Lune devant celle de la Terre et celle de la Terre devant celle du Soleil. Nous avons alors, d'après M. Andoyer, *Théorie de la Lune* [*Scientia* (*Phys. math.*), n° 17, p. 10],

$$R' = fm' \left[\frac{r^2}{r'^3} \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos^2 F \right) + \frac{r^3}{r'^4} \left(-\frac{3}{2}\cos F + \frac{5}{2}\cos^3 F \right) \right].$$

Soient v et s la longitude vraie et la latitude de la Lune rapportée à la Terre, v' et s' les coordonnées analogues de la Terre rapportée au Soleil. Celles du Soleil rapporté à la Terre étant alors $\pi + v'$ et $-s'$, on a

$$\cos F = -\sin s \sin s' - \cos s \cos s' \cos(v - v').$$

Comme s et s' peuvent être prises pour de petites quantités du premier ordre, nous pouvons écrire, en négligeant le quatrième ordre,

$$\cos F = -ss' - \left(1 - \frac{s^2}{2}\right)\left(1 - \frac{s'^2}{2}\right)\cos(v - v');$$

d'où, avec la même approximation,

$$\begin{aligned} \cos^2 F = {} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2(v - v') \\ & - \frac{s^2}{2} - \frac{s'^2}{2} - \frac{s^2}{2}\cos 2(v - v') - \frac{s'^2}{2}\cos 2(v - v') + 2ss'\cos(v - v'). \end{aligned}$$

Dans $\cos F$ et $\cos^3 F$, on peut négliger les termes du second ordre en s et s', car $\cos F$ et $\cos^3 F$ seront multipliés dans R′ par un facteur qui est lui-même du second ordre.

Nous aurons alors

$$\cos F = -\cos(v - v'), \qquad \cos^3 F = -\frac{3}{4}\cos(v - v') - \frac{1}{4}\cos 3(v - v').$$

Par suite

$$\begin{aligned} (9) \quad \frac{1}{fm'} R' = {} & \frac{r^2}{r'^3} \left[\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos 2(v - v') - \frac{3}{4}s^2 - \frac{3}{4}s'^2 - \frac{3}{4}s^2 \cos 2(v - v') \right. \\ & \left. \qquad - \frac{3}{4}s'^2 \cos 2(v - v') + 3ss'\cos(v - v') \right] \\ & + \frac{r^3}{r'^4} \left[-\frac{3}{8}\cos(v - v') - \frac{5}{8}\cos 3(v - v') \right]. \end{aligned}$$

La fonction perturbatrice du mouvement de la Lune relative à l'action indirecte de la planète sera donc, avec ces nouvelles variables,

$$\delta R' = a' \frac{\partial R'}{\partial r'} \frac{\delta r'}{a'} + \frac{\partial R'}{\partial v'} \delta v' + \frac{\partial R'}{\partial s'} \delta s'.$$

Comme la latitude s' de la Terre à un instant quelconque est une quantité très petite, nous pourrons faire $s' = 0$, mais après la différentiation seulement.

On a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{fm'} a' \frac{\partial R'}{\partial r'} = {} & \frac{a' r^2}{r'^4}\left[-\frac{3}{4} - \frac{9}{4}\cos 2(v - v') + \frac{9}{4}s^2 + \frac{9}{4}s^2 \cos 2(v - v')\right] \\
& + \frac{a' r^3}{r'^5}\left[\frac{3}{2}\cos(v - v') + \frac{5}{2}\cos 3(v - v')\right], \\
\frac{1}{fm'} \frac{\partial R'}{\partial v'} = {} & \frac{r^2}{r'^3}\left[\frac{3}{2}\sin 2(v - v') - \frac{3}{2}s^2 \sin 2(v - v')\right] \\
& + \frac{r^3}{r'^4}\left[-\frac{3}{8}\sin(v - v') - \frac{15}{8}\sin 3(v - v')\right], \\
\frac{1}{fm'} \frac{\partial R'}{\partial s'} = {} & \frac{3 r^2}{r'^3} s \cos(v - v'),
\end{aligned}$$

v et v' sont les longitudes vraies. Proposons-nous d'introduire dans les expressions précédentes les longitudes dans l'orbite λ et λ', ainsi que nous l'avons fait pour R. Il faut tenir compte par conséquent de la réduction à l'écliptique. On a

$$v = \lambda - \gamma^2 \sin 2\theta, \qquad \gamma = \sin \frac{i}{2},$$

$$v' = \lambda' - \gamma'^2 \sin 2\theta', \qquad \gamma' = \sin \frac{i'}{2},$$

en désignant par θ et θ' les arguments de la latitude.

Nous n'avons pas besoin d'appliquer cette correction à $\sin(v - v')$, $\sin 3(v - v')$, $\cos(v - v')$ et $\cos 3(v - v')$, car elle est du second ordre et les facteurs dans lesquels entrent ces quantités sont au moins du premier ordre. Il suffit d'appliquer la réduction à l'écliptique à l'argument $2v - 2v'$:

$$2v - 2v' = 2(\lambda - \lambda') - 2\gamma^2 \sin 2\theta + 2\gamma'^2 \sin 2\theta'.$$

Remarquons en outre que l'on peut faire $\gamma' = 0$.

On a alors

$$\begin{aligned}
\frac{1}{fm'} a' \frac{\partial R'}{\partial r'} = {} & \frac{a' r^2}{r'^4}\Big[-\frac{3}{4} - \frac{9}{4}\cos 2(\lambda - \lambda') + \frac{9}{4}s^2 + \frac{9}{4}s^2 \cos 2(\lambda - \lambda') \\
& \qquad + \frac{9}{4}\gamma^2 \cos 2(\lambda - \lambda' + \theta) - \frac{9}{4}\gamma^2 \cos 2(\lambda - \lambda' - \theta)\Big] \\
& + \frac{a' r^3}{r'^5}\left[\frac{3}{2}\cos(\lambda - \lambda') + \frac{5}{2}\cos 3(\lambda - \lambda')\right].
\end{aligned}$$

Et en remplaçant s par sa valeur approchée $2\gamma\sin\theta$,

$$\frac{1}{fm'}a'\frac{\partial R'}{\partial r'} = \frac{a'r^2}{r'^4}\left[-\frac{3}{4}-\frac{9}{4}\cos 2(\lambda-\lambda')\right]+\frac{a^3}{a'^4}\left[\frac{3}{2}\cos(\lambda-\lambda')+\frac{5}{2}\cos 3(\lambda-\lambda')\right]$$
$$+\gamma^2\frac{a^2}{a'^3}\left[\frac{9}{2}-\frac{9}{2}\cos 2\theta+\frac{9}{2}\cos 2(\lambda-\lambda')-\frac{9}{2}\cos 2(\lambda-\lambda'-\theta)\right].$$

Pareillement

$$(\mathrm{E})\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{1}{fm'}\frac{\partial R'}{\partial v'}=\frac{r^2}{r'^3}\left[\frac{3}{2}\sin 2(\lambda-\lambda')\right]+\frac{a^3}{a'^4}\left[-\frac{3}{8}\sin(\lambda-\lambda')-\frac{15}{8}\sin 3(\lambda-\lambda')\right]\\&\qquad\qquad+\gamma^2\frac{a^2}{a'^3}[-3\sin 2(\lambda-\lambda')+3\sin 2(\lambda-\lambda'-\theta)],\\&\frac{1}{fm'}\frac{\partial R'}{\partial s'}=3\gamma\frac{a^2}{a'^3}[\sin(\lambda-\lambda'+\theta)-\sin(\lambda-\lambda'-\theta)].\end{aligned}\right.$$

10. Il reste à développer par rapport aux excentricités les quantités qui n'ont pas en facteur γ ou $\frac{a^3}{a'^4}$. Nous allons appliquer la formule (7) que nous avons établie au n° 4.

D'abord, dans $a'\frac{\partial R'}{\partial r'}$, nous avons

$$\mathrm{F}=-\frac{3}{4}\frac{a'r^2}{r'^4}-\frac{9}{4}\frac{a'r^2}{r'^4}\cos 2(\lambda-\lambda')=\frac{1}{fm'}\left(a'\frac{\partial R'}{\partial r'}\right),$$

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial r}=-\frac{3}{2}\frac{a'r}{r'^4}-\frac{9}{2}\frac{a'r}{r'^4}\cos 2(\lambda-\lambda'),\qquad \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial r'}=3\frac{a'r^2}{r'^5}+9\frac{a'r^2}{r'^5}\cos 2(\lambda-\lambda'),$$

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial(\lambda-\lambda')}=\frac{9}{2}\frac{a'r^2}{r'^4}\sin 2(\lambda-\lambda'),\qquad \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial r^2}=-\frac{3}{2}\frac{a'}{r'^4}-\frac{9}{2}\frac{a'}{r'^4}\cos 2(\lambda-\lambda'),$$

$$\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial r'^2}=-15\frac{a'r^2}{r'^6}-45\frac{a'r^2}{r'^6}\cos 2(\lambda-\lambda'),\qquad \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial r\,\partial r'}=6\frac{a'r}{r'^5}+18\frac{a'r}{r'^5}\cos 2(\lambda-\lambda'),$$

$$\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial(\lambda-\lambda')^2}=9\frac{a'r^2}{r'^4}\cos 2(\lambda-\lambda'),\qquad \frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial r\,\partial(\lambda-\lambda')}=9\frac{a'r}{r'^4}\sin 2(\lambda-\lambda'),$$

$$\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial r'\,\partial(\lambda-\lambda')}=-18\frac{a'r^2}{r'^5}\sin 2(\lambda-\lambda').$$

Soient

$$r=a+a\rho,\qquad r'=a'+a'\rho',\qquad \lambda-\lambda'=\mathrm{L}-\mathrm{L}'+\mu.$$

Nous avons donné au n° 5 les valeurs (8) de ces accroissements et calculé leurs carrés et leurs produits deux à deux. En les appliquant au cas actuel, on aura l'expression cherchée.

On a d'abord, en désignant par $\left(a'\frac{\partial R'}{\partial r'}\right)$ la partie de $a'\frac{\partial R'}{\partial r'}$ que nous avons à développer, ainsi que nous l'avons indiqué plus haut,

$$\frac{1}{fm'}\left(a'\frac{\partial R'}{\partial r'}\right)=\frac{a^2}{a'^3}\Big[-\frac{3}{4}-\frac{9}{4}\cos 2(L-L')-\frac{3}{2}\rho-\frac{9}{2}\rho\cos 2(L-L')$$
$$+3\rho'+9\rho'\cos 2(L-L')+\frac{9}{2}\mu\sin 2(L-L')$$
$$-\frac{3}{4}\rho^2-\frac{9}{4}\rho^2\cos 2(L-L')-\frac{15}{2}\rho'^2-\frac{45}{2}\rho'^2\cos 2(L-L')$$
$$+\frac{9}{2}\mu^2\cos 2(L-L')+6\rho\rho'+18\rho\rho'\cos 2(L-L')$$
$$+9\mu\rho\sin 2(L-L')-18\mu\rho'\sin 2(L-L')\Big].$$

Puis, en remplaçant $2(L-L')$ par $\delta_1-\delta$,

$$(\mathrm{F})\quad \frac{1}{fm'}\left(a'\frac{\partial R'}{\partial r'}\right)$$
$$=\frac{a^2}{a'^3}\Big[-\frac{3}{4}-\frac{9}{4}\cos(\delta_1-\delta)+\frac{3}{2}e\cos l-3e'\cos l'-\frac{9}{4}e\cos(\delta_1-\delta+l)$$
$$+\frac{27}{4}e\cos(\delta_1-\delta-l)-9e'\cos(\delta_1-\delta-l')-\frac{9}{8}e^2-\frac{9}{4}e'^2$$
$$+\frac{3}{8}e^2\cos 2l-\frac{21}{4}e'^2\cos 2l'+\frac{45}{8}e^2\cos(\delta_1-\delta)$$
$$-\frac{9}{4}e^2\cos(\delta_1-\delta+2l)-\frac{45}{8}e^2\cos(\delta_1-\delta-2l)+\frac{9}{4}e'^2\cos(\delta_1-\delta)$$
$$-\frac{9}{16}e'^2\cos(\delta_1-\delta+2l')-\frac{387}{16}e'^2\cos(\delta_1-\delta-2l')+3ee'\cos(l+l')$$
$$+3ee'\cos(l-l')+27ee'\cos(\delta_1-\delta-l-l')-9ee'\cos(\delta_1-\delta+l-l')\Big],$$

en ne conservant que les termes principaux de chaque argument.

11. Il faut développer maintenant la première partie de $\frac{\partial R'}{\partial v'}$ par rapport aux excentricités. Ici

$$F=\frac{3}{2}\frac{r^2}{r'^3}\sin 2(\lambda-\lambda'),$$

$$\frac{\partial F}{\partial r}=3\frac{r}{r'^3}\sin 2(\lambda-\lambda'),\qquad \frac{\partial F}{\partial r'}=-\frac{9}{2}\frac{r^2}{r'^4}\sin 2(\lambda-\lambda'),$$

$$\frac{\partial F}{\partial(\lambda-\lambda')}=3\frac{r^2}{r'^3}\cos 2(\lambda-\lambda'),$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}=3\frac{1}{r'^3}\sin 2(\lambda-\lambda'),\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial r'^2}=18\frac{r^2}{r'^5}\sin 2(\lambda-\lambda'),$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial(\lambda-\lambda')^2}=-6\frac{r^2}{r'^3}\sin 2(\lambda-\lambda'),\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial r\,\partial r'}=-9\frac{r}{r'^4}\sin 2(\lambda-\lambda'),$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r\,\partial(\lambda-\lambda')}=6\frac{r}{r'^3}\cos 2(\lambda-\lambda'),\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial r'\,\partial(\lambda-\lambda')}=-9\frac{r^2}{r'^4}\cos 2(\lambda-\lambda').$$

Par suite, pour les accroissements ρ, ρ', μ définis au n° **10**,

$$F = \frac{a^2}{a'^3}\Big[\frac{3}{2}\sin(\delta_1 - \delta) + 3\rho\sin(\delta_1 - \delta) - \frac{9}{2}\rho'\sin(\delta_1 - \delta) + 3\mu\cos(\delta_1 - \delta)$$
$$+ \frac{3}{2}\rho^2\sin(\delta_1 - \delta) + 9\rho'^2\sin(\delta_1 - \delta)$$
$$- 3\mu^2\sin(\delta_1 - \delta) - 9\rho\rho'\sin(\delta_1 - \delta) + 6\rho\mu\cos(\delta_1 - \delta) - 9\rho'\mu\cos(\delta_1 - \delta)\Big].$$

Et finalement, avec les valeurs connues des accroissements ρ, ρ', μ,

$$(\mathrm{G})\quad \frac{3}{2}\frac{r^2}{r'^3}\sin 2(\lambda - \lambda')$$
$$= \frac{a^2}{a'^3}\Big[\frac{3}{2}\sin(\delta_1 - \delta) + \frac{3}{2}e\sin(\delta_1 - \delta + l) - \frac{9}{2}e\sin(\delta_1 - \delta - l)$$
$$- \frac{3}{4}e'\sin(\delta_1 - \delta + l') + \frac{21}{4}e'\sin(\delta_1 - \delta - l')$$
$$+ \frac{3}{2}e^2\sin(\delta_1 - \delta + 2l) + \frac{15}{4}e^2\sin(\delta_1 - \delta - 2l)$$
$$+ \frac{51}{4}e'^2\sin(\delta_1 - \delta - 2l') - \frac{3}{4}ee'\sin(\delta_1 - \delta + l + l')$$
$$- \frac{63}{4}ee'\sin(\delta_1 - \delta - l - l') + \frac{21}{4}ee'\sin(\delta_1 - \delta + l - l')$$
$$+ \frac{9}{4}ee'\sin(\delta_1 - \delta - l + l') - \frac{15}{4}e^2\sin(\delta_1 - \delta) - \frac{15}{4}e'^2\sin(\delta_1 - \delta)\Big].$$

12. Pour calculer la fonction perturbatrice relative à l'action indirecte, nous avons besoin des perturbations produites par la planète sur les coordonnées de la Terre, r', v', s'. Continuons à désigner par r'', v'', s'' les coordonnées de la planète. Ces six coordonnées sont rapportées au Soleil; ce sont les coordonnées polaires des deux astres.

Les variations $\delta r'$, $\delta v'$, $\delta s'$ sont données jusqu'aux termes du premier ordre par Tisserand dans son *Traité de Mécanique céleste,* tome I. Comme l'avait fait Le Verrier, il les a déduites des variations des éléments. On peut les déterminer en partant des équations différentielles du mouvement, suivant la méthode indiquée par Laplace dans la *Mécanique céleste* (t. I, Livre II, Chap. VI). Nous pousserons les développements jusqu'au second ordre, comme précédemment.

Nous partirons des équations de Lagrange.

Désignons par $fm''U$ la fonction perturbatrice correspondant à l'action de la planète m'' sur la Terre. Nous prendrons pour plan fondamental des coordonnées le plan de l'écliptique à l'origine du temps; de telle sorte que la latitude s' sera une quantité de l'ordre de la masse perturbatrice.

Soit H l'angle des rayons vecteurs r' et r''. On a

$$\cos H = \sin s' \sin s'' + \cos s' \cos s'' \cos(v' - v'').$$

Alors

$$\text{(10)} \qquad U = (r'^2 + r''^2 - 2r'r'' \cos H)^{-\frac{1}{2}} - \frac{r'}{r''^2} \cos H.$$

Pour l'application des équations de Lagrange, nous avons besoin de $\frac{\partial U}{\partial r'}, \frac{\partial U}{\partial v'}, \frac{\partial U}{\partial s'}$.

On a

$$\text{(11)} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \cos H}{\partial s'} &= \cos s' \sin s'' - \sin s' \cos s'' \cos(v' - v''), \\ \frac{\partial U}{\partial s'} &= \left[(r'^2 + r''^2 - 2r'r'' \cos H)^{-\frac{3}{2}} r'r'' - \frac{r'}{r''^2} \right] \left[\cos s' \sin s'' - \sin s' \cos s'' \cos(v' - v'') \right]. \end{aligned} \right.$$

Il nous suffit de développer U en négligeant le quatrième ordre par rapport aux inclinaisons et $\frac{\partial U}{\partial s'}$ en négligeant le troisième ordre.

On a rigoureusement, λ' désignant la longitude de la Terre dans son orbite, i' l'inclinaison, avec $\sin \frac{i'}{2} = \gamma'$, et h' la longitude du nœud,

$$\sin s' = \sin i' \sin(\lambda' - h'), \qquad \operatorname{tang}(v' - h') = \cos i' \operatorname{tang}(\lambda' - h').$$

Et en négligeant les termes du troisième ordre en γ',

$$\sin s' = 2\gamma' \sin(\lambda' - h'), \qquad \cos s' = 1 - \gamma'^2 + \gamma'^2 \cos 2(\lambda' - h').$$

Nous appliquerons à v', au même degré d'approximation, la réduction à l'écliptique

$$v' = \lambda' - \gamma'^2 \sin 2(\lambda' - h').$$

On a des relations analogues avec les lettres à deux accents.

Nous avons déjà calculé $\cos H$, au n° 2, en fonction de γ' et γ''. En portant sa valeur (2) dans U et $\frac{\partial U}{\partial s'}$ et tenant compte des expressions ci-dessus de $\sin s'$, $\cos s'$, ..., on obtient

$$\begin{aligned} U = {} & [r'^2 + r''^2 - 2r'r'' \cos(\lambda' - \lambda'')]^{-\frac{1}{2}} - \frac{r'}{r''^2} \cos(\lambda' - \lambda'') \\ & + \left\{ r'r'' [r'^2 + r''^2 - 2r'r'' \cos(\lambda' - \lambda'')]^{-\frac{3}{2}} - \frac{r'}{r''^2} \right\} \\ & \times \{ 2\gamma'\gamma'' [\cos(\lambda' - \lambda'' - h' + h'') - \cos(\lambda' + \lambda'' - h' - h'')] \\ & \quad + \gamma'^2 [\cos(\lambda' + \lambda'' - 2h') - \cos(\lambda' - \lambda'')] \\ & \quad + \gamma''^2 [\cos(\lambda' + \lambda'' - 2h'') - \cos(\lambda' - \lambda'')] \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial s'} = {} & \left\{ r'r'' [r'^2 + r''^2 - 2r'r'' \cos(\lambda' - \lambda'')]^{-\frac{3}{2}} - \frac{r'}{r''^2} \right\} \\ & \times [2\gamma'' \sin(\lambda'' - h'') - \gamma' \sin(\lambda'' - h') - \gamma' \sin(2\lambda' - \lambda'' - h')]. \end{aligned}$$

Désignons par θ et θ'' les arguments de la latitude et remplaçons $\lambda' - \lambda''$ par φ. Posons en outre

$$(r'^2 + r''^2 - 2r'r''\cos\varphi)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sum A^{(i)}\cos i\varphi,$$

$$r'r''(r'^2 + r''^2 - 2r'r''\cos\varphi)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}\sum B^{(i)}\cos i\varphi.$$

Pour avoir

$$(r'^2 + r''^2 - 2r'r''\cos\varphi)^{-\frac{1}{2}} - \frac{r'}{r''^2}\cos\varphi,$$

il suffit de diminuer $A^{(1)}$ et $A^{(-1)}$ de $\frac{r'}{r''^2}$.

Pour avoir le développement analogue de

$$r'r''(r'^2 + r''^2 - 2r'r''\cos\varphi)^{-\frac{3}{2}} - \frac{r'}{r''^2},$$

on devra de même diminuer, dans $\sum B^{(i)}\cos i\varphi$, la quantité $B^{(0)}$ de $2\frac{r'}{r''^2}$.

Sous la réserve de ces corrections, on aura

$$\begin{aligned} U = {} & \frac{1}{2}\sum A^{(i)}\cos i\varphi \\ & + \sum B^{(i)}\cos i\varphi\Big[\gamma'\gamma''\cos(\theta' - \theta'') - \gamma'\gamma''\cos(\theta' + \theta'') \\ & \qquad + \frac{1}{2}\gamma'^2\cos(\varphi - 2\theta') - \frac{1}{2}\gamma'^2\cos\varphi + \frac{1}{2}\gamma''^2\cos(\varphi + 2\theta'') - \frac{1}{2}\gamma''^2\cos\varphi\Big] \end{aligned}$$

ou, en remplaçant les produits de cosinus par des sommes et en ramenant tous les arguments à la forme $i\varphi + \alpha$, α étant indépendant de φ,

$$\begin{aligned} U = {} & \frac{1}{2}\sum A^{(i)}\cos i\varphi + \gamma'\gamma''\sum B^{(i)}\,[\cos(i\varphi + \theta' - \theta'') - \cos i\varphi + \theta' + \theta'')] \\ & + \gamma'^2\sum \frac{1}{2}B^{(i+1)}[\cos(i\varphi + 2\theta') - \cos i\varphi] \\ & + \gamma''^2\sum \frac{1}{2}B^{(i-1)}[\cos(i\varphi + 2\theta'') - \cos i\varphi]. \end{aligned}$$

De même on trouve

$$\frac{\partial U}{\partial s'} = \gamma''\sum B^{(i)}\sin(i\varphi + \theta'') - \gamma'\sum\frac{1}{2}(B^{(i-1)} + B^{(i+1)})\sin(i\varphi + \theta').$$

13. Cherchons maintenant le développement de $\frac{\partial U}{\partial v'}$. Pour cela, supposons que l'on remplace dans U les variables v' et s' en fonction de λ' et θ'. Or v' et s' sont donnés par les relations suivantes, où i' doit être considéré comme constant :

$$\sin s' = \sin i'\sin\theta', \qquad \operatorname{tang}(v' - \lambda' + \theta') = \cos i'\operatorname{tang}\theta'.$$

On voit que θ' est une fonction de s' seul, que λ' est de la forme

$$\lambda' = v' + \psi(s'),$$

ψ désignant une fonction de s' seul. Donc

$$\frac{\partial\theta'}{\partial v'} = 0, \qquad \frac{\partial\lambda'}{\partial v'} = 1, \qquad \frac{\partial U}{\partial v'} = \frac{\partial U}{\partial\lambda'}.$$

Il en résulte l'expression cherchée de $\frac{\partial U}{\partial v'}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial v'} = -\frac{1}{2}\sum iA^{(i)}\sin i\varphi + \gamma'\gamma'' & \sum iB^{(i)} \quad [\sin(i\varphi + \theta' + \theta'') - \sin(i\varphi + \theta' - \theta'')] \\ & + \gamma'^2 \ \frac{1}{2}\sum iB^{(i+1)}[\sin i\varphi - \sin(i\varphi + 2\theta')] \\ & + \gamma''^2 \ \frac{1}{2}\sum iB^{(i-1)}[\sin i\varphi - \sin(i\varphi + 2\theta'')].\end{aligned}$$

Il resterait à calculer $\frac{\partial U}{\partial r'}$; mais nous verrons plus loin que la façon dont cette dérivée s'introduit dans les équations ne nécessite pas le calcul analogue à celui que nous venons de faire pour $\frac{\partial U}{\partial v'}$ et $\frac{\partial U}{\partial s'}$.

14. Nous allons établir les équations différentielles du mouvement en vue de la détermination des perturbations $\delta r'$, $\delta v'$, $\delta s'$.

Nous emploierons les équations de Lagrange

$$\frac{d\left(\frac{\partial T}{\partial q'_i}\right)}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i,$$

où q_i désigne l'une des variables définissant la position du mobile à l'instant t, q'_i la dérivée de q_i par rapport à t et Q_i la composante de la force dans le sens de la coordonnée q_i.

Ici la fonction des forces W a pour expression

$$W = \frac{f\mu'}{r'} + fm''U, \qquad \mu' = 1 + m', \qquad n'^2 a'^3 = f\mu',$$

la masse du Soleil étant prise pour unité.

On a pour la demi-force vive

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{dr'^2}{dt^2} + r'^2\cos^2 s'\frac{dv'^2}{dt^2} + r'^2\frac{ds'^2}{dt^2}\right).$$

Dans l'expression de W, U contient le temps explicitement, les coordonnées de m'' étant des fonctions connues de t, qu'il faut substituer dans U.

Commençons par l'équation différentielle relative à la latitude s'

$$\frac{d\left(r'^2\frac{ds'}{dt}\right)}{dt}+\frac{1}{2}r'^2\sin 2s'\frac{dv'^2}{dt^2}=fm''\frac{\partial U}{\partial s'},$$

qu'on peut écrire

$$\frac{d^2s'}{dt^2}+\frac{2}{r'}\frac{ds'}{dt}\frac{dr'}{dt}+\frac{1}{2}\sin 2s'\frac{dv'^2}{dt^2}=\frac{fm''}{r'^2}\frac{\partial U}{\partial s'}.$$

Soient, pour simplifier l'écriture,

$$\delta r'=a'\rho,\qquad \delta v'=\lambda,\qquad \delta s'=\sigma.$$

On peut alors mettre l'équation différentielle précédente sous la forme

$$\begin{aligned}\frac{d^2\sigma}{n'^2\,dt^2}&+2\frac{dr'}{n'\,dt}\frac{1}{r'}\frac{d\sigma}{n'\,dt}+\cos 2s'\frac{dv'^2}{n'^2\,dt^2}\sigma\\&+\frac{2a'}{r'}\frac{ds'}{n'\,dt}\frac{d\rho}{n'\,dt}-\frac{2a'\rho}{r'^2}\frac{ds'}{n'\,dt}\frac{dr'}{n'\,dt}+\sin 2s'\frac{dv'}{n'\,dt}\frac{d\lambda}{n'\,dt}=\frac{m''}{\mu'}\frac{a'^3}{r'^2}\frac{\partial U}{\partial s'}.\end{aligned}$$

U contenant t explicitement, on n'a pas l'intégrale habituelle des forces vives

$$T-W=\text{const.};$$

mais on peut écrire une relation analogue (Laplace, t. I, Livre II, Chap. VI) en remplaçant U par $\int(dU)$, où l'on désigne par (dU) la différentielle de U obtenue en faisant varier t seulement dans les coordonnées de m'.

Cette équation est

$$\frac{dr'^2}{dt^2}+r'^2\cos^2 s'\frac{dv'^2}{dt^2}+r'^2\frac{ds'^2}{dt^2}=\frac{2f\mu'}{r'}+2\int fm''(dU), \tag{12}$$

à laquelle nous allons adjoindre l'équation de Lagrange relative à la coordonnée r'

$$\frac{d^2r'}{dt^2}-r'\cos^2 s'\frac{dv'^2}{dt^2}-r'\frac{ds'^2}{dt^2}=-\frac{f\mu'}{r'^2}+fm''\frac{\partial U}{\partial r'}. \tag{13}$$

Voici comment ces deux équations vont nous permettre de déterminer λ et ρ. Multiplions la dernière par r'. Il vient

$$r'\frac{d^2r'}{dt^2}-r'^2\cos^2 s'\frac{dv'^2}{dt^2}-r'^2\frac{ds'^2}{dt^2}=-\frac{f\mu'}{r'}+fm''r'\frac{\partial U}{\partial r'};$$

en tenant compte de la relation

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{2}r'^2\right)}{dt^2} = \frac{dr'^2}{dt^2} + r'\frac{d^2 r'}{dt^2},$$

on obtient l'équation

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{2}r'^2\right)}{dt^2} - \frac{dr'^2}{dt^2} - r'^2\cos^2 s'\frac{dv'^2}{dt^2} - r'^2\frac{ds'^2}{dt^2} = -\frac{f\mu'}{r'} + fm'' r'\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial r'},$$

qui, ajoutée à (12), donne

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{2}r'^2\right)}{dt^2} - \frac{f\mu'}{r'} = 2\int fm''(d\mathrm{U}) + fm'' r'\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial r'};$$

d'où l'on tire l'équation différentielle qui définit ρ

(14) $$\frac{d^2\left(\frac{r'}{a'}\rho\right)}{n'^2\,dt^2} + \frac{a'^2}{r'^2}\rho = a'\frac{m''}{\mu'}\left[2\int(d\mathrm{U}) + r'\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial r'}\right].$$

Pour λ, considérons l'équation (13), qu'on peut écrire

$$\frac{1}{r'}\frac{d^2 r'}{dt^2} - \cos^2 s'\frac{dv'^2}{dt^2} - \frac{ds'^2}{dt^2} + \frac{f\mu'}{r'^3} = \frac{1}{r'}fm''\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial r'}$$

et qui devient, en introduisant les accroissements ρ, λ, σ,

$$\begin{aligned} &-\frac{a'\rho}{r'^2}\frac{d^2 r'}{dt^2} + \frac{1}{r'}\frac{d^2(a'\rho)}{dt^2} - \frac{3f\mu'}{r'^4}a'\rho \\ &\qquad + 2\sin s'\cos s'\frac{dv'^2}{dt^2}\sigma - 2\frac{ds'}{dt}\frac{d\sigma}{dt} - 2\cos^2 s'\frac{dv'}{dt}\frac{d\lambda}{dt} = \frac{1}{r'}fm''\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial r'}, \end{aligned}$$

ou, en ayant égard à la relation $n'^2 a'^3 = f\mu'$ et multipliant par r'^2,

$$\begin{aligned} &-\rho\frac{d^2\left(\frac{r'}{a'}\right)}{n'^2\,dt^2} + \frac{r'}{a'}\frac{d^2\rho}{n'^2\,dt^2} - 3\frac{a'^2\rho}{r'^2} + 2\frac{r'^2}{a'^2}\sigma\sin s'\cos s'\frac{dv'^2}{n'^2\,dt^2} \\ &\qquad - 2\frac{r'^2}{a'^2}\frac{ds'}{n'\,dt}\frac{d\sigma}{n'\,dt} - 2\frac{r'^2}{a'^2}\cos^2 s'\frac{dv'}{n'\,dt}\frac{d\lambda}{n'\,dt} = a'\frac{m''}{\mu'}r'\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial r'}. \end{aligned}$$

Remplaçons dans cette équation $\frac{a'^2\rho}{r'^2}$ par sa valeur tirée de (14). Il vient

$$(15)\quad 3\frac{d^2\left(\frac{r'}{a'}\rho\right)}{n'^2\,dt^2}-\rho\frac{d^2\left(\frac{r'}{a'}\right)}{n'^2\,dt^2}+\frac{r'}{a'}\frac{\partial^2\rho}{n'^2\,dt^2}$$
$$+2\frac{r'^2}{a'^2}\sin s'\cos s'\frac{dv'^2}{n'^2\,dt^2}\sigma-2\frac{r'^2}{a'^2}\frac{ds'}{n'\,dt}\frac{d\sigma}{n'\,dt}-2\frac{r'^2}{a'^2}\cos^2 s'\frac{dv'}{n'\,dt}\frac{d\lambda}{n'\,dt}$$
$$=\frac{a'm''}{\mu'}\left[6\int(d\mathrm{U})+4r'\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial r'}\right].$$

Considérons la somme des trois premiers termes. On a successivement

$$3\frac{d^2\left(\frac{r'}{a'}\rho\right)}{n'^2\,dt^2}-\rho\frac{d^2\left(\frac{r'}{a'}\right)}{n'^2\,dt^2}+\frac{r'}{a'}\frac{d^2\rho}{n'^2\,dt^2}=4\frac{d^2\left(\frac{r'}{a'}\rho\right)}{n'^2\,dt^2}-\frac{d^2\left(\frac{r'}{a'}\rho\right)}{n'^2\,dt^2}-\rho\frac{d^2\left(\frac{r'}{a'}\right)}{n'^2\,dt^2}+\frac{r'}{a'}\frac{d^2\rho}{n'^2\,dt^2}$$
$$=4\frac{d^2\left(\frac{r'}{a'}\rho\right)}{n'^2\,dt^2}-2\rho\frac{d^2\left(\frac{r'}{a'}\right)}{n'^2\,dt^2}-2\frac{d\rho}{n'\,dt}\frac{d\left(\frac{r'}{a'}\right)}{n'\,dt}$$
$$=4\frac{d^2\left(\frac{r'}{a'}\rho\right)}{n'^2\,dt^2}-2\frac{d\left(\rho\frac{d\frac{r'}{a'}}{n'\,dt}\right)}{n'\,dt}$$
$$=2\frac{d}{n'\,dt}\left[2\frac{d\left(\frac{r'}{a'}\rho\right)}{n'\,dt}-\rho\frac{d\left(\frac{r'}{a'}\right)}{n'\,dt}\right].$$

Alors l'équation (15) devient

$$\frac{r'^2}{a'^2}\cos^2 s'\frac{dv'}{n'\,dt}\frac{d\lambda}{n'\,dt}-\frac{r'^2}{a'^2}\sigma\sin s'\cos s'\frac{dv'^2}{n'^2\,dt^2}+\frac{r'^2}{a'^2}\frac{ds'}{n'dt}\frac{d\sigma}{n'dt}$$
$$=\frac{d}{n'dt}\left[2\frac{d\left(\frac{r'}{a'}\rho\right)}{n'dt}-\rho\frac{d\left(\frac{r'}{a'}\right)}{n'dt}\right]-\frac{a'm''}{\mu'}\left[3\int(d\mathrm{U})+2r'\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial r'}\right].$$

En tenant compte de la relation

$$\frac{r'^2}{a'^2}\frac{dv'}{n'\,dt}=\sqrt{1-e'^2},$$

on obtient finalement, pour $\frac{d\lambda}{dt}$,

$$\frac{d\lambda}{n'\,dt}=\frac{1}{\sqrt{1-e'^2}\cos^2 s'}\left\{\frac{d}{n'dt}\left[2\frac{d\left(\frac{r'}{a'}\rho\right)}{n'dt}-\rho\frac{d\left(\frac{r'}{a'}\right)}{n'dt}\right]-\frac{a'm''}{\mu'}\left[3\int(d\mathrm{U})+2r'\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial r'}\right]\right\}$$
$$+\operatorname{tang} s'\frac{dv'}{n'\,dt}\sigma-\frac{ds'\,d\sigma}{\cos^2 s'\,dv'\,n'\,dt}.$$

En supposant $\gamma' = 0$, on a, avec l'approximation adoptée,

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{1-e'^2}} \left\{ 2\frac{d\left(\frac{r'}{a'}\rho\right)}{n'dt} - \rho\frac{d\left(\frac{r'}{a'}\right)}{n'dt} - \frac{a'm''}{\mu'} n' \int \left[3\int (dU) + 2r'\frac{\partial U}{\partial r'} \right] dt \right\}.$$

Avec la même approximation, on peut réduire l'équation en σ à la suivante, en faisant $r' = a'$,

$$\frac{d^2\sigma}{n'^2 dt^2} + \sigma = \frac{a'm''}{\mu'} \gamma'' \sum B^{(i)} \sin(i\varphi + \theta'').$$

15. Proposons-nous d'abord d'intégrer cette équation. Elle est de la forme

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + a^2 y + \alpha Q = 0,$$

où α désigne une petite quantité de l'ordre de la masse de la planète perturbatrice, Q une fonction de t.

