ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

HENRY BOURGET

Sur le théorème de Poisson

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 2e série, tome 6, nº 2 (1904), p. 167-176
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1904_2_6_2_167_0>

SUR LE THÉORÈME DE POISSON,

PAR M. HENRY BOURGET,

Maître de Conférences à l'Université et Astronome adjoint à l'Observatoire.

1. On sait qu'en rapportant les planètes aux axes habituellement employés, ayant pour origine le Soleil, la démonstration du théorème de Poisson exige quelques transformations de calcul assez délicates. Les difficultés proviennent de ce que la fonction perturbatrice n'est pas la même pour toutes les planètes en présence. Il en résulte que, si l'on montre assez facilement que les variations des éléments d'une planète ne produisent pas de perturbation séculaire dans le grand axe de cette planète, il est plus malaisé de faire voir qu'il en est de même pour l'effet des variations des éléments des autres planètes.

C'est pour lever ces difficultés que Tisserand a fait usage des coordonnées Jacobi-Radau. Dans ce système, les fonctions perturbatrices des diverses planètes sont les mêmes à un facteur près.

M. Poincaré a proposé, en 1897 (*Bulletin astronomique,* t. XIV, p. 53), un système de coordonnées qui possède la même propriété.

J'ai pensé qu'on pourrait l'utiliser avantageusement pour simplifier la démonstration du théorème de Poisson. C'est l'objet du présent travail. Houël a indiqué, jadis, dans sa Thèse, une démonstration de l'invariabilité des moyens mouvements basée sur une idée analogue.

J'ai fait usage d'un mode particulier d'exposition de la méthode de la variation des constantes arbitraires. J'ai montré ailleurs (¹) que ce mode d'exposition dû à Cauchy (*Comptes rendus,* 12 octobre 1840) pouvait être rattaché simplement à la belle méthode des approximations successives de M. Picard.

2. Désignons par m_0 la masse du Soleil; $m_1, m_2, \ldots, m_\nu$ les masses des diverses planètes. Soient x, y, z les coordonnées par rapport à des axes fixes quelconques de la masse m_0 et x_i, y_i, z_i les coordonnées de la masse m_i par rapport à des axes parallèles aux premiers, menés par m_0.

(¹) *Bulletin astronomique,* t. XXI, 1894, p. 219.

La force vive et la fonction des forces du système sont

$$\left.\begin{aligned} 2T &= m_0(x'^2+y'^2+z'^2)+\sum_i m_i[(x'+x'_i)^2+(y'+y'_i)^2+(z'+z'_i)^2] \\ U &= \sum_i \frac{m_0 m_i}{r_i}+\sum_{ij}\frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}} \end{aligned}\right\} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, \nu),$$

où les lettres accentuées désignent des dérivées par rapport au temps, r_i la distance des masses m_0 et m_i et Δ_{ij} celle des masses m_i et m_j.

En supposant, ce qui est permis, que le centre de gravité du système est immobile, nous obtenons

$$\left.\begin{aligned} -x' &= \frac{1}{\mu}\sum_i m_i x'_i \\ -y' &= \frac{1}{\mu}\sum_i m_i y'_i \\ -z' &= \frac{1}{\mu}\sum_i m_i z'_i \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, \nu),$$

en posant

$$\mu = m_0 + m_1 + \ldots + m_\nu.$$

La force vive devient

$$2T = \sum_i m_i(x_i'^2+y_i'^2+z_i'^2) - \frac{1}{\mu}\left[\left(\sum_i m_i x'_i\right)^2+\left(\sum_i m_i y'_i\right)^2+\left(\sum_i m_i z'_i\right)^2\right].$$

Posons

$$\frac{\partial T}{\partial x'_i} = p_i, \qquad \frac{\partial T}{\partial y'_i} = q_i, \qquad \frac{\partial T}{\partial z'_i} = r_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu),$$

nous en tirons

$$\left.\begin{aligned} m_i x'_i &= p_i + \frac{m_i}{m_0}\sum_i p_i \\ m_i y'_i &= q_i + \frac{m_i}{m_0}\sum_i q_i \\ m_i z'_i &= r_i + \frac{m_i}{m_0}\sum_i r_i \end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, \nu);$$

