

H. BOUASSE

BERTHIER

## **Sur l'enroulement des fils sur un cylindre et les ressorts à boudin**

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 2<sup>e</sup> série*, tome 8 (1906), p. 261-287

[http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_1906\\_2\\_8\\_\\_261\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1906_2_8__261_0)

© Université Paul Sabatier, 1906, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

---

SUR

# L'ENROULEMENT DES FILS SUR UN CYLINDRE

ET

## LES RESSORTS A BOUDIN,

PAR MM. H. BOUASSE ET BERTHIER.

---

1. La théorie classique de l'élasticité parfaite repose sur deux hypothèses fondamentales : proportionnalité entre la force et la déformation, indépendance des effets des forces et de leur superposition. Des expériences poursuivies par l'un de nous pendant de longues années, ont prouvé que les phénomènes parfaitement élastiques sont si étroitement liés à d'autres phénomènes, que c'est par une sorte de présomption qu'on en admet l'existence ; autant dire (sauf peut-être pour les corps cristallisés) qu'il n'est jamais possible de les faire apparaître dans leur pureté.

On ne pouvait pas se dispenser de chercher quels enseignements fournirait l'étude des ressorts à boudin sur la seconde hypothèse. La théorie de ces ressorts s'appuie en effet sur des postulats très simples, qui reviennent eux-mêmes à *supposer que tordre un cylindre ne modifie en rien les phénomènes de traction ou de flexion, et réciproquement.*

Nous avons donc soumis à l'expérience les résultats de la théorie : nous nous sommes convaincus qu'il est vain d'espérer en tirer un renseignement quelconque, que les formules ne représentent rien de réel, tant la réactivité et les déformations permanentes inévitables modifient jusqu'à l'aspect des phénomènes.

Il est bien inutile de transcrire nos résultats expérimentaux : cela reviendrait à répéter à propos de tous les cas particuliers que *les parcours qui devraient être rectilignes et sans hystérésis sont des courbes arrondies enveloppant des aires plus ou moins grandes, de sorte qu'il est impossible de savoir ce qu'on doit choisir pour amplitude des parcours et introduire dans les formules à vérifier.*

Comme il est à prévoir que d'autres expérimentateurs reprendront la ques-

tion, et à craindre qu'ils ne se montrent beaucoup plus satisfaits que nous ne sommes, nous leur donnons le tableau d'ensemble des problèmes qui se présentent dans une question simple en apparence. Nous leur éviterons ainsi un labeur inutile. D'ailleurs, nous avons rencontré chemin faisant des résultats intéressants indépendamment de toute théorie.

Pour ne pas tomber dans d'inextricables difficultés, nous supposons qu'il s'agit de fils de section circulaire. La flexion ne tend pas à se faire dans un ou plusieurs plans privilégiés; le fil possède une égale flexibilité dans tous les azimuts.

Puisqu'il s'agit pour l'instant de déformations élastiques, nous admettons que le fibre neutre passe par le centre de la section droite. L'équation d'équilibre est alors

$$C = EI \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} \right),$$

$\rho_0$  est le rayon de courbure avant la déformation,  $\rho$  le rayon de courbure après la déformation,  $C$  le couple fléchissant au point considéré,  $E$  le module de traction;  $I$  est le moment d'inertie du cercle de diamètre  $\delta$  par rapport à un diamètre :  $I = \frac{\pi \delta^4}{64}$ .

#### ENROULEMENT D'UN FIL PARFAITEMENT ÉLASTIQUE SUR UN CYLINDRE CIRCULAIRE.

2. *Fil encastré à l'une de ses extrémités et supportant un poids P attaché à son autre extrémité B.* — Pour faire un ressort à boudin, il faut enrouler régulièrement le fil sur un cylindre circulaire. Mais, avant que le fil ne soit au contact du cylindre, il se trouve comme encastré à l'une de ses extrémités et supporte un poids tenseur  $P$  à l'autre qui est libre. Admettons que la déformation ne soit pas encore permanente : déterminons la forme du fil.

Prenons pour axe des  $x$  la verticale passant par le point d'application  $B$  du poids. Le fil possède par hypothèse, au début de l'expérience, une forme quelconque *mais plane* : après la déformation due au poids la courbe du fil est encore plane. Prenons pour axe des  $y$  une droite horizontale quelconque dans le plan de déformation; l'équation d'équilibre est, en négligeant le poids du fil,

$$EI \left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} \right) = Py.$$

Posons  $EI : P = a^2 : 4$ ; remplaçons  $\rho$  par ses valeurs en fonction des dérivées  $y'$  et  $y''$ , intégrons une fois. Il vient

$$2y^2 + \frac{a^2 y}{\rho_0} = C - \frac{a^2}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$



mun de  $x$  est  $0,266a$  et correspond à  $y = a : \sqrt{2}$ . L' $y$  du point double est  $0,2885.a$ .

Les coordonnées  $x_1, y_1$  du centre de courbure C, en fonction des coordonnées  $x, y$  d'un point D de la courbe, sont fournies par les équations

$$y_1 = y + \rho \cos \gamma, \quad x_1 = x + \rho \sin \gamma, \quad \tan \gamma = dy : dx,$$

$$\cos \gamma = 1 - \frac{2y^2}{a^2}, \quad \sin \gamma = \frac{2y}{a} \sqrt{1 - \frac{y^2}{a^2}},$$

$$y_1 = \rho + \frac{y}{2} = \rho + \frac{a^2}{8\rho} = \frac{a^2}{4y} + \frac{y}{2}.$$

Pour réaliser l'élastique, on attache *librement* l'extrémité supérieure d'un fil fin d'acier; on attache à l'extrémité inférieure un poids léger et l'on fait une boucle, en ayant soin de ne pas le déformer d'une manière permanente. La forme n'est stable que si le fil reste dans un plan. Il sera donc nécessaire de faire au point double une ligature lâche avec du fil à coudre, ou de passer les deux bouts dans un petit anneau. On vérifiera que la distance O'D est en raison inverse de la racine carrée de la charge, tant que le fil reste parfaitement élastique.

L'équilibre obtenu, il est permis de supposer rigidifiée une partie du fil. On obtient donc une partie de l'élastique, en encastrant le fil n'importe où dans un étau, orienté de manière à ne pas modifier la direction de la tangente. En particulier, si l'encastrement est vertical, on obtient la portion O'ADB de la courbe; si l'encastrement est horizontal, on obtient la portion ADB.

4. *Utilisation de l'élastique pour la mesure du produit EI.* — Tant que le fil, d'abord rectiligne et encastré verticalement dans un étau et à l'une de ses extrémités, reste parfaitement élastique, il prend la forme de la branche descendante O'ADB de l'élastique.

Si l'on augmente peu à peu la charge P, il tend d'abord à subir des déformations permanentes en O', là où le rayon de courbure est minimum. Les déformations permanentes le long de la courbe dépendent de la manière suivant laquelle le métal déformé *s'écrouit*, se transforme du fait même de la déformation.

Si le métal est peu écrouissable, si sa résistance à la déformation permanente par flexion n'augmente pas sensiblement du fait même de la flexion, la déformation continue uniquement au voisinage de O' : le poids P étant supprimé et le fil détaché de l'étau, il redevient partout rectiligne, sauf au voisinage de O'.

Si le métal est très écrouissable, la flexion permanente augmente sa résistance à une flexion ultérieure; la déformation se fait successivement aux divers points

de la branche O'ADB en s'éloignant de O'. Le fil déchargé et détaché de l'étau a des courbures permanentes non nulles sur une longueur à partir de O' qui peut être considérable.

S'il était commode de réaliser l'élastique *entière*, on serait averti que les déformations permanentes commencent à être sensibles, par la mesure du rapport O'D : OO', qui est égal à 0,7115 pour un fil parfaitement élastique d'abord rectiligne. Dès que la déformation permanente devient sensible, le rapport O'D : OO' tombe au-dessous de cette valeur.

Pour un fil parfaitement élastique, on a  $EI = 0,494 \cdot P \cdot \overline{O'D}^2$ . Mais, l'élastique entière étant instable, la méthode présente des difficultés expérimentales. On peut réaliser plus commodément une mesure approximative du produit EI par le procédé suivant.