Laplace a montré l'emploi que l'on peut faire de cette équation pour la détermination des perturbations des divers ordres des mouvements des corps célestes. Il a trouvé pour l'intégrale complète (*cf.* Livre II, Chap. V)

$$y = \frac{c}{a}\sin at + \frac{c'}{a}\cos at - \frac{\alpha \sin at}{a}\int Q\,dt \cos at + \frac{\alpha \cos at}{a}\int Q\,dt \sin at;$$

c et c' désignent les deux constantes d'intégration; si l'on suppose qu'à l'origine du temps on ait $y = 0$, $\frac{dy}{dt} = 0$, on doit prendre $c = c' = 0$.

Dans le cas qui nous occupe, Q est composé de termes de la forme

$$K \, {}^{\sin}_{\cos}(mt + \varepsilon).$$

On a alors pour y le terme correspondant

$$\frac{\alpha K}{m^2 - a^2} \, {}^{\sin}_{\cos}(mt + \varepsilon).$$

Nous avons ici

$$a^2 = n'^2, \qquad \alpha = -\frac{a'm''}{\mu'} n'^2 \gamma'',$$

$$Q = \sum B^{(i)} \sin(i\varphi + \theta''), \qquad m = in' - (i-1)n''.$$

Alors, en désignant $\frac{n'}{n''}$ par ω,

$$m = n'\left(i - \frac{i-1}{\omega}\right) = \frac{n'}{\omega}[i\omega - (i-1)],$$

$$m^2 - a^2 = \frac{n'^2}{\omega^2}\left\{[i\omega - (i-1)]^2 - \omega^2\right\}$$

$$= \frac{n'^2}{\omega^2}[(i+1)\omega - (i-1)][(i-1)\omega - (i-1)] = (i-1)^2(1-\omega)\left(1 - \frac{i+1}{i-1}\omega\right)\frac{n'^2}{\omega^2};$$

par suite

$$\text{(H)} \qquad \sigma = -a'\gamma''\frac{m''}{\mu'}\sum \mathrm{B}^{(i)}\frac{\omega^2}{(i-1)^2(1-\omega)\left(1-\frac{i+1}{i-1}\omega\right)}\sin(i\varphi + \theta'').$$

Cette formule est en défaut pour $i = 1$; ce que l'on pouvait voir *a priori*, puisque dans ce cas $m = n' = a$. Le temps sort alors du signe sinus.

16. Passons à l'équation en ρ et à la formule qui donne λ, en nous proposant d'abord de trouver pour ces deux fonctions de t les termes dépendant de γ''. On peut faire $\gamma' = 0$ et $r' = a'$. On a alors

$$r'\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial r'} = \frac{1}{2}\gamma''^2\sum a'\frac{\partial \mathrm{B}^{(i-1)}}{\partial a'}[\cos(i\varphi + 2\theta'') - \cos i\varphi],$$

$$(d\mathrm{U}) = -\frac{1}{2}\gamma''^2\sum in'\mathrm{B}^{(i-1)}\sin(i\varphi + 2\theta'') + \frac{1}{2}\gamma''^2\sum in'\mathrm{B}^{(i-1)}\sin i\varphi,$$

$$\int(d\mathrm{U}) = -\frac{1}{2}\gamma''^2\sum\frac{\omega i}{(i-2)-i\omega}\mathrm{B}^{(i-1)}\cos(i\varphi + 2\theta'') + \frac{1}{2}\gamma''^2\sum\frac{\omega}{1-\omega}\mathrm{B}^{(i-1)}\cos i\varphi,$$

$$2\int(d\mathrm{U}) + r'\frac{\partial \mathrm{U}}{dr'}$$

$$= -\frac{1}{2}\gamma''^2\sum\left[\frac{2i\omega}{(i-2)-i\omega}\mathrm{B}^{(i-1)} - a'\frac{\partial \mathrm{B}^{(i-1)}}{\partial a'}\right]\cos(i\varphi + 2\theta'')$$

$$+ \frac{1}{2}\gamma''^2\sum\left[\frac{2\omega}{(i-\omega}\mathrm{B}^{(i-1)} - a'\frac{\partial \mathrm{B}^{(i-1)}}{\partial a'}\right]\cos i\varphi.$$

En faisant $r' = a'$ dans l'équation (14), qui détermine ρ, on obtient par l'application de la formule de Laplace

$$\text{(K)} \quad \rho = \omega^2\frac{a'm''}{\mu'}\gamma''^2\sum\frac{\cos(i\varphi + 2\theta'')}{(i-2)^2\left(1-\frac{i-1}{i-2}\omega\right)\left(1-\frac{i+1}{i-2}\omega\right)}\left[\frac{i\omega}{(i-2)\left(1-\frac{i}{i-2}\omega\right)}\mathrm{B}^{(i-1)} - \frac{a'}{2}\frac{\partial \mathrm{B}^{(i-1)}}{\partial a'}\right]$$

$$-\omega^2\frac{a'm''}{\mu'}\gamma''^2\sum\frac{\cos i\varphi}{i^2\left(1-\frac{i-1}{i}\omega\right)\left(1-\frac{i+1}{i}\omega\right)}\left[\frac{\omega}{1-\omega}\mathrm{B}^{(i-1)} - \frac{a'}{2}\frac{\partial \mathrm{B}^{(i-1)}}{\partial a'}\right].$$

Dans la formule qui donne λ, on peut remplacer $1 - e'^2$ par 1, $\dfrac{dr}{a'n'dt}$ par 0. Elle se réduit à

$$\lambda = 2\frac{d\rho}{n'dt} - \frac{a'm''}{\mu'}n'\int\left[3\int(d\mathrm{U}) + 2r'\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial r'}\right]dt.$$

On obtient, toutes réductions faites, pour les termes de λ dépendant de γ'', l'expression suivante :

$$(\mathrm{L}) \quad \lambda = \frac{a'm''}{\mu'}\omega^2\gamma''^2\sum\sin(i\varphi + 2\theta'')\left\{\frac{i\left[\left(1-\dfrac{i\omega}{i-2}\right)^2 + \dfrac{3\omega^2}{(i-2)^2}\right]}{2(i-2)^2\left(1-\dfrac{i}{i-2}\omega\right)^2\left(1-\dfrac{i-1}{i-2}\omega\right)\left(1-\dfrac{i+1}{i-2}\omega\right)}\mathrm{B}^{(i-1)}\right.$$
$$\left. - \frac{\omega}{(i-2)^3\left(1-\dfrac{i}{i-2}\omega\right)\left(1-\dfrac{i-1}{i-2}\omega\right)\left(1-\dfrac{i+1}{i-2}\omega\right)}a'\frac{\partial \mathrm{B}^{(i-1)}}{\partial a'}\right\}$$
$$-\frac{a'm''}{\mu'}\omega^2\gamma''^2\sum\sin i\varphi\left\{\frac{(1-\omega)^2 + \dfrac{3\omega^2}{i^2}}{2i(1-\omega)^2\left(1-\dfrac{i-1}{i}\omega\right)\left(1-\dfrac{i+1}{i}\omega\right)}\mathrm{B}^{(i-1)}\right.$$
$$\left. - \frac{\omega}{i^3(1-\omega)\left(1-\dfrac{i-1}{i}\omega\right)\left(1-\dfrac{i+1}{i}\omega\right)}a'\frac{\partial \mathrm{B}^{(i-1)}}{\partial a'}\right\}.$$

17. Il nous reste à trouver les termes de ρ et λ qui dépendent des excentricités, en négligeant le troisième ordre.

Nous avons à développer par la formule de Taylor la fonction

$$\mathrm{F} = \frac{1}{2}\sum \mathrm{A}^{(i)}\cos i\varphi.$$

Pour les accroissements des variables, nous adoptons les mêmes notations que dans le n° 4, où leurs expressions ont été données.

On a généralement

$$\mathrm{F} = \mathrm{F}_0 + a'\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial a'}\rho' + a''\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial a''}\rho'' + \frac{1}{2}a'^2\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial a'^2}\rho'^2 + a'a''\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial a'\partial a''}\rho'\rho'' + \frac{1}{2}a''^2\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial a''^2}\rho''^2$$
$$+\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \varphi}\mu + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial \varphi^2}\mu^2 + a'\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial a'\partial \varphi}\mu\rho' + a''\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial a''\partial \varphi}\mu\rho''.$$

F_0 et $\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial \varphi}$ étant des fonctions homogènes de degré -1 de a' et a'', on a

$$a'\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial a'} + a''\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial a''} = -\mathrm{F}_0, \qquad a'\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial a'\partial \varphi} + a''\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial a''\partial \varphi} = -\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \varphi}.$$

$\dfrac{\partial F}{\partial a'}$ et $\dfrac{\partial F}{\partial a''}$ étant homogènes de degré -2, on a également

$$a'^2\frac{\partial^2 F}{\partial a'^2} + a'a''\frac{\partial^2 F}{\partial a'\,\partial a''} = -2a'\frac{\partial F}{\partial a'}, \qquad a'a''\frac{\partial^2 F}{\partial a'\,\partial a''} + a''^2\frac{\partial^2 F}{\partial a''^2} = -2a''\frac{\partial F}{\partial a''};$$

d'où l'on tire

$$a''\frac{\partial F}{\partial a''} = -F_0 - a'\frac{\partial F}{\partial a'}, \qquad a'a''\frac{\partial^2 F}{\partial a'\,\partial a''} = -2a'\frac{\partial F}{\partial a'} - a'^2\frac{\partial^2 F}{\partial a'^2},$$

$$a''^2\frac{\partial^2 F}{\partial a''^2} = 2F_0 + 4a'\frac{\partial F}{\partial a'} + a'^2\frac{\partial^2 F}{\partial a'^2}, \qquad a''\frac{\partial^2 F}{\partial a''\,\partial\varphi} = -\frac{\partial F}{\partial\varphi} - a'^2\frac{\partial^2 F}{\partial a'\,\partial\varphi}.$$

Portant dans F, il vient

$$\begin{aligned} F = F_0 &+ a'\frac{\partial F}{\partial a'}\rho' - \rho''\left(F_0 + a'\frac{\partial F}{\partial a'}\right) + \frac{1}{2}a^{2'}\frac{\partial^2 F}{\partial a'^2}\rho'^2 - \left(2a'\frac{\partial F}{\partial a'} + a'^2\frac{\partial^2 F}{\partial a'^2}\right)\rho'\rho'' \\ &+ \left(F_0 + 2a'\frac{\partial F}{\partial a'} + \frac{1}{2}a'^2\frac{\partial^2 F}{\partial a'^2}\right)\rho''^2 \\ &+ \frac{\partial F}{\partial\varphi}\mu + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi^2}\mu^2 + a'\frac{\partial^2 F}{\partial a'\,\partial\varphi}\mu\rho' - \left(\frac{\partial F}{\partial\varphi} + a'\frac{\partial^2 F}{\partial a'\,\partial\varphi}\right)\mu\rho''. \end{aligned}$$

L'application de cette formule au développement de $\frac{1}{2}\sum A^{(i)}\cos i\varphi$ donne l'expression suivante, où l'on suppose que dans $A^{(i)}$, r' et r'' sont remplacés par a' et a'',

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sum\Bigg\{ &\cos i\varphi\left[A^{(i)}\left(1 - \rho'' + \rho''^2 - \frac{1}{2}i^2\mu^2\right) + a'\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a'}(\rho' - \rho'' - 2\rho'\rho'' + 2\rho''^2)\right. \\ &\qquad\left. + a'^2\frac{\partial^2 A^{(i)}}{\partial a'^2}\left(\frac{1}{2}\rho'^2 - \rho'\rho'' + \frac{1}{2}\rho''^2\right)\right] \\ &+ \sin i\varphi\left[iA^{(i)}(-\mu + \mu\rho'') + ia'\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a'}(-\mu\rho' + \mu\rho'')\right]\Bigg\}. \end{aligned}$$

Remplaçons ρ', ρ'', ... par leurs expressions déjà obtenues au n° 4, et posons

$$a'\frac{\partial A^{(i)}}{\partial a'} = A_1^{(i)}, \qquad a'^2\frac{\partial^2 A^{(i)}}{\partial a'^2} = A_2^{(i)}, \qquad a'^3\frac{\partial^3 A^{(i)}}{\partial a'^3} = A_3^{(i)},$$

on trouve, toutes réductions faites, pour le développement cherché,

$$\begin{aligned} \sum\Bigg\{ &\cos i\varphi\left(\frac{1}{2}A^{(i)}\right) + e'\cos(i\varphi + l')\left(iA^{(i)} - \frac{1}{2}A_1^{(i)}\right) \\ &+ e''\cos(i\varphi + l'')\left[\left(\frac{1}{2} - i\right)A^{(i)} + \frac{1}{2}A_1^{(i)}\right] + e'^2\cos i\varphi\left(-\frac{i^2}{2}A^{(i)} + \frac{1}{4}A_1^{(i)} + \frac{1}{8}A_2^{(i)}\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\underset{\text{(suite)}}{\sum}\Big\{ & + e''^2 \cos i\varphi && \left(-\frac{i^2}{2}\mathrm{A}^{(i)} + \frac{1}{4}\mathrm{A}_1^{(i)} + \frac{1}{8}\mathrm{A}_2^{(i)}\right) \\
& + e'^2 \cos(i\varphi + 2l') && \left[\left(\frac{i^2}{2} + \frac{5}{8}i\right)\mathrm{A}^{(i)} - \left(\frac{i}{2} + \frac{1}{4}\right)\mathrm{A}_1^{(i)} + \frac{1}{8}\mathrm{A}_2^{(i)}\right] \\
& + e''^2 \cos(i\varphi + 2l'') && \left[\left(\frac{i^2}{2} - \frac{9}{8}i + \frac{1}{2}\right)\mathrm{A}^{(i)} + \left(-\frac{i}{2} + \frac{3}{4}\right)\mathrm{A}_1^{(i)} + \frac{1}{8}\mathrm{A}_2^{(i)}\right] \\
& + e'e'' \cos(i\varphi + l' + l'') && \left[\left(-i^2 + \frac{1}{2}i\right)\mathrm{A}^{(i)} + \left(i - \frac{1}{2}\right)\mathrm{A}_1^{(i)} - \frac{1}{4}\mathrm{A}_2^{(i)}\right] \\
& + e'e'' \cos(i\varphi + l' - l'') && \left[\left(i^2 + \frac{1}{2}i\right)\mathrm{A}^{(i)} - \frac{1}{2}\mathrm{A}_1^{(i)} - \frac{1}{4}\mathrm{A}_2^{(i)}\right]\Big\}.
\end{aligned}
$$

Il nous faut aussi le développement de $r'\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial r'}$, que je désignerai par F'. On peut ramener le calcul de F' à celui de F. On a

$$
\mathrm{F}' = \frac{1}{2}\sum r'\frac{\partial \mathrm{A}^{(i)}}{\partial r'}\cos i\varphi = \sum \frac{1}{2}\mathrm{P}^{(i)}\cos i\varphi, \qquad \mathrm{P}^{(i)} = r'\frac{\partial \mathrm{A}^{(i)}}{\partial r'}.
$$

Pour $r' = a'$ et $r'' = a''$,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}^{(i)} &= a'\frac{\partial \mathrm{A}^{(i)}}{\partial a'} = \mathrm{A}_1^{(i)}, \\
\mathrm{P}_1^{(i)} &= a'\frac{\partial \mathrm{P}^{(i)}}{\partial a'} = a'\frac{\partial \mathrm{A}^{(i)}}{\partial a'} + a'^2\frac{\partial^2 \mathrm{A}^{(i)}}{\partial a'^2} = \mathrm{A}_1^{(i)} + \mathrm{A}_2^{(i)}, \\
\mathrm{P}_2^{(i)} &= a'^2\frac{\partial^2 \mathrm{P}^{(i)}}{\partial a'^2} = 2\mathrm{A}_2^{(i)} + \mathrm{A}_3^{(i)}.
\end{aligned}
$$

Il suffit donc, pour avoir le nouveau développement, de remplacer dans le précédent

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{A}^{(i)} && \text{par} && \mathrm{A}_1^{(i)}, \\
&\mathrm{A}_1^{(i)} && \text{par} && \mathrm{A}_1^{(i)} + \mathrm{A}_2^{(i)}, \\
&\mathrm{A}_2^{(i)} && \text{par} && 2\mathrm{A}_2^{(i)} + \mathrm{A}_3^{(i)};
\end{aligned}
$$

on obtient

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sum r'\frac{\partial \mathrm{A}^{(i)}}{\partial r'}\cos i\varphi \\
&= \sum\Big\{\cos i\varphi\left(\frac{1}{2}\mathrm{A}_1^{(i)}\right) + e'\cos(i\varphi + l')\left(i\mathrm{A}_1^{(i)} - \frac{1}{2}\mathrm{A}_1^{(i)} - \frac{1}{2}\mathrm{A}_2^{(i)}\right) \\
&\qquad + e'' \cos(i\varphi + l'') \quad \left[(1 - i)\mathrm{A}_1^{(i)} + \frac{1}{2}\mathrm{A}_2^{(i)}\right] \\
&\qquad + e'^2 \cos(i\varphi) \quad \left[\left(-\frac{i^2}{2} + \frac{1}{4}\right)\mathrm{A}_1^{(i)} + \frac{1}{2}\mathrm{A}_2^{(i)} + \frac{1}{8}\mathrm{A}_3^{(i)}\right] \\
&\qquad + e''^2 \cos(i\varphi) \quad \left[\left(-\frac{i^2}{2} + \frac{1}{4}\right)\mathrm{A}_1^{(i)} + \frac{1}{2}\mathrm{A}_2^{(i)} + \frac{1}{8}\mathrm{A}_3^{(i)}\right]
\end{aligned}
$$

$\frac{1}{2}\sum r'\frac{\partial A^{(i)}}{\partial r'}\cos i\varphi$
(suite)

$$
\begin{aligned}
=\sum\Big\{ &+e'^2\ \cos(i\varphi+2l')\ \left[\left(\frac{i^2}{2}+\frac{i}{8}-\frac{1}{4}\right)A_1^{(i)}-\frac{i}{2}A_2^{(i)}+\frac{1}{8}A_3^{(i)}\right]\\
&+e''^2\ \cos(i\varphi+2l'')\ \left[\left(\frac{i^2}{2}-\frac{13}{8}i+\frac{5}{4}\right)A_1^{(i)}+\left(-\frac{i}{2}+1\right)A_2^{(i)}+\frac{1}{8}A_3^{(i)}\right]\\
&+e'e''\cos(i\varphi+l'+l'')\left[\left(-i^2+\frac{3}{2}i-\frac{1}{2}\right)A_1^{(i)}+(i-1)A_2^{(i)}-\frac{1}{4}A_3^{(i)}\right]\\
&+e'e''\cos(i\varphi+l'-l'')\left[\left(i^2+\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}\right)A_1^{(i)}-A_2^{(i)}-\frac{1}{4}A_3^{(i)}\right]\Big\}.
\end{aligned}
$$

En vue de l'intégration de l'équation en ρ, je pose

$$
\begin{aligned}
(16)\quad \rho=\sum\big[\ &\rho_1^{(i)}\cos i\varphi &&+e'\ \rho_2^{(i)}\cos(i\varphi+l') &&+e''\ \rho_3^{(i)}\cos(i\varphi+l'')\\
&+e'^2\rho_4^{(i)}\cos i\varphi &&+e''^2\ \rho_5^{(i)}\cos i\varphi &&+e'^2\ \rho_6^{(i)}\cos(i\varphi+2l')\\
&+e''^2\rho_7^{(i)}\cos(i\varphi+2l'') &&+e'e''\rho_8^{(i)}\cos(i\varphi+l'+l'') &&+e'e''\rho_9^{(i)}\cos(i\varphi+l'-l'')\big],
\end{aligned}
$$

où $\rho_1^{(i)}$, $\rho_2^{(i)}$, ... sont des coefficients à déterminer, de façon à satisfaire à l'équation différentielle.

On a

$$
\frac{r'}{a'}=1-e'\cos l'+\frac{e'^2}{2}-\frac{e'^2}{2}\cos 2l',\qquad \frac{a'^2}{r'^2}=1+2e'\cos l'+\frac{e'^2}{2}+\frac{5}{2}e'^2\cos 2l',
$$

$$
\frac{dr'}{a'n'\,dt}=e'\sin l'+e'^2\sin 2l'.
$$

Par suite, on trouve les expressions suivantes, dont nous avons encore besoin,

$$
\begin{aligned}
\frac{r'}{a'}\rho=\sum\Big[&\cos i\varphi\,(\rho_1^{(i)})\\
&+e'\ \cos(i\varphi+l')\ \left(\rho_2^{(i)}-\frac{1}{2}\rho_1^{(i)}-\frac{1}{2}\rho_1^{(-i)}\right)\\
&+e''\ \cos(i\varphi+l'')\ (\rho_3^{(i)})\\
&+e'^2\ \cos(i\varphi)\ \left(\rho_4^{(i)}-\frac{1}{2}\rho_2^{(i)}+\frac{1}{2}\rho_1^{(i)}\right)\\
&+e''^2\ \cos(i\varphi)\ (\rho_5^{(i)})\\
&+e'^2\ \cos(i\varphi+2l')\ \left(\rho_6^{(i)}-\frac{1}{2}\rho_2^{(i)}-\frac{1}{4}\rho_1^{(i)}-\frac{1}{4}\rho_1^{(-i)}\right)\\
&+e''^2\ \cos(i\varphi+2l'')\ (\rho_7^{(i)})\\
&+e'e''\cos(i\varphi+l'+l'')\left(\rho_8^{(i)}-\frac{1}{2}\rho_3^{(i)}\right)\\
&+e'e''\cos(i\varphi+l'-l'')\left(\rho_9^{(i)}-\frac{1}{2}\rho_3^{(-i)}\right)\Big],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{a'^2}{r'^2}\rho=\sum\Big[&\cos i\varphi\,(\rho_1^{(i)})\\
&+e'\ \cos(i\varphi+l')\ (\rho_2^{(i)}+\rho_1^{(i)}+\rho_1^{(-i)})\\
&+e''\ \cos(i\varphi+l'')\ (\rho_3^{(i)})\\
&+e'^2\ \cos i\varphi\ \left(\rho_4^{(i)}+\rho_2^{(i)}+\frac{1}{4}\rho_1^{(i)}\right)\\
&+e''^2\ \cos i\varphi\ (\rho_5^{(i)})\\
&+e'^2\ \cos(i\varphi+2l')\ \left(\rho_6^{(i)}+\rho_2^{(i)}+\frac{5}{4}\rho_1^{(i)}+\frac{5}{4}\rho_1^{(-i)}\right)\\
&+e''^2\ \cos(i\varphi+2l'')\ (\rho_7^{(i)})\\
&+e'e''\cos(i\varphi+l'+l'')(\rho_8^{(i)}+\rho_3^{(i)})\\
&+e'e''\cos(i\varphi+l'-l'')(\rho_9^{(i)}+\rho_3^{(-i)})\Big],
\end{aligned}
$$

et

$$\begin{aligned}\rho\frac{dr'}{a'n'dt} = \sum\Big[& e'\sin(i\varphi + l')\left(\frac{1}{2}\rho_1^{(i)} + \frac{1}{2}\rho_1^{(-i)}\right) + e'^2\sin i\varphi\left(-\frac{1}{2}\rho_2^{(i)}\right)\\ &+ e'^2\sin(i\varphi + 2l')\left(\frac{1}{2}\rho_2^{(i)} + \frac{1}{2}\rho_1^{(i)} + \frac{1}{2}\rho_1^{(-i)}\right)\\ &+ e'e''\sin(i\varphi + l' + l'')\left(\frac{1}{2}\rho_3^{(i)}\right) + e'e''\sin(i\varphi + l' - l'')\left(\frac{1}{2}\rho_3^{(-i)}\right)\Big].\end{aligned}$$

18. Reprenons l'équation différentielle qui détermine ρ :

$$\frac{d^2\left(\frac{r'}{a'}\rho\right)}{n'^2\,dt^2} + \frac{a'^2}{r'^2}\rho = \frac{a'm''}{\mu'}\left[2\int(d\mathrm{U}) + r'\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial r'}\right].$$

Ici U n'est autre chose que la fonction F du numéro précédent et $r'\dfrac{\partial\mathrm{U}}{\partial r'}$ est F'.

Nous calculerons $\int(d\mathrm{U})$ et nous prendrons la dérivée seconde de $\dfrac{r'}{a'}\rho$; puis nous égalerons les coefficients des puissances de e', e'' dans les deux membres de l'équation différentielle. Nous trouverons ainsi les coefficients $\rho_1^{(i)}$, $\rho_2^{(i)}$, ...

Je rappelle que pour calculer $(d\mathrm{U})$ il faut, dans chaque argument, considérer t comme constant dans la partie qui correspond à la planète perturbatrice.

La double différentiation de $\dfrac{r'}{a'}\rho$ et l'opération $\int(d\mathrm{U})$ introduisent des facteurs que j'indique dans la deuxième et la troisième colonnes du Tableau suivant, en regard du terme correspondant :

$\cos i\varphi$	$-i^2(1-\omega)^2\dfrac{n'^2}{\omega^2}$	$-\dfrac{\omega}{1-\omega}$
$e'\cos(i\varphi + l')$	$-[i-(i+1)\omega]^2\dfrac{n'^2}{\omega^2}$	$-\dfrac{(i+1)\omega}{i-(i+1)\omega}$
$e''\cos(i\varphi + l'')$	$-[(i-1)-i\omega]^2\dfrac{n'^2}{\omega^2}$	$-\dfrac{i\omega}{(i-1)-i\omega}$
$e'^2\cos i\varphi$	$-i^2(1-\omega)^2\dfrac{n'^2}{\omega^2}$	$-\dfrac{\omega}{1-\omega}$
$e''^2\cos i\varphi$	$-i^2(1-\omega)^2\dfrac{n'^2}{\omega^2}$	$-\dfrac{\omega}{1-\omega}$
$e'^2\cos(i\varphi + 2l')$	$-[i-(i+2)\omega]^2\dfrac{n'^2}{\omega^2}$	$-\dfrac{(i+2)\omega}{i-(i+2)\omega}$
$e''^2\cos(i\varphi + 2l'')$	$-[(i-2)-i\omega]^2\dfrac{n'^2}{\omega^2}$	$-\dfrac{i\omega}{(i-2)-i\omega}$
$e'e''\cos(i\varphi + l' + l'')$	$-[(i-1)-(i+1)\omega]^2\dfrac{n'^2}{\omega^2}$	$-\dfrac{(i+1)\omega}{(i-1)-(i+1)\omega}$
$e'e''\cos(i\varphi + l' - l'')$	$-(i+1)^2(1-\omega)^2\dfrac{n'^2}{\omega^2}$	$-\dfrac{\omega}{1-\omega}$

Nous allons écrire maintenant les équations en $\rho_1^{(i)}$, $\rho_2^{(i)}$, ..., que nous avons en vue. Elles résultent de l'identification, dans l'équation différentielle, des coefficients, dans les deux membres, du cosinus d'un même argument.

Pour simplifier l'écriture, désignons par $P_1^{(i)}$, $P_2^{(i)}$, ... les coefficients de U analogues à $\rho_1^{(i)}$, $\rho_2^{(i)}$, ... et, de même, par $Q_1^{(i)}$, $Q_2^{(i)}$, ... ceux de $r'\dfrac{\partial U}{\partial r'}$.

On a alors pour les équations cherchées

$$
\begin{aligned}
&-i^2(1-\omega)^2\rho_1^{(i)}+\omega^2\rho_1^{(i)} = \frac{a'm''\omega^2}{\mu'}\left(-2\frac{\omega}{1-\omega}P_1^{(i)}+Q_1^{(i)}\right),\\
&-[i-(i+1)\omega]^2\left(\rho_2^{(i)}-\frac{1}{2}\rho_1^{(i)}-\frac{1}{2}\rho_1^{(-i)}\right)+\omega^2\left(\rho_2^{(i)}+\rho_1^{(i)}+\rho_1^{(-i)}\right) = \frac{a'm''\omega^2}{\mu'}\left[-2\frac{(i+1)\omega}{i-(i+1)\omega}P_2^{(i)}+Q_2^{(i)}\right],\\
&-[(i-1)-i\omega]^2\rho_3^{(i)}+\omega^2\rho_3^{(i)} = \frac{a'm''\omega^2}{\mu'}\left[-2\frac{i\omega}{(i-1)-i\omega}P_3^{(i)}+Q_3^{(i)}\right],\\
&-i^2(1-\omega)^2\left(\rho_4^{(i)}-\frac{1}{2}\rho_2^{(i)}+\frac{1}{2}\rho_1^{(i)}\right)+\omega^2\left(\rho_4^{(i)}+\rho_2^{(i)}+\frac{1}{4}\rho_1^{(i)}\right) = \frac{a'm''\omega^2}{\mu'}\left(-2\frac{\omega}{1-\omega}P_4^{(i)}+Q_4^{(i)}\right),\\
&-i^2(1-\omega)^2\rho_5^{(i)}+\omega^2\rho_5^{(i)} = \frac{a'm''\omega^2}{\mu'}\left(-2\frac{\omega}{1-\omega}P_5^{(i)}+Q_5^{(i)}\right),\\
&-[i-(i+2)\omega]^2\left(\rho_6^{(i)}-\frac{1}{2}\rho_2^{(i)}-\frac{1}{4}\rho_1^{(i)}-\frac{1}{4}\rho_1^{(-i)}\right)+\omega^2\left(\rho_6^{(i)}+\rho_2^{(i)}+\frac{5}{4}\rho_1^{(i)}+\frac{5}{4}\rho_1^{(-i)}\right) = \frac{a'm''\omega^2}{\mu'}\left[-2\frac{(i+2)\omega}{i-(i+2)\omega}P_6^{(i)}+Q_6^{(i)}\right],\\
&-[(i-2)-i\omega]^2\rho_7^{(i)}+\omega^2\rho_7^{(i)} = \frac{a'm''\omega^2}{\mu'}\left[-2\frac{i\omega}{(i-2)-i\omega}P_7^{(i)}+Q_7^{(i)}\right],\\
&-[(i-1)-(i+1)\omega]^2\left(\rho_8^{(i)}-\frac{1}{2}\rho_3^{(i)}\right)+\omega^2\left(\rho_8^{(i)}+\rho_3^{(i)}\right) = \frac{a'm''\omega^2}{\mu'}\left[-2\frac{(i+1)\omega}{(i-1)-(i+1)\omega}P_8^{(i)}+Q_8^{(i)}\right],\\
&-[(i+1)^2(1-\omega)^2]\left(\rho_9^{(i)}-\frac{1}{2}\rho_3^{(-i)}\right)+\omega^2\left(\rho_9^{(i)}+\rho_3^{(-i)}\right) = \frac{a'm''\omega^2}{\mu'}\left(-2\frac{\omega}{1-\omega}P_9^{(i)}+Q_9^{(i)}\right).
\end{aligned}
$$

Pour simplifier, non seulement l'écriture, mais encore les calculs numériques à effectuer dans les applications, j'ai trouvé commode de poser, en observant dans les notations toujours la même symétrie,

$$
(17)\quad \left\{
\begin{array}{lll}
\alpha_1 = i(1-\omega), & \beta_1 = \dfrac{\omega}{1-\omega}, & \alpha_1\beta_1 = i\omega,\\
\alpha_2 = i-(i+1)\omega, & \beta_2 = \dfrac{(i+1)\omega}{i-(i+1)\omega}, & \alpha_2\beta_2 = (i+1)\omega,\\
\alpha_3 = (i-1)-i\omega, & \beta_3 = \dfrac{i\omega}{(i-1)-i\omega}, & \alpha_3\beta_3 = i\omega,\\
\alpha_4 = \alpha_1, & \beta_4 = \beta_1, & \alpha_4\beta_4 = i\omega,\\
\alpha_5 = \alpha_1, & \beta_5 = \beta_1, & \alpha_5\beta_5 = i\omega,\\
\alpha_6 = i-(i+2)\omega, & \beta_6 = \dfrac{(i+2)\omega}{i-(i+2)\omega}, & \alpha_6\beta_6 = (i+2)\omega,\\
\alpha_7 = (i-2)-i\omega, & \beta_7 = \dfrac{i\omega}{(i-2)-i\omega}, & \alpha_7\beta_7 = i\omega,\\
\alpha_8 = (i-1)-(i+1)\omega, & \beta_8 = \dfrac{(i+1)\omega}{(i-1)-(i+1)\omega}, & \alpha_8\beta_8 = (i+1)\omega,\\
\alpha_9 = (i+1)(1-\omega), & \beta_9 = \beta_1, & \alpha_9\beta_9 = (i+1)\omega.
\end{array}
\right.
$$

J'ai résolu ensuite les équations précédentes par rapport à $\rho_1^{(i)}$, $\rho_2^{(i)}$, ..., en introduisant les coefficients que je viens de définir. Dans $\rho_9^{(i)}$, α_3' et β_3' désignent les expressions déduites de α_3 et β_3 en y remplaçant i par $-i$.