$2T$ s'exprime alors en fonction des p_i, q_i, r_i et devient

$$2T = \sum_i \frac{1}{m'_i}(p_i^2+q_i^2+r_i^2) + \frac{1}{m_0}\sum_{ij}(p_i p_j + q_i q_j + r_i r_j)$$

en posant

$$\frac{1}{m'_i} = \frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_0}.$$

On sait que les équations du mouvement ont alors la forme canonique

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx_i}{dt} &= \frac{\partial K}{\partial p_i}, & \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial K}{\partial x_i}\\
\frac{dy_i}{dt} &= \frac{\partial K}{\partial q_i}, & \frac{dq_i}{dt} &= -\frac{\partial K}{\partial y_i}\\
\frac{dz_i}{dt} &= \frac{\partial K}{\partial r_i}, & \frac{dr_i}{dt} &= -\frac{\partial K}{\partial z_i}
\end{aligned}\right\}\quad (i=1, 2, \ldots, \nu)$$

où

$$K = T - U.$$

Cela étant, posons

$$\left.\begin{aligned}
H &= \sum_i \frac{1}{2m'_i}(p_i^2+q_i^2+r_i^2) - \sum_i \frac{m_0 m_i}{r_i}\\
R &= \sum_{ij} \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}} - \frac{1}{m_0}\sum_{ij}(p_i p_j + q_i q_j + r_i r_j)
\end{aligned}\right\}\quad (i, j=1, 2, \ldots, \nu);$$

les équations du mouvement deviennent

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial R}{\partial p_i}, & \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_i} + \frac{\partial R}{\partial x_i}\\
\frac{dy_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial q_i} - \frac{\partial R}{\partial q_i}, & \frac{dq_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial y_i} + \frac{\partial R}{\partial y_i}\\
\frac{dz_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial r_i} - \frac{\partial R}{\partial r_i}, & \frac{dr_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial z_i} + \frac{\partial R}{\partial z_i}
\end{aligned}\right\}\quad (i=1, 2, \ldots, \nu)$$

ou

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx_i}{dt} &= \frac{p_i}{m'_i} - \frac{\partial R}{\partial p_i}, & \frac{dp_i}{dt} + \frac{m_0 m_i x_i}{r_i^{\frac{3}{2}}} &= \frac{\partial R}{\partial x_i}\\
\frac{dy_i}{dt} &= \frac{q_i}{m'_i} - \frac{\partial R}{\partial q_i}, & \frac{dq_i}{dt} + \frac{m_0 m_i y_i}{r_i^{\frac{3}{2}}} &= \frac{\partial R}{\partial y_i}\\
\frac{dz_i}{dt} &= \frac{r_i}{m'_i} - \frac{\partial R}{\partial r_i}, & \frac{dr_i}{dt} + \frac{m_0 m_i z_i}{r_i^{\frac{3}{2}}} &= \frac{\partial R}{\partial z_i}
\end{aligned}\right\}\quad (i=1, 2, \ldots, \nu).$$

Si l'on fait $R=0$ dans ces équations, on obtient les équations différentielles de l'orbite elliptique intermédiaire et en posant

$$\left.\begin{aligned}
\xi_i &= \frac{p_i}{m'_i}\\
\eta_i &= \frac{q_i}{m'_i}\\
\zeta_i &= \frac{r_i}{m'_i}
\end{aligned}\right\}\quad (i=1, 2, \ldots, \nu),$$