5. *Longueurs de l'élastique à partir du point O'.* — Des formules du n° 2, on tire aisément

$$ds = \frac{a^2 dy}{2y\sqrt{a^2 - y^2}}, \quad s = -\frac{a}{2} \log \frac{a - \sqrt{a^2 - y^2}}{y} = x + \sqrt{a^2 - y^2},$$

$s$  représente la longueur de la courbe à partir du point O' dans le sens O'ADB jusqu'au point d'abscisse  $x$ ; pour  $y = a$ , on a en effet  $x = 0$ ,  $s = 0$ . La longueur de la courbe jusqu'au point B d'abscisse  $x$ , tel que  $y$  soit assez petit, est donc simplement

$$s = x + a = x + 2\sqrt{\frac{EI}{P}}.$$

Ceci posé, cherchons le déplacement vertical de l'extrémité du fil de longueur invariable  $s$ , quand on fait varier le poids  $P$ . Soient  $x$  l'abscisse de cette extrémité pour le poids  $P$ ,  $x_0$  l'abscisse pour un poids très grand; on a alors évidemment  $x_0 = s$ . Substituant dans la formule, il vient, en posant  $z = (x - x_0)^2$ ,

$$P(x - x_0)^2 = 4EI, \quad P = 4EI \cdot z.$$

Tant que le fil reste parfaitement élastique, on obtient donc une droite en portant en abscisses les charges  $P$  et en ordonnées les inverses des carrés des distances verticales de l'extrémité du fil à la position de cette extrémité pour une charge très grande.

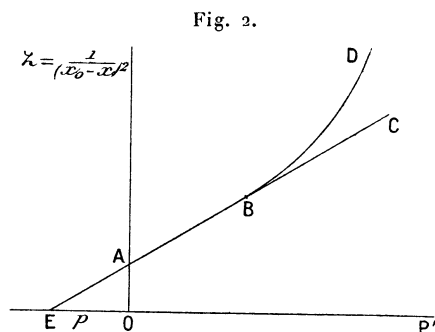
Si la déformation n'est pas parfaitement rectiligne, on parvient en définitive au même  $x_0 = s$  (tant du moins que la charge est insuffisante pour allonger le fil supposé rectifié), mais suivant une loi différente. Le déplacement  $x$  s'approche plus vite de  $x_0$  quand  $P$  croît : la courbe  $P, z$  obtenue (*fig. 2*), au lieu d'être une

droite, s'infléchit suivant BD. C'est l'inclinaison de la portion sensiblement rectiligne EAB qui donne une mesure du produit EI.

Deux circonstances rendent délicate l'application de cette méthode. D'abord il est quasiment impossible de trouver des fils qui soient au début parfaitement rectilignes. La plus légère dissymétrie dans la forme du trou de la filière donne au fil une forme circulaire, même quand on tire bien normalement au plan de la filière. La seconde difficulté réside dans l'évaluation de la charge P : elle est égale à la somme des poids P' attachés au bout du fil et du poids p d'une partie du fil qu'il est probablement illégitime de considérer comme constante.

Si cette dernière hypothèse était admissible, la méthode de représentation (fig. 2) donnerait automatiquement les valeurs de p ; la mesure de EI ne serait pas modifiée.

Mais il est certain que p croît à mesure que P' augmente, le fil se rapprochant de la verticale sur une plus grande partie de sa longueur. En effet, le poids P' agit



pour fléchir au bout du plus grand bras de levier possible ; le poids des divers éléments du fil agissant au contraire au bout d'un bras de levier qui diminue à mesure qu'on se rapproche de l'étau. Il faut donc faire entrer dans la formule un poids p qui, pour des valeurs petites de P', soit une fraction du poids total du fil, mais qui augmente jusqu'aux environs de ce poids, quand le fil est presque rectifié. La conclusion pratique à tirer de cette discussion est que, pour la détermination de EI, on ne doit considérer l'inclinaison de la *courbe* AB que pour des charges P' assez grandes vis-à-vis du poids du fil, et cependant insuffisantes pour produire une déformation permanente sensible. En définitive cette méthode, assez incertaine, donne facilement une valeur grossière du produit EI, et renseigne sur la facilité avec laquelle se produisent les déformations permanentes. La mesure de  $s = x_0$  se fait en retirant le fil de l'étau, dont la mâchoire empêcherait une rectification complète.

6. *Tension moyenne et effort tranchant en un point quelconque de la courbe.* — Une partie des cylindres élémentaires qui composent le fil fléchi

(fibres) est tendue et allongée, l'autre est comprimée et raccourcie. La somme des tensions et des compressions n'est pas nulle; elle représente la *tension moyenne*.

Pour l'évaluer, supprimons la partie TDB du fil et remplaçons-la par des forces convenables. Elles se ramènent à un couple de moment  $P\gamma$  et à une force verticale  $P$  appliquée au point T. Le couple  $P\gamma$  produit la flexion, c'est-à-dire la courbure au point T. La force  $P$  peut se décomposer en deux : l'une  $T$  dirigée suivant la tangente,  $T = P \cos \gamma$ ; l'autre  $N$  normale,  $N = P \sin \gamma$ . C'est l'ensemble de la *tension*  $T$  et de l'*effort tranchant*  $N$  qui maintient immobile le point T.

Quand on s'avance de B vers A, la tension  $T$  diminue de  $P$  à zéro. Au delà du point A, elle devient une compression; sa valeur croît de zéro à  $P$ , quand on passe de A à O'. L'effort tranchant nul en B est maximum et égal à  $P$  au point A; il s'annule de nouveau en O'.

#### 7. Condition pour qu'au delà du point T le fil prenne la forme circulaire.

— Pour qu'un fil parfaitement élastique et dont on néglige le poids prenne la forme circulaire, il faut que le système des forces se réduise à deux couples égaux et de sens contraires appliqués aux deux extrémités.

Ceci posé, reprenons le fil BDT soumis à la force  $P$  appliquée suivant  $Ox$ ; appliquons en T une force égale et de sens contraire. Elle équilibre la force  $P$ ; il ne reste plus qu'un couple de moment  $P\gamma$  appliqué en T. Si, maintenant, nous appliquons en un point T' quelconque du cercle ayant le point C comme centre et osculateur à la courbe TDB au point T, un couple égal à  $P\gamma$ , la portion TWT' sera circulaire.

En définitive nous avons : 1° à l'extrémité B du fil, une force  $P$  verticale et dirigée vers le bas; 2° au point T quelconque d'ordonnée  $\gamma$  de l'élastique, une force égale  $P$  verticale et dirigée vers le haut; 3° au point T' quelconque du cercle TWT' osculateur à l'élastique au point T, un couple  $P\gamma$ . Le système composé de la portion BDT de l'élastique et de la portion TWT' de la circonférence est en équilibre.

Il est facile de réaliser matériellement ces conditions, au moins d'une manière approximative. On attache au point T du fil métallique un fil à coudre fin, dont on fixe l'extrémité supérieure à un clou. Sa tension équilibre la charge  $P$ . Si, à l'autre extrémité T' du fil métallique, on exerce un couple, avec les doigts par exemple, on voit la portion TWT' prendre la forme circulaire; le poids  $P$ , qui est d'abord dans la verticale de T, se déplace de manière à fournir un couple égal à celui qu'on exerce.

8. Réalisation des conditions précédentes à l'aide d'un cylindre matériel de rayon  $R = \overline{CT}$ , sur lequel le fil s'applique sans frottement. — Il s'agit



d'obtenir au point T une force verticale et égale à P. Or le cylindre, que nous supposons parfaitement poli, ne peut fournir qu'une composante normale dirigée suivant CT,  $N = P \sin \gamma$ . Pour réaliser les conditions précédentes, il faut donc que le fil ait aussi une tension moyenne,  $T = P \cos \gamma$ . De cette tension doit résulter une pression normale uniforme dont la valeur  $\mathfrak{K}$  par unité de longueur est bien connue :  $\mathfrak{K} = T : R = P \cos \gamma : R$ .

Les conditions d'équilibre pour le fil enroulé sur le cylindre se ramènent donc à l'existence :

- d'une force normale  $N = P \sin \gamma$  au point où commence l'enroulement;
- d'une tension uniforme  $T = P \cos \gamma$  tout le long du fil enroulé;
- d'une *pression* normale  $\mathfrak{K} = P \cos \gamma : R$  par unité de longueur.