Il vient finalement

$$
(\mathrm{M})\left\{
\begin{aligned}
\rho_1^{(i)} &= \frac{a'm''}{\mu'}\frac{\omega^2}{\alpha_1^2-\omega^2}\left(\beta_1 \mathrm{A}^{(i)} - \frac{1}{2}\mathrm{A}_1^{(i)}\right),\\
\rho_2^{(i)} &= \frac{a'm''}{\mu'}\frac{\omega^2}{\alpha_2^2-\omega^2}\left\{\mathrm{A}^{(i)}\left[\frac{\beta_1(\alpha_2^2+2\omega^2)}{\alpha_1^2-\omega^2}+2i\beta_2\right]+\mathrm{A}_1^{(i)}\left[-\frac{1}{2}\frac{\alpha_2^2+2\omega^2}{\alpha_1^2-\omega^2}-\beta_2-\left(i-\frac{1}{2}\right)\right]+\mathrm{A}_2^{(i)}\left(+\frac{1}{2}\right)\right\},\\
\rho_3^{(i)} &= \frac{a'm''}{\mu'}\frac{\omega^2}{\alpha_3^2-\omega^2}\left\{\mathrm{A}^{(i)}[(1-2i)\beta_3]+\mathrm{A}_1^{(i)}[\beta_3+(i-1)]+\mathrm{A}_2^{(i)}\left(-\frac{1}{2}\right)\right\},\\
\rho_4^{(i)} &= \frac{a'm''}{\mu'}\frac{\omega^2}{\alpha_4^2-\omega^2}\left\{\mathrm{A}^{(i)}\left[\frac{\beta_1(\alpha_2^2+2\omega^2)\left(\frac{1}{2}\alpha_4^2+\omega^2\right)}{(\alpha_1^2-\omega^2)(\alpha_2^2-\omega^2)}-\frac{\left(\frac{1}{2}\alpha_4^2-\frac{1}{4}\omega^2\right)\beta_1}{\alpha_1^2-\omega^2}+\frac{i\beta_2(\alpha_4^2+2\omega^2)}{\alpha_2^2-\omega^2}-i^2\beta_4\right]\right.\\
&\quad+\mathrm{A}_1^{(i)}\left[-\frac{(\alpha_2^2+2\omega^2)\left(\frac{1}{2}\alpha_4^2+\omega^2\right)}{2(\alpha_1^2-\omega^2)(\alpha_2^2-\omega^2)}+\frac{\frac{1}{2}\alpha_4^2-\frac{1}{4}\omega^2}{2(\alpha_1^2-\omega^2)}-\frac{\beta_2\left(\frac{1}{2}\alpha_4^2+\omega^2\right)}{(\alpha_2^2-\omega^2)}\right.\\
&\quad\left.+\frac{1}{2}\beta_4+\left(\frac{i^2}{2}-\frac{1}{4}\right)-\left(i-\frac{1}{2}\right)\frac{\alpha_4^2+2\omega^2}{2(\alpha_2^2-\omega^2)}\right]\\
&\quad\left.+\mathrm{A}_2^{(i)}\left[\frac{\frac{1}{2}\alpha_4^2+\omega^2}{2(\alpha_2^2-\omega^2)}+\frac{1}{4}\beta_4-\frac{1}{2}\right]+\mathrm{A}_3^{(i)}\left(-\frac{1}{8}\right)\right\},\\
\rho_5^{(i)} &= \frac{a'm''}{\mu'}\frac{\omega^2}{\alpha_5^2-\omega^2}\left[\mathrm{A}^{(i)}(-i^2\beta_5)+\mathrm{A}_1^{(i)}\left(\frac{1}{2}\beta_5+\frac{i^2}{2}-\frac{1}{4}\right)+\mathrm{A}_2^{(i)}\left(\frac{1}{4}\beta_5-\frac{1}{2}\right)+\mathrm{A}_3^{(i)}\left(-\frac{1}{8}\right)\right];\\
\rho_6^{(i)} &= \frac{a'm''}{\mu'}\frac{\omega^2}{\alpha_6^2-\omega^2}\left\{\mathrm{A}^{(i)}\left[\frac{\beta_1(\alpha_2^2+2\omega^2)\left(\frac{1}{2}\alpha_6^2+\omega^2\right)}{(\alpha_1^2-\omega^2)(\alpha_2^2-\omega^2)}+\frac{(\alpha_6^2+5\omega^2)\beta_1}{2(\alpha_1^2-\omega^2)}\right.\right.\\
&\quad\left.+\frac{i\beta_2(\alpha_6^2+2\omega^2)}{\alpha_2^2-\omega^2}+\left(i^2+\frac{5}{4}i\right)\beta_6\right]\\
&\quad+\mathrm{A}_1^{(i)}\left[-\frac{(\alpha_2^2+2\omega^2)(\alpha_6^2+2\omega^2)}{4(\alpha_1^2-\omega^2)(\alpha_2^2-\omega^2)}-\frac{(\alpha_6^2+5\omega^2)}{4(\alpha_1^2-\omega^2)}-\frac{\beta_2(\alpha_6^2+2\omega^2)}{2(\alpha_2^2-\omega^2)}\right.\\
&\quad\left.-\frac{\left(i-\frac{1}{2}\right)(\alpha_6^2+2\omega^2)}{2(\alpha_2^2-\omega^2)}-\left(i+\frac{1}{2}\right)\beta_6-\left(\frac{i^2}{2}+\frac{1}{8}i-\frac{1}{4}\right)\right]\\
&\quad\left.+\mathrm{A}_2^{(i)}\left[\frac{\alpha_6^2+2\omega^2}{4(\alpha_2^2-\omega^2)}+\frac{1}{4}\beta_6+\frac{i}{2}\right]+\mathrm{A}_3^{(i)}\left(-\frac{1}{8}\right)\right\},
\end{aligned}\right.
$$

(M) (suite)

$$\rho_7^{(i)} = \frac{a'm''}{\mu'}\frac{\omega^2}{\alpha_7^2-\omega^2}\Big\{\mathrm{A}^{(i)}\Big[\Big(i^2-\frac{9}{4}i+1\Big)\beta_7\Big] + \mathrm{A}_1^{(i)}\Big[\Big(\frac{3}{2}-i\Big)\beta_7 - \Big(\frac{i^2}{2}-\frac{13}{8}i+\frac{5}{4}\Big)\Big]$$
$$+ \mathrm{A}_2^{(i)}\Big[\frac{1}{4}\beta_7 + \Big(\frac{i}{2}-1\Big)\Big] + \mathrm{A}_3^{(i)}\Big(-\frac{1}{8}\Big)\Big\},$$

$$\rho_8^{(i)} = \frac{a'm''}{\mu'}\frac{\omega^2}{\alpha_8^2-\omega^2}\Big\{\mathrm{A}^{(i)}\Big[\frac{(1-2i)\beta_3(\alpha_8^2+2\omega^2)}{2(\alpha_3^2-\omega^2)} + i(1-2i)\beta_8\Big]$$
$$+ \mathrm{A}_1^{(i)}\Big[\frac{\beta_3(\alpha_8^2+2\omega^2)}{2(\alpha_3^2-\omega^2)} + \frac{(i-1)(\alpha_8^2+2\omega^2)}{2(\alpha_3^2-\omega^2)}$$
$$+ (2i-1)\beta_8 + \Big(i^2-\frac{3}{2}i+\frac{1}{2}\Big)\Big]$$
$$+ \mathrm{A}_2^{(i)}\Big[-\frac{\alpha_8^2+2\omega^2}{4(\alpha_3^2-\omega^2)} - \frac{1}{2}\beta_8 + (1-i)\Big] + \mathrm{A}_3^{(i)}\Big(+\frac{1}{4}\Big)\Big\},$$

$$\rho_9^{(i)} = \frac{a'm''}{\mu'}\frac{\omega^2}{\alpha_9^2-\omega^2}\Big\{\mathrm{A}^{(i)}\Big[\frac{(2i+1)\beta'_3(\alpha_9^2+2\omega^2)}{2(\alpha'^2_3-\omega^2)} + (2i^2+i)\beta_9\Big]$$
$$+ \mathrm{A}_1^{(i)}\Big[\frac{\beta'_3(\alpha_9^2+2\omega^2)}{2(\alpha'^2_3-\omega^2)} - \frac{(i+1)(\alpha_9^2+2\omega^2)}{2(\alpha'^2_3-\omega^2)} - \beta_9 - \Big(i^2+\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}\Big)\Big]$$
$$+ \mathrm{A}_2^{(i)}\Big[-\frac{\alpha_9^2+2\omega^2}{4(\alpha'^2_3-\omega^2)} - \frac{1}{2}\beta_9 + 1\Big] + \mathrm{A}_3^{(i)}\Big(+\frac{1}{4}\Big)\Big\}.$$

19. Pour le calcul de λ, nous poserons

$$(18)\quad \lambda = \sum\big[\lambda_1^{(i)}\sin i\varphi + e'\lambda_2^{(i)}\sin(i\varphi+l') + e''\lambda_3^{(i)}\sin(i\varphi+l'')$$
$$+ e'^2\lambda_4^{(i)}\sin(i\varphi) + e''^2\lambda_5^{(i)}\sin(i\varphi)$$
$$+ e'^2\lambda_6^{(i)}\sin(i\varphi+2l') + e''^2\lambda_7^{(i)}\sin(i\varphi+2l'')$$
$$+ e'e''\lambda_8^{(i)}\sin(i\varphi+l'+l'') + e'e''\lambda_9^{(i)}\sin(i\varphi+l'-l'')\big].$$

Nous emploierons l'équation déterminant λ à laquelle nous sommes parvenus au n° **14** et que je transcris ici :

$$\sqrt{1-e'^2}\,\lambda = 2\frac{d\left(\frac{r'}{a'}\rho\right)}{n'\,dt} - \rho\frac{d\left(\frac{r'}{a'}\right)}{n'\,dt} - \frac{a'm''n'}{\mu'}\int\Big[3\int(d\mathrm{U}) + 2r'\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial r'}\Big]dt.$$

Comme pour ρ, si l'on suppose que l'on substitue, aux variables connues ou inconnues, leurs développements, l'identification dans les deux membres des coefficients des mêmes sinus donnera les équations cherchées en $\lambda_1^{(i)}$, $\lambda_2^{(i)}$, ...

Il suffit de conserver le facteur $\sqrt{1-e'^2}$ dans $\lambda_1^{(i)}$.

Les α_i et les β_i ont la même signification que dans le numéro précédent. De même les P et les Q.

On obtient alors aisément les équations suivantes, avant de substituer aux ρ, P, Q leurs valeurs connues :

$$
\begin{aligned}
\sqrt{1-e'^2}\,\alpha_1\omega\lambda_1^{(i)} &= 2\alpha_1^2\rho_1^{(i)} && -(3\beta_1\omega^2 P_1^{(i)} - 2\omega^2 Q_1^{(i)})\frac{a'm''}{\mu'},\\
\alpha_2\omega\lambda_2^{(i)} &= 2\alpha_2^2(\rho_2^{(i)}-\rho_1^{(i)}) - \alpha_2\omega\rho_1^{(i)} && -(3\beta_2\omega^2 P_2^{(i)} - 2\omega^2 Q_2^{(i)})\frac{a'm''}{\mu'},\\
\alpha_3\omega\lambda_3^{(i)} &= 2\alpha_3^2\rho_3^{(i)} && -(3\beta_3\omega^2 P_3^{(i)} - 2\omega^2 Q_3^{(i)})\frac{a'm''}{\mu'},\\
\alpha_4\omega\lambda_4^{(i)} &= \alpha_4^2(2\rho_4^{(i)}-\rho_2^{(i)}+\rho_1^{(i)}) + \frac{\alpha_4\omega}{2}\rho_2^{(i)} && -(3\beta_4\omega^2 P_4^{(i)} - 2\omega^2 Q_4^{(i)})\frac{a'm''}{\mu'},\\
\alpha_5\omega\lambda_5^{(i)} &= 2\alpha_5^2\rho_5^{(i)} && -(3\beta_5\omega^2 P_5^{(i)} - 2\omega^2 Q_5^{(i)})\frac{a'm''}{\mu'},\\
\alpha_6\omega\lambda_6^{(i)} &= \alpha_6^2(2\rho_6^{(i)}-\rho_2^{(i)}-\rho_1^{(i)}) - \frac{\alpha_6\omega}{2}\rho_2^{(i)} - \alpha_6\omega\rho_1^{(i)} && -(3\beta_6\omega^2 P_6^{(i)} - 2\omega^2 Q_6^{(i)})\frac{a'm''}{\mu'},\\
\alpha_7\omega\lambda_7^{(i)} &= 2\alpha_7^2\rho_7^{(i)} && -(3\beta_7\omega^2 P_7^{(i)} - 2\omega^2 Q_7^{(i)})\frac{a'm''}{\mu'},\\
\alpha_8\omega\lambda_8^{(i)} &= \alpha_8^2(2\rho_8^{(i)}-\rho_3^{(i)}) - \frac{\alpha_8\omega}{2}\rho_3^{(i)} && -(3\beta_8\omega^2 P_8^{(i)} - 2\omega^2 Q_8^{(i)})\frac{a'm''}{\mu'},\\
\alpha_9\omega\lambda_9^{(i)} &= \alpha_9^2(2\rho_9^{(i)}-\rho_3^{(-i)}) - \frac{\alpha_9\omega}{2}\rho_3^{(-i)} && -(3\beta_9\omega^2 P_9^{(i)} - 2\omega^2 Q_9^{(i)})\frac{a'm''}{\mu'}.
\end{aligned}
$$

Remplaçant les ρ, les P et Q par leurs valeurs, il vient

$$
(\mathrm{N})\quad
\left\{
\begin{aligned}
\sqrt{1-e'^2}\,\lambda_1^{(i)} &= \frac{a'm''}{\mu'}\,\frac{\omega}{\alpha_1}\left[A^{(i)}\left(\frac{2\alpha_1^2\beta_1}{\alpha_1^2-\omega^2}-\frac{3}{2}\beta_1\right)+A_1^{(i)}\left(-\frac{\alpha_1^2}{\alpha_1^2-\omega^2}+1\right)\right],\\
\lambda_2^{(i)} &= \frac{a'm''}{\mu'}\,\frac{\omega}{\alpha_2}\Bigg\{\quad A^{(i)}\left[-\frac{\alpha_2(2\alpha_2+\omega)\beta_1}{\alpha_1^2-\omega^2}-3\beta_2 i+\frac{2\alpha_2^2\beta_1(\alpha_2^2+2\omega^2)}{(\alpha_1^2-\omega^2)(\alpha_2^2-\omega^2)}+\frac{4i\alpha_2^2\beta_2}{\alpha_2^2-\omega^2}\right]\\
&\qquad +A_1^{(i)}\left[-\frac{\alpha_2^2(\alpha_2^2+2\omega^2)}{(\alpha_1^2-\omega^2)(\alpha_2^2-\omega^2)}-\frac{2\alpha_2^2\beta_2}{\alpha_2^2-\omega^2}\right.\\
&\qquad\qquad \left.-\frac{(2i-1)\alpha_2^2}{\alpha_2^2-\omega^2}+\frac{3}{2}\beta_2+(2i-1)+\frac{\alpha_2(2\alpha_2+\omega)}{2(\alpha_1^2-\omega^2)}\right]+A_2^{(i)}\left(\frac{\alpha_2^2}{\alpha_2^2-\omega^2}-1\right)\Bigg\},\\
\lambda_3^{(i)} &= \frac{a'm''}{\mu'}\,\frac{\omega}{\alpha_3}\Bigg\{\quad A^{(i)}\left[\frac{2\alpha_3^2(1-2i)\beta_3}{\alpha_3^2-\omega^2}-\frac{3}{2}(1-2i)\beta_3\right]\\
&\qquad +A_1^{(i)}\left[\frac{2\alpha_3^2(\beta_3+i-1)}{\alpha_3^2-\omega^2}-\frac{3}{2}\beta_3+2(1-i)\right]+A_2^{(i)}\left(-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_3^2-\omega^2}+1\right)\Bigg\},
\end{aligned}
\right.
$$

(N) (suite)

$$
\begin{aligned}
\lambda_4^{(i)} = \frac{a' m''}{\mu'} \frac{\omega}{\alpha_4} \Bigg\{ \quad & \mathrm{A}^{(i)} \Bigg[\frac{\alpha_4^2 \beta_1}{\alpha_1^2 - \omega^2} - \frac{\alpha_4 \left(\alpha_4 - \frac{1}{2}\omega\right)(\alpha_2^2 + 2\omega^2)\beta_1}{(\alpha_1^2 - \omega^2)(\alpha_2^2 - \omega^2)} - \frac{\alpha_4 \left(\alpha_4 - \frac{1}{2}\omega\right) \times 2 i \beta_2}{\alpha_2^2 - \omega^2} \\
& \qquad + \frac{\alpha_4^2 \beta_1 (\alpha_2^2 + 2\omega^2)(\alpha_4^2 + 2\omega^2)}{(\alpha_1^2 - \omega^2)(\alpha_2^2 - \omega^2)(\alpha_4^2 - \omega^2)} - \frac{\alpha_4^2 \left(\alpha_4^2 - \frac{1}{2}\omega^2\right)\beta_1}{(\alpha_1^2 - \omega^2)(\alpha_4^2 - \omega^2)} \\
& \qquad + \frac{2 i \alpha_4^2 \beta_2 (\alpha_4^2 + 2\omega^2)}{(\alpha_2^2 - \omega^2)(\alpha_4^2 - \omega^2)} - \frac{2 i^2 \alpha_4^2 \beta_4}{\alpha_4^2 - \omega^2} + \frac{3}{2} i^2 \beta_4 \Bigg] \\
& + \mathrm{A}_1^{(i)} \Bigg[- \frac{\alpha_4^2}{2(\alpha_1^2 - \omega^2)} + \frac{\alpha_4 \left(\alpha_4 - \frac{1}{2}\omega\right)(\alpha_2^2 + 2\omega^2)}{2(\alpha_1^2 - \omega^2)(\alpha_2^2 - \omega^2)} + \frac{\alpha_4 \beta_2 \left(\alpha_4 - \frac{1}{2}\omega\right)}{\alpha_2^2 - \omega^2} \\
& \qquad + \frac{(2i - 1)\alpha_4 \left(\alpha_4 - \frac{1}{2}\omega\right)}{2(\alpha_2^2 - \omega^2)} - \frac{\alpha_4^2 (\alpha_2^2 + 2\omega^2)(\alpha_4^2 + 2\omega^2)}{2(\alpha_1^2 - \omega^2)(\alpha_2^2 - \omega^2)(\alpha_4^2 - \omega^2)} \\
& \qquad + \frac{\alpha_4^2 \left(\alpha_4^2 - \frac{1}{2}\omega^2\right)}{2(\alpha_1^2 - \omega^2)(\alpha_4^2 - \omega^2)} - \frac{\alpha_4^2 (\alpha_4^2 + 2\omega^2)\beta^2}{(\alpha_2^2 - \omega^2)(\alpha_4^2 - \omega^2)} + \frac{\alpha_4^2 \beta_4}{\alpha_4^2 - \omega^2} \\
& \qquad + \frac{(2i^2 - 1)\alpha_4^2}{2(\alpha_4^2 - \omega^2)} - \frac{(2i - 1)(\alpha_4^2 + 2\omega^2)\alpha_4^2}{2(\alpha_2^2 - \omega^2)(\alpha_4^2 - \omega^2)} - \frac{3}{4}\beta_4 - \left(i^2 - \frac{1}{2}\right) \Bigg] \\
& + \mathrm{A}_2^{(i)} \Bigg[- \frac{\alpha_4 \left(\alpha_4 - \frac{1}{2}\omega\right)}{2(\alpha_2^2 - \omega^2)} + \frac{\alpha_4^2 (\alpha_4^2 + 2\omega^2)}{2(\alpha_2^2 - \omega^2)(\alpha_4^2 - \omega^2)} \\
& \qquad + \frac{\alpha_4^2 \beta_4}{2(\alpha_4^2 - \omega^2)} - \frac{\alpha_4^2}{\alpha_4^2 - \omega^2} - \frac{3}{8}\beta_4 + 1 \Bigg] \\
& + \mathrm{A}_3^{(i)} \left[- \frac{\alpha_4^2}{4(\alpha_4^2 - \omega^2)} + \frac{1}{4} \right] \Bigg\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lambda_5^{(i)} = \frac{a' m''}{\mu'} \frac{\omega}{\alpha_5} \Bigg\{ \quad & \mathrm{A}^{(i)} \left(- \frac{2 i^2 \alpha_5^2 \beta_5}{\alpha_5^2 - \omega^2} + \frac{3}{2} i^2 \beta_5 \right) \\
& + \mathrm{A}_1^{(i)} \left[\frac{(2\beta_5 + 2i^2 - 1)\alpha_5^2}{2(\alpha_5^2 - \omega^2)} - \frac{3}{4}\beta_5 + \left(\frac{1}{2} - i^2\right) \right] \\
& + \mathrm{A}_2^{(i)} \left[\frac{(\beta_5 - 2)\alpha_5^2}{2(\alpha_5^2 - \omega^2)} - \frac{3}{8}\beta_5 + 1 \right] + \mathrm{A}_3^{(i)} \left[- \frac{\alpha_5^2}{4(\alpha_5^2 - \omega^2)} + \frac{1}{4} \right] \Bigg\},
\end{aligned}
$$

(N) (suite)

$$
\begin{aligned}
\lambda_6^{(i)} = \frac{a'm''}{\mu'}\,\frac{\omega}{\alpha_6}\Bigg\{\; & A^{(i)}\Bigg[-\frac{\beta_1\alpha_6(\alpha_6+\omega)}{\alpha_1^2-\omega^2} - \frac{\beta_1\alpha_6\left(\alpha_6+\frac{1}{2}\omega\right)(\alpha_2^2+2\omega^2)}{(\alpha_1^2-\omega^2)(\alpha_2^2-\omega^2)} - \frac{2i\beta_2\alpha_6\left(\alpha_6+\frac{1}{2}\omega\right)}{\alpha_2^2-\omega^2} \\
& + \frac{\alpha_6^2\beta_1(\alpha_2^2+2\omega^2)(\alpha_6^2+2\omega^2)}{(\alpha_1^2-\omega^2)(\alpha_2^2-\omega^2)(\alpha_6^2-\omega^2)} + \frac{\alpha_6^2(\alpha_6^2+5\omega^2)\beta_1}{(\alpha_1^2-\omega^2)(\alpha_6^2-\omega^2)} \\
& + \frac{2i\beta_2\alpha_6^2(\alpha_6^2+2\omega^2)}{(\alpha_2^2-\omega^2)(\alpha_6^2-\omega^2)} + \frac{(4i^2+5i)\alpha_6^2\beta_6}{2(\alpha_6^2-\omega^2)} - 3\left(\frac{i^2}{2}+\frac{5}{8}i\right)\beta_6\Bigg] \\
& + A_1^{(i)}\Bigg[\frac{\alpha_6(\alpha_6+\omega)}{2(\alpha_1^2-\omega^2)} + \frac{\alpha_6\left(\alpha_6+\frac{1}{2}\omega\right)(\alpha_2^2+2\omega^2)}{2(\alpha_1^2-\omega^2)(\alpha_2^2-\omega^2)} + \frac{\beta_2\alpha_6\left(\alpha_6+\frac{1}{2}\omega\right)}{\alpha_2^2-\omega^2} \\
& + \frac{(2i-1)\alpha_6\left(\alpha_6+\frac{1}{2}\omega\right)}{2(\alpha_2^2-\omega^2)} - \frac{\alpha_6^2(\alpha_2^2+2\omega^2)(\alpha_6^2+2\omega^2)}{2(\alpha_1^2-\omega^2)(\alpha_2^2-\omega^2)(\alpha_6^2-\omega^2)} \\
& - \frac{\alpha_6^2(\alpha_6^2+5\omega^2)}{2(\alpha_1^2-\omega^2)(\alpha_6^2-\omega^2)} - \frac{\alpha_6^2\beta_2(\alpha_6^2+2\omega^2)}{(\alpha_2^2-\omega^2)(\alpha_6^2-\omega^2)} - \frac{(2i-1)\alpha_6^2(\alpha_6^2+2\omega^2)}{2(\alpha_2^2-\omega^2)(\alpha_6^2-\omega^2)} \\
& - \frac{(2i+1)\alpha_6^2\beta_6}{\alpha_6^2-\omega^2} - \frac{(4i^2+i-2)\alpha_6^2}{4(\alpha_6^2-\omega^2)} + 3\left(\frac{i}{2}+\frac{1}{4}\right)\beta_6 + \left(i^2+\frac{1}{4}i-\frac{1}{2}\right)\Bigg] \\
& + A_2^{(i)}\Bigg[-\frac{\alpha_6\left(\alpha_6+\frac{1}{2}\omega\right)}{2(\alpha_2^2-\omega^2)} + \frac{\alpha_6^2(\alpha_6^2+2\omega^2)}{2(\alpha_2^2-\omega^2)(\alpha_6^2-\omega^2)} \\
& + \frac{\alpha_6^2\beta_6}{2(\alpha_6^2-\omega^2)} + \frac{i\alpha_6^2}{\alpha_6^2-\omega^2} - \frac{3}{8}\beta_6 - i\Bigg] \\
& + A_3^{(i)}\left[-\frac{\alpha_6^2}{4(\alpha_6^2-\omega^2)} + \frac{1}{4}\right]\Bigg\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\lambda_7^{(i)} = \frac{a'm''}{\mu'}\,\frac{\omega}{\alpha_7}\Bigg\{\; & A^{(i)}\left[\frac{(4i^2-9i+4)\alpha_7^2\beta_7}{2(\alpha_7^2-\omega^2)} - 3\left(\frac{i^2}{2}-\frac{9}{8}i+\frac{1}{2}\right)\beta_7\right] \\
& + A_1^{(i)}\left[\frac{(3-2i)\alpha_7^2\beta_7}{\alpha_7^2-\omega^2} - \frac{(4i^2-13i+10)\alpha_7^2}{4(\alpha_7^2-\omega^2)} + 3\left(\frac{i}{2}-\frac{3}{4}\right)\beta_7 + \left(i^2-\frac{13}{4}i+\frac{5}{2}\right)\right] \\
& + A_2^{(i)}\left[\frac{\alpha_7^2\beta_7}{2(\alpha_7^2-\omega^2)} + \frac{(i-2)\alpha_7^2}{\alpha_7^2-\omega^2} - \frac{3}{8}\beta_7 + (2-i)\right] + A_3^{(i)}\left[-\frac{\alpha_7^2}{4(\alpha_7^2-\omega^2)} + \frac{1}{4}\right]\Bigg\},
\end{aligned}
$$

(N) (suite)

$$
\left\{
\begin{aligned}
\lambda_8^{(i)} = \frac{a'm''}{\mu'}\,\frac{\omega}{\alpha_8}\Bigg\{ & \mathrm{A}^{(i)}\left[\frac{(2i-1)\beta_3\alpha_8\left(\alpha_8+\frac{1}{2}\omega\right)}{\alpha_3^2-\omega^2} + \frac{(1-2i)\beta_3\alpha_8^2(\alpha_8^2+2\omega^2)}{(\alpha_3^2-\omega^2)(\alpha_8^2-\omega^2)} \right.\\
& \left. \qquad - \frac{2(2i^2-i)\beta_8\alpha_8^2}{\alpha_8^2-\omega^2} + 3\left(i^2-\frac{1}{2}i\right)\beta_8\right]\\
& + \mathrm{A}_1^{(i)}\left[-\frac{(\beta_3+i-1)\alpha_8\left(\alpha_8+\frac{1}{2}\omega\right)}{\alpha_3^2-\omega^2} + \frac{\alpha_8^2\beta_3(\alpha_8^2+2\omega^2)}{(\alpha_3^2-\omega^2)(\alpha_8^2-\omega^2)}\right.\\
& \qquad + \frac{(i-1)\alpha_8^2(\alpha_8^2+2\omega^2)}{(\alpha_3^2-\omega^2)(\alpha_8^2-\omega^2)} + \frac{2(2i-1)\alpha_8^2\beta_8}{\alpha_8^2-\omega^2}\\
& \left. \qquad + \frac{(2i^2-3i+1)\alpha_8^2}{\alpha_8^2-\omega^2} - 3\left(i-\frac{1}{2}\right)\beta_8 - (2i^2-3i+1)\right]\\
& + \mathrm{A}_2^{(i)}\left[\frac{\alpha_8\left(\alpha_8+\frac{1}{2}\omega\right)}{2(\alpha_3^2-\omega^2)} - \frac{\alpha_8^2(\alpha_8^2+2\omega^2)}{2(\alpha_3^2-\omega^2)(\alpha_8^2-\omega^2)}\right.\\
& \left. \qquad + \frac{(2-2i-\beta_8)\alpha_8^2}{\alpha_8^2-\omega^2} + \frac{3}{4}\beta_8 + 2(i-1)\right] + \mathrm{A}_3^{(i)}\left[\frac{\alpha_8^2}{2(\alpha_8^2-\omega^2)} - \frac{1}{2}\right]\Bigg\},\\[2ex]
\lambda_9^{(i)} = \frac{a'm''}{\mu'}\,\frac{\omega}{\alpha_9}\Bigg\{ & \mathrm{A}^{(i)}\left[-\frac{(2i+1)\beta'_3\alpha_9\left(\alpha_9+\frac{1}{2}\omega\right)}{\alpha'^2_3-\omega^2} + \frac{(2i+1)\beta'_3\alpha_9^2(\alpha_9^2+2\omega^2)}{(\alpha'^2_3-\omega^2)(\alpha_9^2-\omega^2)}\right.\\
& \left. \qquad + \frac{2(2i^2+i)\beta_9\alpha_9^2}{\alpha_9^2-\omega^2} - 3\left(i^2+\frac{1}{2}i\right)\beta_9\right]\\
& + \mathrm{A}_1^{(i)}\left[-\frac{(\beta'_3-i-1)\alpha_9\left(\alpha_9+\frac{1}{2}\omega\right)}{\alpha'^2_3-\omega^2} + \frac{\beta'_3\alpha_9^2(\alpha_9^2+2\omega^2)}{(\alpha'^2_3-\omega^2)(\alpha_9^2-\omega^2)}\right.\\
& \left. \qquad - \frac{(i+1)\alpha_9^2(\alpha_9^2+2\omega^2)}{(\alpha'^2_3-\omega^2)(\alpha_9^2-\omega^2)} - \frac{(2\beta_9+2i^2+i-1)\alpha_9^2}{\alpha_9^2-\omega^2} + \frac{3}{2}\beta_9 + (2i^2+i-1)\right]\\
& + \mathrm{A}_2^{(i)}\left[\frac{\alpha_9\left(\alpha_9+\frac{1}{2}\omega\right)}{2(\alpha'^2_3-\omega^2)} - \frac{\alpha_9^2(\alpha_9^2+2\omega^2)}{2(\alpha'^2_3-\omega^2)(\alpha_9^2-\omega^2)} + \frac{(2-\beta_9)\alpha_9^2}{\alpha_9^2-\omega^2} + \frac{3}{4}\beta_9 - 2\right]\\
& + \mathrm{A}_3^{(i)}\left[\frac{\alpha_9^2}{2(\alpha_9^2-\omega^2)} - \frac{1}{2}\right]\Bigg\}.
\end{aligned}
\right.
$$

De même que $\rho_9^{(i)}$, cette expression de $\lambda_9^{(i)}$ renferme les quantités α'_3, β'_3.

III. — Méthode de M. Andoyer.

20. Ce paragraphe a pour objet l'étude d'une nouvelle forme de la fonction perturbatrice relative à l'action directe, qui, pour le cas d'une planète voisine du Soleil et avec l'approximation dont nous avons besoin, dispense de recourir aux formules concernant l'action indirecte.

L'idée de cette méthode est due à M. Andoyer, qui s'est proposé de l'appliquer à un système formé de deux étoiles doubles. M. Andoyer a bien voulu m'en communiquer le principe avant d'en publier un exposé complet.

Je dois à cette méthode nouvelle l'avantage d'une vérification approchée, mais précieuse, de l'ensemble de mes calculs. Il est intéressant, d'ailleurs, de comparer, sur un exemple particulier analogue à celui que M. Andoyer a en vue, les résultats qu'elle donne à ceux de la méthode ordinaire.

Soient T, L, S, P les centres de gravité de la Terre, de la Lune, du Soleil et de la planète intramercurielle; G, le centre de gravité des deux premiers corps; O, celui des deux autres; H, celui de tout le système.

Soient, parallèlement à trois axes fixes, x, y, z les coordonnées géocentriques de la Lune; x', y', z' celles de G par rapport à O; x'', y'', z'' celles de P rapportées à S et, par rapport à H,

X_0,	Y_0,	Z_0	les coordonnées de	T,
X,	Y,	Z	»	L,
X',	Y',	Z'	»	S,
X'',	Y'',	Z''	»	P.