on obtient, pour les équations de cette orbite,

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx_i}{dt} &= \frac{1}{m'_i}\frac{\partial H}{\partial \xi_i}, & \frac{d\xi_i}{dt} &= -\frac{1}{m'_i}\frac{\partial H}{\partial x_i}\\
\frac{dy_i}{dt} &= \frac{1}{m'_i}\frac{\partial H}{\partial \eta_i}, & \frac{d\eta_i}{dt} &= -\frac{1}{m'_i}\frac{\partial H}{\partial y_i}\\
\frac{dz_i}{dt} &= \frac{1}{m'_i}\frac{\partial H}{\partial \zeta_i}, & \frac{d\zeta_i}{dt} &= -\frac{1}{m'_i}\frac{\partial H}{\partial z_i}
\end{aligned}\right\}\quad (i=1, 2, \ldots, \nu)$$

et pour les équations du mouvement troublé

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dx_i}{dt} &= \frac{1}{m'_i}\frac{\partial(H-R)}{\partial \xi_i}, & \frac{d\xi_i}{dt} &= -\frac{1}{m'_i}\frac{\partial(H-R)}{\partial x_i}\\
\frac{dy_i}{dt} &= \frac{1}{m'_i}\frac{\partial(H-R)}{\partial \eta_i}, & \frac{d\eta_i}{dt} &= -\frac{1}{m'_i}\frac{\partial(H-R)}{\partial y_i}\\
\frac{dz_i}{dt} &= \frac{1}{m'_i}\frac{\partial(R-R)}{\partial \zeta_i}, & \frac{d\zeta_i}{dt} &= -\frac{1}{m'_i}\frac{\partial(H-R)}{\partial z_i}
\end{aligned}\right\}\quad (i=1, 2, \ldots, \nu).$$

Il en résulte qu'en désignant par

$$\left.\begin{matrix}
\alpha_1^i, & \alpha_2^i, & \alpha_3^i\\
\beta_1^i, & \beta_2^i, & \beta_3^i
\end{matrix}\right\}\quad (i=1, 2, \ldots, \nu)$$

un système d'éléments canoniques conjugués, on aura pour les équations aux variations de ces éléments

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\alpha_1^i}{dt} &= \frac{1}{m'_i}\frac{\partial R}{\partial \beta_1^i}, & \frac{d\beta_1^i}{dt} &= -\frac{1}{m'_i}\frac{\partial R}{\partial \alpha_1^i}\\
\frac{d\alpha_2^i}{dt} &= \frac{1}{m'_i}\frac{\partial R}{\partial \beta_2^i}, & \frac{d\beta_2^i}{dt} &= -\frac{1}{m'_i}\frac{\partial R}{\partial \alpha_2^i}\\
\frac{d\alpha_3^i}{dt} &= \frac{1}{m'_i}\frac{\partial R}{\partial \beta_3^i}, & \frac{d\beta_3^i}{dt} &= -\frac{1}{m'_i}\frac{\partial R}{\partial \alpha_3^i}
\end{aligned}\right\}\quad (i=1, 2, \ldots, \nu).$$

Il est à remarquer que l'orbite intermédiaire n'est pas tangente à l'orbite réelle, comme dans la méthode usuelle; mais que, par contre, il n'existe qu'une seule fonction perturbatrice R que l'on doit multiplier par la constante $\frac{1}{m'_i}$ pour écrire les équations du mouvement de la planète de masse m_i. C'est donc pour le grand axe de cette orbite elliptique que nous démontrerons le théorème de Poisson.

3. Désignons par

a le demi grand axe;
e l'excentricité;

Ω la longitude du nœud ascendant;
φ l'inclinaison;
ϖ la longitude du périhélie;
τ l'époque du passage au périhélie;
$T = n(t - \tau)$ l'anomalie moyenne à l'époque t;
$k = na^{\frac{3}{2}} = \sqrt{f\mu}$ la constante de Gauss;
$p = a(1 - e^2)$ le paramètre;
n le moyen mouvement diurne;
$\mu = m + m_0$ la somme des masses de la planète et du Soleil;
E la base des logarithmes népériens;

pour une quelconque des ν planètes en présence. Introduisons également pour chaque planète m_i les éléments canoniques suivants :

$$\alpha_1^i = -\frac{a_i^2 n_i}{2} = -\frac{k^2}{2a_i}, \qquad \beta_1^i = -\tau_i,$$
$$\alpha_2^i = k\sqrt{p_i}\cos\varphi_i, \qquad \beta_2^i = \Omega_i,$$
$$\alpha_3^i = k\sqrt{p_i}, \qquad \beta_3^i = \varpi_i - \Omega_i.$$

