Annales de la faculté des sciences de Toulouse

É. Goursat

Sur un problème relatif à la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 2e série, tome 5, nº 4 (1903), p. 405-436
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1903_2_5_4_405_0>

SUR UN PROBLÈME

RELATIF A LA

THÉORIE DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

DU SECOND ORDRE,

PAR M. É. GOURSAT.

Étant donnée une équation aux dérivées partielles du second ordre, à deux variables indépendantes,

$$\text{(E)} \qquad F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0,$$

le problème classique, appelé généralement *problème de Cauchy,* consiste à déterminer une intégrale $z = \Phi(x, y)$, de telle façon que la surface S, représentée par cette équation, passe par une courbe donnée Γ et admette en chaque point de cette courbe un plan tangent déterminé. L'étude de ce problème conduisait tout naturellement à se poser la question plus générale suivante : *Déterminer une surface intégrale de l'équation* (E), *passant par deux courbes données.* Les premières recherches dans cette voie paraissent dues à M. Darboux, auquel on doit la proposition suivante [1] :

Étant donnée l'équation linéaire

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0,$$

dont les coefficients a, b, c sont développables en séries ordonnées suivant les puissances entières et positives de $x - x_0$, $y - y_0$, il existe une solution de l'équation aux dérivées partielles se réduisant, pour $y = y_0$, à une fonction déterminée $\varphi(x)$ de x, développable suivant les puissances de $x - x_0$, et

[1] *Leçons sur la Théorie des surfaces,* t. II, 1889, p. 92.

pour $x = x_0$, à une fonction $\psi(y)$ de y, développable suivant les puissances de $y - y_0$.

En restant dans le domaine des fonctions analytiques et en supposant réalisées les conditions habituelles relatives à la convergence des séries entières employées, je démontrais quelques années plus tard que par deux courbes Γ, Γ_1 ayant un point commun O, sans être tangentes en ce point, on pouvait toujours faire passer une surface intégrale et une seule, *pourvu que ces courbes soient tangentes respectivement aux deux directions caractéristiques de l'élément qu'elles déterminent* (1).

Ce théorème avait de nombreuses et importantes conséquences pour la théorie des caractéristiques. Peu après, une modification bien simple de la démonstration primitive me permettait d'étendre la conclusion au cas où *une seule des courbes Γ, Γ_1 est tangente à une direction caractéristique* (2).

L'extension de la méthode et des résultats à des cas plus généraux, en conservant l'hypothèse fondamentale ou une hypothèse analogue, ne présentait pas des difficultés bien sérieuses. Parmi les différentes applications ou généralisations, je citerai celles que l'on doit à MM. Beudon (3), Le Roux (4), Hadamard (5), Riquier (6).

Je dois rappeler aussi que M. Picard a traité les mêmes problèmes pour une équation de la forme $s = f(x, y, z, p, q)$ au moyen d'approximations successives, et en faisant le minimum d'hypothèses sur la fonction f et sur les conditions initiales (7).

Il restait donc à traiter le cas général où aucune des deux courbes données Γ, Γ_1 n'est tangente à une direction caractéristique. La solution complète paraît offrir des difficultés beaucoup plus grandes que les cas particuliers déjà connus. J'ai montré le rôle important que joue dans cette question le rapport anharmonique des tangentes aux deux courbes données Γ_1 Γ_1, et des tangentes caractéristiques

---

(1) *Sur la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre* (*Comptes rendus,* t. CXX, 1er avril 1895). — *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre,* t. I, Chap. IV.

(2) *Sur la détermination des intégrales d'une équation aux dérivées partielles, par certaines conditions initiales* (*Comptes rendus,* t. CXXV; 2 novembre 1897). — *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre,* t. II, Chap. X.

(3) *Bulletin de la Société Mathématique,* t. XXV, p. 116.

(4) *Journal de Mathématiques,* t. VI, 5e série, p. 397.

(5) *Bulletin de la Société Mathématique,* t. XXIX, p. 60. — *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'Hydrodynamique,* 1903 (*passim*).

(6) *Acta Mathematica,* t. XXIII; 1900.

(7) Note du Tome IV des *Leçons sur la Théorie des surfaces* de M. Darboux, 1896.

issues du point O dans l'élément déterminé par les tangentes aux deux courbes [1]. Le présent travail est consacré à l'étude du problème pour une équation de la forme

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

les coefficients A, B, C ne dépendant que des variables x et y.