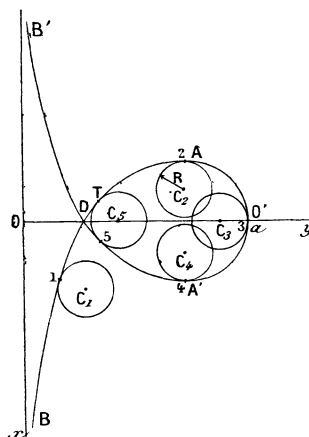
De l'équation de la courbe  $EI = \rho P y$  (n° 2), de la valeur de  $\cos \gamma$  (n° 3), on tire aisément

$$T = P - \frac{EI}{2R^2}.$$

9. *Conditions d'enroulement d'un fil rectiligne parfaitement élastique sur un cylindre circulaire de rayon R.* — Le cylindre a son axe horizontal. A quelles conditions un fil parfaitement élastique pourra-t-il s'appliquer exactement sur lui, quand on le fait tourner?

Représentons la forme du fil pendant l'enroulement : c'est une portion de l'élastique qui correspond à la charge actuelle P. Pour diminuer le nombre des figures, déplaçons le cylindre de façon à n'utiliser qu'une élastique (*fig. 3*) tracée une fois

Fig. 3.



pour toutes. Le fil aboutit tangentiellement au cylindre dont nous supposons d'abord le rayon R petit.

Par exemple, si le cylindre a la trace de son axe en  $C_2$ , il faut supposer effacée la portion  $2345B'$  de l'élastique; seule la portion  $B12$  est utilisée. Mais rien ne dit qu'en faisant tourner le cylindre le fil s'enroulera exactement sur lui, de manière que la figure représente exactement la forme du fil (supposé assez long).

Pour que l'enroulement se fasse d'une façon régulière, il faut d'abord que le rayon de courbure  $\rho$  de l'élastique au point de contact soit précisément égal au rayon du cylindre. Comme  $\rho$  est minimum en  $O'$ , il faut d'abord que la condition  $R > \rho_m$  soit satisfaite. Mais cela ne suffit pas. Il faut ensuite que le rayon de courbure de l'élastique soit plus grand du côté d'entrée du fil ( $B12$  par exemple) que du côté où le fil doit s'appliquer : cette condition impose le contact sur la branche  $BDAO'$  de l'élastique. Il faut enfin que le fil soit tendu; la position du point de contact est donc nécessairement sur la branche  $BDA$  de l'élastique. Comme au point  $A$ , on a  $\rho = \alpha : 2\sqrt{2} = \sqrt{EI : 2P}$ , la condition à satisfaire pour un enroulement régulier est, en définitive,

$$2PR^2 \geq EI.$$

10. *Conservation de l'énergie dans l'enroulement.* — L'énergie potentielle d'un fil parfaitement élastique de longueur  $L$ , enroulé sur un cylindre de rayon  $R$ , quand les spires sont assez rapprochées pour que la flexion puisse être considérée comme plane, est

$$W = \frac{1}{2} \frac{EIL}{R^2}.$$

Après  $n$  tours d'enroulement, le poids tenseur  $P$  s'est élevé de  $2\pi nR$ ; d'où un travail dépensé  $2\pi nRP$ . Mais le couple qui agit sur le cylindre et qu'il faut vaincre pendant la rotation, est  $P\gamma_1$ , où  $\gamma_1$  désigne l' $\gamma$  de l'axe du cylindre et, par conséquent, du centre de courbure de l'élastique au point de contact. Le travail à fournir pour faire  $n$  tours est donc  $2\pi nP\gamma_1$ . Le principe de la conservation de l'énergie se traduit par l'équation

$$2\pi nP(\gamma_1 - R) = \frac{1}{2} \frac{EIL}{R^2}, \quad \gamma_1 - R = \frac{EI}{P} \frac{1}{2R}.$$

Mais l'équation de la courbe donne la condition  $EI = PR\gamma$ ; substituant dans l'équation précédente, il vient l'une des équations démontrées au n° 3 :

$$\gamma_1 = R + \frac{\gamma}{2}.$$

On peut donner au travail  $W = 2\pi nP(\gamma_1 - R)$  une autre expression. En effet,  $\gamma_1 - R$  est égal à la distance horizontale  $D = \overline{VY}$  (*fig. 1*) du cylindre à la verticale du poids tenseur : on a donc  $W = 2\pi n \cdot P \cdot D = PLD : R$ .

*Autre manière de présenter les mêmes résultats.* — Reprenons la figure 1 : l'enroulement est censé se faire autour du cercle de centre C;  $\overline{CT} = R$ .

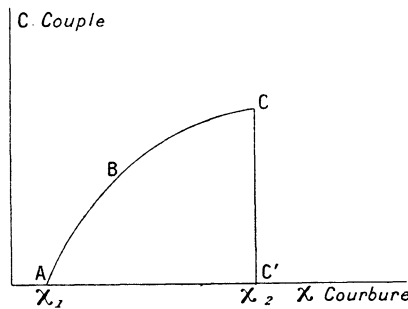
L'ensemble des forces appliquées en T se ramène : 1° à un couple  $P\gamma$  qui, pour une rotation  $d\theta$  autour du centre C, subit un travail  $P\gamma d\theta$ ; 2° à une force tangentielle  $T = P \cos \gamma$  qui, pour une rotation  $d\theta$ , subit un travail  $P \cos \gamma \cdot R d\theta$ ; 3° à une force normale  $N = P \sin \gamma$  qui ne donne lieu à aucun travail. Le travail d'enroulement est donc  $(\gamma + R \cos \gamma) P d\theta = DP d\theta$ ; pour une rotation de  $n$  tours, nous retrouvons l'expression donnée plus haut :  $W = 2\pi n \cdot PD$ .

ENROULEMENT D'UN FIL NON PARFAITEMENT ÉLASTIQUE  
SUR UN CYLINDRE CIRCULAIRE.

11. *Nature du procédé de déformation dans l'enroulement et le déroulement d'un fil cylindrique non parfaitement élastique.* — Soit  $\rho_1$  le rayon du cercle formé par le fil au début de l'expérience. Posons  $\chi_1 = 1 : \rho_1$ ,  $\chi_1$  est la courbure initiale. Le procédé théorique d'étude des déformations par flexion consisterait, d'une part, à faire varier cette courbure tout en maintenant le fil circulaire, de l'autre, à mesurer le couple C nécessaire à obtenir la courbure  $\chi$ . On obtiendrait dans le plan  $\chi, C$  une courbe ABC (fig. 4); l'aire ABCC' est le travail de la déformation.

Malheureusement il est à peu près impossible de maintenir la forme circulaire qui n'est généralement pas d'équilibre stable. On est amené à procéder par enrou-

Fig. 4.



lement. On ne déforme plus *simultanément* d'une manière identique le fil entier entre les courbures comprises entre  $\chi_1$  et  $\chi_2$ . On suppose, au contraire, que toutes les courbures comprises entre  $\chi_1$  et  $\chi_2$  sont imposées simultanément à une longueur  $l$  du fil, tous les points en deçà de cette longueur ayant la courbure  $\chi_1$ , tous les points au delà ayant la courbure  $\chi_2$ ; on fait voyager cette longueur le long du fil. Quand son déplacement est égal à  $L$ , on a dépensé le même travail que si l'on

avait fléchi cette longueur  $L$  de fil entre les courbures  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  suivant la première technique, au moins si l'on admet que la loi reliant  $\gamma$  et  $C$  ne dépend pas sensiblement de la vitesse avec laquelle  $\gamma$  varie. En effet, la loi de passage en fonction du temps de  $\gamma_1$  à  $\gamma_2$  de chaque élément du fil n'est pas nécessairement la même dans les deux expériences.

Cette méthode d'enroulement ne donne pas la courbe  $\gamma, C$ . Elle ne fournit que le travail d'enroulement.

**12. Fibre neutre. Position des fibres neutres d'enroulement et de déroulement.** — On appelle *fibre neutre* celle qui dans la flexion ne change pas de longueur. Ce terme n'implique pas du tout une décomposition matérielle possible de fil en cylindres élémentaires; ce n'est qu'une division géométrique.

Soient  $\delta_1$  le diamètre,  $L_1$  la longueur du fil avant l'enroulement.

Soient  $\delta_2$  le diamètre,  $L_2$  la longueur du fil après l'enroulement.

Soient  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  les distances des fibres neutres au cylindre de rayon  $R$  (sur lequel on fait l'enroulement) pendant l'enroulement et le déroulement. Le nombre  $n$  de tours d'enroulement ou de déroulement est évidemment le même; on a par définition :

$$2\pi n(R + \varepsilon_1) = L_1, \quad 2\pi n(R + \varepsilon_2) = L_2, \quad 2\pi n(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) = L_2 - L_1.$$

La mesure de l'allongement  $L_2 - L_1$  pendant une opération complète donne donc la distance de la fibre neutre d'enroulement à la fibre neutre de déroulement.