Nous supposerons la fonction R développée sous la forme

$$\mathrm{R} = \sum (m_i, m_j)_{q,q'} \mathrm{E}^{(qT_i + q'T_j)\iota},$$

ι désignant $\sqrt{-1}$;
le Σ indiquant des sommations à faire pour toutes les valeurs positives, négatives ou nulles des entiers q, q' pour chaque planète.

Nous désignerons, de plus, par $\mathcal{R}$ ce que devient R quand on y fait $t = \theta$, et nous poserons

$$\Theta_i = n_i(\theta - \tau_i).$$

Nous supposerons enfin qu'il n'y a entre les moyens mouvements aucune relation de commensurabilité.

4. Dans la Note que nous avons citée au début, Cauchy montre que la variation totale d'une fonction s des éléments canoniques des planètes est donnée par la formule

$$\Delta s = \sigma' + \sigma'' + \sigma''' + \ldots$$

dans laquelle on a posé

$$\sigma' = -\int_t^\theta \square\sigma\, d\theta, \qquad \sigma'' = -\int_t^\theta \square\sigma'\, d\theta, \qquad \sigma''' = -\int_t^\theta \square\sigma''\, d\theta$$

et

$$\square\sigma = [\mathcal{R}_1, \sigma]_1 + [\mathcal{R}_2, \sigma]_2 + [\mathcal{R}_3, \sigma]_3 + \ldots + [\mathcal{R}_\nu, \sigma]_\nu \qquad \text{où} \qquad \mathcal{R}_i = \frac{1}{m'_i}\mathcal{R},$$

σ désignant la valeur de s pour $t = \theta$ et le crochet $[P, Q]_i$ ayant la signification habituelle

$$[P, Q]_i = \frac{\partial P}{\partial\alpha_1^i}\frac{\partial Q}{\partial\beta_1^i} - \frac{\partial P}{\partial\beta_1^i}\frac{\partial Q}{\partial\alpha_1^i} + \frac{\partial P}{\partial\alpha_2^i}\frac{\partial Q}{\partial\beta_2^i} - \frac{\partial P}{\partial\beta_2^i}\frac{\partial Q}{\partial\alpha_2^i} + \frac{\partial P}{\partial\alpha_3^i}\frac{\partial Q}{\partial\beta_3^i} - \frac{\partial P}{\partial\beta_3^i}\frac{\partial Q}{\partial\alpha_3^i}.$$

σ', σ'', σ''' sont alors les variations d'ordre 1, 2, 3, ... par rapport aux masses.

Rappelons que $[P, Q]_i$ obéit aux lois de calcul suivantes :

$$[P, Q] = -[Q, P], \qquad [P, -Q] = -[P, Q],$$
$$[P + R, Q + S] = [P, Q] + [P, S] + [R, Q] + [R, S],$$
$$[PR, QS] = [P, Q]RS + [P, S]RQ + [R, Q]PS + [R, S]PQ.$$

5. Reprenons rapidement avec ces notations la variation du premier ordre de l'élément α_1^1.

On a, dans ce cas,

$$[\mathcal{R}_1, \alpha_1^1]_1 = -\frac{1}{m'_1}\frac{\partial\mathcal{R}_1}{\partial\beta_1^1}, \qquad [\mathcal{R}_i, \alpha_1^1]_i = 0 \qquad (i = 2, \ldots, \nu);$$

d'où

$$\square\sigma = -\frac{1}{m'_1}\frac{\partial\mathcal{R}_1}{\partial\beta_1^1} \qquad \text{et} \qquad \sigma' = \frac{1}{m'_1}\frac{\partial}{\partial\beta_1^1}\int_t^\theta \mathcal{R}_1\, d\theta.$$