Désignons les masses respectivement par m_0, m, m', m'' et par M leur somme. Alors, les coordonnées de L et de T, par rapport à G, seront

$$\frac{m_0 x}{m+m_0}, \quad \frac{m_0 y}{m+m_0}, \quad \frac{m_0 z}{m+m_0},$$

$$-\frac{m x}{m+m_0}, \quad -\frac{m y}{m+m_0}, \quad -\frac{m z}{m+m_0}.$$

Pareillement, on a, pour les coordonnées de P et de S rapportées à O,

$$\frac{m' x''}{m'+m''}, \quad \frac{m' y''}{m'+m''}, \quad \frac{m' z''}{m'+m''},$$

$$-\frac{m'' x''}{m'+m''}, \quad -\frac{m'' y''}{m'+m''}, \quad -\frac{m'' z''}{m'+m''}.$$

De même les coordonnées de G et O par rapport à H sont

$$\frac{m'+m''}{M}x', \quad \frac{m'+m''}{M}y', \quad \frac{m'+m''}{M}z',$$
$$-\frac{m_0+m}{M}x', \quad -\frac{m_0+m}{M}y', \quad -\frac{m_0+m}{M}z'.$$

On a par suite, pour les coordonnées des quatre astres, rapportées au centre de gravité de tout le système, en n'écrivant que la première de chacun d'eux,

$$\begin{aligned}
X &= \frac{m_0}{m+m_0}x + \frac{m'+m''}{M}x',\\
X_0 &= -\frac{m}{m+m_0}x + \frac{m'+m''}{M}x',\\
X' &= -\frac{m_0+m}{M}x' - \frac{m''}{m'+m''}x'',\\
X'' &= -\frac{m_0+m}{M}x' + \frac{m'}{m'+m''}x''.
\end{aligned}$$

Il en résulte, pour l'expression de la demi-force vive du système, le signe $\sum$ s'étendant aux trois coordonnées de chaque corps,

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}\sum\left(m\frac{dX^2}{dt^2} + m_0\frac{dX_0^2}{dt^2} + m'\frac{dX'^2}{dt^2} + m''\frac{dX''^2}{dt^2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\sum\left[\frac{mm_0}{m+m_0}\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{m'm''}{m'+m''}\frac{dx''^2}{dt^2} + \frac{(m+m_0)(m'+m'')}{M}\frac{dx'^2}{dt^2}\right].
\end{aligned}$$

En désignant par f la constante d'attraction, on a, pour la fonction des forces,

$$U = f\left(\frac{mm_0}{r} + \frac{m'm''}{r''} + \frac{mm'}{\delta'} + \frac{m_0m''}{\delta''_0} + \frac{mm''}{\delta''} + \frac{m_0m'}{\delta'_0}\right),$$

en posant

$$TL = r, \quad OG = r', \quad SP = r'', \quad LS = \delta', \quad TS = \delta'_0, \quad TP = \delta''_0, \quad LP = \delta'';$$

on a, par conséquent,

$$\begin{aligned}
\delta'^2 &= \sum(X-X')^2 = \sum\left(x' + \frac{m_0}{m+m_0}x + \frac{m''}{m'+m''}x''\right)^2,\\
\delta_0'^2 &= \sum(X_0-X')^2 = \sum\left(x' - \frac{m}{m+m_0}x + \frac{m''}{m'+m''}x''\right)^2,\\
\delta''^2 &= \sum(X-X'')^2 = \sum\left(x' + \frac{m_0}{m+m_0}x - \frac{m'}{m'+m''}x''\right)^2,\\
\delta_0''^2 &= \sum(X_0-X'')^2 = \sum\left(x' - \frac{m}{m+m_0}x - \frac{m'}{m'+m''}x''\right)^2.
\end{aligned}$$

Le deuxième et le troisième termes de chaque crochet sont de petites quantités par rapport à x'. Par suite, ε', ε'_0, ε'', ε''_0 désignant de petites fractions, on peut écrire

$$\delta' = r'(1+\varepsilon'), \qquad \delta'_0 = r'(1+\varepsilon'_0),$$
$$\delta'' = r'(1+\varepsilon''), \qquad \delta''_0 = r'(1+\varepsilon''_0).$$

Nous écrirons alors

$$U = f\left[\frac{mm_0}{r} + \frac{m'm''}{r''} + \frac{(m_0+m)(m'+m'')}{r'}\right] + V,$$

V désignant une petite quantité par rapport aux trois premiers termes de U.

Supposons que l'on néglige d'abord V. Si l'on forme les équations du mouvement relatives aux variables $x, y, z, \ldots$, on voit aisément que chacun de ces trois mouvements est elliptique, les masses centrales correspondantes étant respectivement

$$m+m_0, \quad m'+m'', \quad \mathbf{M}.$$

Désignant les moyens mouvements et les demi-grands axes de ces ellipses par n, n', n'' et a, a', a'', on a

$$n^2a^3 = f(m+m_0), \qquad n'^2a'^3 = f(m'+m''), \qquad n''^2a''^3 = f\mathbf{M}.$$

Considérons le mouvement défini par les variables x, y, z. La force vive correspondante est

$$\frac{1}{2}\frac{mm_0}{m+m_0}\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}\right),$$

et la fonction des forces

$$f\frac{mm_0}{r} + V.$$

C'est le mouvement d'un point de masse *un*, avec la fonction des forces

$$f\frac{m+m_0}{r} + \frac{m+m_0}{mm_0}V.$$

Donc, x, y, z sont relatives au mouvement elliptique produit par la force centrale $f(m+m_0)$, et le mouvement troublé résulte de la fonction perturbatrice

$$R = \frac{m+m_0}{mm_0}V.$$

Désignons par V' et V'' les fonctions perturbatrices relatives aux deux autres mobiles (x', y', z') et (x'', y'', z''). On a, de même,

$$(19) \qquad V' = \frac{M}{(m+m_0)(m'+m'')} V, \qquad V'' = \frac{m'+m''}{m'm''} V.$$

21. On est donc ramené au développement de V suivant les puissances des inclinaisons et des excentricités des orbites.

H, H', H'' étant les angles que font entre elles les directions des rayons vecteurs (r', r''), (r'', r), (r, r'), on a les relations suivantes :

$$x'x'' + y'y'' + z'z'' = r'r'' \cos H,$$
$$x\, x'' + y\, y'' + z\, z'' = r\, r'' \cos H',$$
$$x\, x' + y\, y' + z\, z' = r\, r' \cos H''.$$

Considérons l'expression

$$(20) \qquad (r^2 + r'^2 + r''^2 + 2r'r'' \cos H + 2r''r \cos H' + 2rr' \cos H'')^{-\frac{1}{2}}.$$

On peut la développer sous la forme

$$\sum \frac{r^n r''^{n''}}{r'^{n'}} P_{n, n', n''},$$

où $P_{n,n',n''}$ désigne une fonction de $\cos H$, $\cos H'$, $\cos H''$. Remarquons que les trois nombres n, n', n'' ne sont pas arbitraires ; ils sont liés par la relation

$$n' = n + n'' + 1.$$

Revenons à la fonction V. On peut écrire

$$\frac{V}{f} = \left[mm'\left(\frac{1}{\delta'} - \frac{1}{r'}\right) + m_0 m''\left(\frac{1}{\delta''_0} - \frac{1}{r'}\right) + mm''\left(\frac{1}{\delta''} - \frac{1}{r'}\right) + m_0 m'\left(\frac{1}{\delta'_0} - \frac{1}{r'}\right)\right]$$
$$= -\frac{(m+m_0)(m'+m'')}{r'} + \frac{mm'}{\delta'} + \frac{m_0 m''}{\delta''_0} + \frac{mm''}{\delta''} + \frac{m_0 m'}{\delta'_0}.$$

Or on a

$$\delta'^2 = \sum \left(x' + \frac{m_0}{m+m_0} x + \frac{m''}{m'+m''} x''\right)^2$$
$$= r'^2 + \left(\frac{m_0}{m+m_0}\right)^2 r^2 + \left(\frac{m''}{m'+m''}\right)^2 r''^2$$
$$+ \sum \left[2\frac{m_0}{m+m_0} xx' + 2\frac{m''}{m'+m''} x'x'' + 2\frac{m_0 m''}{(m+m_0)(m'+m'')} xx'' \right].$$

Pareillement, en ce qui concerne δ'',

$$\delta''^2 = r'^2 + \left(\frac{m_0}{m+m_0}\right)^2 r^2 + \left(\frac{m'}{m'+m''}\right)^2 r''^2$$
$$+\sum\left[2\frac{m_0}{m+m_0}xx' - 2\frac{m'}{m'+m''}x'x'' - 2\frac{m_0 m'}{(m+m_0)(m'+m'')}xx''\right].$$

Et, de même pour δ'_0 et δ''_0,

$$\delta'^2_0 = r'^2 + \left(\frac{m}{m+m_0}\right)^2 r^2 + \left(\frac{m''}{m'+m''}\right)^2 r''^2$$
$$+\sum\left[-2\frac{m}{m+m_0}xx' + 2\frac{m''}{m'+m''}x'x'' - 2\frac{mm''}{(m+m_0)(m'+m'')}xx''\right],$$

$$\delta''^2_0 = r'^2 + \left(\frac{m}{m+m_0}\right)^2 r^2 + \left(\frac{m'}{m'+m''}\right)^2 r''^2$$
$$+\sum\left[-2\frac{m}{m+m_0}xx'' - 2\frac{m'}{m'+m''}x'x'' + 2\frac{mm'}{(m+m_0)(m'+m'')}xx''\right].$$

On peut écrire les expressions précédentes sous une autre forme, en introduisant les angles H, H′, H″. Par exemple, celle qui concerne δ' devient

$$\delta'^2 = r'^2 + \left(\frac{m_0}{m+m_0}\right)^2 r^2 + \left(\frac{m''}{m'+m''}\right)^2 r''^2$$
$$+2\frac{m_0}{m+m_0}rr'\cos \mathrm{H}'' + 2\frac{m''}{m'+m''}r'r''\cos \mathrm{H} + 2\frac{m_0 m''}{(m+m_0)(m'+m'')}rr''\cos \mathrm{H}'.$$

Cette expression montre que $\frac{1}{\delta'}$ ne diffère de (20), c'est-à-dire de

$$\sum \frac{r^n r''^{n''}}{r'^{n'}} \mathrm{P}_{n,n',n''},$$

qu'en ce que r et r'' sont remplacés par $\frac{m_0}{m+m_0}r$ et $\frac{m''}{m'+m''}r''$.

On a alors

$$\frac{mm'}{\delta'} = mm' \sum \frac{r^n r''^{n''}}{r'^{n'}} \mathrm{P}_{n,n',n''} \left(\frac{m_0}{m+m_0}\right)^n \left(\frac{m''}{m'+m''}\right)^{n''}$$
$$= \sum \frac{r^n r''^{n''}}{r'^{n'}} mm' m_0 m'' (-1)^{n''} \mathrm{P}_{n,n',n''} \frac{m_0^{n-1}}{(m+m_0)^n} \frac{(-1)^{n''} m''^{n''-1}}{(m'+m'')^{n''}}.$$

$\frac{mm''}{\delta''}$ se déduit de la même expression en remplaçant r et r'' par les quantités $\frac{m_0}{m+m_0}r$ et $-\frac{m'}{m'+m''}r''$, et il vient

$$\frac{mm''}{\delta''} = mm'' \sum \frac{r^n r''^{n''}}{r'^{n'}} \mathrm{P}_{n,n',n''} \left(\frac{m_0}{m+m_0}\right)^n \left(\frac{-m'}{m'+m''}\right)^{n''}$$
$$= \sum \frac{r^n r''^{n''}}{r'^{n'}} mm' m_0 m'' (-1)^{n''} \mathrm{P}_{n,n',n''} \frac{m_0^{n-1}}{(m+m_0)^n} \frac{m'^{n''-1}}{(m'+m'')^{n''}}.$$

D'une façon analogue, on obtient

$$\frac{m_0 m'}{\delta'_0} = m_0 m' \sum \frac{r^n r''^{n''}}{r'^{n'}} \mathrm{P}_{n,n',n''} \left(\frac{-m}{m+m_0}\right)^n \left(\frac{m''}{m'+m''}\right)^{n''}$$
$$= \sum mm' m_0 m'' \frac{r^n r''^{n''}}{r'^{n'}} (-1)^{n''} \mathrm{P}_{n,n',n''} \frac{(-1)^n m^{n-1}}{(m+m_0)^n} \frac{(-1)^{n''} m''^{n''-1}}{(m'+m'')^{n''}},$$

$$\frac{m_0 m''}{\delta''_0} = m_0 m'' \sum \frac{r^n r''^{n''}}{r'^{n'}} \mathrm{P}_{n,n',n''} \left(\frac{-m}{m+m_0}\right)^n \left(\frac{-m'}{m'+m''}\right)^{n''}$$
$$= \sum mm' m_0 m'' \frac{r^n r''^{n''}}{r'^{n'}} (-1)^{n''} \mathrm{P}_{n,n',n''} \frac{(-1)^n m^{n-1}}{(m+m_0)^n} \frac{m'^{n''-1}}{(m'+m'')^{n''}};$$

par suite, il vient successivement, pour l'expression de V,

$$(21)\quad \frac{\mathrm{V}}{f} = -\frac{(m+m_0)(m'+m'')}{r'}$$
$$+\sum (-1)^{n''} \frac{r^n r''^{n''}}{r'^{n'}} mm' m_0 m'' \mathrm{P}_{n,n',n''} \frac{m_0^{n-1}[m'^{n''-1}+(-1)^{n''}m''^{n''-1}]+(-1)^n m^{n-1}[m'^{n''-1}+(-1)^{n''}m''^{n''-1}]}{(m+m_0)^n (m'+m'')^{n''}}$$
$$= -\frac{(m+m_0)(m'+m'')}{r'}$$
$$+\sum (-1)^{n''} \frac{r^n r''^{n''}}{r'^{n'}} mm' m_0 m'' \mathrm{P}_{n,n',n''} \frac{[m_0^{n-1}+(-1)^n m^{n-1}][m'^{n''-1}+(-1)^{n''} m''^{n''-1}]}{(m+m_0)^n (m'+m'')^{n''}}.$$

Comme $\mathrm{P}_{0,1,0} = 1$, le terme en $\frac{1}{r'}$ disparaît de ce développement. En outre, les termes correspondant à $n=1$ et à $n''=1$ sont nuls. Il s'ensuit que V n'a pas de terme en $\frac{1}{r'}$, pas de terme non plus contenant r ou r'' à la première puissance.

Voici les premiers termes de ce développement

$$\begin{aligned}\frac{V}{f} = {} & \frac{r''^2}{r'^3} m'm'' \frac{m_0+m}{m'+m''} P_{0,3,2} + \frac{r^2}{r'^3} mm_0 \frac{m'+m''}{m+m_0} P_{2,3,0} \\ & - \frac{r''^3}{r'^4} m'm'' \frac{(m+m_0)(m'-m'')}{(m'+m'')^2} P_{0,4,3} + \frac{r^3}{r'^4} mm_0 \frac{(m_0-m)(m'+m'')}{(m+m_0)^2} P_{3,4,0} \\ & + \frac{r''^4}{r'^5} m'm'' \frac{(m+m_0)(m'^2-m'm''+m''^2)}{(m'+m'')^3} P_{0,5,4} + \frac{r^2 r''^2}{r'^5} \frac{mm_0 m'm'' P_{2,5,2}}{(m+m_0)(m'+m'')} \\ & + \frac{r^4}{r'^5} mm_0 \frac{(m_0^2-mm_0+m^2)(m'+m'')}{m+m_0)^3} P_{4,5,0} - \frac{r^2 r''^3}{r'^6} \frac{mm_0 m'm''(m'-m'')}{(m+m_0)(m'+m'')^2} P_{2,6,3} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

On peut remarquer que $P_{0,3,2}$, $P_{0,4,3}$, $P_{0,5,4}$ sont des fonctions de $\cos H$ seulement, et de même $P_{2,3,0}$, $P_{3,4,0}$, $P_{4,5,0}$, de $\cos H''$.

Revenons aux expressions qui, à la fin du n° 20, définissent les fonctions perturbatrices R, V′, V″, et comparons leur ordre de grandeur.

En tenant compte du développement ci-dessus de V, on voit que R est de l'ordre de $f(m'+m'')\dfrac{r^2}{r'^3}$.

De même on trouve que V″ est du même ordre que $f(m+m_0)\dfrac{r''^2}{r'^3}$.

Quant à V′, elle est de l'ordre de $f\dfrac{mm_0 M}{(m+m_0)^2}\dfrac{r^2}{r'^3}$, par suite de l'action de la Lune, et de l'ordre de $f\dfrac{m'm''M}{(m'+m'')^2}\dfrac{r''^2}{r'^3}$, par suite de l'action de la planète voisine.

22. Pour la question que nous avons à traiter, c'est R que nous devons considérer. Rappelons que l'on a

$$R = \frac{m+m_0}{mm_0} V.$$

On a, par suite,

$$(22)\qquad \frac{R}{f} = \sum (-1)^{n''} \frac{r^n r''^{n''}}{r'^{n'}} m'm'' P_{n,n',n''} \frac{[m_0^{n-1}+(-1)^n m^{n-1}][m'^{n''-1}+(-1)^{n''} m''^{n''-1}]}{(m+m_0)^{n-1}(m'+m'')^{n''}},$$

à la condition de supprimer dans le second membre le terme $P_{0,1,0}$.

Remarquons que l'on n'a pas besoin de conserver les termes où $n=0$, car ils sont indépendants des coordonnées de la Lune.

Finalement, dans le second membre de (22), on devra exclure les termes où l'on a $n=0$, $n=1$, $n''=1$.

De plus, négligeons m devant m_0, m'' devant m'. Nous considérerons deux cas.

1° Soit $n''\neq 0$. Alors

$$\frac{R}{f} = \sum (-1)^{n''} \frac{r^n r''^{n''}}{r'^{n'}} m'' P_{n,n',n''} = m'' \sum \frac{r^n(-r'')^{n''}}{r'^{n'}} P_{n,n',n''};$$

2° Soit $n'' = 0$. Dans ce cas

$$\frac{R}{f} = \sum \frac{r^n}{r'^{n'}} m' m'' \left[\frac{1}{m'} + \frac{1}{m''}\right] P_{n,n',0} = \sum \frac{r^n}{r'^{n'}} m' m'' \frac{m' + m''}{m' m''} P_{n,n',0}$$

ou, en négligeant m'' devant m',

$$\frac{R}{f} = m' \sum \frac{r^n (-r'')^{n''}}{r'^{n'}} P_{n,n',n''}.$$

Il s'ensuit que l'on aura R en développant l'expression

$$fm'' (r^2 + r'^2 + r''^2 - 2r'r'' \cos H + 2rr' \cos H'' - 2rr'' \cos H')^{-\frac{1}{2}},$$

et l'on devra faire $m'' = 0$ dans les termes pour lesquels on a $n = 0$, ou $n = 1$, ou $n'' = 1$, et $m'' = m'$ pour ceux des termes conservés où $n'' = 0$.

Or, en posant $D^2 = r'^2 + r''^2 - 2r'r'' \cos H$ et poussant le développement jusqu'à $n = 3$, on a

$$\begin{aligned}
&[r^2 + D^2 + 2r(r' \cos H'' - r'' \cos H')]^{-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{D} - \frac{1}{2} \frac{r^2 + 2r(r' \cos H'' - r'' \cos H')}{D^3} + \frac{3}{2} \frac{r^2 (r' \cos H'' - r'' \cos H')^2}{D^5} \\
&\quad + \frac{3}{2} \frac{r^3 (r' \cos H'' - r'' \cos H')}{D^5} - \frac{5}{2} \frac{r^3 (r' \cos H'' - r'' \cos H')^3}{D^7}.
\end{aligned}$$

Comme on ne doit avoir ni $n = 0$, ni $n = 1$, on en conclut

$$\begin{aligned}
R &= fm'' r^2 \left[-\frac{1}{2} D^{-3} + \frac{3}{2} \frac{(r' \cos H'' - r'' \cos H')^2}{D^5}\right] \\
&\quad + fm'' r^3 \left[\frac{3}{2} \frac{r' \cos H'' - r'' \cos H'}{D^5} - \frac{5}{2} \frac{(r' \cos H'' - r'' \cos H')^3}{D^7}\right].
\end{aligned}$$

On fera encore dans cette expression $m'' = 0$ pour les termes où $n'' = 1$ et l'on remplacera m'' par m' dans ceux où $n'' = 0$.

Or l'expression précédente est la même que celle que nous avons trouvée pour la fonction perturbatrice relative à l'action directe, dans la méthode ordinaire (n° 1). Toutefois les coordonnées ne sont pas rigoureusement les mêmes dans les deux cas. En effet, dans la méthode de M. Andoyer, r', par exemple, désigne le rayon vecteur du point G par rapport à O (n° 20), tandis que, dans la méthode ordinaire, c'est le rayon vecteur relatif au mobile T rapporté à S. Mais l'influence de ces différences sur les résultats numériques n'est pas sensible.

Nous aurons donc, dans la nouvelle méthode, pour la fonction perturbatrice, l'expression suivante, avec la réserve des corrections indiquées,

$$\begin{aligned}
\mathrm{R} = \quad & fm'' \frac{r^2}{r'^3}\left[\frac{1}{8} c^{(i)} \cos i\varphi + \frac{3}{8} g^{(i)} \cos(i\varphi + \psi)\right] \\
& + fm'' \frac{r^3}{r'^4}\left[\frac{3}{16}(\beta e^{(i-1)} - e^{(i)}) \cos\left(i\varphi + \frac{\psi - \varphi}{2}\right)\right. \\
& \qquad \left. + \frac{5}{16}(-f^{(i)} + 3\beta f^{(i-1)} - 3\beta^2 f^{(i-2)} + \beta^3 f^{(i-3)}) \cos\left(i\varphi + 3\,\frac{\psi - \varphi}{2}\right)\right] \\
& + fm'' \frac{r^2}{r'^3}\left[\frac{9}{8}\beta\alpha e^{(i)} \cos i\varphi + \frac{15}{8}\beta\alpha f^{(i)} \cos(i\varphi + \psi - \varphi)\right. \\
& \qquad + \frac{15}{8}\beta^3\alpha f^{(i)} \cos(i\varphi + \psi + \varphi) - \frac{15}{4}\beta^2\alpha f^{(i)} \cos(i\varphi + \psi) \\
& \qquad + \frac{3}{2}\beta^2\alpha' e^{(i)} \cos\left(i\varphi + \frac{\psi + \varphi}{2}\right) - \frac{3}{2}\beta\alpha' e^{(i)} \cos\left(i\varphi + \frac{\psi - \varphi}{2}\right) \\
& \qquad \left. - \frac{3}{2}\beta\alpha'' e^{(i)} \cos\left(i\varphi + \frac{\psi + \varphi}{2}\right) + \frac{3}{2}\alpha'' e^{(i)} \cos\left(i\varphi + \frac{\psi - \varphi}{2}\right)\right].
\end{aligned}$$

C'est la somme des résultats obtenus aux n^{os} 3, 4 et 7, où ont été définies les diverses quantités φ, ψ, α, α', ... Remarquons que α, α', α'' sont indépendantes de $\beta = \frac{r''}{r'}$.

On a

$$c^{(i)} = 2\,\frac{3.5\ldots(2i+1)}{2.4\ldots 2i}\left[\beta^i + \frac{3}{2}\,\frac{2i+3}{2i+2}\beta^{i+2} + \frac{3.5}{2.4}\,\frac{(2i+3)(2i+5)}{(2i+2)(2i+4)}\beta^{i+4} + \ldots\right],$$

$$e^{(i)} = 2\,\frac{5.7\ldots(2i+3)}{2.4\ldots 2i}\left[\beta^i + \frac{5}{2}\,\frac{2i+5}{2i+2}\beta^{i+2} + \frac{5.7}{2.4}\,\frac{(2i+5)(2i+7)}{(2i+2)(2i+4)}\beta^{i+4} + \ldots\right],$$

$$f^{(i)} = 2\,\frac{7.9\ldots(2i+5)}{2.4\ldots 2i}\left[\beta^i + \frac{7}{2}\,\frac{2i+7}{2i+2}\beta^{i+2} + \frac{7.9}{2.4}\,\frac{(2i+7)(2i+9)}{(2i+2)(2i+4)}\beta^{i+4} + \ldots\right],$$

où, comme l'on sait, il faut remplacer, pour $i = 0$, les fractions en dehors des crochets par l'unité.

En partant de la définition que nous avons donnée de $g^{(i)}$, on déduit de la série $e^{(i)}$ les deux suivantes :

$$g^{(i)} = 2\,\frac{1.3\ldots(2i+1)}{2.4\ldots(2i+2)}\left[\beta^{(i+1)} + \frac{5}{2}\,\frac{2i+3}{2i+4}\beta^{i+3} + \frac{5.7}{2.4}\,\frac{(2i+3)(2i+5)}{(2i+4)(2i+6)}\beta^{i+5} + \ldots\right],$$

$$g^{(-i)} = 2\,\frac{5.7\ldots(2i+1)}{2.4\ldots(2i-2)}\left[\beta^{i-1} + \frac{1}{2}\,\frac{2i+3}{2i}\beta^{i+1} + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{(2i+3)(2i+5)}{2i(2i+2)}\beta^{i+3} + \ldots\right].$$

La première de ces deux formules s'applique à $i = 0$, sans restriction; la seconde s'applique seulement à partir de $i = 1$, en remplaçant par l'unité, pour cette valeur de i, la fraction $\frac{5.7\ldots(2i+1)}{2.4\ldots(2i-2)}$.

La considération des cinq séries précédentes et la façon dont elles entrent dans R nous permettront de déterminer les termes qu'il faut exclure de R pour avoir la partie de la fonction perturbatrice relative à l'action directe de la planète et que nous désignerons par R_0.

Nous en déduirons en même temps la partie R' due à l'action du Soleil, ou plutôt du point O, centre de gravité du Soleil et de la planète.

R' est composé des termes de R indépendants de β, dans lesquels on doit substituer m' à m''.

On a ainsi

$$(23) \quad R' = fm' \frac{r^2}{r'^3}\left[\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos(\psi - \varphi)\right] + fm' \frac{r^3}{r'^4}\left(-\frac{3}{8}\cos\frac{\psi - \varphi}{2} - \frac{5}{8}\cos 3\frac{\psi - \varphi}{2}\right) + fm' \frac{r^2}{r'^3}\left(3\alpha''\cos\frac{\psi - \varphi}{2}\right).$$

Cette expression doit être en outre retranchée de R pour avoir l'expression de R_0.

Il faut aussi supprimer dans R les termes ayant β à la première puissance. Soit R'' leur somme.

On trouve

$$\begin{aligned} R'' = {} & fm'' \frac{r^2}{r'^3}\beta\left[\frac{3}{4}\cos\varphi + \frac{3}{8}\cos\psi + \frac{15}{8}\cos(\psi - 2\varphi)\right] \\ & + fm'' \frac{r^3}{r'^4}\beta\left(-\frac{9}{16}\cos\frac{\psi+\varphi}{2} - \frac{15}{16}\cos\frac{\psi - 3\varphi}{2} + \frac{61}{16}\cos\frac{3\psi - \varphi}{2} - \frac{35}{16}\cos\frac{3\psi - 5\varphi}{2}\right) \\ & + fm'' \frac{r^2}{r'^3}\beta\left[\frac{9}{4}\alpha + \frac{15}{4}\alpha\cos(\psi - \varphi) - 3\alpha'\cos\frac{\psi - \varphi}{2} + \frac{9}{2}\alpha''\cos\frac{\psi+\varphi}{2} + \frac{15}{2}\alpha''\cos\frac{\psi - 3\varphi}{2}\right]. \end{aligned}$$

On a, par suite,

$$R_0 = R - R' - R'',$$

avant d'effectuer les développements par rapport aux inclinaisons et aux excentricités.

On peut avoir ainsi explicitement le développement de R_0. Mais on peut le déduire aisément de celui que nous avons obtenu dans le paragraphe I, en apportant quelques corrections aux coefficients.

A cet effet, considérons d'abord les deux premiers termes de R,

$$fm'' \frac{r^2}{r'^3}\left[\frac{1}{8}c^{(i)}\cos i\varphi + \frac{3}{8}g^{(i)}\cos(i\varphi + \psi)\right],$$

valeur complète de la fonction perturbatrice quand on néglige les inclinaisons et les termes parallactiques.

Il faut appliquer alors les corrections δ suivantes :

$$\begin{array}{ll} \delta c^{(0)} = -2, & \delta c^{(1)} = -3\beta, \\ \delta g^{(-1)} = -2, & \delta c_1^{(1)} = -3\beta, \\ \delta g^{(0)} = -\beta, & \delta g_1^{(0)} = -\beta, \\ \delta g^{(-2)} = -5\beta, & \delta g_1^{(-2)} = -5\beta. \end{array}$$

Pour les termes dépendant des inclinaisons ou de la parallaxe, les expressions analogues des corrections sont plus compliquées, à cause des coefficients où $e^{(i)}$, $f^{(i)}$ sont multipliés par β^p.

Il m'a paru plus simple de suivre la règle générale suivante, dont l'application est très simple dans les calculs numériques et qui découle d'ailleurs immédiatement des conditions imposées pour déduire R_0 de R.

Un coefficient quelconque de R est une série procédant suivant les puissances croissantes de β : il suffit de supprimer, en calculant numériquement ces séries, les termes indépendants de β ou renfermant β à la première puissance.

23. Comme dans la méthode ordinaire, il existe ici une action indirecte. En effet, au numéro précédent, formule (23), nous avons trouvé, pour la seconde partie de la fonction perturbatrice, l'expression R′, dépendant de la masse du Soleil et de la position du centre de gravité Terre-Lune par rapport au centre de gravité Soleil-planète. Si l'on détermine cette position par les coordonnées polaires déjà définies, r', v', s', et que l'on désigne par $\delta r'$, $\delta v'$, $\delta s'$ leurs variations provenant de l'action de la planète, on a, pour l'accroissement de R′,

$$\delta R' = \frac{\partial R'}{\partial r'}\delta r' + \frac{\partial R'}{\partial v'}\delta v' + \frac{\partial R'}{\partial s'}\delta s'.$$

C'est $\delta R'$ qui nous donnera l'action indirecte de la planète sur la Lune. On a, d'après le numéro précédent,

$$R' = fm'\frac{r^2}{r'^3}\left[\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos(\psi-\varphi) + 3\alpha''\cos\frac{\psi-\varphi}{2}\right] - fm'\frac{r^3}{r'^4}\left[\frac{3}{8}\cos\frac{\psi-\varphi}{2} + \frac{5}{8}\cos 3\frac{\psi-\varphi}{2}\right].$$

En remplaçant φ, ψ, α″ par leurs valeurs en fonction de v, v', s, s', on trouve aisément que cette expression est identique à celle que nous avons obtenue au n° 9, formule (9), pour la fonction perturbatrice provenant de l'action du Soleil, dans la méthode ordinaire. Il faut toutefois observer que r', v', s' ne sont pas rapportés à la même origine dans les deux cas, mais que cette différence ne peut avoir aucune influence sur nos calculs numériques, au degré d'approximation adopté.

Considérons maintenant $\delta r'$, $\delta v'$, $\delta s'$. Nous avons trouvé pour la fonction perturbatrice du mouvement défini par r', v', s' ou par x', y', z', l'expression suivante [n° 20, formule (19)], en remplaçant, pour plus de commodité dans les calculs, V' par $fm''U'$,

$$fm''U' = \frac{M}{(m+m_0)(m'+m'')}V.$$

Donc, d'après la formule (21), on a

$$m''U' = \sum(-1)^{n''}\frac{r^n r''^{n''}}{r'^{n'}} M m m_0 m' m'' \frac{[m_0^{n-1} + (-1)^n m^{n-1}][m'^{n''-1} + (-1)^{n''} m''^{n''-1}]}{(m+m_0)^{n+1}(m'+m'')^{n''+1}} P_{n,n',n''},$$

où l'on doit supprimer le terme en $\frac{1}{r'}$, correspondant à $n = n'' = 0$, et dans laquelle n'existent ni r, ni r'' à la première puissance.

Le cas $n = n'' = 0$ étant exclu, il y a lieu de considérer les suivants, en négligeant m devant m_0 et m'' devant m',

$$(\alpha) \qquad n'' = 0, \qquad n \neq 0; \qquad m''U' = \frac{mm'}{m_0}\sum\frac{r^n}{r'^{n'}}P_{n,n',0},$$

$$(\beta) \qquad n'' \neq 0, \qquad n \neq 0; \qquad m''U' = \frac{mm''}{m_0}\sum(-1)^{n''}\frac{r^n r''^{n''}}{r'^{n'}}P_{n,n',n''},$$

$$(\gamma) \qquad n'' \neq 0, \qquad n = 0; \qquad m''U' = m''\sum(-1)^{n''}\frac{r''^{n''}}{r'^{n'}}P_{0,n',n''}.$$

La partie de $\delta r'$, $\delta v'$, $\delta s'$ provenant de (α) peut être sensible; mais nous n'avons pas à en tenir compte ici, puisqu'elle est indépendante des coordonnées de la planète. Celle qui provient de (β) est d'un ordre élevé par rapport à celle de (γ). En effet, pour les mêmes valeurs de n', n'', le rapport est égal à $\frac{m}{m_0}\left(\frac{r}{r'}\right)^n$ et n est supérieur à *un*.

Il nous reste donc, pour la partie de U' pouvant donner une action indirecte sensible,

$$U' = \sum(-1)^{n''}\frac{r''^{n''}}{r'^{n'}}P_{0,n',n''}, \qquad n' = n'' + 1.$$

On doit supprimer dans le second membre les termes en $\frac{1}{r'}$ et $\frac{r''}{r'^2}$; en d'autres termes, n'' doit être au moins égal à 2.