Pour comparer  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  au diamètre du fil qui, par hypothèse, conserve après déroulement une section circulaire, nous considérons les quantités

$$\psi_1 = \frac{\varepsilon_1}{\delta_1} \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}, \quad \psi_2 = \frac{\varepsilon_2}{\delta_2} \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}.$$

On peut admettre que la densité de la matière ne change pas, ce qu'exprime la relation  $\delta_1^2 L_1 = \delta_2^2 L_2$ . On trouve dès lors aisément

$$\psi_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{L_1}{2\pi n} - R \right) \left( 1 + \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \right), \quad \psi_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{L_2}{2\pi n} - R \right) \left( 1 + \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \right).$$

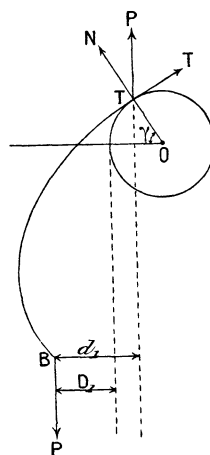
La considération des fibres neutres est indispensable pour le calcul du travail d'enroulement et de déroulement.

**13. Conditions d'enroulement du fil avec déformation permanente.** — Il suffit de reprendre le raisonnement du n° 7. Pour qu'au delà du point  $T$  le fil soit circulaire et de rayon  $R$ , il faut que le système de forces se réduise à un couple, *quelle que soit la déformation permanente*, pourvu que la forme initiale soit

circulaire; dans cette hypothèse, en effet, tous les éléments du fil ont été traités de la même manière.

Il faut donc appliquer au point T une force P égale et opposée à la charge appliquée en B, quelle que soit la forme actuelle de la partie BT du fil, forme qui dépend de la longueur BT et du rayon initial  $R_0$ . Le couple agissant en T et capable de maintenir le rayon à sa valeur actuelle R est  $Pd_1$  (fig. 5). Il dépend

Fig. 5.



non seulement des rayons initial  $R_0$  et final  $R_1$ , mais encore de la tension P sous laquelle par hypothèse l'enroulement a eu lieu.

Il faut réaliser effectivement ce système de forces par le moyen du cylindre; reprenons donc le raisonnement du n° 8. Il montre encore la nécessité : 1° d'une tension tout le long du fil enroulé  $T = P \cos \gamma$ ; 2° d'une composante normale au point T,  $N = P \sin \gamma$ ; 3° d'une pression normale uniforme  $\mathfrak{R} = T : R = P \cos \gamma : R$ . Mais nous ne pouvons plus déduire la valeur de la tension T de celles de la charge et du rayon de courbure. Quand, pour un rayon R donné, la charge augmente,  $\gamma$  devient peu à peu assez voisin de 0 pour que l'on puisse poser  $T = P$ ; pour des charges faibles cette relation est inexacte; on a toujours  $T < P$ .

Le fil s'enroule régulièrement, si la charge est telle que  $\gamma$  soit inférieur à  $\frac{\pi}{2}$ .

*Évaluation du travail moléculaire d'enroulement.* — Indépendamment de toute théorie, le travail  $\mathfrak{E}_1$  qu'il faut dépenser pour enrouler la longueur  $L_1$  de fil, est  $2\pi n P_1 (D_1 + R) = \mathfrak{E}_1$ . Mais l'énergie potentielle de la charge  $P_1$  a crû de  $P_1 L_1$ ; le travail moléculaire  $M_1$  d'enroulement est donc

$$M_1 = \mathfrak{E}_1 - PL_1 = 2\pi n P_1 (D_1 + R) - P_1 L_1.$$

En vertu des formules du n° 12, on trouve aisément, en appelant  $W_1 = M_1 : L_1$

le travail par unité de longueur :

$$M_1 = 2\pi n P_1 [D_1 - \varepsilon_1] = P_1 L_1 \frac{D_1 - \varepsilon_1}{R + \varepsilon_1}, \quad W_1 = P_1 \frac{D_1 - \varepsilon_1}{R + \varepsilon_1}.$$

*Problème de l'enroulement.* — Supposons que le fil à enrouler nous soit donné. Il faudra le faire passer d'un rayon  $R_0$  à un rayon  $R$ ; le travail  $M_1$  est donc censément connu. Il en est de même du couple  $C = P_1 d_1$  nécessaire à maintenir le fil sous ce dernier rayon. Enfin, on peut se donner la charge  $P_1$ . Connaissant ces trois quantités  $M_1$ ,  $C$ ,  $P_1$ , les conditions expérimentales sont complètement définies; on a, en effet,

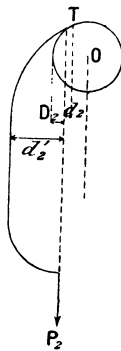
$$D_1 = \frac{M_1 (R + \varepsilon_1)}{L_1 P_1} + \varepsilon_1, \quad d_1 = \frac{C}{P_1}.$$

On peut évaluer le minimum acceptable pour  $P_1$  par la condition qu'à la limite le point T soit sur la verticale de l'axe du cylindre. On a alors  $d_1 = D_1 + R$ . D'où

$$\frac{C}{P_1} = \frac{M_1 (R + \varepsilon_1)}{L_1 P_1} + R + \varepsilon_1, \quad P_1 = \frac{1}{L_1} (2\pi n C - M_1).$$

14. *Conditions de déroulement du fil.* — Le poids  $P_2$  sous lequel se fait le

Fig. 6.



dérroulement est généralement différent du poids  $P_1$  d'enroulement. Mais, le couple au point de tangence devant être le même, on a la condition  $P_2 d_2 = P_1 d_1 = C$ .

Des raisonnements semblables aux précédents donnent pour le travail moléculaire de déroulement

$$-M_2 = 2\pi n P_2 (D_2 - \varepsilon_2) = P_2 L_2 \frac{D_2 - \varepsilon_2}{R + \varepsilon_2}.$$

Comme  $M_2$  est essentiellement positif,  $D_2$  sera généralement négatif; la verticale du poids  $P_2$  passe à travers le cylindre.

On trouve comme charge minima de déroulement

$$P_2 = \frac{1}{L_2} (2\pi nC + M_2).$$

*Comparaison des charges minima d'enroulement et de déroulement.* — On a

$$P_2 - P_1 = 2\pi nC \left( \frac{1}{L_2} - \frac{1}{L_1} \right) + \frac{M_2}{L_2} + \frac{M_1}{L_1}.$$

Si l'on admet d'abord  $L_2 = L_1$ , il reste  $P_2 - P_1 = (M_2 + M_1) : L$ .

Ainsi la charge  $P_2$  limite de déroulement est toujours plus grande que la charge  $P_1$  limite d'enroulement. La différence est sensiblement égale à la somme des travaux d'enroulement et de déroulement par unité de longueur.

Si le fil est parfaitement élastique,  $L_2 = L_1$ ,  $M_2 = M_1 = 0$ ,  $P_2 = P_1$ . Les charges limites sont égales.

Toutes ces formules nous ont été suggérées par l'expérience et réciproquement expliquent une série de faits que l'on rencontre inévitablement quand on cherche à fabriquer des ressorts à boudin.

#### RESSORTS A BOUDIN PARFAITEMENT ÉLASTIQUES.

Les formules exactes des ressorts à boudin formés d'un spiral cylindrique sont connues depuis longtemps (*voir*, en particulier, la *Philosophie naturelle* de Tait et Thomson). Nous les établirons rapidement; nous les mettrons ensuite sous la forme qui convient le mieux aux comparaisons avec l'expérience; enfin nous discuterons les diverses vérifications auxquelles on pourrait être tenté de les soumettre.

15. *Définition de la torsion et de la flexion d'une courbe gauche.* — Nous entendons ici par *courbe gauche* un fil de faible section, cylindrique quand il est rectiligne et non tordu.

L'*axe* d'un tel fil est la ligne passant par les centres de gravité des sections droites. Quand le fil est rectiligne et non tordu, traçons sur la surface latérale une parallèle à l'axe; cette génératrice du cylindre s'appelle *droite de référence*. Toute ligne tracée par un point de l'axe et aboutissant normalement à la droite de référence est une *transversale*.

On appelle *flexion*  $\varphi$  de la courbe en un point la courbure en ce point, c'est-à-dire l'inverse du rayon de courbure.

La définition de la *torsion*  $\tau$  est plus compliquée: on s'appuie sur les *postulats* suivants :

1° La torsion totale du fil rectiligne et tordu AB entre deux transversales A et B est l'angle de ces transversales. Nous savons que cet angle est nul quand la torsion est nulle, d'après la définition même des transversales.