Or, $\mathcal{R}_1$ considérée comme fonction de θ contient deux sortes de termes :

a. Des termes indépendants de θ, de forme $(m_i, m_j)_{0,0}$, caractérisés par la relation

$$q n_i + q' n_j = h = 0.$$

b. Des termes contenant θ, pour lesquels $h \neq 0$, qui peuvent s'écrire

$$(m_i, m_j)_{q,q'}\, \mathrm{E}^{-u}\, \mathrm{E}^{h\theta\iota},$$

en posant

$$u = \iota(q n_i \tau_i + q' n_j \tau_j).$$

Il en résulte que $\int_t^\theta \mathcal{R}_1\, d\theta$ contient aussi deux sortes de termes :

a. Des termes *séculaires* de type $(m_i, m_j)_{0,0}\,(\theta - t)$.

b. Des termes *périodiques* de type

$$\frac{(m_i, m_j)_{q,q'}}{\iota h}\mathrm{E}^{-u}(\mathrm{E}^{h\theta\iota} - \mathrm{E}^{ht\iota}) \qquad h \neq 0.$$

On doit observer que le coefficient $(m_i, m_j)_{q,q'}$ ne contient pas les éléments β_1^i, β_1^j qui n'entrent que dans u par τ_i, τ_j.

En posant, pour abréger,

$$A_{ij} = \frac{(m_i, m_j)_{q,q'}}{2h} E^{-u}, \qquad P_{ij} = E^{h\theta\iota} - E^{ht\iota},$$

les termes périodiques prennent la forme

$$A_{ij} P_{ij}.$$

On en conclut immédiatement que $\Delta\alpha_1^1$ ne contient aucun terme séculaire, puisque $(m_i, m_j)_{0,0}$ est indépendant de β_1^1.

$\sigma' = \Delta\alpha_1^1$ est donc une somme de termes périodiques de la forme

$$\frac{\partial A_{ij}}{\partial \beta_1^1} P_{ij} = q\iota n_i A_{ij} P_{ij}.$$

6. Arrivons maintenant au calcul de $\sigma'' = \int_t^0 \Box\sigma'\, d\theta$.

On a

$$\Box\sigma' = [\mathcal{R}_1, \sigma']_1 + [\mathcal{R}_2, \sigma']_2 + [\mathcal{R}_3, \sigma']_3 + \ldots + [\mathcal{R}_\nu, \sigma']_\nu$$

ou bien

$$\Box\sigma' = \frac{1}{m'_1}[\mathcal{R}, \sigma']_1 + \frac{1}{m'_2}[\mathcal{R}, \sigma']_2 + \ldots + \frac{1}{m'_\nu}[\mathcal{R}, \sigma']_\nu;$$

d'où

$$\sigma'' = -\sum_1^\nu{}_k \frac{1}{m'_k}\int_t^\theta [\mathcal{R}, \sigma']_k\, d\theta = \sum_1^\nu{}_k \frac{1}{m'_k}\int_t^\theta [\sigma', \mathcal{R}]_k\, d\theta.$$

Il suffit, pour démontrer le théorème de Poisson, de faire voir que $\int_t^0 [\sigma', \mathcal{R}]_k\, d\theta$ ne contient aucun terme séculaire pour un indice k déterminé i.

$[\sigma', \mathcal{R}]_i$ est une somme de crochets analogues obtenus en associant de toutes les manières possibles un terme de σ' avec un terme de $\mathcal{R}$.

σ' ne contient que des termes périodiques de la forme

$$q\iota n_i A_{ij} P_{ij};$$

d'autre part, $\mathcal{R}$ peut s'écrire

$$\mathcal{R} = \sum B_{il} Q_{il},$$

en posant

$$B_{il} = (m_i, m_l)_{s,s'}, \qquad E^{-\nu} Q_{il} = E^{k\theta\iota},$$

$$\nu = \iota(s n_i \tau_i + s' n_l \tau_l), \qquad k = s n_i + s' n_l,$$

en appelant, pour éviter toute confusion, s et s' les entiers que contient $\mathfrak{R}$.