En me bornant d'abord aux solutions analytiques, et *en supposant les courbes données réelles,* je montre que les résultats obtenus sont absolument différents suivant que l'équation proposée appartient au type hyperbolique ou au type elliptique. Tandis que toute équation du type hyperbolique admet une intégrale passant par deux courbes réelles données ayant un point commun O sans être tangentes en ce point (sauf dans un cas exceptionnel), la méthode employée est impuissante à établir le même théorème pour une équation du type elliptique dans le cas le plus général.

Dans un second Mémoire, j'étudierai le même problème pour une équation du type hyperbolique $s = f(x, y, z, p, q)$, en faisant le minimum d'hypothèses sur les conditions aux limites. Les principaux résultats de ce travail et de celui qui le suivra ont été résumés dans une Note présentée à l'Académie des Sciences (*Comptes rendus*, 8 juin 1903).

1. Étant donnée une variable complexe x, nous appellerons domaine $\mathfrak{D}(R)$ l'ensemble des valeurs de x dont le module est inférieur à R. Une fonction $f(x)$, holomorphe dans ce domaine, est développable en une série entière ordonnée suivant les puissances positives de x et convergente pour tous les points de ce domaine. Si le module de $f(x)$ reste inférieur à un nombre fixe μ dans $\mathfrak{D}(R)$, le module du coefficient c_n de x^n dans cette série satisfait à l'inégalité

$$|c_n| \leq \frac{\mu}{r^n},$$

r étant un nombre positif quelconque, *inférieur* à R. On en déduit

$$r \leq \sqrt[n]{\frac{\mu}{|c_n|}},$$

et cette inégalité doit être vérifiée par tous les nombres inférieurs à R, ce qui exige que l'on ait aussi

$$R \leq \sqrt[n]{\frac{\mu}{|c_n|}},$$

---

(1) *Sur un problème relatif à la détermination des intégrales d'une équation aux dérivées partielles* (*Comptes rendus,* t. CXXI, 11 novembre 1895, p. 671).

ou

$$|c_n| \leqq \frac{\mu}{R^n}.$$

La fonction $\dfrac{\mu}{1-\dfrac{x}{R}}$ est donc une fonction majorante pour $f(x)$, et cette conclusion n'exige pas que la fonction $f(x)$ reste continue sur le cercle C de rayon R qui limite le domaine $\mathfrak{D}(R)$.

Soient de même x et y deux variables complexes indépendantes. Nous appellerons domaine $\mathfrak{D}(R, R')$ l'ensemble des systèmes de valeurs de x et de y qui satisfont aux inégalités

$$|x| < R, \qquad |y| < R'.$$

Si une fonction $f(x, y)$ est holomorphe dans ce domaine, et si $|f(x, y)|$ reste inférieur dans $\mathfrak{D}(R, R')$ à un nombre fixe μ, on voit comme tout à l'heure qu'elle admet comme fonction majorante la fonction

$$\frac{\mu}{\left(1-\dfrac{x}{R}\right)\left(1-\dfrac{y}{R'}\right)}.$$

En effet, soit c_{mn} le coefficient de $x^m y^n$ dans le développement de $f(x, y)$. On a toujours, en désignant par r et r' deux nombres positifs, inférieurs à R et à R' respectivement,

$$|c_{mn}| \leqq \frac{\mu}{r^m r'^n},$$

ce qui peut encore s'écrire, en posant $r = R - \varepsilon$, $r' = R' - \varepsilon'$,

$$(R-\varepsilon)^m (R'-\varepsilon')^n \leqq \frac{\mu}{|c_{mn}|}.$$

Cette inégalité ne peut avoir lieu, aussi petits que soient les nombres positifs ε, ε', que si l'on a aussi

$$R^m R'^n \leqq \frac{\mu}{|c_{mn}|}$$

ou

$$|c_{mn}| \leqq \frac{\mu}{R^m R'^n};$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

2. Soit $\pi(x)$ une fonction de la variable complexe x, holomorphe dans un cercle C de rayon R décrit de l'origine pour centre. Proposons-nous de *déter-*

miner une autre fonction $\varphi(x)$, *holomorphe dans le voisinage de l'origine, et satisfaisant à la relation*

$$\varphi(\alpha x) - \varphi(x) = \pi(x), \tag{1}$$

où α *est une constante donnée, dont le module est différent de l'unité.*

Il est permis de supposer $|\alpha| > 1$, car si l'on change x en $\frac{x}{\alpha}$ dans la relation précédente elle devient

$$\varphi\left(\frac{x}{\alpha}\right) - \varphi(x) = -\pi\left(\frac{x}{\alpha}\right); \tag{2}$$

c'est une relation de même forme que la première, et qui s'en déduit en remplaçant α par $\frac{1}{\alpha}$, et $\pi(x)$ par $-\pi\left(\frac{x}{\alpha}\right)$. Or, si l'on a $|\alpha| < 1$, il est clair qu'inversement $\left|\frac{1}{\alpha}\right|$ est > 1.