2° Si le fil est fléchi suivant une courbe plane, la torsion totale est la différence des angles des transversales avec le plan de la courbe. Nous admettons donc que le fait de fléchir le fil ne change pas la valeur de la torsion. Si cette définition est logiquement incontestable, physiquement elle implique l'indépendance des effets d'une torsion et d'une flexion séparées ou simultanées (n° 1).

3° Si le fil forme une courbe gauche, assimilons-la à un polygone de côtés  $a, b, c, d, \dots$  aussi petits que nous voudrions. Les plans osculateurs successifs sont les plans  $ab, bc, cd, \dots$  admettant successivement un côté commun. Pour ramener le polygone à être plan, faisons tourner le plan  $ab$  autour de  $b$  jusqu'à ce qu'il coïncide avec  $bc$ ; faisons tourner le plan  $bc$  autour de  $c$ , jusqu'à ce qu'il coïncide avec  $cd, \dots$  et ainsi de suite pour tous les éléments. Si la courbe gauche est continue, le mouvement de rabattement des plans osculateurs les uns sur les autres est continu. Mesurons la somme  $t_1$  de ces rotations de rabattement entre les transversales A et B. La courbe est devenue plane; mesurons la différence  $t_2$  des angles des transversales avec ce plan, ce qui revient à appliquer les postulats 1° et 2°. La torsion totale  $t$  de la courbe gauche entre les points A et B, est égale à  $t_1 \pm t_2$ , suivant le sens dans lequel on a dû faire les rabattements du plan osculateur et mesurer l'angle des transversales.

Comme pendant les rabattements des plans osculateurs les uns sur les autres, l'angle de chacun de ces plans et de la transversale correspondante ne change pas, la torsion totale est mesurée, en définitive, par la somme des rotations des plans osculateurs plus (ou moins) la différence des angles des transversales extrêmes avec les plans osculateurs correspondants.

Le quotient de la torsion totale par la longueur est la torsion moyenne; la limite de ce rapport pour un arc infiniment petit est la torsion vraie  $\tau$  en un point de la courbe.

On voit immédiatement la différence entre ce que les mathématiciens et les physiciens appellent *torsion d'une courbe*. Pour les premiers, la torsion est la limite du rapport de l'angle de deux plans osculateurs voisins à l'arc  $ds$  qui sépare les points correspondants de la courbe. Pour les seconds, la torsion est la somme de la torsion précédente  $\pm$  la limite du quotient par l'arc  $ds$  de la différence des angles des transversales avec les plans osculateurs correspondants.

16. *Application à l'hélice et aux ressorts à boudin.* — Soient  $r$  le rayon du cylindre circulaire autour duquel le fil est enroulé,  $\alpha$  l'angle de la tangente à la courbe avec un plan perpendiculaire à l'axe du ressort (*fig. 7*).

L'inverse du rayon de courbure est  $\cos^2 \alpha : r$ . Quand une hélice définie par les

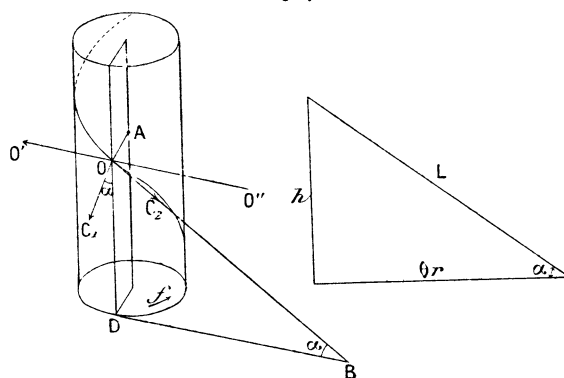


paramètres  $\alpha_0, r_0$  se transforme en une autre hélice définie par les paramètres  $\alpha, r$ , la flexion  $\varphi$  est donnée par la formule

$$\varphi = \frac{\cos^2 \alpha}{r} - \frac{\cos^2 \alpha_0}{r_0}.$$

Pour définir les transversales, nous supposons que l'enroulement s'est fait de manière que la ligne de référence soit au contact du cylindre; les transversales

Fig. 7.



sont donc des normales au cylindre passant par l'axe du fil. Nous supposons de plus que, *dans toute déformation du ressort, la ligne de référence reste au contact du nouveau cylindre sur lequel la nouvelle hélice est enroulée. Les transversales sont donc toujours, par hypothèse, dans les plans osculateurs.* Nous limitons ainsi la généralité du problème, mais on s'aperçoit aisément qu'il est matériellement impossible d'utiliser un cas plus général. Par la manière même dont on fixe le ressort à ses extrémités, les transversales sont maintenues dans les plans osculateurs.

Il résulte de là l'évaluation immédiate de la torsion : elle est égale au taux de rotation du plan osculateur le long de la courbe, soit  $\sin \alpha \cos \alpha : r$ .

Quand une hélice définie par les paramètres  $\alpha_0, r_0$  se transforme en une autre hélice définie par les paramètres  $\alpha, r$ , la torsion  $\tau$  est donnée par la formule

$$\tau = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{r} - \frac{\sin \alpha_0 \cos \alpha_0}{r_0}.$$

17. *Énergie potentielle d'un spiral.* — Il résulte immédiatement : 1° de l'indépendance des déformations; 2° de la proportionnalité entre le couple tordant (ou fléchissant) et la torsion  $\tau$  (ou la flexion  $\varphi$ ), que l'énergie potentielle du ressort dont la longueur est L peut se mettre sous la forme

$$W = \frac{L}{2} (A \tau^2 + B \varphi^2).$$

A est le module de torsion, B le module de flexion; si le fil est circulaire et de diamètre  $\delta$ , on a, en appelant  $\sigma$  le coefficient de Poisson,

$$A = \frac{\pi \mu \delta^4}{32}, \quad B = \frac{\pi E \delta^4}{64}, \quad \frac{B}{A} = \frac{E}{2\mu} = 1 + \sigma.$$

La forme précédente de W est incommode; il est préférable d'introduire les quantités directement accessibles à l'expérience. Appelons  $\theta$  la torsion totale autour de l'axe de l'hélice,  $h$  la hauteur du spiral,  $\eta = \sin \alpha$  le rapport  $h:L$  de la hauteur à la longueur du fil. Il vient

$$\sin \alpha = \frac{h}{L} = \eta, \quad \cos \alpha = \frac{\sqrt{L^2 - h^2}}{L} = \sqrt{1 - \eta^2}, \quad \theta r = \sqrt{L^2 - h^2},$$

$$\varphi = \frac{1}{L^2} [\theta \sqrt{L^2 - h^2} - \theta_0 \sqrt{L^2 - h_0^2}] = \frac{1}{L} [\theta \sqrt{1 - \eta^2} - \theta_0 \sqrt{1 - \eta_0^2}],$$

$$\tau = \frac{1}{L^2} [\theta h - \theta_0 h_0] = \frac{1}{L} (\theta \eta - \theta_0 \eta_0),$$

$$W = \frac{B}{2L^3} [\theta \sqrt{L^2 - h^2} - \theta_0 \sqrt{L^2 - h_0^2}]^2 + \frac{A}{2L^3} [\theta h - \theta_0 h_0]^2,$$

$$W = \frac{B}{2L} [\theta \sqrt{1 - \eta^2} - \theta_0 \sqrt{1 - \eta_0^2}]^2 + \frac{A}{2L} [\theta \eta - \theta_0 \eta_0]^2.$$

*Équations d'équilibre.* — Pour l'équilibre nous devons appliquer une charge P suivant l'axe de l'hélice et un couple G perpendiculairement à cet axe. On a

$$P = \frac{\partial W}{\partial h}, \quad G = \frac{\partial W}{\partial \theta},$$

$$(1) \quad P = -\frac{B}{L^3} [\theta \sqrt{L^2 - h^2} - \theta_0 \sqrt{L^2 - h_0^2}] \frac{\theta h}{\sqrt{L^2 - h^2}} + \frac{A}{L^3} (\theta h - \theta_0 h_0) \theta,$$

$$(2) \quad G = \frac{B}{L^3} [\theta \sqrt{L^2 - h^2} - \theta_0 \sqrt{L^2 - h_0^2}] \sqrt{L^2 - h^2} + \frac{A}{L^3} (\theta h - \theta_0 h_0) h.$$