Nous aurons donc à intégrer des crochets de deux types, à savoir :

$$(a) \qquad [q\iota n_i A_{ij} P_{ij}, B_{il}]_i \qquad h \neq 0, \qquad k = 0,$$

$$(b) \qquad [q\iota n_i A_{ij} P_{ij}, B_{il} Q_{il}]_i \qquad h \neq 0, \qquad k \neq 0.$$

Ceux de type (a) peuvent s'écrire

$$[q\iota n_i A_{ij}, B_{il}]_i P_{ij} + [P_{ij}, B_{il}]_i q\iota n_i A_{ij},$$

la première partie donne le terme

$$[q\iota n_i A_{ij}, B_{il}]_i \int_t^\theta P_{ij}\, d\theta$$

qui est périodique, l'intégrale l'étant; la seconde partie donne, sans peine,

$$q\iota n_i [P_{ij}, B_{il}]_i = q\iota n_i \frac{\partial P_{ij}}{\partial \alpha_1^i} \frac{\partial B_{il}}{\partial \beta_1^i} = -\iota q^2 s n_i^2 \frac{dn_i}{d\alpha_1^i} B_{il}(\theta E^{h\theta\iota} - t E^{ht\iota})$$

dont l'intégrale ne contient que des termes périodiques et des termes périodiques multipliés par le temps, mais aucun terme séculaire, comme on le voit en remarquant que l'on a

$$\int_t^\theta \theta E^{h\theta\iota}\, d\theta = \frac{1}{\iota h}(\theta E^{h\theta\iota} - t E^{ht\iota}) + \frac{1}{h^2}(E^{h\theta\iota} - E^{ht\iota}) \qquad h \neq 0.$$

Les crochets du premier type ne peuvent donc amener dans $\int_t^\theta [\sigma', \mathfrak{R}]_i\, d\theta$ aucun terme séculaire.

Restent les crochets du second type qui peuvent se développer sous la forme

$$\begin{aligned} &[q\iota n_i A_{ij} P_{ij}, B_{il} Q_{il}]_i \\ &\quad = [q\iota n_i A_{ij}, B_{il}]_i P_{ij} Q_{il} + [q\iota n_i A_{ij}, Q_{il}]_i P_{ij} B_{il} \\ &\qquad + [P_{ij}, B_{il}]_i q\iota n_i A_{ij} Q_{il} + [P_{ij}, Q_{il}]_i q\iota n_i A_{ij} B_{il}. \end{aligned}$$

Mais on a immédiatement

$$[P_{ij} Q_{il}]_i = 0,$$

$$[q\iota n_i A_{ij}, Q_{il}]_i = -q\iota n_i \frac{\partial A_{ij}}{\partial \beta_1^i} \frac{\partial Q_{il}}{\partial \alpha_1^i} = \iota q^2 s n_i^2 \frac{dn_i}{d\alpha_1^i} A_{ij} Q_{il} \theta,$$

$$[P_{ij}, B_{il}]_i = \frac{\partial P_{ij}}{\partial \alpha_1^i} \frac{\partial B_{il}}{\partial \beta_1^i} = -qsn_i \frac{dn_i}{d\alpha_1^i} B_{il}(\theta E^{h\theta\iota} - tE^{ht\iota}),$$

d'où l'on conclut

$$[q\iota n_i A_{ij} P_{ij}, B_{il} Q_{il}]_i = [q\iota n_i A_{ij}, B_{il}]_i P_{ij} Q_{il} - \iota q^2 s n_i^2 A_{ij} B_{il} \frac{dn_i}{d\alpha_1^i} E^{ht\iota}(\theta - t) Q_{il},$$

et, dans $\int_t^\theta [\sigma', \mathfrak{R}]_i \, d\theta$, une série de termes de la forme

$$[q\iota n_i A_{ij}, B_{il}]_i K - \iota q^2 s n_i^2 A_{ij} B_{il} \frac{dn_i}{d\alpha_1^i} E^{ht\iota} K',$$