D'après le n° 21, on a

$$\sum(-1)^{n''}\frac{r''^{n''}}{r'^{n'}}P_{0,n',n''} = (r'^2 + r''^2 - 2r'r''\cos H)^{-\frac{1}{2}}.$$

Nous aurons donc pour U',

$$U' = (r'^2 + r''^2 - 2r'r'' \cos H)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{r'} - \frac{r''}{r'^2} \cos H.$$

Dans la méthode ordinaire, nous avons eu à considérer, pour la détermination de $\delta r'$, $\delta v'$, $\delta s'$, une expression U analogue. Il suffit de se reporter au n° **12** pour voir que l'on peut passer des résultats du paragraphe II à ceux de la nouvelle méthode, en modifiant les corrections à apporter aux coefficients $A^{(i)}$ et $B^{(i)}$ de la façon suivante. Pour les expressions de $\delta r'$, $\delta v'$, $\delta s'$, on doit diminuer $A^{(0)}$ de $\frac{2}{a'}$, $A^{(1)}$ et $A^{(-1)}$ de $\frac{a''}{a'^2}$, $B^{(0)}$ de $2\frac{a''}{a'^2}$, dans le développement de $(a'^2 + a''^2 - 2a'a'' \cos H)^{-\frac{1}{2}}$.

Rappelons que, dans la méthode ordinaire, on diminue $A^{(1)}$ et $A^{(-1)}$ de $\frac{a'}{a''^2}$, $B^{(0)}$ de $\frac{2a'}{a''^2}$.

Les deux paragraphes suivants rendront manifeste la différence qui existe entre les deux méthodes, en ce qui concerne certains termes dépendant des $A^{(i)}$ et des $B^{(i)}$; mais nous pouvons, dès à présent, mettre ce fait en évidence.

Dans la méthode ordinaire, les deux actions directe et indirecte de ces termes sont considérables, alors que l'action totale est faible; or, une valeur suffisamment approchée de cette quantité est donnée par l'action directe dans la seconde méthode, l'action indirecte étant insensible, au degré d'approximation dont nous avons besoin.

En effet, le rapport de l'action indirecte à l'action directe, dans l'une et l'autre méthode, est de l'ordre de $\delta r'$, $\delta v'$, $\delta s'$. Les coefficients de ces accroissements sont le produit de ω^2 (carré du rapport des moyens mouvements de la Terre et de la planète) par des fonctions linéaires des $A^{(i)}$, des $B^{(i)}$ et de leurs dérivées. Ces fonctions sont des séries entières en $\beta = \frac{a''}{a'}$ dont les valeurs sont faibles. Il en résulte que les coefficients considérés sont de l'ordre de ω^2; il y a exception toutefois pour ceux où l'on apporte aux $A^{(i)}$ et aux $B^{(i)}$ les corrections que nous avons mentionnées plus haut, corrections de l'ordre de $\frac{1}{\beta^2}$ dans la méthode ordinaire, de β ou β^2 dans la méthode nouvelle.

Dans le cas des planètes intramercurielles, β et ω^2 étant toujours de petites quantités, il s'ensuit qu'en appliquant la méthode de M. Andoyer, on aura une valeur suffisamment approchée de l'action totale en négligeant l'action indirecte.

Dans la méthode ordinaire, les termes dépendant de $A^{(1)}$, $A^{(-1)}$ et $B^{(0)}$ sont de l'ordre de $\frac{\omega^2}{\beta^2}$; c'est le rapport de deux petites quantités pouvant même dépasser l'unité, en tous cas jamais négligeable. Pour ces termes, la méthode ordinaire donne une action indirecte du même ordre que l'action directe.

IV. — Étude des termes des ordres zéro et un.

24. Ce paragraphe et le suivant sont consacrés à la recherche des valeurs numériques des inégalités produites par des masses intramercurielles supposées.

Soit $A \cos\theta$ un terme quelconque de la fonction perturbatrice relative à l'action directe, trouvée dans le premier paragraphe. L'argument θ est une fonction linéaire des longitudes de la Lune, de la Terre et de la planète; désignons par $\delta\theta$ son mouvement diurne, et soit ε un arc très petit, de quelques secondes seulement. On aura alors une période correspondante de très longue durée.

$\delta\theta$ étant une fonction linéaire des moyens mouvements n, n', n'', ..., l'équation

$$\delta\theta = \varepsilon \tag{24}$$

nous donnera le moyen mouvement de la planète supposée, d'où nous pourrons déduire le demi-grand axe et par suite A, en laissant arbitraires l'excentricité et l'inclinaison de la planète si ce coefficient en dépend.

Il faut passer ensuite de l'expression du terme $A \cos\theta$ de la fonction perturbatrice à l'inégalité correspondante. J'ai fait usage, à cet effet, des formules données par M. Radau dans son Mémoire si important publié dans le Tome XXI des *Annales de l'Observatoire de Paris* et qui constitue un exposé méthodique et très complet des actions perturbatrices des planètes connues sur la longitude de la Lune.

J'ai adopté pour tous les termes une masse égale à $\frac{1}{5\,000\,000}$, valeur admise pour la masse de Mercure. J'ai fait en outre $\varepsilon = \pm 13''$, correspondant à une période p de 273 ans. C'est celle que Tisserand a trouvée pour la grande inégalité empirique de la longitude de la Lune, mise si nettement en évidence par la comparaison des observations à la théorie.

Je ne m'occupe dans ce quatrième paragraphe que des termes d'ordre zéro et un.

Il nous reste à montrer comment on parvient à l'expression finale de l'inégalité cherchée.

M. Radau (p. 32 de son Mémoire) expose la méthode d'intégration développée par M. Hill. Il recommande un système de formules pour les inégalités de la longitude et des éléments, dont il a fait de nombreuses applications.

Soit

$$\theta = kl + k'g + k''h + ct + q,$$

où $ct + q$ représente la partie, indépendante de la Lune, qui renferme les longitudes des planètes et k, k', k'' désignent des nombres entiers positifs, négatifs ou nuls, g étant, dans l'orbite de la Lune, la distance du périhélie au nœud.

Soient, en outre, λ, λ', λ'' trois nombres définis par les relations

$$a\frac{\partial A}{\partial a} = \lambda A, \qquad e\frac{\partial A}{\partial e} = \lambda' A, \qquad \gamma\frac{\partial A}{\partial \gamma} = \lambda'' A.$$

Le système de formules de M. Radau est alors le suivant :

$$\frac{\delta a}{a} = (0,14901\,k - 0,000246\,k' - 0,000006\,k'')\frac{pA}{n'^2 a^2}\cos\theta,$$

$$\delta e = (1,4215\;\;k - 1,4238\;\;k' + 0,00024\;\;k'')\frac{pA}{n'^2 a^2}\cos\theta,$$

$$\delta\gamma = (0,00010\,k + 0,41203\;\;k' - 0,41370\;\;k'')\frac{pA}{n'^2 a^2}\cos\theta,$$

$$\delta L = [(-3,0576\;\;k + 0,05601\,k' - 0,01124\,k'')p - 0,14876\;\;\lambda + 0,02551\,\lambda' + 0,03492\,\lambda'']\frac{pA}{n'^2 a^2}\sin\theta,$$

$$\delta l = [(-3,0826\;\;k + 0,06142\,k' - 0,03621\,k'')p - 0,14901\;\;\lambda - 25,891\;\;\lambda' - 0,00232\,\lambda'']\frac{pA}{n'^2 a^2}\sin\theta,$$

$$\delta h = [(-0,03641\,k + 0,02890\,k' - 0,00372\,k'')p + 0,000006\,\lambda - 0,00435\,\lambda' + 9,2169\;\;\lambda'']\frac{pA}{n'^2 a^2}\sin\theta.$$

Nous en déduisons, pour la perturbation relative à g,

$$\delta g = [(0,0614\,k - 0,03431\,k' + 0,02869\,k'')p + 0,00025\,\lambda + 25,921\,\lambda' - 9,1797\,\lambda'']\frac{pA}{n'^2 a^2}\sin\theta.$$

Ces formules montrent que, pour une inégalité comme celle dont nous nous occupons, c'est-à-dire à longue période, les coefficients de g, h et des autres éléments ne sont qu'une très petite fraction du coefficient de l ou de L.

Je me bornerai donc au calcul de δL, dont je simplifierai la formule, pour les raisons que j'ai déjà exposées quand j'ai parlé de l'approximation adoptée. Je néglige dans cette formule les termes en λ, λ', λ'', qui ont seulement p en facteur et dont le plus grand coefficient numérique dépasse à peine 0,1 ; tandis que le multiplicateur de k est voisin de 3 en valeur absolue et a p^2 en facteur.

Avec ces simplifications, ainsi justifiées, j'adopte

$$(25) \qquad \delta L = \frac{p^2 A K}{n'^2 a^2}\sin\theta, \qquad K = -3,0576\,k + 0,0560\,k' - 0,0112\,k''.$$

A chaque équation (24), pour $\varepsilon = \pm 13''$, correspondent deux planètes présumées susceptibles de donner la même inégalité en valeur absolue. Le calcul sera commun aux deux, puisque les deux valeurs de a'' peuvent être considérées comme égales, au degré d'approximation adopté. Cette valeur commune de a'' est déduite de celle de n'' donnée par l'équation (24), où l'on fait $\varepsilon = 0$.

Tous les termes de la fonction perturbatrice ne conduisent pas à une planète intramercurielle présumée, par la résolution de l'équation (24).

Tel est, par exemple, le cas du terme dont l'argument est $i\delta$, qui ne renferme pas la longitude de la Lune. La valeur de n'' correspondante est trop faible; n'' doit être supérieur au mouvement diurne de Mercure, qui est de $14732''$. Et comme l'orbite de la planète présumée doit être entièrement intérieure à celle de Mercure, le minimum acceptable pour n'' est encore plus élevé. La fixation de ce minimum de n'' est d'ailleurs sans importance, car les masses faibles pouvant avoir une action sensible sur la Lune sont plus voisines du Soleil que de Mercure.

25. Nous commencerons l'étude des termes à considérer par ceux de l'ordre zéro ayant pour argument $i\delta + \delta_1$, que nous avons trouvés au n° **6** (C). Ils ont pour expression, en introduisant au lieu de a' le moyen mouvement n' de la Terre et en les désignant par $(1)^i$,

$$(1)^i = \frac{3}{8} m'' n'^2 a^2 g^{(i)} \cos(i\delta + \delta_1).$$

Cherchons d'abord les valeurs de n'' déterminées par l'équation (24). Pour simplifier l'écriture, nous désignerons dorénavant la quantité $\pm 13''$ par ε. Rappelons en outre que l'on a pour les moyens mouvements de la Lune et de la Terre exprimés en secondes d'arc

$$n = 47435, \qquad n' = 3548.$$

Nous avons posé dans les paragraphes précédents

$$\delta = \mathrm{L}' - \mathrm{L}'', \qquad \delta_1 = 2\mathrm{L} - \mathrm{L}' - \mathrm{L}''.$$

Alors l'équation (24) devient dans ce cas

$$i(n' - n'') + 2n - n' - n'' + \varepsilon = 0.$$

A chaque valeur de i correspondent deux valeurs de n'', à cause du double signe de ε. Il en résulte deux valeurs de a''; mais ces deux valeurs de a'' diffèrent assez peu pour qu'on puisse les confondre dans le calcul des coefficients de $(1)^i$.

L'équation précédente donne

$$n'' = \frac{2n + in' - n'}{i+1} + \frac{\varepsilon}{i+1}.$$

Afin que n'' soit de même signe que n, on fera seulement

$$i = 0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad 5;$$

car, pour une valeur de i supérieure à 5, l'orbite de la planète ne serait pas intérieure à celle de Mercure.

Voici le Tableau des valeurs de n'' et des valeurs de a'' que nous avons déduites :

$(1)^0$	$91322'' + \varepsilon$	0,1147
$(1)^1$	$47435'' + \frac{1}{2}\varepsilon$	0,1775
$(1)^2$	$32806'' + \frac{1}{3}\varepsilon$	0,2270
$(1)^3$	$25492'' + \frac{1}{4}\varepsilon$	0,2686
$(1)^4$	$21103'' + \frac{1}{5}\varepsilon$	0,3046
$(1)^5$	$18177'' + \frac{1}{6}\varepsilon$	0,3365

Les valeurs de a'' sont exprimées en prenant pour unité le demi-grand axe de l'orbite de la Terre. Il s'ensuit que ce sont aussi les valeurs de $\beta = \frac{a''}{a'}$ qui entrent dans les séries $g^{(i)}$ du n° **23**, que nous avons à calculer.

J'écris ici ces fonctions de β, qui nous seront utiles pour d'autres termes par la suite. J'ai représenté les coefficients des puissances de β par leurs logarithmes à cinq décimales :

$$\begin{aligned}
g^{(0)} &= 0,00000\beta + 0,27300\beta^3 + 0,43686\beta^5 + 0,55496\beta^7 + \ldots,\\
g^{(1)} &= \bar{1},87506\beta^2 + 0,19382\beta^4 + 0,37887\beta^6 + 0,50920\beta^8 + \ldots,\\
g^{(2)} &= \bar{1},79588\beta^3 + 0,13583\beta^5 + 0,33311\beta^7 + 0,47141\beta^9 + \ldots,\\
g^{(3)} &= \bar{1},73789\beta^4 + 0,09007\beta^6 + 0,29532\beta^8 + 0,43923\beta^{10} + \ldots,\\
g^{(4)} &= \bar{1},69213\beta^5 + 0,05228\beta^7 + 0,26313\beta^9 + 0,41119\beta^{11} + \ldots,\\
g^{(5)} &= \bar{1},65434\beta^6 + 0,02009\beta^8 + 0,23510\beta^{10} + 0,38637\beta^{12} + \ldots,\\
g^{(6)} &= \bar{1},62215\beta^7 + \bar{1},99206\beta^9 + 0,21028\beta^{11} + 0,36409\beta^{13} + \ldots
\end{aligned}$$

Dans l'expression de K du n° **24**, on doit faire

$$k = k' = k'' = 2.$$

On trouve dans ces conditions, avec une approximation suffisante,

$$\mathrm{K} = -6,026.$$

Les coefficients des inégalités auront donc pour expression commune, en minutes d'arc,

$$-\frac{3}{8}\times 6,026\times\frac{273^2\times 206265}{5000000\times 60}g^{(i)}.$$

Voici les résultats concernant l'action directe pour les termes $(1)^i$. La première colonne du Tableau suivant désigne le terme, la deuxième l'argument, la troisième la valeur de $g^{(i)}$, la quatrième la durée de la révolution de la planète en jours moyens et la dernière la valeur du coefficient de l'inégalité en minutes

$(1)^0$	$2L - L' - L''$	0,1176	14,19	−13,6
$(1)^1$	$2L - 2L''$	0,02527	27,32	− 2,9
$(1)^2$	$2L + L' - 3L''$	0,00820	39,50	− 1,0
$(1)^3$	$2L + 2L' - 4L''$	0,00336	50,84	− 0,4
$(1)^4$	$2L + 3L' - 5L''$	0,00160	61,41	− 0,2
$(1)^5$	$2L + 4L' - 6L''$	0,00086	71,29	− 0,1

26. Passons aux termes de l'action indirecte ayant mêmes arguments que les termes $(1)^i$. Nous avons établi les formules relatives à cette partie de la fonction perturbatrice dans le paragraphe II.

Les termes que nous avons à étudier ne dépendent pas de l'inclinaison des orbites et sont contenus dans

$$a'\frac{\partial R'}{\partial r'}\frac{\delta r'}{a'}+\frac{\partial R'}{\partial v'}\delta v'.$$

Il convient de prendre, d'après les expressions (F) et (G) des n^{os} **10** et **11**, en se rappelant la signification de δ et δ_1,

$$\frac{1}{fm'}a'\frac{\partial R'}{\partial r'}=-\frac{9}{4}\frac{a^2}{a'^3}\cos(2L-2L'),\qquad \frac{1}{fm'}\frac{\partial R'}{\partial v'}=\frac{3}{2}\frac{a^2}{a'^3}\sin(2L-2L')$$

et d'après les formules (16) et (18) des n^{os} **17** et **19**, où l'on peut faire $\varphi = L' - L''$,

$$\frac{\delta r'}{a'}=\sum\rho_1^{(i)}\cos i(L'-L''),\qquad \delta v'=\sum\lambda_1^{(i)}\sin i(L'-L'');$$

par suite

$$(26)\quad \begin{aligned}\frac{1}{fm'}\delta R' = &-\frac{9}{8}\frac{a^2}{a'^3}\sum\rho_1^{(i)}\{\cos[2L-2L'+i(L'-L'')]+\cos[2L-2L'-i(L'-L'')]\}\\ &-\frac{3}{4}\frac{a^2}{a'^3}\sum\lambda_1^{(i)}\{\cos[2L-2L'+i(L'-L'')]-\cos[2L-2L'-i(L'-L'')]\}.\end{aligned}$$

En donnant à i dans cette expression des valeurs convenables, nous obtiendrons les termes que nous avons en vue et que nous allons examiner successivement.

(1)⁰ D'abord (1)⁰. Ce terme a pour argument $2L - L' - L''$. Il faut donc prendre $i = 1$ dans le premier et le troisième termes de $\delta R'$ et $i = -1$ dans les deux autres. Il vient alors pour le coefficient C de $-\frac{3}{8} m'' \frac{a^2}{a'^3} \cos(2L - L' - L'')$, que nous mettons en facteur pour rendre plus aisée la comparaison avec le résultat relatif à l'action directe,

$$m'' C = 3(\rho_1^{(1)} + \rho_1^{(-1)}) + 2(\lambda_1^{(1)} - \lambda_1^{(-1)}).$$

Nous avons obtenu l'expression de $\rho_1^{(i)}$ au n° 18, celle de $\lambda_1^{(i)}$ au n° 19. Elles montrent que l'on a

$$\rho_1^{(-i)} = \rho_1^{(i)}, \qquad \lambda_1^{(-i)} = -\lambda_1^{(i)}.$$

On peut donc écrire

$$m'' C = 6\rho_1^{(1)} + 4\lambda_1^{(1)},$$

$\rho_1^{(1)}$ et $\lambda_1^{(1)}$ dépendent de $A^{(1)}$ et $A_1^{(1)}$, et l'on doit remplacer $A^{(1)}$ par $\frac{b^{(1)}}{a'} - \frac{a'}{a''^2}$, à cause du terme complémentaire de la fonction perturbatrice relative à l'action de la planète sur la Terre.

$b^{(i)}$ est défini, comme on sait, par la relation

$$(1 + \beta^2 - 2\beta\cos\varphi)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sum b^{(i)} \cos i\varphi$$

et l'on pose

$$b_1^{(i)} = \beta \frac{db^{(i)}}{d\beta}.$$

On a alors

$$a' A_1^{(1)} = -\frac{1}{\beta^2} - b^{(1)} - b_1^{(1)}.$$

Les données du calcul de $\rho_1^{(1)}$ et $\lambda_1^{(1)}$ sont

$$\beta = 0{,}1147, \qquad n'' = 91322.$$

On en déduit

$$\omega = 0{,}0389, \qquad b^{(1)} = 0{,}115, \qquad b_1^{(1)} = 0{,}116$$

avec une approximation suffisante, et finalement, en introduisant le moyen mouvement n' au lieu de f,

$$\delta R' = -\frac{3}{8} m'' n'^2 a^2 \times 0{,}1148 \cos(2L - L' - L'').$$

On a trouvé pour l'action directe

$$R = \frac{3}{8} m'' n'^2 a^2 \times 0,1176 \cos(2L - L' - L'');$$

par suite l'action totale se réduit à

$$R + \delta R' = \frac{3}{8} m'' n'^2 a^2 \times 0,0028 \cos(2L - L' - L'').$$

C'est environ la quarantième partie de l'action directe.

Ainsi que nous l'avons démontré au n° **23**, pour ce terme et quelques autres que nous rencontrerons plus loin, l'action directe de la planète sur la Lune est presque annulée par suite de l'action réfléchie par le Soleil. Mais cette circonstance ne se produit pas pour le plus grand nombre de termes. On la constate seulement dans les termes pour lesquels les expressions de $\delta r'$ et $\delta v'$ contiennent $A^{(1)}$, à cause de la correction qu'il faut appliquer à cette quantité pour tenir compte de la partie complémentaire de la fonction perturbatrice. Comme on le verra en particulier à propos du terme $(1)^1$, où c'est $A^{(2)}$ qui entre dans les expressions de $\delta r'$ et $\delta v'$ et non plus $A^{(1)}$, l'action réfléchie par le Soleil n'est souvent qu'une petite fraction de l'action directe.

$(1)^1$ Pour le terme $(1)^1$, l'argument est $2L - 2L''$. En mettant encore en facteur

$$-\frac{3}{8} m'' n'^2 a^2 \cos(2L - 2L''),$$

nous déduisons de l'expression (26) de $\delta R'$, pour le multiplicateur de cette quantité, en faisant $i = 2$ dans le premier et le troisième termes, $i = -2$ dans les autres,

$$m'' C = 6\rho_1^{(2)} + 4\lambda_1^{(2)}.$$

Ici la partie complémentaire de la fonction perturbatrice n'intervient pas, car $\rho_1^{(2)}$ et $\lambda_1^{(2)}$ dépendent de $A^{(2)}$ et $A_1^{(2)}$. On a simplement

$$a' A^{(2)} = b^{(2)}, \qquad a' A_1^{(2)} = -b^{(2)} - b_1^{(2)}$$

et d'une façon générale, pour ce terme et les suivants,

$$a' A^{(i)} = b^{(i)}, \qquad a' A_1^{(i)} = -b^{(i)} - b_1^{(i)}.$$

Voici les données du calcul numérique

$$\beta = 0,1775, \qquad n'' = 47435, \qquad \omega = 0,07480;$$

par suite

$$b^{(2)} = 0,0240, \qquad b_1^{(2)} = 0,0486, \qquad \omega^2 = 0,00559, \qquad C = 0,00056.$$

La quantité correspondante pour l'action directe est $-0,02527$. On voit qu'elle est diminuée seulement de $\frac{1}{45}$ environ par l'action indirecte.

$(1)^2$ L'argument de ce troisième terme est $2L + L' - 3L''$. On a pour la partie de $\delta R'$ qui lui correspond

$$\delta R' = -\frac{3}{8} n'^2 a^2 (6\rho_1^{(3)} + 4\lambda_1^{(3)}) \cos(2L + L' - 3L'').$$

Le calcul de $\rho_1^{(3)}$ et $\lambda_1^{(3)}$ s'effectue d'après les valeurs suivantes de β, n'', ...

$$\beta = 0,2270, \qquad n'' = 32806, \qquad \omega = 0,1081;$$

on obtient

$$b^{(3)} = 0,0075, \qquad b_1^{(3)} = 0,0228, \qquad \omega^2 = 0,0117, \qquad C = 0,00027.$$

Le coefficient relatif à l'action directe est $-0,00820$.

L'action indirecte est donc à peu près la trentième partie de l'action directe.

$(1)^3$ Le calcul de ce terme se déduit des données que voici :

$$\beta = 0,2686, \qquad n'' = 25492, \qquad \omega = 0,1392.$$

L'argument est $2L + 2L' - 4L''$ et l'on a

$$m'' C = 6\rho_1^{(4)} + 4\lambda_1^{(4)}.$$

On trouve

$$b^{(4)} = 0,0030, \qquad b_1^{(4)} = 0,0120, \qquad \omega^2 = 0,0194, \qquad C = 0,000122.$$

$(1)^4$ Ce terme a pour argument $2L + 3L' - 5L''$. On a en outre

$$m'' C = 6\rho_1^{(5)} + 4\lambda_1^{(5)}.$$

Il faut calculer C avec

$$\beta = 0,3046, \qquad n'' = 21103, \qquad \omega = 0,168,$$

qui donnent

$$b^{(5)} = 0,0014, \qquad b_1^{(5)} = 0,0069, \qquad \omega^2 = 0,0282, \qquad C = 0,000067,$$

C est presque insensible par rapport à la quantité correspondante de l'action directe, pour laquelle on a $-0,00160$.

$(1)^5$ Pour ce terme, dont l'argument est $2L + 4L' - 6L''$, le calcul relatif à l'action indirecte ne donne qu'une fraction de seconde.

En résumé, dans les termes $(1)^i$, l'action directe de la planète intramercurielle est prédominante et représente à peu de chose près l'action totale, sauf pour le premier, où les deux actions, directe et indirecte, se compensent.

Nous reviendrons sur ces résultats pour donner l'action totale de chacun des termes $(1)^i$. Nous y joindrons les résultats fournis par la méthode de M. Andoyer, que nous allons appliquer dans le numéro suivant à ces termes.

27. Nous avons montré au nº 22 que la méthode de M. Andoyer conduit à conserver l'expression générale de la fonction perturbatrice R relative à l'action directe trouvée au paragraphe I, sous la réserve de supprimer un petit nombre de termes que nous avons déterminés. Nous sommes parvenus à cette règle simple, que, dans les séries en β qui entrent dans R, il suffit de ne pas tenir compte des termes indépendants de β ou ayant β à la première puissance.

Nous devons nous rappeler aussi que β ne désigne pas ici rigoureusement la même quantité que dans la méthode ordinaire. En effet, $\beta = \frac{a'}{a''}$, et a' n'est plus la distance moyenne de la Terre au Soleil, mais la distance moyenne des centres de gravité soleil-planète d'une part et terre-lune d'autre part.

Mais, étant donné le degré d'approximation de nos calculs, la correction qui résulterait de cette différence est insensible.

Cela posé, si nous nous reportons aux séries qui déterminent $g^{(i)}$ (nº 25), nous voyons que, pour obtenir les résultats correspondant à la nouvelle méthode, il suffit de diminuer $g^{(0)}$ de β, pour le calcul de l'action directe de la planète $(1)^0$.

Or, on a d'après le nº 25, pour le terme $(1)^0$,

$$g^{(0)} = 0,1176, \qquad \beta = 0,1147.$$

L'action directe, dans la méthode de M. Andoyer, est donc représentée par

$$\frac{3}{8} m'' n'^2 a^2 \times 0,0029 \cos(2L - L' - L'').$$

Dans la méthode ordinaire, nous avons trouvé, pour l'action totale,

$$\frac{3}{8} m'' n'^2 a^2 \times 0,0028 \cos(2L - L' - L'').$$

Pour les autres termes $(1)^i$, les deux méthodes donnent les mêmes résultats ; mais on a remarqué que l'action indirecte n'est qu'une petite fraction de l'action directe.

Je termine ce numéro par le Tableau des résultats définitifs concernant les planètes supposées $(1)^i$. Il comprend le facteur de $\frac{3}{8} m'' n'^2 a^2 \cos(2L - L' - L'')$ relatif à l'action totale et les expressions numériques des inégalités en secondes d'arc :

$(1)^0$	$+0,0028$	$-\ 19'' \sin(2L - L' - L'')$
$(1)^1$	$+0,02471$	$-172'' \sin(2L - 2L'')$
$(1)^2$	$+0,00793$	$-\ 55'' \sin(2L + L' - 3L'')$
$(1)^3$	$+0,00324$	$-\ 23'' \sin(2L + 2L' - 4L'')$
$(1)^4$	$+0,00153$	$-\ 11'' \sin(2L + 3L' - 5L'')$
$(1)^5$	$+0,00083$	$-\ 6'' \sin(2L + 4L' - 6L'')$

28. Continuons par l'étude des termes du premier ordre. D'abord

$$(2)^i = \frac{3}{8} m'' n'^2 a^2 g^{(i)} e \cos(i\delta + \delta_1 + l).$$

Les valeurs de n'' sont déterminées par l'équation

$$i(n' - n'') + 2n - n' - n'' + \nu + \varepsilon = 0,$$

où ν désigne le moyen mouvement diurne de l.

D'où

$$n'' = \frac{2n + \nu + (i-1)n'}{i+1} + \frac{\varepsilon}{i+1}.$$

Il suffit de donner à i les valeurs 0, 1, 2, pour lesquelles on obtient les valeurs suivantes de n'' et a'' :

$(2)^0$	$138356 + \varepsilon$	0,0870
$(2)^1$	$70952 + \frac{1}{2}\varepsilon$	0,1357
$(2)^2$	$48484 + \frac{1}{3}\varepsilon$	0,1750

Pour le calcul de la quantité K du n° **24**, on a

$$k = 3, \qquad k' = 2, \qquad k'' = 2;$$

on en déduit

$$\mathrm{K} = -9,083.$$

On a, en outre,

$$e = 0,0549.$$

On calcule $g^{(0)}$, $g^{(1)}$, $g^{(2)}$ à l'aide des séries du n° 25. On obtient, pour les résultats relatifs à l'action directe, le Tableau suivant dont la disposition est celle qui a été adoptée au n° 25 pour $(1)^i$:

$(2)^0$	$2L - L' - L'' + l$	0,0882	9,37	— 0,9
$(2)^1$	$2L - 2L'' + l$	0,0143	18,26	— 0,1
$(2)^2$	$2L + L' - 3L'' + l$	0,0035	26,73	0,0

L'action directe, comme on le voit, n'est importante que pour $(2)^0$. Or nous constaterons qu'elle est compensée par l'action indirecte que nous allons examiner.

Les arguments des termes $(2)^i$ peuvent être mis sous la forme

$$2L - 2L' + l + (i+1)(L' - L'').$$

Par suite, ces termes résultent, dans $\delta R'$, de la multiplication de

$$\frac{1}{fm'} a' \frac{\partial R'}{\partial r'} = -\frac{9}{4}\frac{a^2}{a'^3} e \cos(2L - 2L' + l), \qquad \frac{1}{fm'}\frac{\partial R'}{\partial v'} = \frac{3}{2}\frac{a^2}{a'^3} e \sin(2L - 2L' + l)$$

respectivement par

$$\frac{\delta r'}{a'} = \sum \rho_1^{(i+1)} \cos(i+1)(L' - L''), \qquad \delta v' = \sum \lambda_1^{(i+1)} \sin(i+1)(L' - L'');$$

par conséquent,

$$\begin{aligned}\delta R' = -\frac{3}{8} n'^2 a^2 e \sum \Big\{ & (3\rho_1^{(i+1)} + 2\lambda_1^{(i+1)}) \cos[2L - 2L' + l + (i+1)(L' - L'')] \\ & + (3\rho_1^{(i+1)} - 2\lambda_1^{(i+1)}) \cos[2L - 2L' + l - (i+1)(L' - L'')]\Big\}.\end{aligned}$$

Faisons l'application pour $i = 0$ et $i = 1$.

$(2)^0$ En remarquant que l'on obtient $2L - L' - L'' + l$ en faisant $i = 0$ dans le premier terme de $\delta R'$ et $i = -2$ dans le second et tenant compte en outre des expressions de $\rho_1^{(i)}$ et $\lambda_1^{(i)}$ pour des valeurs de i égales et de signes contraires, on a

$$m'' C = 6\rho_1^{(1)} + 4\lambda_1^{(1)}$$

pour le facteur de

$$-\frac{3}{8} n'^2 a^2 e \cos(2L - L' - L'' + l).$$

Il faut prendre comme précédemment

$$A^{(1)} = \frac{b^{(1)}}{a'} - \frac{a'}{a''^2}, \qquad a' A_1^{(1)} = -\frac{1}{\beta^2} - b^{(1)} - b_1^{(1)}.$$

Les données numériques sont

$$\beta = 0{,}0870, \qquad n'' = 138356, \qquad \omega = 0{,}0256;$$

on en déduit

$$b^{(1)} = 0{,}087, \qquad b_1^{(1)} = 0{,}088, \qquad \omega^2 = 0{,}00066, \qquad C = 0{,}0870.$$

L'action directe a donné 0,0882 avec le signe contraire.

Voyons le résultat tiré de la méthode de M. Andoyer. Il faut diminuer $g^{(0)}$ de β. On a

$$g^{(0)} - \beta = 0{,}0012,$$

valeur identique, au degré près d'approximation des calculs, à l'action totale dans la méthode ordinaire.

$(2)^1$ Pour avoir l'argument $2L - 2L'' + l$, il faut faire, dans l'expression précédente de $\delta R'$, $i = 1$ au premier terme, $i = -3$ au second. Il vient

$$m'' C = 6\rho_1^{(2)} + 4\lambda_1^{(2)}.$$

Dans $\rho_1^{(2)}$ et $\lambda_1^{(2)}$, on a

$$a' A^{(2)} = b^{(2)}, \qquad a' A_1^{(2)} = -b^{(2)} - b_1^{(2)}.$$

Le calcul numérique ne donne qu'une très petite fraction de l'action directe, diminuant à peine celle-ci de $0'',2$.

Terminons l'étude des termes $(2)^i$ par l'expression des inégalités numériques dues à l'action totale, comme pour les termes $(1)^i$. La deuxième colonne renferme les valeurs de $g^{(i)} - C$:

$(2)^0$	$+0{,}0012$	$-1''\sin(2L - L' - L'' + l)$
$(2)^1$	$+0{,}0143$	$-8''\sin(2L - 2L'' + l)$
$(2)^2$	$+0{,}0035$	$-2''\sin(2L + L' - 3L'' + l)$

29. Considérons maintenant

$$(3)^i = -\frac{9}{8} m'' n'^2 a^2 e g^{(i)} \cos(i\delta + \delta_1 - l),$$

n'' est donné par

$$n'' = \frac{2n - \nu + (i-1)n'}{i+1} + \frac{\varepsilon}{i+1}.$$

Nous ferons $i = 0$ et $i = 1$. On a alors, pour n'' et a'' :

$(3)^0$	$44288 + \varepsilon$	0,1858
$(3)^1$	$23918 + \frac{1}{2}\varepsilon$	0,2802

Pour $i=2$, on n'aurait plus une orbite intérieure à celle de Mercure.