Cela posé, soient

$$\pi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots, \tag{3}$$

$$\varphi(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots \tag{4}$$

les développements en séries entières de la fonction donnée $\pi(x)$ et de la fonction inconnue $\varphi(x)$.

En remplaçant $\varphi(x)$, $\varphi(\alpha x)$ et $\pi(x)$ par leurs développements dans la relation (1), et en identifiant les deux membres, on obtient une infinité de conditions que l'on peut écrire

$$c_n(\alpha^n - 1) = a_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, \infty). \tag{5}$$

La première de ces conditions, qui correspond à $n = 0$, se réduit à $a_0 = 0$. Le terme indépendant de x dans $\pi(x)$ doit donc être nul pour que le problème soit possible, ce qui était évident *a priori*, et le coefficient c_0 de $\varphi(x)$ reste arbitraire. Si $n > 1$, le coefficient c_n est déterminé et a pour expression

$$c_n = \frac{a^n}{\alpha^n - 1}. \tag{6}$$

La fonction cherchée $\varphi(x)$ est donc déterminée à une constante près. Pour fixer les idées, nous supposerons $\varphi(0) = 0$; nous avons alors

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n x^n}{\alpha^n - 1}. \tag{7}$$

La série ainsi obtenue est convergente dans le cercle de rayon $R|\alpha|$ ayant pour centre l'origine.

En effet, soit r un nombre positif inférieur à R, et soit M un nombre positif supérieur à tous les produits $|a_n|r^n$. La série (7) admet pour fonction majorante la fonction

$$\Phi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{M x^n}{r^n(|\alpha|^n - 1)}, \tag{8}$$

car on a toujours

$$|\alpha^n - 1| \geqq |\alpha|^n - 1.$$

Cette série (8) est convergente pourvu que l'on ait $|x| < r|\alpha|$, car si l'on pose $x = r|\alpha|z$, la nouvelle série

$$\sum \frac{M|\alpha|^n}{|\alpha|^n - 1} z^n$$

admet pour cercle de convergence le cercle de rayon *un* ayant pour centre l'origine, le rapport $\frac{|\alpha|^n}{|\alpha|^n - 1}$ ayant pour limite l'unité lorsque n croît indéfiniment. Le nombre r pouvant être pris aussi voisin de R qu'on le voudra, il s'ensuit que la série (7) est convergente dans le cercle C' de rayon $R|\alpha|$ décrit de l'origine pour centre. Elle ne peut être convergente dans un cercle de rayon supérieur à $R|\alpha|$; autrement $\varphi(\alpha x) - \varphi(x)$, et par suite $\pi(x)$, serait une fonction holomorphe dans un cercle de rayon plus grand que R, contrairement à l'hypothèse. La relation (1) est donc vérifiée par la fonction obtenue $\varphi(x)$ pour toutes les valeurs de x de module inférieur à R.

En résumé, *pour que le problème proposé admette une solution, il faut et il suffit que l'on ait $\pi(0) = 0$. Toutes les fonctions répondant à la question s'obtiennent en ajoutant une constante arbitraire à la fonction $\varphi(x)$ définie par la série* (7).

3. Les calculs précédents ne s'appliquent plus lorsque l'on a $|\alpha| = 1$. Nous avons encore deux cas à distinguer suivant que α est racine de l'unité ou n'est pas racine de l'unité. Supposons α racine de l'unité et soit m le plus petit nombre entier positif tel que $\alpha^m = 1$. Les relations (5) font connaître c_n lorsque n n'est pas multiple de m, mais si $n = pm$, le coefficient de c_n est nul et la relation (5) se réduit à $a_n = 0$. Le problème n'est donc possible que si tous les coefficients a_{pm} de $\pi(x)$ sont nuls. Lorsqu'il en est ainsi, la série $\varphi(x)$ obtenue en supposant nuls tous les coefficients c_{pm} est encore convergente dans le cercle C de rayon R. Il suffit de reprendre le raisonnement qui précède en observant que $\frac{1}{\alpha^n - 1}$ ne peut

prendre que $m-1$ valeurs différentes lorsque n n'est pas un multiple de m. En ajoutant à cette fonction $\varphi(x)$ une série entière en x^m, soit $\psi(x^m)$, convergente dans le voisinage de l'origine, on obtient encore une fonction vérifiant la relation (1). Le problème admet donc une infinité de solutions lorsque tous les coefficients de $\pi(x)$ dont l'indice est un multiple de m, y compris a_0, sont nuls.