les intégrales K et K' ayant les valeurs

$$K = \frac{1}{\iota(h+k)} [E^{(h+k)\theta\iota} - E^{(h+k)t\iota}] - \frac{E^{ht\iota}}{\iota k} [E^{k\theta\iota} - E^{kt\iota}],$$

$$K' = \frac{E^{k\theta\iota}}{\iota k} (\theta - t) + \frac{1}{k^2} [E^{k\theta\iota} - E^{kt\iota}],$$

avec les conditions

$$h \neq 0, \qquad k \neq 0.$$

Ces conditions et la forme de ces intégrales nous montrent que les termes qui en proviennent ne pourront être séculaires que si l'on a

$$h + k = 0,$$

auquel cas le terme correspondant deviendra

$$[q\iota n_i A_{ij}, B_{il}]_i (\theta - t).$$

Or, la condition $h + k = 0$ développée donne

$$(q+s) n_i + q' n_j + s' n_l = 0,$$

qui implique, d'après nos restrictions,

$$q + s = 0, \qquad q' = 0, \qquad s' = 0, \qquad \text{si} \quad j \neq l,$$

$$q + s = 0, \qquad q' + s' = 0, \qquad \text{si} \quad j = l.$$

Dans le premier cas, $j \neq l$, q, s ne peuvent être nuls, mais à un terme

$$[q \iota n_i \mathrm{A}_{ij}, \mathrm{B}_{il}]_i = [(m_i, m_j)_{q,0}\mathrm{E}^{-u}, (m_i, m_l)_{-q,0}\mathrm{E}^{u}]_i,$$

correspondra le terme

$$[-q \iota n_i \mathrm{A}_{il}, \mathrm{B}_{ij}]_i = [(m_i, m_l)_{-q,0}\mathrm{E}^{u}, (m_i, m_j)_{q,0}\mathrm{E}^{-u}]_i,$$

égal et de signe contraire, en vertu des propriétés des crochets. Donc, dans ce cas, les termes séculaires s'annuleront deux à deux.

Dans le second cas, si q ou q' est nul, s ou s' sera nul. Si q est nul, le terme séculaire est aussi manifestement nul. Si q est le différent de zéro, à un terme

$$q\left[\frac{n_i}{h}(m_i, m_j)_{q,q'}\mathrm{E}^{-u}, (m_i, m_j)_{-q,-q'}\mathrm{E}^{+u}\right]_i$$

correspondra le terme

$$q\left[\frac{n_i}{h}(m_i, m_j)_{-q,-q'}\mathrm{E}^{+u}, (m_i, m_j)_{q,q'}\mathrm{E}^{-u}\right]_i,$$

ou bien, en posant

$$(m_i m_j)_{q,q'}\mathrm{E}^{-u} = \mathrm{M}, \qquad (m_i m_j)_{-q,-q'}\mathrm{E}^{+u} = \mathrm{M}',$$

au terme

$$q\left[\frac{n_i}{h}\mathrm{M}, \mathrm{M}'\right]_i$$

correspondra le terme

$$q\left[\frac{n_i}{h}\mathrm{M}', \mathrm{M}\right]_i.$$

La somme de ces deux termes est nulle, car on a

$$\left[\frac{n_i}{h}\mathrm{M}, \mathrm{M}'\right]_i = -\mathrm{M}\mathrm{M}' q \iota n_i \frac{\partial}{\partial \alpha_1^i}\left(\frac{n_i}{h}\right) + [\mathrm{M}, \mathrm{M}']_i \frac{n_i}{h},$$

$$\left[\frac{n_i}{h}\mathrm{M}', \mathrm{M}\right]_i = +\mathrm{M}\mathrm{M}' q \iota n_i \frac{\partial}{\partial \alpha_1^i}\left(\frac{n_i}{h}\right) + [\mathrm{M}', \mathrm{M}]_i \frac{n_i}{h}.$$

Donc les seuls termes séculaires qui pourraient, *a priori*, exister, s'annulent deux à deux.

Donc il n'y a pas dans σ'' de termes séculaires. C'est le théorème de Poisson.