On a

$$k=1, \qquad k'=2, \qquad k''=2, \qquad \mathrm{K}=-2{,}968.$$

Les coefficients des inégalités sont donnés par l'expression suivante en minutes d'arc :

$$\frac{9}{8}\times 2{,}968 \times \frac{273^2\times 206\,265}{5\,000\,000\times 60}\,eg^{(i)}.$$

On trouve, la deuxième colonne contenant les valeurs de $g^{(i)}$,

$(3)^0$	$2\mathrm{L}-\mathrm{L}'-\mathrm{L}''-l$	0,1984	29,26	1,9
$(3)^1$	$2\mathrm{L}-2\mathrm{L}''-l$	0,0698	54,18	0,7

Pour l'action indirecte, nous mettrons l'argument de $(3)^i$ sous la forme

$$2\mathrm{L}-2\mathrm{L}'-l+(i+1)(\mathrm{L}'-\mathrm{L}'').$$

Alors $\delta\mathrm{R}'$ donne ces termes en multipliant respectivement

$$\frac{1}{fm'}a'\frac{\partial\mathrm{R}'}{\partial r'}=\frac{27}{4}\frac{a^2}{a'^3}e\cos(2\mathrm{L}-2\mathrm{L}'-l), \qquad \frac{1}{fm'}\frac{\partial\mathrm{R}'}{\partial v'}=-\frac{9}{2}\frac{a^2}{a'^3}e\sin(2\mathrm{L}-2\mathrm{L}'-l)$$

par

$$\frac{\delta r'}{a'}=\sum\rho_1^{(i+1)}\cos(i+1)(\mathrm{L}'-\mathrm{L}''), \qquad \delta v'=\sum\lambda_1^{(i+1)}\sin(i+1)(\mathrm{L}'-\mathrm{L}'');$$

on en déduit, pour les termes cherchés de $\delta\mathrm{R}'$,

$$\begin{aligned}\delta\mathrm{R}'=\frac{9}{8}n'^2a^2e\sum\Big\{ &(3\rho_1^{(i+1)}+2\lambda_1^{(i+1)})\cos[2\mathrm{L}-2\mathrm{L}'-l+(i+1)(\mathrm{L}'-\mathrm{L}'')]\\ &+(3\rho_1^{(i+1)}-2\lambda_1^{(i+1)})\cos[2\mathrm{L}-2\mathrm{L}'-l-(i+1)(\mathrm{L}'-\mathrm{L}'')]\Big\}.\end{aligned}$$

Appliquons cette formule à $(3)^0$ et $(3)^1$.

$(3)^0$ L'argument étant $2\mathrm{L}-\mathrm{L}'-\mathrm{L}''-l$, il faut faire $i=0$ dans le premier terme de $\delta\mathrm{R}'$ et $i=-2$ dans le second et il vient

$$m''\mathrm{C}=6\rho_1^{(1)}+4\lambda_1^{(1)}.$$

Dans le calcul de $\rho_1^{(1)}$ et $\lambda_1^{(1)}$, on doit prendre pour $\mathrm{A}^{(1)}$ et $\mathrm{A}_1^{(1)}$ les mêmes expressions que précédemment.

On a, pour les données numériques,

$$\beta=0{,}1858, \qquad n''=44\,288, \qquad \omega=0{,}0801;$$

d'où

$$b^{(1)} = 0,188, \qquad b_1^{(1)} = 0,193, \qquad \omega^2 = 0,00642, \qquad C = 0,1861.$$

On a trouvé pour la quantité correspondant à C, dans l'action directe, $-0,1984$. On voit que l'action totale est réduite au vingtième environ de l'action directe.

Vérifions ce résultat par la méthode de M. Andoyer. Il faut diminuer $g^{(0)}$ de β :

$$g^{(0)} - \beta = 0,0126.$$

Le nombre correspondant donné par la méthode ordinaire pour l'action totale est 0,0123.

$(3)^1$ On a d'une façon analogue, pour ce second terme,

$$m'' C = 6\rho_1^{(2)} + 4\lambda_1^{(2)}$$

avec

$$\beta = 0,2802, \qquad n'' = 23918, \qquad \omega = 0,148;$$

d'où

$$b^{(2)} = 0,061, \qquad b_1^{(2)} = 0,126, \qquad \omega^2 = 0,0220, \qquad C = 0,0072.$$

Comme on a $-0,0698$ pour l'action directe, celle-ci est donc réduite de $\frac{1}{10}$ environ de sa valeur.

Les résultats pour l'action totale concernant les planètes supposées $(3)^i$ sont, en définitive,

$(3)^0$	$-0,0114$	$+\ 6'' \sin(2L - L' - L'' - l)$
$(3)^1$	$-0,0625$	$+\ 35'' \sin(2L - 2L'' - l)$

30. Passons aux termes en e'. D'abord

$$(4)^i = \frac{3}{8} m'' n'^2 a^2 \left[\left(i + \frac{1}{2}\right) g^{(i)} + \frac{1}{2} g_1^{(i)}\right] e' \cos(i\delta + \delta_1 + l').$$

Nous avons besoin, ici et pour quelques-uns des termes qui suivront, des séries $g_1^{(i)}$ définies comme on sait par la relation

$$g_1^{(i)} = \beta \frac{dg^{(i)}}{d\beta}.$$

Nous les déduirons, d'après cette définition, des séries $g^{(i)}$ du n° **25**. Voici leurs expressions, les coefficients de β étant représentés par leurs logarithmes,

$$g_1^{(0)} = 0{,}00000\beta + 0{,}75012\beta^3 + 1{,}13583\beta^5 + 1{,}40006\beta^7 + \ldots,$$
$$g_1^{(1)} = 0{,}17609\beta^2 + 0{,}79588\beta^4 + 1{,}15702\beta^6 + 1{,}41229\beta^8 + \ldots,$$
$$g_1^{(2)} = 0{,}27300\beta^3 + 0{,}83480\beta^5 + 1{,}17821\beta^7 + 1{,}42565\beta^9 + \ldots,$$
$$g_1^{(3)} = 0{,}33995\beta^4 + 0{,}86822\beta^6 + 1{,}19841\beta^8 + 1{,}43923\beta^{10} + \ldots,$$
$$g_1^{(4)} = 0{,}39110\beta^5 + 0{,}89738\beta^7 + 1{,}21737\beta^9 + 1{,}45258\beta^{11} + \ldots,$$
$$g_1^{(5)} = 0{,}43249\beta^6 + 0{,}92318\beta^8 + 1{,}23510\beta^{10} + 1{,}46555\beta^{12} + \ldots,$$
$$g_1^{(6)} = 0{,}46725\beta^7 + 0{,}94630\beta^9 + 1{,}25167\beta^{11} + 1{,}47803\beta^{13} + \ldots.$$

Pour n'', on a

$$n'' = \frac{2n + in'}{i+1} + \frac{\varepsilon}{i+1}.$$

On obtient les valeurs suivantes de n'' et a'' :

$(4)^0$	$94870 + \varepsilon$	0,1118
$(4)^1$	$49209 + \frac{1}{2}\varepsilon$	0,1732
$(4)^2$	$33989 + \frac{1}{3}\varepsilon$	0,2217
$(4)^3$	$26379 + \frac{1}{4}\varepsilon$	0,2625
$(4)^4$	$21812 + \frac{1}{5}\varepsilon$	0,2980
$(4)^5$	$18768 + \frac{1}{6}\varepsilon$	0,3294

On a, pour le calcul des coefficients,

$$k = k' = k'' = 2, \qquad e' = 0{,}0168, \qquad \mathrm{K} = -6{,}026.$$

Les coefficients des inégalités sont donnés alors par la formule

$$-\frac{3}{8}\left[\left(i + \frac{1}{2}\right)g^{(i)} + \frac{1}{2}g_1^{(i)}\right]\frac{273^2 \times 206\,265}{5\,000\,000 \times 60}\,6{,}026\,e'$$

et leurs valeurs sont contenues dans le Tableau ci-dessous. La troisième colonne renferme les valeurs de $\left(i + \frac{1}{2}\right)g^{(i)} + \frac{1}{2}g_1^{(i)}$; pour les quatre derniers termes, le coefficient est inférieur à $0'{,}1$:

$(4)^0$	$2L - L' - L'' + l'$	0,117	13,66	— 0,2
$(4)^1$	$2L - 2L'' + l'$	0,062	26,33	— 0,1
$(4)^2$	$2L + L' - 3L'' + l'$	0,031	38,13	»
$(4)^3$	$2L + 2L' - 4L'' + l'$	0,017	49,13	»
$(4)^4$	$2L + 3L' - 5L'' + l'$	0,011	59,41	»
$(4)^5$	$2L + 4L' - 6L'' + l'$	0,007	69,05	»

Nous étudierons l'action indirecte pour les deux premiers termes seulement, les inégalités des autres termes étant insensibles, comme le montre le Tableau précédent.

En prenant, d'une part,

$$\frac{1}{fm'}a'\frac{\partial R'}{\partial r'} = -\frac{9}{4}\frac{a^2}{a'^3}\cos(2L - 2L'),$$

$$\frac{1}{fm'}\frac{\partial R'}{\partial v'} = \frac{3}{2}\frac{a^2}{a'^3}\left[\sin(2L - 2L') - \frac{1}{2}e'\sin(2L - 2L' + l')\right]$$

et, d'autre part,

$$\frac{\delta r'}{a'} = e'\sum \rho_2^{(i+1)}\cos[(i+1)(L' - L'') + l'],$$

$$\delta v' = \sum \lambda_1^{(i+1)}\sin\,(i+1)(L' - L'') + e'\sum \lambda_2^{(i+1)}\sin[(i+1)(L' - L'') + l'],$$

on obtient pour $\delta R'$ l'expression $-\frac{3}{8}n'^2a^2e'$ multipliée par

$$\begin{aligned}
3\sum \rho_2^{(i+1)}\Big\{ &\cos[2L - 2L' + (i+1)(L' - L'') + l'] \\
&+ \cos[2L - 2L' - (i+1)(L' - L'') - l']\Big\} \\
+ 2\sum \lambda_2^{(i+1)}\Big\{ &\cos[2L - 2L' + (i+1)(L' - L'') + l'] \\
&- \cos[2L - 2L' - (i+1)(L' - L'') - l']\Big\} \\
+ \sum \lambda_1^{(i+1)}\Big\{ &\cos[2L - 2L' - (i+1)(L' - L'') + l'] \\
&- \cos[2L - 2L' + (i+1)(L' - L'') + l']\Big\}.
\end{aligned}$$

Elle renferme les termes correspondant à $(4)^0$ et $(4)^1$, que nous allons examiner successivement.

$(4)^0$ On a l'argument $2L - L' - L'' + l'$ en faisant, dans l'expression de $\delta R'$, $i = 0$ dans le premier terme, le troisième et le sixième, $i = -2$ dans le cinquième.

Il vient alors, pour le multiplicateur de $-\frac{3}{8}n'^2 a^2 e' \cos(2L - L' - L'' + l')$,

$$m''C = 3\rho_2^{(1)} + 2\lambda_2^{(1)} - 2\lambda_1^{(1)}$$

en tenant compte de la relation $\lambda_1^{(-i)} = -\lambda_1^{(i)}$; mais on a

$$\rho_2^{(-i)} \neq \rho_2^{(i)}, \qquad \lambda_2^{(-i)} \neq \lambda_2^{(i)}.$$

Les ρ et les λ dépendent ici non seulement de $A^{(1)}$ et $A_1^{(1)}$, mais aussi de $A_2^{(1)}$ qui s'exprime, en fonction des $b^{(i)}$,

$$a' A_2^{(1)} = 2b^{(1)} + 4b_1^{(1)} + b_2^{(1)}.$$

Les données du calcul sont

$$\beta = 0,112, \qquad n'' = 94870, \qquad \omega = 0,0374;$$

elles donnent

$$b^{(1)} = 0,113, \qquad b_1^{(1)} = 0,114, \qquad b_2^{(1)} = 0,0032, \qquad C = 0,107$$

dont la comparaison au nombre analogue dû à l'action directe ($-0,117$) montre que l'action totale est très faible.

Appliquons à ce cas la méthode de M. Andoyer. Revenons donc à l'action directe où il faut apporter la même correction $-\beta$ à $g^{(0)}$ et $g_1^{(0)}$ et chercher, avec les nouvelles valeurs et pour $i = 0$, ce que devient l'expression

$$\left(i + \frac{1}{2}\right) g^{(i)} + \frac{1}{2} g_1^{(i)}.$$

On trouve 0,005; la méthode ordinaire donne, pour l'action totale, 0,010.

$(4)^1$ Pour avoir le terme d'argument $2L - 2L'' + l'$, il faut faire $i = 1$ dans le premier, le troisième et le sixième terme de $\delta R'$ et $i = -3$ dans le cinquième. On a, par suite,

$$m''C = 3\rho_2^{(2)} + 2\lambda_2^{(2)} - 2\lambda_1^{(2)}.$$

Le rapport de C à la quantité analogue relative à l'action directe est du troisième ordre en $\beta = 0,173$. Il s'ensuit que la correction à apporter à l'action directe pour en déduire l'action totale n'atteint pas $\frac{1}{10}$ de seconde.

Voici le Tableau des résultats définitifs concernant l'action totale des termes $(4)^i$:

$(4)^0$	$+0,010$	$-1'' \sin(2L - L' - L'' + l')$
$(4)^1$	$+0,062$	$-7'' \sin(2L - 2L'' + l')$
$(4)^2$	$+0,031$	$-4'' \sin(2L + L' - 3L'' + l')$
$(4)^3$	$+0,017$	$-2'' \sin(2L + 2L' - 4L'' + l')$
$(4)^4$	$+0,011$	$-1'' \sin(2L + 3L' - 5L'' + l')$
$(4)^5$	$+0,013$	$-1'' \sin(2L + 4L' - 6L'' + l')$

31. Le second terme en e' est

$$(5)^i = \frac{3}{8} m'' n'^2 a^2 e' \left[\left(\frac{5}{2} - i\right) g^{(i)} + \frac{1}{2} g_1^{(i)}\right] \cos(i\delta + \delta_1 - l').$$

Pour déterminer n'', on a

$$n'' = \frac{2n + (i-2)n'}{i+1} + \frac{\varepsilon}{i+1}.$$

Nous ferons $i = 0, 1, 2$.
On a alors, pour n'' et a'',

$(5)^0$	$87774 + \varepsilon$	0,1178
$(5)^1$	$45661 + \frac{1}{2}\varepsilon$	0,1821
$(5)^2$	$31623 + \frac{1}{3}\varepsilon$	0,2326

Nous avons donné au numéro précédent les séries permettant de calculer $g_1^{(i)}$. On doit prendre

$$k = k' = k'' = 2, \qquad K = -6{,}026.$$

Il en résulte, pour l'action directe, la troisième colonne renfermant les valeurs de l'expression entre crochets,

$(5)^0$	$2L - L' - L'' - l'$	0,3659	14,76	$-0{,}7$
$(5)^1$	$2L - 2L'' - l'$	0,0686	28,38	$-0{,}1$
$(5)^2$	$2L + L' - 3L'' - l'$	0,0188	40,98	0,0

Pour la fonction perturbatrice relative à l'action indirecte, il faut considérer

$$\frac{1}{fm'} a' \frac{\partial R'}{\partial r'} = -9 \frac{a^2}{a'^3} e' \cos(2L - 2L' - l') - \frac{9}{4} \frac{a^2}{a'^3} \cos(2L - 2L'),$$

$$\frac{1}{fm'} \frac{\partial R'}{\partial v'} = \frac{21}{4} \frac{a^2}{a'^3} e' \sin(2L - 2L' - l') + \frac{3}{2} \frac{a^2}{a'^3} \sin(2L - 2L'),$$

$$\frac{\delta r'}{a'} = \sum \rho_1^{(i+1)} \cos(i+1)(L' - L'') + e' \sum \rho_2^{(i+1)} \cos[(i+1)(L' - L'') + l'],$$

$$\delta v' = \sum \lambda_1^{(i+1)} \sin(i+1)(L' - L'') + e' \sum \lambda_2^{(i+1)} \sin[(i+1)(L' - L'') + l'].$$

On en déduit, pour les termes de $\delta R'$ qui conviennent,

$$\begin{aligned}\delta R' = \frac{3}{8} n'^2 a^2 e' \sum \{ & -12\rho_1^{(i+1)} \cos[2L - 2L' - l' + (i+1)(L'-L'')] \\ & -12\rho_1^{(i+1)} \cos[2L - 2L' - l' - (i+1)(L'-L'')] \\ & -\ \ 3\rho_2^{(i+1)} \cos[2L - 2L' + l' + (i+1)(L'-L'')] \\ & -\ \ 3\rho_2^{(i+1)} \cos[2L - 2L' - l' - (i+1)(L'-L'')] \\ & -\ \ 7\lambda_1^{(i+1)} \cos[2L - 2L' - l' + (i+1)(L'-L'')] \\ & +\ \ 7\lambda_1^{(i+1)} \cos[2L - 2L' - l' - (i+1)(L'-L'')] \\ & -\ \ 2\lambda_2^{(i+1)} \cos[2L - 2L' + l' + (i+1)(L'-L'')] \\ & +\ \ 2\lambda_2^{(i+1)} \cos[2L - 2L' - l' - (i+1)(L'-L'')] \}.\end{aligned}$$

$(5)^0$ En ce qui concerne l'action indirecte de ce terme, on a

$$-\frac{3}{8} n'^2 a^2 e' (24\rho_1^{(1)} + 14\lambda_1^{(1)} + 3\rho_2^{(-1)} - 2\lambda_2^{(-1)}) \cos(2L - L' - L'' - l').$$

C désignant la fonction des ρ et des λ entre parenthèses, on a successivement

$$\beta = 0{,}118, \qquad n'' = 87774, \qquad \omega = 0{,}0404;$$

$$b^{(1)} = 0{,}119, \qquad b_1^{(1)} = 0{,}120, \qquad b_2^{(1)} = 0{,}0038,$$

$$\beta^2 a' A^{(1)} = -0{,}998, \qquad \beta^2 a' A_1^{(1)} = -1{,}0033, \qquad a' A_2^{(1)} = 0{,}722, \qquad C = +0{,}351;$$

par conséquent, l'action directe est presque annulée.

Nous ne donnons pas le détail pour $(5)^1$ et $(5)^2$; un calcul sommaire nous a montré que, pour ces termes, l'action indirecte est une petite fraction de l'action directe, elle-même très faible, ainsi que nous l'avons vu.

Revenons au terme $(5)^0$ pour l'application de la méthode de M. Andoyer. Dans l'expression $\frac{5}{2} g^{(0)} + \frac{1}{2} g_1^{(0)}$, nous devons diminuer $g^{(0)}$ et $g_1^{(0)}$ de β et, par conséquent, la quantité précédente elle-même de 3β, ce qui la réduit à 0,012, c'est-à-dire à la trentième partie de sa valeur.

On a, pour l'action totale des trois termes $(5)^i$,

$(5)^0$	$+0{,}030$	$-2'' \sin(2L - L' - L'' - l')$
$(5)^1$	$+0{,}137$	$-8'' \sin(2L - 2L'' - l')$
$(5)^2$	$+0{,}038$	$-2'' \sin(2L + L' - l')$

32. Dans les termes en e'', que nous allons étudier, nous laissons e'' arbitraire.

Nous examinerons d'abord

$$(6)^i = -\frac{3}{8} m'' n'^2 a^2 e'' \left[(i+1) g^{(i)} + \frac{1}{2} g_1^{(i)} \right] \cos(i\delta + \delta_1 + l'');$$

n'' est déterminé par

$$n'' = \frac{2n + (i-1)n'}{i} + \frac{\varepsilon}{i}.$$

En donnant à i les valeurs 1, 2, 3, 4, 5, il vient, pour n'' et a'',

$(6)^1$	$94870 + \varepsilon$	0,1118
$(6)^2$	$49209 + \frac{1}{2}\varepsilon$	0,1732
$(6)^3$	$33989 + \frac{1}{3}\varepsilon$	0,2217
$(6)^4$	$26379 + \frac{1}{4}\varepsilon$	0,2625
$(6)^5$	$21812 + \frac{1}{5}\varepsilon$	0,2980

On a calculé $g^{(i)}$ et $g_1^{(i)}$ comme précédemment

$$k = k' = k'' = 2, \qquad K = -6{,}026.$$

La formule qui donne les valeurs des coefficients des inégalités est la suivante :

$$\frac{3}{8}\left[(i+1) g^{(i)} + \frac{1}{2} g_1^{(i)} \right] \frac{273^2 \times 206265}{5000000 \times 60} \times 6{,}026 e''.$$

Voici les résultats qu'on en déduit :

$(6)^1$	$2L - 2L'' + l''$	0,0292	13,66	$3{,}4e''$
$(6)^2$	$2L + L' - 3L'' + l''$	0,0159	26,33	$1{,}8e''$
$(6)^3$	$2L + 2L' - 4L'' + l''$	0,0091	38,13	$1{,}0e''$
$(6)^4$	$2L + 3L' - 5L'' + l''$	0,0056	49,13	$0{,}6e''$
$(6)^5$	$2L + 4L' - 6L'' + l''$	0,0036	59,41	$0{,}4e''$

Ici la méthode de M. Andoyer conduit aux mêmes résultats; on n'a à apporter aucune correction à $g^{(i)}$ et à $g_1^{(i)}$. Et, d'ailleurs, comme nous allons le voir, l'action indirecte est très faible.

La partie de la fonction perturbatrice relative à l'action indirecte et concernant ces termes résulte de la combinaison des expressions suivantes :

$$\frac{1}{fm'}a'\frac{\partial R'}{\partial r'} = -\frac{9}{4}\frac{a^2}{a'^3}\cos(2L-2L'), \qquad \frac{1}{fm'}\frac{\partial R'}{\partial v'} = \frac{3}{2}\frac{a^2}{a'^3}\sin(2L-2L'),$$

$$\frac{\delta r'}{a'} = e''\sum \rho_3^{(i+1)}\cos[(i+1)(L'-L'')+l''], \qquad \delta v' = e''\sum \lambda_3^{(i+1)}\sin[(i+1)(L'-L'')+l''].$$

On en déduit

$$(27) \qquad \delta R' = \frac{3}{8}n'^2 a^2 e''\sum\Big\{-3\rho_3^{(i+1)}\cos[2L-2L'+l''+(i+1)(L'-L'')]$$
$$-3\rho_3^{(i+1)}\cos[2L-2L'-l''-(i+1)(L'-L'')]$$
$$-2\lambda_3^{(i+1)}\cos[2L-2L'+l''+(i+1)(L'-L'')]$$
$$+2\lambda_3^{(i+1)}\cos[2L-2L'-l''-(i+1)(L'-L'')]\Big\}.$$

Pour avoir les termes $(6)^i$, il suffit de prendre le premier et le troisième terme de cette expression.

$(6)^1$ En faisant $i=1$, on a

$$-\frac{3}{8}n'^2 a^2 e''(3\rho_3^{(2)}+2\lambda_3^{(2)})\cos(2L-2L''+l'');$$

$\rho_3^{(2)}$ et $\lambda_3^{(2)}$ dépendent de $A^{(2)}$ et de ses dérivées et la partie complémentaire de la fonction perturbatrice n'intervient pas.

Pour le calcul numérique, on a successivement

$$\beta = 0,112, \qquad n'' = 94870, \qquad \omega = 0,0374,$$

$$b^{(2)} = 0,0094, \qquad b_1^{(2)} = 0,0190, \qquad b_2^{(2)} = 0,0194, \qquad 3\rho_3^{(2)}+2\lambda_3^{(2)} = -0,0006\,m''.$$

On a trouvé, pour l'action directe, 0,0292. On voit que l'action indirecte équivaut à peu près à la cinquantième partie.

$(6)^2$ Pour avoir l'action indirecte concernant ce terme, on doit faire $i=2$ dans le premier et le troisième terme de l'expression (27) de $\delta R'$ et l'on trouve

$$-\frac{3}{8}n'^2 a^2 e''(3\rho_3^{(3)}+2\lambda_3^{(3)})\cos(2L+L'-3L''+l'').$$

On a

$$\beta = 0,173, \qquad n'' = 49209, \qquad \omega = 0,0721,$$

$$b^{(3)} = 0,0033, \qquad b_1^{(3)} = 0,0099, \qquad b_2^{(3)} = 0,0203.$$

Un calcul sommaire montre que la quantité $3\rho_3^{(3)}+2\lambda_3^{(3)}$ est voisine de 0,0001 et que, par conséquent, l'action indirecte est une fraction négligeable de l'action directe.

On est parvenu à une conclusion analogue pour les autres termes $(6)^i$.

On trouvera à la fin du numéro suivant le Tableau des valeurs de l'action totale de ces planètes supposées.

33. Le second terme en e'' du premier ordre est

$$(7)^i = \frac{3}{8} m'' n'^2 a^2 e'' \left[(i+1) g^{(i)} - \frac{1}{2} g_1^{(i)} \right] \cos(i\delta + \delta_1 - l'');$$

$$n'' = \frac{2n + (i-1)n'}{i+2} + \frac{\varepsilon}{i+2}.$$

On peut faire $i = 0, 1, 2, 3$ et, en outre, $i = -1$. Et l'on obtient, pour n'' et a'',

$(7)^{-1}$	$87774 + \varepsilon$	0,1178
$(7)^0$	$45661 + \frac{1}{2}\varepsilon$	0,1821
$(7)^1$	$31623 + \frac{1}{3}\varepsilon$	0,2326
$(7)^2$	$24605 + \frac{1}{4}\varepsilon$	0,2750
$(7)^3$	$20393 + \frac{1}{5}\varepsilon$	0,3116

Pour $i = 0, 1, 2, 3$, nous aurons à calculer $g^{(i)}$ et $g_1^{(i)}$ par les séries dont nous avons déjà fait usage; mais, pour $i = -1$, nous avons besoin de $g_1^{(-1)}$. Au n° **22**, nous avons donné l'expression générale de $g^{(-i)}$ en faisant remarquer qu'elle n'est pas identique à $g^{(i)}$. On en déduit

$$g^{(-1)} = 2 + \frac{5}{2}\beta^2 + \frac{105}{32}\beta^4 + \frac{525}{128}\beta^6 + \frac{40425}{8192}\beta^8 + \ldots;$$

d'où

$$g_1^{(-1)} = 5\beta^2 + \frac{105}{8}\beta^4 + \frac{1575}{64}\beta^6 + \frac{40425}{1024}\beta^8 + \ldots$$

ou, en représentant les coefficients par leurs logarithmes,

$$g_1^{(-1)} = 0{,}69897\beta^2 + 1{,}11810\beta^4 + 1{,}39110\beta^6 + 1{,}59635\beta^8 + \ldots;$$

on a

$$k = k' = k'' = 2, \qquad \mathrm{K} = 6{,}026 e''.$$

On a finalement, pour l'action directe, les résultats suivants :

$(7)^{-1}$	$2L-2L'-\quad l''$	$-0{,}0360$	$14{,}76$	$+4{,}2e''$
$(7)^{0}$	$2L-\ L'-\ L''-l''$	$+0{,}0844$	$28{,}38$	$-9{,}8e''$
$(7)^{1}$	$2L-\quad 2L''-l''$	$+0{,}0401$	$40{,}98$	$-4{,}6e''$
$(7)^{2}$	$2L+\ L'-3L''-l''$	$+0{,}0206$	$52{,}67$	$-2{,}4e''$
$(7)^{3}$	$2L+2L'-4L''-l''$	$+0{,}0114$	$63{,}55$	$-1{,}3e''$

Pour l'action indirecte, la formule (27) du n° **32** nous donnera la partie de $\delta R'$ correspondant à $(7)^i$. Il suffit de donner à i les valeurs qui conviennent dans le second et le quatrième terme.

$(7)^{-1}$ On trouve pour ce cas, en faisant $i=-1$,

$$-\frac{3}{8}n'^2a^2e''(3\rho_3^{(0)}-2\lambda_3^{(0)})\cos(2L-2L'-l''),$$

$\rho_3^{(0)}$ et $\lambda_3^{(0)}$ s'expriment en fonction de $A^{(0)}$ et de ses dérivées et le calcul de ces quantités ne présente rien de particulier.

Avec les données

$$\beta=0{,}118,\qquad n''=87774,\qquad \omega=0{,}0404,$$

on obtient

$$b^{(0)}=2{,}0070,\qquad b_1^{(0)}=0{,}0141,\qquad b_2^{(0)}=0{,}0146,\qquad 3\rho_3^{(0)}-2\lambda_3^{(0)}=0{,}000112\,m''.$$

Rappelons que l'action directe a donné, pour la quantité analogue, $-0{,}0360$. Par conséquent, l'action indirecte est insensible.

$(7)^{0}$ Nous avons à calculer ici l'expression

$$m''C=3\rho_3^{(1)}-2\lambda_3^{(1)},$$

qui dépend de $A^{(1)}$. Il faut donc prendre

$$a'A^{(1)}=b^{(1)}-\frac{1}{\beta^2},\qquad a'A_1^{(1)}=-b^{(1)}-b_1^{(1)}-\frac{1}{\beta^2},\qquad a'A_2^{(1)}=2b^{(1)}+4b_1^{(1)}+b_2^{(1)}.$$

On a

$$\beta=0{,}182,\qquad n''=45661,\qquad \omega=0{,}0777;$$

d'où l'on déduit

$$b^{(1)}=0{,}184,\qquad b_1^{(1)}=0{,}189,\qquad b_2^{(1)}=0{,}0145,\qquad C=0{,}0908.$$

Ce résultat est supérieur à celui de l'action directe, pour lequel on a, au signe près, 0,0844.

Avant de passer au terme suivant, voyons ce que donne, pour l'action directe, la méthode de M. Andoyer. Il s'agit de calculer l'expression $g^{(0)} - \frac{1}{2} g_1^{(0)}$ en retranchant β de $g^{(0)}$ et de $g_1^{(0)}$, c'est-à-dire $\frac{1}{2}\beta$ de l'expression elle-même.

On trouve ainsi, par la méthode de M. Andoyer, 0,007, résultat identique à celui que nous donne la méthode ordinaire, 0,006.

$(7)^1$ Le coefficient à calculer est

$$m''C = 3\rho_3^{(2)} - 2\lambda_3^{(2)},$$

où n'entrent ni $A^{(1)}$ ni ses dérivées. Avec

$$\beta = 0{,}233, \qquad n'' = 31623, \qquad \omega = 0{,}112,$$

il vient

$$b^{(2)} = 0{,}042, \qquad b_1^{(2)} = 0{,}085, \qquad b_2^{(2)} = 0{,}093, \qquad C = 0{,}00092.$$

Le nombre correspondant pour l'action directe étant 0,0401 au signe près, on voit que cette dernière est diminuée seulement du quarantième de sa valeur.

$(7)^2$ Avec

$$\beta = 0{,}275, \qquad n'' = 24605, \qquad \omega = 0{,}144$$

et, par suite,

$$b^{(3)} = 0{,}0134, \qquad b_1^{(3)} = 0{,}0413, \qquad b_2^{(3)} = 0{,}0876,$$

on trouve pareillement

$$3\rho_3^{(3)} - 2\lambda_3^{(3)} = 0{,}00064\, m'',$$

c'est-à-dire la trentième partie environ de l'action directe.

$(7)^3$ On obtient de même

$$3\rho_3^{(4)} - 2\lambda_3^{(4)} = 0{,}00043\, m'',$$

la vingt-septième partie de l'action directe.

Nous terminons ce numéro en donnant simultanément les résultats définitifs de l'action totale pour les termes $(6)^i$ et $(7)^i$. Ils peuvent avoir une importance aussi grande que les termes de l'ordre zéro, à cause de la possibilité d'une forte excentricité des planètes supposées :

$(6)^1$	$-0,286$	$+199'' e'' \sin(2L - 2L'' + l'')$
$(6)^2$	$-0,0159$	$+111'' e'' \sin(2L + L' - 3L'' + l'')$
$(6)^3$	$-0,0091$	$+63'' e'' \sin(2L + 2L' - 4L'' + l'')$
$(6)^4$	$-0,0021$	$+41'' e'' \sin(2L + 3L' - 5L'' + l'')$
$(6)^5$	$-0,0014$	$+27'' e'' \sin(2L + 4L' - 6L'' + l'')$
$(7)^{-1}$	$-0,0359$	$+249'' e'' \sin(2L - 2L' - l'')$
$(7)^0$	$-0,0064$	$+45'' e'' \sin(2L - L' - L'' - l'')$
$(7)^1$	$+0,0392$	$-272'' e'' \sin(2L - 2L'' - l'')$
$(7)^2$	$+0,0200$	$-139'' e'' \sin(2L + L' - 3L'' - l'')$
$(7)^3$	$+0,0110$	$-76'' e'' \sin(2L + 2L' - 4L'' - l'')$

34. Nous avons étudié dans les numéros qui précèdent les termes des ordres zéro et un de la fonction perturbatrice, obtenus au n° 6. Les coefficients de ces termes sont exprimés en fonction de $g^{(i)}$ et de ses dérivées des deux premiers ordres; nous avons donné leurs développements en séries disposés pour le calcul par logarithmes. C'est pour ne pas interrompre l'emploi de ces quantités que nous avons réservé un autre terme du premier ordre en e qu'il nous reste à examiner.

Il est compris dans le développement (B) du n° 5 et a pour expression

$$(8)^i = -\frac{1}{4} m'' n'^2 a^2 e \sum c^{(i)} \cos(i\delta + l),$$

n'' est déterminé par

$$n'' = \frac{in' + \nu}{i} + \frac{\varepsilon}{i}.$$

Nous ferons $i = 1, 2, 3$. On a alors, pour n'' et a'',

$(8)^1$	$50582 + \varepsilon$	$0,1701$
$(8)^2$	$27065 + \frac{1}{2}\varepsilon$	$0,2580$
$(8)^3$	$19226 + \frac{1}{3}\varepsilon$	$0,3241$

Nous avons donné au n° 22 le développement de $c^{(i)}$ en série. Comme nous aurons encore besoin de cette quantité et de sa dérivée pour l'étude des termes du second ordre, j'écris ici, sous la forme la plus commode pour les calculs numériques, son expression pour $i = 1, 2, 3$. Les coefficients sont représentés par leurs logarithmes

$$c^{(1)} = 0{,}47712\beta + 0{,}75012\beta^3 + 0{,}91398\beta^5 + 1{,}03208\beta^7 + \ldots,$$
$$c^{(2)} = 0{,}57403\beta^2 + 0{,}81707\beta^4 + 0{,}96513\beta^6 + 1{,}07347\beta^8 + \ldots,$$
$$c^{(3)} = 0{,}64098\beta^3 + 0{,}86822\beta^5 + 1{,}00652\beta^7 + 1{,}10820\beta^9 + \ldots.$$

On a ici

$$k = 1, \qquad k' = k'' = 0, \qquad \mathrm{K} = -3{,}058.$$

Les coefficients des inégalités cherchées sont donnés alors par l'expression

$$0{,}764\, e c^{(i)}.$$

On obtient ainsi les résultats concernant l'action directe contenus dans le Tableau ci-dessous (la troisième colonne renferme les valeurs de $c^{(i)}$) :

$(8)^1$	$\mathrm{L}' - \mathrm{L}'' + l$	0,539	25,62	1,2
$(8)^2$	$2\mathrm{L}' - 2\mathrm{L}'' + l$	0,282	47,88	0,6
$(8)^3$	$3\mathrm{L}' - 3\mathrm{L}'' + l$	0,179	67,40	0,4

La partie de la fonction perturbatrice relative à l'action indirecte et dépendant de l'argument $i\delta + l$ s'obtient en multipliant

$$\frac{1}{fm'} a' \frac{\partial \mathrm{R}'}{\partial r'} = \frac{3}{2} \frac{a^2}{a'^3} e \cos l$$

par

$$\frac{\delta r'}{a'} = \sum \rho_1^{(i)} \cos i(\mathrm{L}' - \mathrm{L}'')$$

et il vient, pour la partie de $\delta\mathrm{R}'$ qui nous intéresse,

$$\delta\mathrm{R}' = \frac{3}{4} n'^2 a^2 e \sum \rho_1^{(i)} \left\{ \cos[i(\mathrm{L}' - \mathrm{L}'') + l] + \cos[i(\mathrm{L}' - \mathrm{L}'') - l] \right\}.$$

En tenant compte de ce que $\rho_1^{(i)}$ ne change pas quand on change le signe de i, on peut mettre cette expression sous la forme

$$\delta\mathrm{R}' = \frac{1}{4} n'^2 a^2 e \sum 6\rho_1^{(i)} \cos[i(\mathrm{L}' - \mathrm{L}'') + l],$$

qu'il suffit d'appliquer aux cas $i = 1, 2, 3$.