On peut donner à ces expressions des formes souvent plus commodes, en prenant pour variable  $\alpha$  au lieu de  $h$  :

$$(3) \quad P = -\frac{B}{L^2} (\theta \cos \alpha - \theta_0 \cos \alpha_0) \theta \tan \alpha + \frac{A}{L^2} (\theta \sin \alpha - \theta_0 \sin \alpha_0) \theta,$$

$$(4) \quad G = \frac{B}{L} (\theta \cos \alpha - \theta_0 \cos \alpha_0) \cos \alpha + \frac{A}{L} (\theta \sin \alpha - \theta_0 \sin \alpha_0) \sin \alpha,$$

$$(4') \quad GL = \theta (B \cos^2 \alpha + A \sin^2 \alpha) - \theta_0 (B \cos \alpha \cos \alpha_0 + A \sin \alpha \sin \alpha_0).$$

Le problème des ressorts à boudin a été traité par Mossoti en 1817 et repris par Giulio en 1842. Ces deux auteurs donnent des formules moins générales, parce qu'ils admettent que dans la déformation les points qui sont sur une des génératrices du cylindre sur lequel le fil est enroulé restent sur cette génératrice. Cela revient à poser  $\theta = \theta_0$ . La formule qu'ils utilisent est alors

$$\frac{PL^3}{\theta_0^2} = -B[\sqrt{L^2 - h^2} - \sqrt{L^2 - h_0^2}] \frac{h}{\sqrt{L^2 - h^2}} + A(h - h_0).$$

De même pour la torsion, ils supposent  $h$  constant,  $h = h_0$  :

$$GL^3 = [B(L^2 - h_0^2) + Ah_0^2](\theta - \theta_0).$$

18. *Oscillations des ressorts à boudin pour de petites déformations à partir du ressort non déformé.* — Il faut faire dans (1) et (2)  $\theta = \theta_0 + d\theta$ ,  $h = h_0 + dh$  et calculer  $dP$  et  $dG$ ,

$$(5) \quad L^3 dP = \left( \frac{B h_0^2}{L^2 - h_0^2} + A \right) \theta_0^2 dh + (A - B) \theta_0 h_0 d\theta,$$

$$(6) \quad L^3 dG = (A - B) \theta_0 h_0 dh + [B(L^2 - h_0^2) + Ah_0^2] d\theta.$$

A cette modification  $d\theta$  et  $dh$  correspondent des accroissements  $d\tau$  et  $d\varphi$  de torsion et de flexion dont voici les expressions :

$$d\tau = \frac{1}{L^2} (\theta_0 dh + h_0 d\theta), \quad d\varphi = \frac{1}{L^2} \left[ -\frac{h_0 \theta_0 dh}{\sqrt{L^2 - h_0^2}} + \sqrt{L^2 - h_0^2} d\theta \right].$$

*Cas particuliers :*

1° On fait  $h_0 = 0$ ,

$$L^3 dP = A \theta_0^2 dh, \quad L dG = B d\theta; \quad d\tau = \frac{\theta_0 dh}{L^2}, \quad d\varphi = \frac{d\theta}{L}.$$

Exprimons  $dG$  et  $dP$  en fonction de  $d\tau$  et de  $d\varphi$ . Introduisons le rayon  $r_0$  du cylindre  $r_0 \theta_0 = L$ . Il vient  $r_0 dP = A d\tau$ ,  $dG = B d\varphi$ .

Donc le couple produit par la charge produit uniquement une torsion. Lorsque les spires sont suffisamment rapprochées, le ressort spiral s'allonge en jouant le rôle de balance de torsion : le couple appliqué à cette balance est le produit de la charge par le rayon du cylindre sur lequel l'hélice est enroulée.

Le couple appliqué normalement à l'axe de l'hélice produit uniquement une flexion lorsque les spires sont suffisamment rapprochées.

2° Dans la pratique on est conduit à faire osciller : ou bien autour de l'axe de l'hélice ( $d\theta$  variable) à longueur constante ( $dh = 0$ ); ou bien parallèlement à l'axe de l'hélice ( $dh$  variable) à azimut constant ( $d\theta = 0$ ). Les formules se simplifient

et deviennent

$$(5') \quad L^3 dP = \left( \frac{B h_0^2}{L^2 - h_0^2} + A \right) \theta_0^2 dh,$$

$$(6') \quad L^3 dG = [B(L^2 - h_0^2) + A h_0^2] d\theta.$$

En particulier, faisons  $\alpha_0 = \frac{\pi}{4}$ ,  $L^2 - h_0^2 = h_0^2$ ; les formules deviennent

$$L^3 dP = (B + A) \theta_0^2 dh, \quad L^3 dG = (B + A) h_0^2 d\theta.$$

Dans chaque déformation la flexion et la torsion interviennent également.

19. *Applications de ces formules.* — On rencontre une série de difficultés techniques dans la mesure du paramètre B par l'étude de la durée des oscillations d'un oscillateur sous l'influence du couple dû à l'influence du ressort dont les spires sont suffisamment rapprochées.

Nous n'insisterons pas sur la question des courbes terminales du ressort; leur importance, capitale en horlogerie, est bien moindre dans l'étude proprement dite de l'élasticité où la précision requise est d'un autre ordre. On trouvera n° 43 d'un Traité publié par l'un de nous (BOUASSE, *Essai des matériaux*; Gauthier-Villars) des indications à ce sujet. En horlogerie on veut qu'un *certain* ressort jouisse de propriétés spéciales très *rigoureusement* définies; en élasticité on veut, au contraire, étudier la *matière* formant une série de ressorts : ce sont des problèmes tout différents.

Toutefois, pour que les spires restent très rapprochées et que les durées d'oscillation soient assez grandes, on ne peut suspendre directement l'oscillateur au spiral; on doit recourir à un artifice décrit au n° 52 de l'Ouvrage cité (*Essais des Matériaux*) et employé par l'un de nous (*Sur les courbes de déformation des fils*, *Ann. de la Fac. de Toulouse*, Chap. I).

Si l'on ne se contente pas de la valeur brute du paramètre B, mais si l'on veut calculer la valeur du module de traction E, il faut mesurer avec quelque précision le diamètre  $\delta$  du fil. Le mieux est de calculer le diamètre moyen par la mesure de la longueur, de la masse et de la densité.

La mesure du paramètre A par les oscillations offre des difficultés analogues. Il ne faut pas songer à suspendre directement la masse oscillante. On doit réaliser un oscillateur, monté sur couteau horizontal, de moment d'inertie assez grand et auquel est appliqué le ressort dont l'axe est vertical. Une des extrémités du ressort est fixe, l'autre est liée à l'oscillateur. L'artifice est très analogue à celui dont il est parlé plus haut pour la mesure de B.

Dans les deux cas, une mesure préliminaire donne le moment d'inertie des

oscillateurs; on peut s'arranger pour que les oscillations soient dans les deux cas à peu près de même amplitude et de même période. Le rapport  $B:A = 1 + \sigma$  donne le coefficient de Poisson. Il serait évidemment plus simple de mesurer  $A$  sur le fil rectifié (méthode employée par l'un de nous, *Sur les courbes de déformation*, Chap. I) si le fait d'enrouler ou de dérouler ne modifiait pas la matière.

On vérifiera facilement que, si les spires ne se touchent pas rigoureusement, les formules du n° 18 : 1° sont encore très approximativement applicables. La correction se ferait, d'ailleurs, aisément.

On peut se proposer de vérifier les formules plus générales du n° 18 : 2°. L'expérience consiste à allonger plus ou moins le ressort d'une manière permanente et à recommencer, à partir de cette nouvelle forme, les déterminations dont il vient d'être parlé. Grâce aux artifices signalés, c'est automatiquement que, pendant les oscillations, l'une ou l'autre des conditions ( $dh = 0$ ,  $d\theta = 0$ ) sont réalisées.

Malheureusement, les déterminations ne peuvent se faire qu'avec une approximation peu satisfaisante; l'amortissement rapide des oscillations, surtout avec l'oscillateur à couteau, limite la précision des mesures de durée. Il est impossible de tirer des résultats une conclusion relativement aux hypothèses sur lesquelles reposent les formules, d'autant que la déformation permanente qu'il est nécessaire d'imposer au ressort d'une expérience à l'autre rend douteuse une conclusion défavorable.