$(8)^1$ La quantité $\rho_1^{(1)}$ dépend de $\mathrm{A}^{(1)}$, dans lequel il faut tenir compte du terme provenant de la partie complémentaire de la fonction perturbatrice, comme dans les cas analogues précédents.

Avec les données

$$\beta = 0{,}1701, \qquad n'' = 50582, \qquad \omega = 0{,}0701,$$

on obtient d'abord

$$b^{(1)} = 0{,}172, \qquad b_1^{(1)} = 0{,}176,$$

puis, pour le multiplicateur de $m'' n'^2 a^2 e \cos(\mathrm{L}' - \mathrm{L}'' + l)$, le nombre 0,128. L'action directe donne, au signe près, 0,135.

Revenons à l'action directe de $(8)^1$ pour l'application de la méthode de M. Andoyer. Pour appliquer la règle établie au n° **22**, nous devons diminuer $c^{(1)}$ de 3β, c'est-à-dire le nombre ci-dessus, 0,135, de $\frac{3}{4}\beta = 0{,}128$. Et l'on voit que le résultat est identique à celui que donne la méthode ordinaire pour l'action totale.

$(8)^2$ Pour $i = 2$, on a à calculer $\rho_1^{(2)}$. On a ici

$$\beta = 0{,}258, \qquad n'' = 27065, \qquad \omega = 0{,}131,$$

$$b^{(2)} = 0{,}051, \qquad b_1^{(2)} = 0{,}106, \qquad 6\rho_1^{(2)} = 0{,}00305\, m''.$$

La quantité analogue à $6\rho_1^{(2)}$ dans l'action directe est $c^{(2)} = 0{,}282$; ce qui montre que l'action indirecte est insensible.

$(8)^3$ On calcule $\rho_1^{(3)}$ avec

$$\beta = 0{,}324, \qquad n'' = 19226, \qquad \omega = 0{,}185;$$

d'où

$$b^{(3)} = 0{,}022, \qquad b_1^{(3)} = 0{,}069, \qquad 6\rho_1^{(3)} = 0{,}0048\, m''.$$

$6\rho_1^{(3)}$ est une très petite fraction de la quantité analogue relative à l'action directe

$$c^{(3)} = 0{,}179.$$

On a finalement pour l'action totale des termes $(8)^i$

$(8)^1$	$-0{,}007$	$+\ 4'' \sin(\mathrm{L}' - \mathrm{L}'' + l)$
$(8)^2$	$-0{,}070$	$+36'' \sin(2\mathrm{L}' - 2\mathrm{L}'' + l)$
$(8)^3$	$-0{,}045$	$+23'' \sin(3\mathrm{L}' - 3\mathrm{L}'' + l)$

V. — Étude des termes du second ordre.

35. Reprenons la formule qui exprime la perturbation de la longitude de la Lune, que nous avons donnée au n° **24** :

$$\delta \mathrm{L} = \frac{p^2 \mathrm{AK}}{n'^2 a^2} \sin\theta, \qquad \theta = kl + k'g + k''h + ct + q$$

et

$$K = -3{,}0576\,k + 0{,}0560\,k' - 0{,}0112\,k''.$$

Nous aurons une approximation suffisante en réduisant K à $-3k$; p est toujours égal à 273.

On a alors, δL étant exprimé en minutes d'arc,

$$\delta L = -153',7\,\frac{kA}{n'^2 a^2}\sin\theta. \tag{28}$$

Pour les termes de la fonction perturbatrice qu'il nous reste à étudier, on peut avoir pour k l'une des valeurs -1, 1, 2, 3, 4. A contient en facteur, outre $n'^2 a^2$ et une fonction des coefficients du développement de $(1+\beta^2-2\beta\cos\varphi)^{-s}$, l'une des quantités $B = e^2, e'^2, ee', \ldots$. Pour simplifier les calculs, j'ai construit une Table à double entrée donnant les valeurs de $-153',7\,kB$ pour ces diverses valeurs de k et B. Aux valeurs déjà données de e, e', ..., il faut joindre $\gamma = 0{,}0449$.

J'ai laissé e'' et γ'' arbitraires. Voici cette Table :

(P)

	$k=-1$.	1.	2.	3.	4.
e^2	$+\ 0',46$	$-\ 0',46$	$-\ 0',92$	$-\ 1',38$	$-\ 1',84$
ee'	$+\ 0,14$	$-\ 0,14$	$-\ 0,28$	$-\ 0,42$	$-\ 0,56$
e'^2	$+\ 0,04$	$-\ 0,04$	$-\ 0,08$	$-\ 0,12$	$-\ 0,16$
γ^2	$+\ 0,31$	$-\ 0,31$	$-\ 0,62$	$-\ 0,93$	$-\ 1,24$
ee''	$+\ 8,4\ e''$	$-\ 8,4\ e''$	$-\ 16,8\ e''$	$-\ 25,2\ e''$	$-\ 33,6\ e''$
$e'e''$	$+\ 2,6\ e''$	$-\ 2,6\ e''$	$-\ 5,2\ e''$	$-\ 7,8\ e''$	$-\ 10,4\ e''$
e''^2	$+154\ e''^2$	$-154\ e''^2$	$-307\ e''^2$	$-461\ e''^2$	$-615\ e''^2$
$\gamma\gamma''$	$+\ 6,9\ \gamma''$	$-\ 6,9\ \gamma''$	$-\ 13,8\ \gamma''$	$-\ 20,7\ \gamma''$	$-\ 27,6\ \gamma''$
γ''^2	$+154\ \gamma''^2$	$-154\ \gamma''^2$	$-307\ \gamma''^2$	$-461\ \gamma''^2$	$-615\ \gamma''^2$
$\frac{a}{a'}$	$+\ 0,38$	$-\ 0,38$	$-\ 0,76$	$-\ 1,14$	$-\ 1,52$

Les coefficients du développement de $(1+\beta^2-2\beta\cos\varphi)^{-s}$ qui interviennent ici sont $c^{(i)}$, $e^{(i)}$, $f^{(i)}$, respectivement pour $s = \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}$.

De même que pour les termes des deux premiers ordres de la fonction perturbatrice, nous avons à considérer des fonctions de ces quantités; il est commode de les employer sous la forme de développements en série. Nous avons déjà utilisé l'une de ces fonctions et nous avons donné son développement au n° **22**. C'est

$$g^{(i)} = e^{(i+1)} - 2\beta e^{(i)} + \beta^2 e^{(i-1)}.$$

Nous avons encore besoin de $a^{(i)} = e^{(i)} - \beta e^{(i-1)}$, $a^{(-i)} = e^{(i)} - \beta e^{(i+1)}$,

$$
(29)\quad \left\{
\begin{array}{ll}
d^{(i)} = \frac{1}{2} e^{(i)} + \beta e^{(i+1)}, & d^{(-i)} = \frac{1}{2} e^{(i)} + \beta e^{(i-1)}, \\
h^{(i)} = f^{(i)} - \beta f^{(i-1)}, & h^{(-i)} = f^{(i)} - \beta f^{(i+1)}, \\
k^{(i)} = f^{(i+1)} - 2\beta f^{(i)} + \beta^2 f^{(i-1)}, & k^{(-i)} = f^{(i-1)} - 2\beta f^{(i)} + \beta^2 f^{(i+1)}, \\
\multicolumn{2}{c}{l^{(i)} = f^{(i)} - 3\beta f^{(i-1)} + 3\beta^2 f^{(i-2)} - \beta^3 f^{(i-3)},} \\
\multicolumn{2}{c}{l^{(-i)} = f^{(i)} - 3\beta f^{(i+1)} + 3\beta^2 f^{(i+2)} - \beta^3 f^{(i+3)}.}
\end{array}
\right.
$$

Nous avons fait remarquer que $g^{(i)}$ est différent de $g^{(-i)}$; la même remarque s'applique aux nouvelles fonctions.

Ces séries s'obtiennent très aisément, si l'on observe surtout que $k^{(i)}$ et $l^{(i)}$ peuvent s'exprimer respectivement en fonction de $h^{(i)}$ et $k^{(i)}$ de la façon suivante : on a, en effet, d'abord

$$
\begin{aligned}
k^{(i)} &= f^{(i+1)} - \beta f^{(i)} - \beta(f^{(i)} - \beta f^{(i-1)}) = h^{(i+1)} - \beta h^{(i)}, \\
k^{(-i)} &= f^{(i-1)} - \beta f^{(i)} - \beta(f^{(i)} - \beta f^{(i+1)}) = h^{(-i+1)} - \beta h^{(-i)};
\end{aligned}
$$

puis

$$
\begin{aligned}
l^{(i)} &= f^{(i)} - 2\beta f^{(i-1)} + \beta^2 f^{(i-2)} - \beta(f^{(i-1)} - 2\beta f^{(i-2)} + \beta^2 f^{(i-3)}) = k^{(i-1)} - \beta k^{(i-2)}, \\
l^{(-i)} &= f^{(i)} - 2\beta f^{(i+1)} + \beta^2 f^{(i+2)} - \beta(f^{(i+1)} - 2\beta f^{(i+2)} + \beta^2 f^{(i+3)}) = h^{(-i-1)} - \beta k^{(-i-2)}.
\end{aligned}
$$

On obtient les expressions

$$
(30)\quad \left\{
\begin{aligned}
a^{(i)} &= 2\,\frac{3.5\ldots(2i+1)}{2.4\ldots 2i}\left[\beta^i + \frac{5}{2}\,\frac{2i+3}{2i+2}\beta^{i+2} + \frac{5.7}{2.4}\,\frac{(2i+3)(2i+5)}{(2i+2)(2i+4)}\beta^{i+4} + \ldots\right], \\
a^{(-i)} &= 2\,\frac{5.7\ldots(2i+3)}{2.4\ldots 2i}\left[\beta^i + \frac{3}{2}\,\frac{2i+5}{2i+2}\beta^{i+2} + \frac{3.5}{2.4}\,\frac{(2i+5)(2i+7)}{(2i+2)(2i+4)}\beta^{i+4} + \ldots\right], \\
d^{(i)} &= \frac{5.7\ldots(2i+3)}{2.4\ldots 2i}\left[\beta^i + \frac{3^2}{2}\,\frac{2i+5}{2i+2}\beta^{i+2} + \frac{3.5^2}{2.4}\,\frac{(2i+5)(2i+7)}{(2i+2)(2i+4)}\beta^{i+4} + \ldots\right], \\
d^{(-i)} &= \frac{5.7\ldots(2i+1)}{2.4\ldots 2i}\left[\frac{6i+9}{2i+2}\beta^{i+1} + \frac{5}{2}\,\frac{2i+5}{2i+2}\,\frac{6i+15}{2i+4}\beta^{i+3} + \frac{5.7}{2.4}\,\frac{(2i+5)(2i+7)}{(2i+2)(2i+4)}\,\frac{6i+21}{2i+6}\beta^{i+5} + \ldots\right], \\
h^{(i)} &= 2\,\frac{5.7\ldots(2i+3)}{2.4\ldots 2i}\left[\beta^i + \frac{7}{2}\,\frac{2i+5}{2i+2}\beta^{i+2} + \frac{7.9}{2.4}\,\frac{(2i+5)(2i+7)}{(2i+2)(2i+4)}\beta^{i+4} + \ldots\right], \\
h^{(-i)} &= 2\,\frac{7.9\ldots(2i+5)}{2.4\ldots 2i}\left[\beta^i + \frac{5}{2}\,\frac{2i+7}{2i+2}\beta^{i+2} + \frac{5.7}{2.4}\,\frac{(2i+7)(2i+9)}{(2i+2)(2i+4)}\beta^{i+4} + \ldots\right], \\
k^{(i)} &= 2\,\frac{3.5\ldots(2i+3)}{2.4\ldots(2i+2)}\left[\beta^{i+1} + \frac{7}{2}\,\frac{2i+5}{2i+4}\beta^{i+3} + \frac{7.9}{2.4}\,\frac{(2i+5)(2i+7)}{(2i+4)(2i+6)}\beta^{i+5} + \ldots\right], \\
k^{(-i)} &= 2\,\frac{7.9\ldots(2i+3)}{2.4\ldots(2i-2)}\left[\beta^{i-1} + \frac{3}{2}\,\frac{2i+5}{2i}\beta^{i+1} + \frac{3.5}{2.4}\,\frac{(2i+5)(2i+7)}{2i(2i+2)}\beta^{i+3} + \ldots\right], \\
l^{(i)} &= 2\,\frac{1.3\ldots(2i-1)}{2.4\ldots 2i}\left[\beta^i + \frac{7}{2}\,\frac{2i+1}{2i+2}\beta^{i+2} + \frac{7.9}{2.4}\,\frac{(2i+1)(2i+3)}{(2i+2)(2i+4)}\beta^{i+4} + \ldots\right], \\
l^{(-i)} &= 2\,\frac{7.9\ldots(2i+5)}{2.4\ldots 2i}\left[\beta^i + \frac{1}{2}\,\frac{2i+7}{2i+2}\beta^{i+2} + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{(2i+7)(2i+9)}{(2i+2)(2i+4)}\beta^{i+4} + \ldots\right].
\end{aligned}
\right.
$$

Dans un premier examen des termes du second ordre, nous nous sommes proposé de rechercher ceux qui peuvent donner lieu à des inégalités sensibles. On conçoit *a priori,* en effet, que ceux qui ne dépendent que des excentricités et des inclinaisons de la Lune et de la Terre, ne donneront que des coefficients peu importants, à cause de la faiblesse de ces excentricités et inclinaisons. Nous nous sommes d'abord borné, dans l'emploi des séries précédentes, à leurs premiers termes; l'approximation est suffisante pour permettre de reconnaître les inégalités trop faibles.

J'ai été ainsi conduit à ne conserver que quelques termes dépendant de e'' et γ'', en vue d'une étude plus approfondie, qui fait l'objet de la suite de ce paragraphe.

36. Le premier groupe de ces termes, contenu dans le développement (C) du n° 6, est le suivant :

$$(9)^i = \frac{3}{8} m'' n'^2 a^2 e e'' \left[-3(i+1) g^{(i)} + \frac{3}{2} g_1^{(i)} \right] \cos(i\delta + \delta_1 - l - l'').$$

Il convient de faire $i = -1$ et $i = 0$ par suite de l'examen préliminaire dont nous avons parlé dans le numéro précédent.

Les valeurs de n'' sont données par la formule

$$n'' = \frac{(i-1)n' + n}{i+2} + \frac{\varepsilon}{i+2}.$$

On en déduit, pour les termes considérés, les valeurs de n'' et de a'' contenues dans le Tableau ci-dessous et correspondant respectivement à $i = -1$ et $i = 0$:

$(9)^{-1}$	$2L - 2L' - \quad l - l''$	$40740 + \varepsilon$	0,196
$(9)^0$	$2L - L - L'' - l - l''$	$22144 + \frac{1}{2}\varepsilon$	0,296

Pour $i = -1$, le facteur dépendant de $g^{(i)}$ et $g_1^{(i)}$ se réduit à $\frac{3}{2} g_1^{(-1)}$. Nous avons donné au n° 33 le développement de $g_1^{(-1)}$ en une série disposée pour le calcul logarithmique. En appliquant cette formule au cas de $\beta = 0,196$, on trouve

$$g_1^{(-1)} = 0,213.$$

Pour $i = 0$, on a à calculer

$$-3g^{(0)} + \frac{3}{2} g_1^{(0)}.$$

En appliquant la formule qui exprime $g^{(0)}$, trouvée au n° 25 et celle du n° 30 donnant $g_1^{(0)}$, il vient, pour $\beta = 0{,}296$,

$$g^{(0)} = 0{,}352, \qquad g_1^{(0)} = 0{,}474.$$

On a, par suite, pour les deux termes considérés de la fonction perturbatrice,

$$\begin{aligned}(9)^{-1} &= 0{,}120\, m'' n'^2 a^2 ee'' \cos(2L - 2L' - l - l'')\\ (9)^{0} &= -0{,}129\, m'' n'^2 a^2 ee'' \cos(2L - L' - L'' - l - l'').\end{aligned}$$

On a ici $k = 1$. Par suite, la table (P) du n° 35 nous donne pour le multiplicateur permettant de passer des expressions précédentes aux valeurs correspondantes de δL, conformément à ce que nous avons dit à ce numéro, la quantité $-8',4\,e''$. Il en résulte finalement pour l'action directe des deux inégalités cherchées, en minutes d'arc :

$$\begin{aligned}&(9)^{-1} \qquad && -1',0\, e'' \sin(2L - 2L' - l - l'')\\ &(9)^{0} && +1',1\, e'' \sin(2L - L' - L'' - l - l'')\end{aligned}$$

Passons à l'étude de l'action indirecte concernant ces deux termes. Ils sont contenus dans

$$a' \frac{\partial R'}{\partial r'} \frac{\delta r'}{a'} + \frac{\partial R'}{\partial v'} \delta v'.$$

Il suffit de prendre, d'après les développements (F) et (G) des nos 10 et 11,

$$\frac{1}{fm'} a' \frac{\partial R'}{\partial r'} = \frac{27}{4} \frac{a^2}{a'^3} e \cos(\delta_1 - \delta - l), \qquad \frac{1}{fm'} \frac{\partial R'}{\partial v'} = -\frac{9}{2} \frac{a^2}{a'^3} e \sin(\delta_1 - \delta - l)$$

et d'après les nos 17 et 19, en remarquant que l'on peut faire $\varphi = \delta$,

$$\frac{\delta r'}{a'} = e'' \rho_3^{(i)} \cos(i\delta + l''), \qquad \delta v' = e'' \lambda_3^{(i)} \sin(i\delta + l'').$$

Il vient, par suite, pour la partie de la fonction perturbatrice relative à l'action indirecte et dépendant de l'argument de $(9)^i$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{fm'} \delta R' = &\frac{27}{8} \frac{a^2}{a'^3} ee'' \rho_3^{(i)} \cos[\delta_1 - l - (i+1)\delta - l'']\\ &- \frac{9}{4} \frac{a^2}{a'^3} ee'' \lambda_3^{(i)} \cos[\delta_1 - l - (i+1)\delta - l''].\end{aligned}$$

$(9)^{-1}$ L'argument de ce terme étant $2L - 2L' - l - l''$, il faut faire, dans l'expression de $\delta R'$, $i = 0$. Nous avons, par suite, à calculer $\rho_3^{(0)}$ et $\lambda_3^{(0)}$. On a

$$a' A_1^{(0)} = -b^{(0)} - b_1^{(0)}, \qquad a' A_2^{(0)} = 2b^{(0)} + 4b_1^{(0)} + b_2^{(0)}, \qquad \beta = 0{,}196, \qquad \omega = 0{,}0871.$$

On obtient successivement

$$b^{(0)} = 2{,}020, \qquad b_1^{(0)} = 0{,}040, \qquad b_2^{(0)} = 0{,}044, \qquad a'A_1^{(0)} = -\,2{,}060, \qquad a'A_2^{(0)} = 4{,}244,$$

$$\rho_3^{(0)} = -\,0{,}000474\, m'', \qquad \lambda_3^{(0)} = +\,0{,}000088\, m''.$$

Il vient pour le terme cherché

$$\delta R' = -\, m'' n'^2 a^2 e e'' \times 0{,}00180 \cos(2L' - 2L' - l - l''),$$

environ la soixante-dixième partie de l'action directe.

$(9)^0$ Pour obtenir la partie de l'action indirecte correspondant à ce terme, nous devons calculer $\rho_3^{(-1)}$ et $\lambda_3^{(-1)}$, qui dépendent de $A^{(1)}$, comprenant la partie complémentaire de la fonction perturbatrice, ainsi que nous l'avons fait remarquer dans le paragraphe précédent. La correction à apporter à $A^{(1)}$ est $-\dfrac{a'}{a''^2}$.

On a, par suite,

$$a'A^{(1)} = b^{(1)} - \frac{1}{\beta^2}, \qquad a'A_1^{(1)} = -\,b^{(1)} - b_1^{(1)} - \frac{1}{\beta^2}, \qquad a'A_2^{(1)} = 2\,b^{(1)} + 4\,b_1^{(1)} + b_2^{(1)}.$$

Les données numériques sont

$$\beta = 0{,}296, \qquad \omega = 0{,}1602.$$

Le calcul donne successivement

$$b^{(1)} = 0{,}306, \qquad b_1^{(1)} = 0{,}328, \qquad b_2^{(1)} = 0{,}070,$$

$$a'A^{(1)} = -\,11{,}11, \qquad a'A_1^{(1)} = -\,12{,}05, \qquad a'A_2^{(1)} = 2{,}00,$$

$$\rho_3^{(-1)} = 0{,}146\, m'', \qquad \lambda_3^{(-1)} = 0{,}147\, m'';$$

d'où l'on tire pour le coefficient cherché

$$\frac{27}{8}\rho_3^{(-1)} - \frac{9}{8}\lambda_3^{(-1)} = 0{,}164\, m''.$$

On a, par conséquent, pour l'action totale

$$(9)^0 = +\,0{,}035\, m'' n'^2 a^2 e e''(2L - L' - L'' - l - l'').$$

Pour appliquer la méthode de M. Andoyer à ce terme, nous devons diminuer $g^{(0)}$ et $g_1^{(0)}$ de β et, par suite, apporter la correction $+\,0{,}166$ au coefficient de l'action directe

$$\frac{3}{8}\left(-\,3g^{(0)} + \frac{3}{2}g_1^{(0)}\right)$$

et la méthode nouvelle donne

$$(9)^0 = +\,0{,}037\, m'' n'^2 a^2 ee'' \cos(2L - L' - L'' - l - l'').$$

Les deux méthodes donnent donc, à très peu de chose près, le même résultat.

37. Il y a lieu de considérer un autre terme du second ordre en ee'',

$$\frac{3}{8} m'' n'^2 a^2 \left(2g^{(1)} - \frac{1}{2} g_1^{(1)}\right) ee'' \cos(2L - 2L'' + l - l'').$$

Il appartient au groupe suivant du développement (C) du n° 6 :

$$(10)^i = \frac{3}{8} m'' n'^2 a^2 \left[(i+1)\, g^{(i)} - \frac{1}{2} g_1^{(i)}\right] ee'' \cos(i\delta + \delta_1 + l - l'').$$

On a pour $(10)^1$

$$n'' = 47301 + \frac{1}{3}\varepsilon, \qquad \alpha'' = 0{,}178.$$

Avec ces données et les formules donnant $g^{(1)}$ et $g_1^{(1)}$, on trouve

$$g^{(1)} = 0{,}0262, \qquad g_1^{(1)} = 0{,}0543.$$

Il vient ensuite pour l'action directe de ce terme

$$(10)^1 = 0{,}0094\, m'' n'^2 a^2 ee'' \cos(2L - 2L'' + l - l'').$$

Comme l'on a $k = 3$, la Table (P) du n° 35 donne $-\,25{,}2\, e''$ pour le multiplicateur qui permet d'obtenir l'expression numérique de l'inégalité produite par $(10)^1$. On a alors

$$\delta L = -\,2'{,}4 e'' \sin(2L - 2L'' + l - l'').$$

Il nous reste à étudier l'action indirecte correspondant à ce terme. Les termes de $\delta R'$ qui sont la forme $(10)^i$ s'obtiennent en multipliant

$$\frac{1}{fm'} a' \frac{\partial R'}{\partial r'} = -\frac{9}{4} \frac{a^2}{a'^3} e \cos(\delta_1 - \delta + l), \qquad \frac{1}{fm'} \frac{\partial R}{\partial v'} = \frac{3}{2} \frac{a^2}{a'^3} e \sin(\delta_1 - \delta + l)$$

respectivement par

$$\frac{\delta r'}{a'} = e'' \rho_3^{(i)} \cos(i\delta + l''), \qquad \delta v' = e'' \lambda_3^{(i)} \sin(i\delta + l'')$$

et en ajoutant les résultats. Il vient

$$\frac{1}{fm'}\delta R' = -\frac{9}{8}\frac{a^2}{a'^3}ee''\left\{\cos[(i-1)\delta+\delta_1+l+l''] + \cos[\delta_1-(i+1)\delta+l-l'']\right\}\rho_3^{(i)}$$
$$-\frac{3}{4}\frac{a^2}{a'^3}ee''\left\{\cos[(i-1)\delta+\delta_1+l+l''] - \cos[\delta_1-(i+1)\delta+l-l'']\right\}\lambda_3^{(i)}.$$

Pour avoir dans cette expression les termes d'argument $2L-2L''+l-l''$, il faut faire $i=-2$ dans le deuxième et le quatrième crochet. On a alors, en introduisant comme toujours n' au lieu de a',

$$\delta R' = n'^2 a^2 ee''\left(-\frac{9}{8}\rho_3^{(-2)} + \frac{3}{4}\lambda_3^{(-2)}\right)\cos(2L-2L''+l-l'').$$

Pour le calcul de $\rho_3^{(-2)}$ et $\lambda_3^{(-2)}$, avec $\beta = 0,178$ et $\omega = 0,0750$, on trouve

$$a'A^{(2)} = b^{(2)} = 0,0241, \qquad b_1^{(2)} = 0,0488, \qquad b_2^{(2)} = 0,0514,$$
$$a'A_1^{(2)} = -0,0728, \quad a'A_2^{(2)} = 0,2946, \quad \rho_3^{(-2)} = 0,000051\,m'', \quad \lambda_3^{(-2)} = -0,000039\,m'';$$

par suite on a, pour l'action indirecte, tous calculs faits,

$$\delta R' = -0,000086\,m''n'^2a^2ee''\cos(2L-2L''+l-l'')$$

et l'on voit qu'elle est insensible, se réduisant à la centième partie environ de l'action directe.

38. Parmi les termes du second ordre dépendant des excentricités, trois autres pourraient donner lieu à des inégalités importantes, d'après l'étude sommaire dont nous avons parlé au n° 35. Ce sont des termes en e''^2. Nous allons les examiner dans cet article. Ils sont compris, pour $i=-2$, 0 et 1, dans l'expression suivante, tirée du n° 6,

$$(11)^i = \frac{3}{8}m''n'^2a^2\left(\frac{4i^2+13i+9}{8}g^{(i)} - \frac{2i+3}{4}g_1^{(i)} + \frac{1}{8}g_2^{(i)}\right)e''^2\cos(i\delta+\delta_1-2l'').$$

On a pour les valeurs de n'' et a'' des deux premiers, nous réservant de traiter le troisième séparément,

$(11)^{-2}$	$2L-3L'+L''-2l''$	$84226+\varepsilon$	0,121
$(11)^{0}$	$2L-L'-L''-2l''$	$30441+\frac{1}{3}\varepsilon$	0,239

Les séries permettant de calculer $g^{(0)}$ et $g_1^{(0)}$ ont été données au n^{os} 25 et 30. Il faut y joindre celle qui donne $g_2^{(0)}$, savoir

$$g_2^{(0)} = 1{,}0512\,\beta^3 + 1{,}7379\,\beta^5 + 2{,}1782\,\beta^7 + \ldots,$$

où les coefficients sont représentés par leurs logarithmes. On obtient alors, avec $\beta = 0{,}239$,

$$g^{(0)} = 0{,}2669, \qquad g_1^{(0)} = 0{,}3276, \qquad g_2^{(0)} = 0{,}2030.$$

Comme $k = 2$, on a par la Table du n° 35 le multiplicateur $-307' e''^2$, qui permet d'obtenir l'expression numérique de l'inégalité $(11)^0$. On a d'abord, pour la fonction perturbatrice,

$$(11)^0 = 0{,}0296\, m'' n'^2 a^2 e''^2 \cos(2\mathrm{L} - \mathrm{L}' - \mathrm{L}'' - 2l'');$$

d'où

$$\delta\mathrm{L} = -9',1\, e''^2 \sin(2\mathrm{L} - \mathrm{L}' - \mathrm{L}'' - 2l'').$$

En ce qui concerne le terme $(11)^{-2}$, nous avons besoin de la fonction $g^{(-2)}$ et de ses dérivées, que nous n'avons pas eu à considérer jusqu'ici. On a

$$g^{(-2)} = 5\left(\beta + \frac{1}{2}\,\frac{7}{4}\beta^3 + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{7.9}{4.6}\beta^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{7.9.11}{4.6.8}\beta^7 + \ldots\right);$$

d'où, en représentant toujours les coefficients par leurs logarithmes,

$$\begin{aligned}
g^{(-2)} &= 0{,}6990\,\beta + 0{,}6410\,\beta^3 + 0{,}6921\,\beta^5 + 0{,}7513\,\beta^7 + \ldots,\\
g_1^{(-2)} &= 0{,}6990\,\beta + 1{,}1181\,\beta^3 + 1{,}3911\,\beta^5 + 1{,}5964\,\beta^7 + \ldots,\\
g_2^{(-2)} &= \phantom{0{,}6990\,\beta +{}} 1{,}4191\,\beta^3 + 1{,}9932\,\beta^5 + 2{,}3745\,\beta^7 + \ldots.
\end{aligned}$$

Pour $\beta = 0{,}121$, on trouve avec ces formules,

$$g^{(-2)} = 0{,}6128, \qquad g_1^{(-2)} = 0{,}6288, \qquad g_2^{(-2)} = 0{,}0492$$

et, pour le terme cherché de la fonction perturbatrice,

$$(11)^{-2} = 0{,}0322\, m'' n'^2 a^2 e''^2 \cos(2\mathrm{L} - 3\mathrm{L}' + \mathrm{L}'' - 2l'').$$

On a encore ici $k = 2$ et la même valeur que précédemment pour le multiplicateur de la Table du n° 35. On a finalement

$$\delta\mathrm{L} = -9',9\, e''^2 \sin(2\mathrm{L} - 3\mathrm{L}' + \mathrm{L}'' - 2l'').$$

Passons à l'action indirecte correspondant à ces deux termes. Pour avoir les termes de $\delta R'$ de la forme $(11)^i$, il suffit de prendre

$$\frac{1}{fm'} a' \frac{\partial R'}{\partial r'} = -\frac{9}{4}\frac{a^2}{a'^3}\cos(\delta_1 - \delta), \qquad \frac{1}{fm'}\frac{\partial R'}{\partial v'} = \frac{3}{2}\frac{a^2}{a'^3}\sin(\delta_1 - \delta),$$

$$\frac{\delta r'}{a'} = e''^2 \rho_7^{(i)} \cos(i\delta + 2l''), \qquad \delta v' = e''^2 \lambda_7^{(i)} \sin(i\delta + 2l'');$$

d'où l'on déduit

$$(31) \quad \frac{1}{fm'}\delta R' = -\frac{9}{8}\frac{a^2}{a'^3} e''^2 \rho_7^{(i)} \{\cos[\delta_1 + (i-1)\delta + 2l''] + \cos[\delta_1 - (i+1)\delta - 2l'']\}$$
$$- \frac{3}{4}\frac{a^2}{a'^3} e''^2 \lambda_7^{(i)} \{\cos[\delta_1 + (i-1)\delta + 2l''] - \cos[\delta_1 - (i+1)\delta - 2l'']\}.$$

En faisant dans l'expression précédente $i = +1$ et $i = -1$, on obtient la partie de $\delta R'$ correspondant à $(11)^{-2}$ et $(11)^0$ respectivement. Nous allons examiner successivement ces deux cas.

$(11)^{-2}$ On doit calculer $\rho_7^{(1)}$ et $\lambda_7^{(1)}$, pour $\beta = 0,121$ et $\omega = 0,0421$. On trouve d'abord

$$b^{(1)} = 0,1217, \qquad b_1^{(1)} = 0,1230, \qquad b_2^{(1)} = 0,0041, \qquad b_3^{(1)} = 0,0044;$$

d'où successivement

$$a'A^{(1)} = b^{(1)} - \frac{1}{\beta^2} = -68,18, \qquad a'A_1^{(1)} = -b^{(1)} - b_1^{(1)} - \frac{1}{\beta^2} = -68,55,$$

$$a'A_2^{(1)} = 2b^{(1)} + 4b_1^{(1)} + b_2^{(1)} = 0,740, \qquad a'A_3^{(1)} = -6b^{(1)} - 18b_1^{(1)} - 9b_2^{(1)} - b_3^{(1)} = -2,985,$$

$$\rho_7^{(1)} = +0,0152\, m'', \qquad \lambda_7^{(1)} = -0,0151\, m'',$$

$$\delta R' = -0,0284\, m'' n'^2 a^2 e''^2 \cos(2L - 3L' + L'' - 2l'');$$

par suite, l'action totale est réduite au huitième environ de l'action directe.

Pour appliquer la méthode de M. Andoyer, il faut apporter à $g^{(-2)}$ et $g_1^{(-2)}$ la correction -5β et au facteur qui, dans $(11)^{-2}$, multiplie $m'' n'^2 a^2 e''^2$, la correction $-0,0284$.

On voit que les deux méthodes donnent des résultats identiques.