20. *Grands allongements à couple nul. Étude des détorsions.* — Nous supposons le ressort parfaitement élastique; nous l'allongeons à l'aide de poids librement suspendus de manière que le couple  $G$  se maintienne nul. La formule (4) donne les conditions

$$(7) \quad \theta = \theta_0 \frac{A \sin \alpha \sin \alpha_0 + B \cos \alpha \cos \alpha_0}{A \sin^2 \alpha + B \cos^2 \alpha},$$

$$(8) \quad \frac{1}{\theta_0} \frac{d\theta}{d\alpha} = \frac{A \cos \alpha \sin \alpha_0 - B \sin \alpha \cos \alpha_0}{A \sin^2 \alpha + B \cos^2 \alpha} - \frac{2(A - B) \sin \alpha \cos \alpha (A \sin \alpha \sin \alpha_0 + B \cos \alpha \cos \alpha_0)}{(A \sin^2 \alpha + B \cos^2 \alpha)^2}.$$

La courbe  $\eta, \theta$  (*fig. 8*) part d'un point  $A(\theta_0, \eta_0)$  et aboutit en un point défini par les coordonnées  $\eta = \sin \alpha = 1$ ,  $\theta = \theta_0 \eta_0$ .

La tangente de départ est donnée par la condition

$$\begin{aligned} \left( \frac{d\theta}{d\eta} \right)_{\eta=\eta_0} &= \frac{1}{\cos \alpha_0} \left( \frac{d\theta}{d\alpha} \right)_{\alpha=\alpha_0} \\ &= \frac{\theta_0 (B - A) \sin \alpha_0}{A \sin^2 \alpha_0 + B \cos^2 \alpha_0} = \theta_0 (B - A) \frac{\eta_0}{B - (B - A) \eta_0^2}. \end{aligned}$$

Pour un fil circulaire  $B > A$ , la tangente de départ est dirigée vers le haut; il y a d'abord une *torsion*, le nombre des spires *croît*. La tangente de départ, horizontale pour  $\eta_0 = 0$ , se redresse à mesure que  $\eta_0$  croît. En effet, quand  $\eta_0$  passe de 0 à 1, le dénominateur passe de B à A, c'est-à-dire décroît pour un fil circulaire.

Pour  $\eta = 1$ , la formule (8) donne la valeur  $-\infty$ . Toutes les courbes aboutissent donc verticalement aux points C, C<sub>1</sub>, C<sub>2</sub>, ... qui correspondent à la rectification parfaite.

La *torsion* initiale, nulle pour  $\eta_0 = 0$ , est aussi nulle pour  $\eta_0 = 1$ . Elle est généralement très petite, et la figure 8 exagère beaucoup sa grandeur. Elle passe nécessairement par un maximum qui, pour un  $\theta_0$  donné, correspond à un certain  $\eta_0$  que nous calculerons plus loin.

Nous avons calculé quelques-unes des courbes  $\theta$ ,  $\eta$  pour la valeur particulière B : A = 1,25 ou  $\sigma = 0,25$ . Les rapports  $\theta : \theta_0$  sont donnés en dix-millièmes :

$\sin \alpha = \eta.$	$\eta_0 = 0.$	$\eta_0 = 0,30.$	$\eta_0 = 0,40.$	$\eta_0 = 0,50.$	$\eta_0 = 0,60.$	$\eta_0 = 0,70.$	$\eta_0 = 0,80.$	$\eta_0 = 0,90.$
0,05.....	9994							
10.....	9971							
15.....	9931							
20.....	9876							
25.....								
30.....	9714	10000						
35.....		10015						
40.....	9468	10019	10000					
45.....		10002	10026					
50.....	9118	9959	10039	10000				
55.....			10041	10039				
60.....	8620	9775	9970	10051	10000			
65.....	8300			10029	10048			
70.....	7917	9407	9740	9982	10057	10000		
75.....	7452				10018	10053		
80.....	6880	8766	9242	9628	9908	10050	10000	
85.....	6158					9962	10053	
90.....	5201	7569	8204	8801	9316	9729	9994	10000
95.....	3809							9769
1,00.....	0	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000

21. On donne un certain  $\theta_0$ , on demande pour quelle valeur de  $\alpha_0$  ou de  $\eta_0 = \sin \alpha_0$  la torsion totale initiale sera maxima, quand on allonge à couple nul. — L'enveloppe des courbes ABC s'obtient en éliminant  $\alpha_0$  entre l'équation (7) et l'équation  $\frac{\partial \theta}{\partial \alpha_0} = 0$ ; ou ce qui revient au même entre l'équation (7) et la condition

$$(9) \quad B \tan \alpha_0 = A \tan \alpha.$$



Ce Tableau montre combien la torsion est petite même dans le cas le plus favorable. Voici, d'ailleurs, quelques points de l'enveloppe calculés pour  $\sigma = 0,25$  :

$\eta$ .....	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
$(\theta - \theta_0) : \theta_0$ .....	2	8	17	29	41	53
$\eta$ .....	0,7	0,745	0,8	0,9	1	
$(\theta - \theta_0) : \theta_0$ .....	61	62	60	43	0	

Ces curieux résultats semblent fournir une méthode commode pour la détermination de  $\sigma$ . Supposons connaître une valeur approchée de  $\sigma$ ; donnons au ressort une hauteur conforme à cette valeur suivant la première des formules (10); allongeons ensuite à couple nul et déterminons la *torsion* totale  $\theta - \theta_0$  : la dernière des formules (10) permet le calcul de la valeur exacte de  $\sigma$ .

Si nous ne connaissons pas la valeur approchée de  $\sigma$ , faisons la même expérience d'abord avec de petites valeurs de  $\eta_0$ . Entre chaque expérience allongeons le ressort *d'une manière permanente*, de manière à opérer successivement pour des valeurs régulièrement croissantes de  $\eta_0$ . Mesurons au début de chaque expérience la quantité  $\theta_0$  correspondante; allongeons le ressort sous couple nul, déterminons la torsion *maxima*  $\theta - \theta_0$ . Nous trouverons ainsi la valeur maxima de ces maxima; c'est elle que nous introduirons dans la dernière des formules (10) pour le calcul de  $\sigma$ .

En théorie rien de plus simple et même de plus précis :  $\theta - \theta_0$  peut être mesuré avec une grande approximation,  $\theta_0$  est toujours connu avec assez de précision; la connaissance exacte de  $\alpha_0$  ou  $\eta_0$ , de  $\alpha$  ou  $\eta$  est inutile, puisque la quantité à mesurer est maxima et, par conséquent, à peu près indépendante de la variable  $\alpha$  et du paramètre  $\alpha_0$ . Malheureusement, 1° l'expérience montre que l'allongement à donner pour arriver au maximum est d'un ordre de grandeur tel, que *pratiquement* le ressort est loin de rester parfaitement élastique quand on passe de  $\alpha_0$  à  $\alpha$  ou de  $\eta_0$  à  $\eta$ ; 2° quand, entre deux expériences consécutives, on veut allonger *d'une manière permanente* le ressort pour faire varier le paramètre  $\alpha_0$  ou  $\eta_0$ , les phénomènes de réactivité interviennent de telle manière qu'on ne sait pratiquement plus quelle est la valeur du paramètre.

Il résulte de là que, dans des parcours cycliques, au lieu d'obtenir entre les variables  $\eta$  et  $\theta$  une relation bien déterminée et sans hystérésis, on trouve des cycles limités par des courbes qui, d'abord, ne se ferment pas et qui, peu à peu, tendent vers une forme limite entourant une aire non nulle.

Bref, on retrouve aggravée toute la complication des phénomènes de torsion ou de flexion isolés; l'interprétation détaillée des résultats est parfaitement inextricable.

Comme il se peut qu'un physicien soit tenté de reprendre ces expériences, voici comment nous opérions : le ressort vertical est invariablement fixé, par son



extrémité inférieure, au-dessus d'une platine qu'on peut faire tourner d'angles connus; son axe coïncide avec la normale au centre de la platine. A son extrémité supérieure, il porte un miroir vertical et est attaché à un fil d'acier très fin et très long dont l'extrémité supérieure est elle-même fixée à une glissière. C'est par l'intermédiaire de la glissière et du fil d'acier qu'on imposera au ressort des allongements convenables. On est sûr que le couple reste nul, si le miroir reste dans un azimut invariable, ce qu'on obtient en faisant tourner la platine d'un angle qui mesure à chaque instant  $\theta - \theta_0$ . Nous n'insistons pas sur le réglage de l'appareil, sur le moyen de vérifier qu'au début de l'expérience le fil très fin d'acier est sans torsion, de mesurer la hauteur du ressort et la torsion  $\theta_0$ . Il nous suffit de donner le principe de la méthode pour qu'on en retrouve aisément les détails.