$(11)^0$ La valeur de $\delta R'$ dépend ici de $\rho_7^{(-1)}$ et $\lambda_7^{(-1)}$ et, par suite, de $A^{(1)}$ et de ses dérivées. Il faut donc encore prendre

$$a'A^{(1)} = b^{(1)} - \frac{1}{\beta^2}, \qquad a'A_1^{(1)} = -b^{(1)} - b_1^{(1)} - \frac{1}{\beta^2}.$$

Avec $\beta = 0,239$ et $\omega = 0,1166$, on a d'abord

$$b^{(1)} = 0,2443, \qquad b_1^{(1)} = 0,2553, \qquad b_2^{(1)} = 0,0347, \qquad b_3^{(1)} = 0,0435,$$

puis

$$a'\mathrm{A}^{(1)} = -17,27, \qquad a'\mathrm{A}_1^{(1)} = -18,01, \qquad a'\mathrm{A}_2^{(1)} = 1,542, \qquad a'\mathrm{A}_3^{(1)} = -6,415,$$

$$\rho_7^{(-1)} = 0,0892\, m'', \qquad \lambda_7^{(-1)} = 0,0909\, m'',$$

$$\delta\mathrm{R}' = -0,0322\, m'' n'^2 a^2 e''^2 \cos(2\mathrm{L} - \mathrm{L}' - \mathrm{L}'' - 2l'').$$

L'action totale est réduite à moins de un dixième de l'action directe. On peut remarquer d'ailleurs que l'action indirecte est la plus forte en valeur absolue. Ce fait est confirmé par la méthode de M. Andoyer.

Pour l'appliquer, il faut diminuer $g^{(0)}$ et $g_1^{(0)}$ de β dans le calcul de l'action directe et, par suite, ajouter au résultat déjà trouvé l'expression

$$-0,0336\, m'' n'^2 a^2 e''^2 \cos(2\mathrm{L} - \mathrm{L}' - \mathrm{L}'' - 2l'').$$

Cette correction diffère peu, comme on voit, de la valeur ci-dessus de $\delta\mathrm{R}'$ et est supérieure à la valeur correspondante relative à l'action directe.

Les deux termes $(11)^{-2}$ et $(11)^0$ ne peuvent par conséquent donner que de faibles inégalités du mouvement de la Lune, en supposant même l'excentricité de la planète présumée très forte. Nous avons réservé pour la fin de ce numéro un autre terme du groupe $(11)^i$, pour lequel l'action indirecte n'est pas sensible. Il se déduit de l'expression générale $(11)^i$ en faisant $i = 1$. On a, pour ce terme,

$$(11)^1 = \frac{3}{8} m'' n'^2 a^2 e''^2 \left(\frac{13}{4} g^{(1)} - \frac{5}{4} g_1^{(1)} + \frac{1}{8} g_2^{(1)}\right) \cos(2\mathrm{L} - 2\mathrm{L}'' - 2l'').$$

Aux n$^{\text{os}}$ 25 et 30 on trouvera les séries permettant de calculer $g^{(1)}$ et $g_1^{(1)}$. Il faut y joindre la suivante, relative à $g_2^{(1)}$,

$$g_2^{(1)} = 0,1761\,\beta^2 + 1,2730\,\beta^4 + 1,8560\,\beta^6 + 2,2574\,\beta^8.$$

On a

$$n'' = 23718 + \frac{1}{4}\varepsilon, \qquad a'' = 0,280$$

et l'on trouve

$$g^{(1)} = 0,070, \qquad g_1^{(1)} = 0,164, \qquad g_2^{(1)} = 0,280,$$

$$(11)^1 = 0,022\, m'' n'^2 a^2 e''^2 \cos(2\mathrm{L} - 2\mathrm{L}'' - 2l'');$$

d'où, avec la même valeur $k = 2$ pour l'emploi de la Table (P) du n° 35,

$$\delta\mathrm{L} = -6',7\, e'^2 \sin(2\mathrm{L} - 2\mathrm{L}'' - 2l'').$$

Pour une valeur élevée de e'', ce terme peut donner lieu à une inégalité appréciable. Il nous reste à montrer que l'action indirecte correspondante est faible.

Elle se déduit de l'expression (31) de $\delta R'$ de ce numéro. Il suffit de faire $i = -2$ dans le deuxième et le quatrième terme. On obtient

$$\delta R' = n'^2 a^2 e''^2 \left(-\frac{9}{8}\rho_7^{(-2)} + \frac{3}{4}\lambda_7^{(-2)}\right)\cos(2L - 2L'' - 2l'').$$

Avec $\beta = 0{,}280$, on trouve

$$b^{(2)} = 0{,}061, \qquad b_1^{(2)} = 0{,}126, \qquad b_2^{(2)} = 0{,}144, \qquad b_3^{(2)} = 0{,}060,$$

$$a'A^{(2)} = 0{,}061, \qquad a'A_1^{(2)} = -0{,}187, \qquad a'A_2^{(2)} = 0{,}770, \qquad a'A_3^{(2)} = -3{,}990.$$

On a en outre $\omega = 0{,}150$; et l'on obtient

$$\rho_7^{(-2)} = 0{,}000257\, m'', \qquad \lambda_7^{(-2)} = -0{,}000248\, m'',$$

$$\delta R' = -0{,}00047\, m'' n'^2 a^2 e''^2 \cos(2L - 2L'' - 2l'').$$

C'est environ la cinquantième partie seulement de l'action directe.

39. L'examen préliminaire des termes du second ordre dépendant des inclinaisons nous a montré qu'il y a lieu de considérer deux termes en $\gamma\gamma''$ et trois en γ''^2. Nous allons consacrer cet article à l'étude des deux premiers. Ils se déduisent, pour $i = -1$ et $i = 0$, de l'expression suivante trouvée dans le développement (A) du n°   :

$$(12)^i = -\frac{3}{2} m'' n'^2 a^2 \gamma\gamma'' (\beta e^{(i+1)} - \beta^2 e^{(i)}) \cos(i\delta + 2L - 2L'' - h + h'').$$

En désignant par ν le moyen mouvement diurne de h, on a

$$n'' = \frac{in' + 2n - \nu}{i + 2} + \frac{\varepsilon}{i + 2}.$$

Il vient, par suite, pour n'', a'' et les arguments des cosinus,

$(12)^{-1}$	$91513 + \varepsilon$	$0{,}115$	$2L - L' - L'' - h + h''$
$(12)^{0}$	$47531 + \frac{1}{2}\varepsilon$	$0{,}177$	$2L - 2L'' - h + h''$

Nous avons à calculer, pour $\beta = 0{,}115$ et $\beta = 0{,}177$ respectivement, les deux expressions

$$\beta(e^{(0)} - \beta e^{(1)}), \qquad \beta(e^{(1)} - \beta e^{(0)}),$$

ou, d'après les formules du n° 35,

$$\beta a^{(0)}, \quad \beta a^{(1)}.$$

Pour le calcul de $a^{(0)}$ et $a^{(1)}$ on a les séries

$$a^{(0)} = 0,3010 \quad + 0,8751\,\beta^2 + 1,2150\,\beta^4 + 1,4581\,\beta^6,$$
$$a^{(1)} = 0,4771\,\beta + 0,9720\,\beta^3 + 1,2820\,\beta^5 + 1,5092\,\beta^7.$$

Il vient finalement, pour l'action directe relative aux termes considérés,

$$(12)^{-1} = -0,363\, m'' n'^2 a^2 \gamma\gamma'' \cos(2L - L' - L'' - h + h''),$$
$$(12)^{0} \;= -0,156\, m'' n'^2 a^2 \gamma\gamma'' \cos(2L - \qquad 2L'' - h + h'').$$

On a ici pour le coefficient de l dans les deux arguments $k = 2$. Par suite, la Table du n° 35 donne, pour le multiplicateur servant à passer des expressions ci-dessus à celles de la perturbation de la longitude de la Lune, la quantité $-13',8\gamma''$.

On obtient, en définitive, pour les deux inégalités cherchées,

$(12)^{-1}$ $$\delta L = 5',0\gamma'' \sin(2L - L' - L'' - h + h''),$$
$(12)^{0}$ $$\delta L = 2,2\gamma'' \sin(2L - \qquad 2L'' - h + h'').$$

Passons à l'action indirecte relative aux termes $(12)^i$, qui sont contenus dans le troisième terme de

$$\delta R' = a' \frac{\partial R'}{\partial r'} \frac{\delta r'}{a'} + \frac{\partial R'}{\partial v'} \delta v' + \frac{\partial R'}{\partial s'} \delta s'.$$

On a, d'après la formule (E) du n° 9, en remarquant que l'on peut remplacer λ, λ' par L, L' et θ, par $L - h$,

$$\frac{1}{fm'} \frac{\partial R'}{\partial s'} = 3\gamma \frac{a^2}{a'^3} [\sin(L' - h) + \sin(2L - L' - h)].$$

Pour $\delta s'$, nous avons obtenu au n° 15 (H), en faisant $\mu' = 1$,

$$\delta s' = -m''\gamma'' \sum a' B^{(i)} \frac{\omega^2}{(i-1)^2 (1-\omega)\left(1 - \frac{i+1}{i-1}\omega\right)} \sin(i\delta + L'' - h'');$$

par suite

$$\frac{\partial R'}{\partial s'} \delta s' = \frac{3}{2} m'' n'^2 a^2 \gamma\gamma'' \sum a' B^{(i)} \frac{\omega^2}{(i-1)^2 (1-\omega)\left(1 - \frac{i+1}{i-1}\omega\right)}$$
$$\times [\;\cos(L' + L'' + i\delta - h - h'') - \cos(L' - L'' - i\delta - h + h'')$$
$$+ \cos(2L - L' + L'' + i\delta - h - h'') - \cos(2L - L' - L'' - i\delta - h + h'')].$$

Les termes de la forme $(12)^i$ se déduisent de cette expression en faisant $i=0$ et $i=-1$ dans le quatrième terme. Nous allons étudier ces deux cas.

$(12)^{-1}$ Nous avons à calculer

$$a' \mathrm{B}^{(0)} \frac{\omega^2}{1-\omega^2}.$$

On sait que l'expression générale de $a'\mathrm{B}^{(i)}$ est $\beta c^{(i)}$, qu'il faut diminuer, pour $i=0$, de $\frac{2}{\beta^2}$.

Avec $\beta = 0,115$ et $\omega = 0,0388$, on trouve

$$\beta c^{(0)} = 0,237, \qquad \frac{2}{\beta^2} = 151,2, \qquad a'\mathrm{B}^{(0)} - \frac{2}{\beta^2} = -151,0,$$

$$\delta \mathrm{R}' = +0,341\, m'' n'^2 a^2 \gamma\gamma'' \cos(2\mathrm{L} - \mathrm{L}' - \mathrm{L}'' - h + h'').$$

Ce résultat réduit l'action directe à la dix-huitième partie de sa valeur.

Appliquons encore la méthode de M. Andoyer. Il faut pour cela revenir à l'action directe et diminuer $\beta a^{(0)}$ de 2β et, par conséquent, le coefficient numérique 0,363 de 3β, c'est-à-dire de 0,345. Et l'on obtient pour l'action totale, par les deux méthodes, des résultats concordants.

$(12)^0$ Le coefficient numérique à calculer a pour expression

$$a'\mathrm{B}^{(1)} \frac{\omega^2}{4(1-\omega)}.$$

On a successivement

$$\omega = 0,0746, \qquad a'\mathrm{B}^{(1)} = 0,100,$$

$$\delta \mathrm{R}' = +0,000150\, m'' n'^2 a^2 \gamma\gamma'' \cos(2\mathrm{L} - 2\mathrm{L}'' - h + h'')$$

par conséquent l'action indirecte est négligeable dans ce cas.

40. Les termes en γ''^2 qu'il nous reste à étudier sont contenus dans l'expression suivante, obtenue au n° 3 (A) :

$$(13)^i = \frac{15}{16} m'' n'^2 a^2 \gamma''^2 (\beta f^{(i+2)} - 2\beta^2 f^{(i+1)} + \beta^3 f^{(i)}) \cos(i\delta + \delta_1 - 2\mathrm{L}'' + 2h'');$$

d'après les formules (29) du n° 35, on peut exprimer la quantité entre parenthèses par $\beta k^{(i)}$ ou par $\beta k^{(-i)}$, séries dont nous avons donné les développements. On a d'abord

$$n'' = \frac{(i-1)n' + 2n}{i+3} + \frac{\varepsilon}{i+3}.$$

Il convient de faire $i = -2, -1, 0$. On obtient pour n'', a'' et les arguments

$(13)^{-2}$	$84226 + \varepsilon$	0,121	$2L - 3L' - L'' + 2h''$
$(13)^{-1}$	$43887 + \frac{1}{2}\varepsilon$	0,187	$2L - 2L' - 2L'' + 2h''$
$(13)^{0}$	$30441 + \frac{1}{3}\varepsilon$	0,239	$2L - L' - 3L'' + 2h''$

On a, pour le calcul des coefficients des trois termes respectivement,

$$\beta k^{(-1)} = 0{,}3010\beta + 1{,}0212\beta^3 + 1{,}4703\beta^5 + 1{,}8005\beta^7,$$
$$\beta k^{(0)} = 0{,}4771\beta^2 + 1{,}1181\beta^4 + 1{,}5372\beta^6 + 1{,}8516\beta^8,$$
$$\beta k^{(1)} = 0{,}5740\beta^3 + 1{,}1850\beta^5 + 1{,}5883\beta^7 + 1{,}8930\beta^9;$$

d'où l'on déduit

$$\beta k^{(-1)} = 0{,}262, \qquad \beta k^{(0)} = 0{,}122, \qquad \beta k^{(1)} = 0{,}065$$

et, pour la fonction perturbatrice relative à l'action directe,

$$(13)^{-2} = 0{,}246\, m'' n'^2 a^2 \gamma''^2 \cos(2L - 3L' - L'' + 2h''),$$
$$(13)^{-1} = 0{,}114\, m'' n'^2 a^2 \gamma''^2 \cos(2L - 2L' - 2L'' + 2h''),$$
$$(13)^{0} = 0{,}061\, m'' n'^2 a^2 \gamma''^2 \cos(2L - L' - 3L'' + 2h'').$$

On a $k = 2$; la Table du n° 35 donne $-307'\gamma''^2$, pour le nombre permettant de passer des expressions ci-dessus à celles des inégalités. On obtient les résultats suivants, où la deuxième colonne indique les durées des révolutions des planètes supposées,

$(13)^{-2}$	$15^j,39$	$-75',4\gamma''^2 \sin(2L - 3L' - L'' + 2h'')$
$(13)^{-1}$	$29^j,52$	$-35',1\gamma''^2 \sin(2L - 2L' - 2L'' + 2h'')$
$(13)^{0}$	$42^j,57$	$-18',7\gamma''^2 \sin(2L - L' - 3L'' + 2h'')$

Occupons-nous maintenant de l'action indirecte qui dépend des termes de la forme $(13)^i$. Pour avoir la partie de $\delta R'$ qui les contient, nous devons prendre, d'après les n°s 10 et 11, formules (F) et (G),

$$\frac{1}{fm'} a' \frac{\partial R'}{\partial r'} = -\frac{9}{4}\frac{a^2}{a'^3}\cos(\delta_1 - \delta), \qquad \frac{1}{fm'}\frac{\partial R'}{\partial v'} = \frac{3}{2}\frac{a^2}{a'^3}\sin(\delta_1 - \delta)$$

et, d'après le n° 16 (K),

$$\frac{\delta r'}{a'} = m''\gamma''^2 \sum P\cos(i\delta + 2\theta''), \qquad \delta v' = m''\gamma''^2 \sum Q\sin(i\delta + 2\theta''),$$

en posant

$$P = \frac{\omega^2}{(i-2)^2\left(1-\frac{i-1}{i-2}\omega\right)\left(1-\frac{i+1}{i-2}\omega\right)}\left[\frac{i\omega}{(i-2)\left(1-\frac{i}{i-2}\omega\right)}a'B^{(i-1)} - \frac{a'^2}{2}\frac{\partial B^{(i-1)}}{\partial a'}\right],$$

$$Q = \omega^2\left\{\frac{i\left[\left(1-\frac{i\omega}{i-2}\right)^2+\frac{3\omega^2}{(i-2)^2}\right]}{2(i-2)^2\left(1-\frac{i}{i-2}\omega\right)^2\left(1-\frac{i-1}{i-2}\omega\right)\left(1-\frac{i+1}{i-2}\omega\right)}a'B^{(i-1)} - \frac{\omega}{(i-2)^3\left(1-\frac{i}{i-2}\omega\right)\left(1-\frac{i-1}{i-2}\omega\right)\left(1-\frac{i+1}{i-2}\omega\right)}a'^2\frac{\partial B^{(i-1)}}{\partial a'}\right\}.$$

Rappelons que θ'' désigne l'argument de la latitude de la planète et que l'on a par conséquent

$$\theta'' = L'' - h'', \qquad i\delta + 2\theta'' = i(L' - L'') + 2L'' - 2h''.$$

Nous aurons dans chaque cas à calculer les valeurs de P et Q, qui dépendent de $B^{(i)}$ et de sa dérivée première.

On obtient

$$\begin{aligned}\delta R' = &-\frac{9}{8}m''n'^2a^2\gamma''^2\sum P\left\{\cos[\delta_1+(i-1)\delta+2L''-2h'']+\cos[\delta_1-(i+1)\delta-2L''+2h'']\right\}\\ &-\frac{3}{4}m''n'^2a^2\gamma''^2\sum Q\left\{\cos[\delta_1+(i-1)\delta+2L''-2h'']-\cos[\delta_1-(i+1)\delta-2L''+2h'']\right\}.\end{aligned}$$

Donnons à i les valeurs particulières qui conviennent.

$(13)^{-2}$ Dans le deuxième et le quatrième terme de l'expression précédente, faisons $i=1$. Il vient, pour la partie de $\delta R'$ qui correspond à $(13)^{-2}$,

$$\delta R' = m''n'^2a^2\gamma''^2\left(-\frac{9}{8}P + \frac{3}{4}Q\right)\cos(2L - 3L' - L'' + 2h'').$$

Or, pour $i=1$,

$$P = -\frac{\omega^2}{(1+2\omega)}\left(\frac{\omega}{1+\omega}a'B^{(0)} + \frac{a'^2}{2}\frac{\partial B^{(0)}}{\partial a'}\right),$$

$$Q = \omega^2\left[\frac{(1+\omega)^2+3\omega^2}{2(1+\omega)^2(1+2\omega)}a'B^{(0)} + \frac{\omega}{(1+\omega)(1+2\omega)}a'^2\frac{\partial B^{(0)}}{\partial a'}\right].$$

Il faut, comme on sait, appliquer la correction $-\frac{2}{\beta^2}$ à $a'B^{(0)}$ et à $a'^2\frac{\partial B^{(0)}}{\partial a'}$.

On trouve successivement

$$\omega = 0{,}0421, \qquad a'\mathrm{B}^{(0)} - \frac{2}{\beta^2} = -136{,}4, \qquad a'^2\frac{\partial \mathrm{B}^{(0)}}{\partial a'} - \frac{2}{\beta^2} = -137{,}1,$$

$$\mathrm{P} = 0{,}121, \qquad \mathrm{Q} = -0{,}121,$$

$$\delta\mathrm{R}' = -0{,}227\, m'' n'^2 a^2 \gamma''^2 \cos(2\mathrm{L} - 3\mathrm{L}' - \mathrm{L}'' + 2h'').$$

En suivant la méthode de M. Andoyer, on aura, dans l'action directe, à diminuer $\beta k^{(-1)}$ de 2β; et la correction totale à apporter est

$$-0{,}242\, m'' n'^2 a^2 \gamma''^2 \cos(2\mathrm{L} - 3\mathrm{L}' - \mathrm{L}'' + 2h'').$$

$(13)^{-1}$ On a ici

$$\delta\mathrm{R}' = m'' n'^2 a^2 \gamma''^2 \left(-\frac{9}{8}\mathrm{P} + \frac{3}{4}\mathrm{Q}\right) \cos(2\mathrm{L} - 2\mathrm{L}' - 2\mathrm{L}'' + 2h''),$$

avec

$$\mathrm{P} = -\frac{\omega^2}{8\left(1 - \frac{\omega}{2}\right)\left(1 + \frac{\omega}{2}\right)} a'^2 \frac{\partial \mathrm{B}^{(1)}}{\partial a'}, \qquad \mathrm{Q} = \frac{\omega^3}{8\left(1 - \frac{\omega}{2}\right)\left(1 + \frac{\omega}{2}\right)} a'^2 \frac{\partial \mathrm{B}^{(1)}}{\partial a'}.$$

On trouve la quantité négligeable

$$\delta\mathrm{R}' = -0{,}0023\, m'' n'^2 a^2 \gamma''^2 \cos(2\mathrm{L} - 2\mathrm{L}' - 2\mathrm{L}'' + 2h'').$$

$(13)^0$ A l'argument $2\mathrm{L} - \mathrm{L}' - 3\mathrm{L}'' + 2h''$ correspond

$$\delta\mathrm{R}' = m'' n'^2 a^2 \gamma''^2 \left(-\frac{9}{8}\mathrm{P} + \frac{3}{4}\mathrm{Q}\right) \cos(2\mathrm{L} - \mathrm{L}' - 3\mathrm{L}'' + 2h''),$$

où l'on a

$$-\frac{9}{8}\mathrm{P} + \frac{3}{4}\mathrm{Q} < 0{,}001.$$

VI. — Formes diverses des résultats.

41. Nous commencerons par réunir dans un même Tableau les inégalités obtenues dans les paragraphes précédents, en les groupant dans l'ordre des distances croissantes au Soleil des planètes supposées auxquelles elles pourraient être attribuées.

Je rappelle qu'il s'agit, dans tous les cas, de l'action d'une masse égale à $\frac{1}{5000000}$, valeur généralement admise pour la masse de Mercure.

A chaque inégalité correspondent deux planètes présumées. Considérons, par exemple $(1)^0$; nous avons adopté pour nos calculs $n'' = 91322''$, mais l'équation d'où nous avons déduit cette quantité nous a donné les deux valeurs

$$n'' = 91322 \pm 13.$$

Donc l'inégalité correspondante peut être attribuée à deux planètes de même masse ayant pour moyens mouvements respectivement $91309''$ et $91335''$.

Pour simplifier l'écriture, nous laissons réunies ces deux planètes présumées $(1)^0$, en désignant toujours par ε la quantité $\pm 13''$. Et de même pour les autres couples de planètes.

Pour les inégalités issues des termes d'ordre zéro et un en e'' et γ'', les coefficients sont exprimés en secondes d'arc; pour celles du second ordre, ils sont donnés en minutes.

Comme précédemment, nous laissons les éléments e'' et γ'' de la planète arbitraires.

Nous ne conservons que les inégalités pour lesquelles le coefficient est au moins égal à $6''$, ou peut le devenir en supposant $e'' = 0,2$, ou $\gamma'' = 0,1$.

La première colonne du Tableau rappelle le terme de la fonction perturbatrice qui a conduit à l'inégalité, par la même désignation que dans les paragraphes précédents; la seconde indique le numéro de l'article où l'on a déterminé l'inégalité, et les deux dernières contiennent respectivement la valeur de n'' et l'expression de la perturbation.

$(6)^1$	33	$94870'' + \varepsilon$	$+ 199'' \, e'' \sin(2L - 2L'' + l'')$
$(1)^0$	27	$91322'' + \varepsilon$	$- 19'' \sin(2L - L' - L'')$
$(7)^{-1}$	33	$87774'' + \varepsilon$	$+ 249'' \, e'' \sin(2L - 2L' - l'')$
$(2)^1$	28	$70952'' + \frac{1}{2}\varepsilon$	$- 8'' \sin(2L - 2L'' + l)$
$(4)^1$	30	$49209'' + \frac{1}{2}\varepsilon$	$- 7'' \sin(2L - 2L'' + l')$
$(6)^2$	33	$49209'' + \frac{1}{2}\varepsilon$	$+ 111'' \, e'' \sin(2L + L' - 3L'' + l'')$
$(12)^0$	39	$47531'' + \frac{1}{2}\varepsilon$	$+ 2',2\,\gamma'' \sin(2L - 2L'' - h + h'')$
$(1)^1$	27	$47435'' + \frac{1}{2}\varepsilon$	$- 172'' \sin(2L - 2L'')$
$(10)^1$	37	$47301'' + \frac{1}{3}\varepsilon$	$- 2',6\,e'' \sin(2L - 2L'' + l - l'')$
$(5)^1$	31	$45661'' + \frac{1}{2}\varepsilon$	$- 8'' \sin(2L - 2L'' - l')$

$(7)^0$	33	$45661'' + \frac{1}{2}\varepsilon$	$+\ 45''\ e''\ \sin(2L - L' - L'' - l'')$
$(3)^0$	29	$44288'' + \varepsilon$	$+\ 6''\ \sin(2L - L' - L'' - l)$
$(13)^{-1}$	40	$43887'' + \frac{1}{2}\varepsilon$	$-\ 35',1\ \gamma''^2 \sin(2L - 2L' - 2L'' + 2h'')$
$(9)^{-1}$	36	$40740'' + \varepsilon$	$-\ 1',0\ e''\ \sin(2L - 2L' - l - l'')$
$(6)^3$	33	$33989'' + \frac{1}{3}\varepsilon$	$+\ 63''\ e''\ \sin(2L + 2L' - 4L'' + l'')$
$(1)^2$	27	$32806'' + \frac{1}{3}\varepsilon$	$-\ 55''\ \sin(2L + L' - 3L'')$
$(7)^1$	33	$31623'' + \frac{1}{3}\varepsilon$	$-\ 272''\ e''\ \sin(2L - 2L'' - l'')$
$(13)^0$	40	$30441'' + \frac{1}{3}\varepsilon$	$-\ 18',7\ \gamma''^2 \sin(2L - L' - 3L'' + 2h'')$
$(8)^2$	34	$27065'' + \frac{1}{2}\varepsilon$	$+\ 36''\ \sin(2L' - 2L'' + l)$
$(6)^4$	33	$26379'' + \frac{1}{4}\varepsilon$	$+\ 41''\ e''\ \sin(2L + 3L' - 5L'' + l'')$
$(1)^3$	27	$25492'' + \frac{1}{3}\varepsilon$	$-\ 23''\ \sin(2L + 2L' - 4L'')$
$(7)^2$	33	$24605'' + \frac{1}{4}\varepsilon$	$-\ 139''\ e''\ \sin(2L + L' - 3L'' - l'')$
$(3)^1$	29	$23918'' + \frac{1}{2}\varepsilon$	$+\ 35''\ \sin(2L - 2L'' - l)$
$(11)^1$	38	$23718'' + \frac{1}{4}\varepsilon$	$-\ 6',7\ e''^2 \sin(2L - 2L'' - 2l'')$
$(1)^4$	27	$21103'' + \frac{1}{5}\varepsilon$	$-\ 11''\ \sin(2L + 3L' - 5L'')$
$(7)^3$	33	$20393'' + \frac{1}{5}\varepsilon$	$-\ 76''\ e''\ \sin(2L + 2L' - 4L'' - l'')$
$(8)^3$	34	$19226'' + \frac{1}{3}\varepsilon$	$+\ 23''\ \sin(3L' - 3L'' + l)$
$(1)^5$	27	$18177'' + \frac{1}{6}\varepsilon$	$-\ 6''\ \sin(2L + 4L' - 6L'')$

Considérons les deux inégalités $(4)^1$ et $(6)^2$. Elles correspondent à une même valeur de $n'' = 49209 + \frac{1}{2}\varepsilon$ et se combinent pour une masse décrivant une orbite relative à ce moyen mouvement. Il en est de même de $(5)^1$ et $(7)^0$, dont la valeur commune de n'' est $45661 + \frac{1}{2}\varepsilon$.

On peut remarquer que les orbites sont plus particulièrement nombreuses dans la région correspondant à la valeur de $n'' = n = 47435''$. Et c'est à l'une d'elles qu'appartient $(1)^1$, la plus forte des inégalités.

42. Les inégalités du Tableau ci-dessus seraient produites par une masse égale à celle de Mercure. Proposons-nous de rechercher la masse m'' de chaque planète présumée capable de donner l'inégalité empirique de 273 ans de période.

D'après Tisserand, cette inégalité, dont la cause est inconnue, a pour expression

$$\delta L = 14'',5 \sin(t - t_0) 1^\circ, 32,$$

où l'origine du temps, t_0, est l'année 1735.

Nos inégalités peuvent être mises sous la forme

$$\delta L = A m'' \sin(t - t_0) 1^\circ, 32,$$

en admettant pour elles la même phase que pour l'inégalité empirique et en désignant par A l'un quelconque des coefficients que nous avons trouvés.

La valeur cherchée de m'' se déduira par suite de la relation suivante

$$m'' = \frac{14'',5}{A}.$$

Nous avons calculé, en partant de cette équation, les valeurs de m''. Nous en donnons ci-dessous le Tableau, en ne conservant que les orbites pour lesquelles m'' pourrait être au plus égal à la masse de Mercure.

Les deux premières colonnes désignent le numéro de l'orbite et la valeur du demi-grand axe; la troisième et la quatrième indiquent la durée de la révolution, en jours moyens, des deux planètes correspondantes; la dernière contient la valeur de m'', exprimée en prenant pour unité la masse de Mercure.

$(6)^1$	0,112	13,659	et	13,663	$0,073 \frac{1}{e''}$
$(1)^0$	0,115	14,189		14,194	0,75
$(7)^{-1}$	0,118	14,762		14,766	$0,058 \frac{1}{e''}$
$(6)^2$	0,173	26,333		26,340	$0,13 \frac{1}{e''}$
$(1)^1$	0,178	27,318		27,325	0,084
$(10)^1$	0,178	27,396		27,401	$0,093 \frac{1}{e''}$
$(13)^{-1}$	0,187	29,526		29,535	$0,0065 \frac{1}{\gamma''^2}$
$(1)^2$	0,227	39,500		39,510	0,26

$(7)^1$	0,233	40,977	40,998	0,053	$\frac{1}{e''}$
$(8)^2$	0,258	47,873	47,896	0,40	
$(1)^3$	0,269	50,833	50,846	0,64	
$(7)^2$	0,275	52,665	52,679	0,10	$\frac{1}{e''}$
$(3)^1$	0,280	54,170	54,200	0,41	
$(11)^1$	0,280	54,631	54,645	0,036	$\frac{1}{e''^2}$
$(7)^3$	0,312	63,543	63,559	0,19	$\frac{1}{e''}$
$(8)^3$	0,324	67,393	67,424	0,62	

Pour chacune des deux orbites $(1)^1$ une masse, égale environ à la douzième partie de celle de Mercure, suffirait pour produire sur la longitude de la Lune l'inégalité empirique. Pour les orbites $(1)^2$ il faudrait à peu près le quart de la même masse. Enfin, dans le cas d'une forte excentricité de la planète, à quelques autres orbites correspondraient encore des masses aussi faibles, du même ordre que celle de la Lune.

On voit donc que de faibles masses, convenablement placées, pourraient expliquer l'inégalité de 273 ans de période et 29″ d'amplitude. Je me propose d'examiner ce qui se passerait pour des périodes et des amplitudes différentes.

43. D'après Tisserand (T. III, Chap. XIX), il existerait une ou plusieurs autres inégalités de période moindre et à très petit coefficient. L'étendue peu considérable des observations précises de la Lune ne permet pas d'affirmer l'existence d'inégalités à très longue période. On sait néanmoins que, pour aucun système de valeurs du moyen mouvement et de l'accélération séculaire, il n'est possible de faire concorder l'ensemble des anciennes observations d'éclipses avec les mesures modernes.

Quoi qu'il en soit et sans admettre comme probable une telle inégalité, il m'a paru intéressant de rechercher la relation qui lierait son coefficient aux masses capables de la produire. Il est facile de déduire les nouveaux résultats de ceux que nous avons obtenus dans le cas de l'inégalité empirique.

On a, en effet, dans ce dernier cas, pour la perturbation δL de la longitude de la Lune,

$$\delta L = mp^2 C \sin\theta = c \sin\theta,$$

m désignant la masse, p la période, $2c$ l'amplitude. Pour l'inégalité de même argument, avec une période et une masse différentes, p' et m', toutes choses égales d'ailleurs, on aura sensiblement, C variant très peu,

$$\delta L = m' p'^2 C \sin\theta = c' \sin\theta.$$

La quantité C est une fonction du demi-grand axe, par suite du moyen mouvement; mais, pour un petit accroissement du moyen mouvement, la période peut varier considérablement. Pour fixer les idées, supposons qu'au lieu de $\delta\theta = 13''$ on ait $\delta\theta = 1'',3$: la période deviendra dix fois plus forte, tandis que le demi-grand axe et, par conséquent, C resteront sensiblement les mêmes. Ceci ne s'applique, bien entendu, qu'aux longues périodes.

Nous aurons donc la relation, pour passer d'une longue période à une autre,

$$\frac{c'}{m' p'^2} = \frac{c}{mp^2} = \text{const.},$$

ou

$$\frac{m'}{m} = \frac{p^2 c'}{p'^2 c}.$$

Dans nos calculs antérieurs, nous avions

$$p = 273, \qquad c = 14'',5.$$

Appliquons la formule à quelques cas particuliers. Cherchons d'abord quelle serait la valeur de c' pour $p' = 100$ et les masses du Tableau du n° **42**. On trouve $2''$. Ainsi les masses considérées pourraient encore produire une inégalité de 100 ans de période et de $4''$ d'amplitude.

Passons à un cas très différent. Soient $p' = 2730$, $c' = 360''$, et calculons le rapport des nouvelles masses aux anciennes. On trouve $\frac{1}{4}$. Donc, cette inégalité serait produite par des masses quatre fois moindres que celles qui donneraient l'inégalité de 273 ans de période. En particulier, pour l'orbite $(1)^1$, il suffirait d'une masse $m = 0,021$, environ la cinquantième partie de celle de Mercure ou la dixième partie de celle de la Lune.

Soient encore

$$p = 273 \times 4 = 1092, \qquad c' = 29''.$$

Dans ce cas les masses seraient le huitième de celles du Tableau du n° **42**. Pour l'orbite $(1)^1$, une telle perturbation pourrait être attribuée à une masse cent fois moindre que celle de Mercure, ou au vingtième de celle de la Lune.

Les exemples pourraient être multipliés. Les précédents suffisent à montrer l'action considérable qu'auraient, sur le mouvement de la Lune, des masses très faibles convenablement placées au voisinage du Soleil.