La méthode simple, qui consiste à charger directement le ressort d'un poids variable librement suspendu, présente des difficultés techniques quasiment insurmontables. Il se produit, pour des charges un peu fortes, des oscillations qu'on ne sait comment amortir; les variations cycliques de longueur sont remplacées par des variations cycliques de poids d'une interprétation encore plus délicate.

22. *On tord le spiral à longueur constante. Étude du couple.* — La formule (4') n° 17 donne la solution du problème. Puisque  $\alpha$  est constant par hypothèse, le couple varie proportionnellement à  $\theta$ ; la courbe  $G, \theta$  est une droite dont le coefficient angulaire est

$$C = \frac{dG}{d\theta} = \frac{1}{L} (\beta \cos^2 \alpha + A \sin^2 \alpha) = \frac{1}{L^3} [B(L^2 - h^2) + A h^2].$$

Pour un fil circulaire  $A - B < 0$ , le calcul de  $dC : dh = 2h(A - B) : L^3$  montre que  $C$  diminue à mesure que  $h$  augmente.

Pour mesurer  $C$  par la méthode des oscillations, on peut avoir recours à l'artifice rappelé au n° 19. L'oscillateur est supporté par un fil aussi parfaitement élastique que possible; le ressort est au-dessous de l'oscillateur, son axe prolongeant le fil supérieur. Si les formules s'appliquent, la durée d'oscillation (qui dépend des propriétés élastiques du fil de suspension et du ressort) est indépendante des couples égaux et de sens contraires dus à ces deux systèmes, puisque, par hypothèse, les couples, à partir de la position d'équilibre, varient pour les deux proportionnellement à la torsion. On peut donc tourner d'un angle quelconque l'extrémité supérieure du fil de suspension et l'extrémité inférieure du ressort (situées par hypothèse sur la même verticale) sans modifier la durée d'oscillation.

D'après la formule, cette durée est, pour une longueur  $h$  donnée, indépendante de  $h_0$ . Elle ne dépend, en définitive, que de la hauteur actuelle du ressort.

On pourrait aussi essayer de vérifier la formule à l'aide d'un dynamomètre de torsion.

Malheureusement, ce que les formules ne disent pas et ce qui rend les expériences illusoires dès que  $G$  est un peu grand, c'est que l'hélice n'est pas une forme d'équilibre stable. Quand, à *hauteur constante*, on tord un spiral d'un angle un peu grand, il se produit des déformations très compliquées qui rejettent les spires les unes sur les autres; la ligne passant par le centre des spires devient sinueuse.

Les formules ne peuvent donc se vérifier que pour de petits cycles autour du couple  $G$  nul. Il est facile de montrer expérimentalement la décroissance de  $C$  quand  $h$  croît. En particulier, pour  $h = 0$ ,  $C_0 = B:L$ ; pour  $h = L$ ,  $C_1 = A:L$ ,

$$\frac{C_0}{C_1} = \frac{B}{A} = \frac{E}{2\mu} = 1 + \sigma.$$

C'est la formule que l'un de nous a déjà appliquée à la mesure de  $\sigma$  [*Sur les courbes de déformation (Annales de Toulouse)*].

Le cas traité dans ce numéro est la généralisation d'un des cas traités au n° 18, 2°, formule (6').

**23.** *On tord un spiral à charge constante, en particulier à charge nulle.* — Les formules sont compliquées et sans intérêt, sauf dans le cas où le fil est d'abord rectiligne,  $h_0 = L$ , cas ordinaire dans l'étude de la torsion.

Supposons d'abord la charge nulle  $P = 0$ , appliquons la formule (1), il vient comme condition  $(B - A)\theta h = -A\theta_0 L$ . Or le second membre est nul par hypothèse; le premier n'est pas nul,  $A$  et  $B$  étant généralement différents. Donc l'équation est impossible à satisfaire. Une des conditions de l'évaluation de la torsion (n° 16) n'est pas réalisée, les transversales ne sont plus toujours dans les plans osculateurs correspondants. On sait, en effet, qu'en appliquant deux couples aux extrémités d'un fil, celui-ci tend à fléchir de manière à diminuer l'énergie potentielle; il prend la forme circulaire, puis des formes plus compliquées.

Si le fil est chargé, les formules redeviennent applicables, sauf aux extrémités; on a

$$PL^3 = (A - B)\theta^2 h, \quad GL^3 = \theta[B(L^2 - h^2) + Ah^2].$$

Le fil prend la forme d'hélice, sauf aux extrémités où il se raccorde avec la verticale primitive. Dans les expériences de torsion, on veut maintenir le fil sensiblement rectiligne; on a dès lors très approximativement

$$GL = A\theta, \quad PA^2 = (A - B)G^2.$$

On s'explique qu'il soit nécessaire de tendre considérablement un fil d'abord

rectiligne, auquel on veut imposer un couple notable de torsion sans qu'il prenne une forme trop accentuée d'hélice : il est d'ailleurs impossible d'empêcher l'hélice de se dessiner.

24. *On allonge un spiral à torsion constante. Étude de la tension.* — Le seul cas ayant quelque intérêt correspond à la condition  $\theta = \theta_0$ . La formule (1) donne alors

$$\frac{PL^3}{\theta_0^3} = -B \left[ 1 - \sqrt{\frac{L^2 - h_0^2}{L^2 - h^2}} \right] h + A(h - h_0), \quad \frac{L^3}{\theta_0^3} \frac{dP}{dh} = A - B + \frac{BL^2 \sqrt{L^2 - h_0^2}}{(L^2 - h^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

On vérifiera aisément, en faisant  $h = h_0$  dans la seconde formule, que la tangente initiale, pour un  $\theta_0$  donné, croît constamment quand  $h_0$  varie entre 0 et L, pour devenir infinie pour  $h_0 = L$ , ce qui est évident. Le long d'une courbe du faisceau, c'est-à-dire pour un  $h_0$  donné, la tangente se redresse d'une manière continue quand  $h$  croît de  $h_0$  à L. Pour  $h = L$  les courbes sont toutes verticales. Les courbes du faisceau ne se coupent pas.

25. *On allonge un spiral à couple nul. Étude de la tension.* — La solution consiste à écrire  $G = 0$  dans l'équation (2), à tirer la valeur de  $\theta$  en fonction de  $h$ , à la transporter dans l'expression (1) de P. Les calculs sont inextricables. On peut cependant calculer les faisceaux de courbes  $P = f(h)$ ,  $G = 0$ , en se servant des résultats du paragraphe 20 dont celui-ci est le complément. On a, en effet,

$$P = \frac{A\theta}{L(L^2 - h^2)} (\theta h - \theta_0 h_0),$$

formule d'une application aisée si nous possédons déjà les valeurs numériques correspondantes de  $\theta$  et de  $h$ . Les courbes ne possèdent pas d'inflexion. La tangente le long d'une courbe du faisceau se redresse à mesure que  $h$  croît et devient verticale pour  $h = L$ . Sauf la courbe qui correspond à  $h = 0$  et qui est évidemment théorique, elles ont toutes une asymptote verticale pour  $h = 1$ . Elles peuvent se couper les unes les autres.

26. *Application des formules des nos 24 et 25. Conclusions générales.* — Quand on compare les formules aux résultats de l'expérience, on s'aperçoit bien vite que la réactivité et les déformations permanentes les rendent illusoirs. Assurément, un ressort qu'on allonge sous couple nul se tord puis se détord, à mesure que la tension croît. Mais la loi de torsion et de détorsion (n° 20) et la loi d'allongement (n° 25) n'ont que vaguement l'allure des lois ici calculées. Nous arrivons en définitive à la même conclusion :

*Il est vain de chercher dans les lois expérimentales de déformation des ressorts à boudin cylindriques une démonstration des deux hypothèses fondamentales sur lesquelles la théorie classique de l'élasticité parfaite est bâtie : loi de Hooke et indépendance des effets des déformations superposées.*

Il est de même à peu près inutile d'essayer de tirer de l'étude des ressorts à boudin quoi que ce soit sur les déformations permanentes, tant il est difficile de faire à chaque instant le départ entre les déformations de torsion et les déformations de flexion qui sont d'ailleurs les unes et les autres hétérogènes.

Malgré ces conclusions négatives, nous ne considérons pas notre travail comme inutile; il fixe la voie à ceux qui, plus optimistes que nous, trouveront peut-être moyen d'utiliser toutes ces formules, en elles-mêmes si intéressantes : nous croyons les avoir présentées de la manière la plus commode pour les applications.