Par exemple, si $\alpha=-1$, l'équation

$$\varphi(-x)-\varphi(x)=\pi(x)$$

n'admet de solutions que si $\pi(x)$ est une fonction impaire et, dans ce cas, elle en admet une infinité.

Lorsque α n'est pas racine de l'unité, $|\alpha|$ étant égal à un, les équations (5) déterminent encore les coefficients c_n, si l'on a $a_0=0$. Mais la méthode précédente ne suffit pas pour décider si la série obtenue est convergente, car la limite inférieure de $|\alpha^n-1|$ est égale à zéro.

Soit $\alpha=e^{\theta i}$, le rapport $\frac{\theta}{\pi}$ étant incommensurable. La relation (5) donne

$$c_n=\frac{a_n}{e^{n\theta i}-1}=\frac{a_n}{2i\sin\frac{n\theta}{2}\left\{\cos\frac{n\theta}{2}+i\sin\frac{n\theta}{2}\right\}}.$$

Pour savoir si la série $\sum c_n x^n$ a un rayon de convergence différent de zéro, il suffit d'examiner si *la plus grande des limites* de $\sqrt[n]{|c_n|}$, ou de

$$\frac{\sqrt[n]{|a_n|}}{\sqrt[n]{\left|\sin\frac{n\theta}{2}\right|}},$$

a une valeur finie. Nous supposerons que la plus grande des limites de $\sqrt[n]{|a_n|}$ est égale à L, et que la plus petite des limites de $\sqrt[n]{|a_n|}$ est un nombre *positif* l, de sorte que, à partir d'une valeur assez grande de n, $\sqrt[n]{|a_n|}$ restera compris entre deux nombres positifs m et M. C'est un cas qui se présente fréquemment dans la pratique.

Cela posé, soit μ la plus petite des limites de $\sqrt[n]{\left|\sin\frac{n\theta}{2}\right|}$. Si $\mu=0$, la série $\sum c_n x^n$ est toujours divergente, sauf pour $x=0$. En effet, ε étant un nombre positif arbitraire, on a, pour une infinité de valeurs de n,

$$\sqrt[n]{\left|\sin\frac{n\theta}{2}\right|}<\varepsilon \qquad \text{ou} \qquad \left|\sin\frac{n\theta}{2}\right|<\varepsilon^n.$$

D'autre part, on a, pour ces valeurs de n,

$$\sqrt[n]{|a_n|} > m \qquad \text{ou} \qquad |a_n| > m^n.$$

Le module $|c_n|$ est donc supérieur à $\left(\frac{m}{\varepsilon}\right)^n$ pour une infinité de valeurs de n, aussi petit que soit ε. La série $\sum c_n x^n$ est donc divergente, sauf pour $x = 0$.

Au contraire, si μ est positif, à partir d'une valeur de n assez grande, on aura

$$\sqrt[n]{\left|\sin\frac{n\theta}{2}\right|} > \mu' > 0,$$

μ' étant un nombre positif inférieur à μ. Comme on a, d'autre part,

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \mathrm{M},$$

pourvu que n soit supérieur à un nombre N, on voit qu'à partir d'un certain rang l'on a toujours

$$\sqrt[n]{|c_n|} < \frac{\mathrm{M}}{\mu'} \qquad \text{et} \qquad |c_n| < \left(\frac{\mathrm{M}}{\mu'}\right)^n.$$

La série $\sum c_n x^n$ sera donc certainement convergente si l'on a

$$|x| < \frac{\mu'}{\mathrm{M}}.$$

Dans le cas général considéré, on voit que la conclusion dépend uniquement de la plus petite des limites de l'expression $\sqrt[n]{\left|\sin\frac{n\theta}{2}\right|}$, c'est-à-dire de l'angle θ, et non de la série donnée $\pi(x)$.

Les remarques suivantes, que je dois à M. Hadamard, permettent de trouver aisément des valeurs de ω pour lesquelles la plus petite des limites de $\sqrt[n]{|\sin n\omega|}$ est égale à zéro, et d'autres pour lesquelles il n'en est pas ainsi.

1° Supposons que l'incommensurable $\frac{\omega}{\pi}$ soit un nombre algébrique de degré d. D'après un théorème dû à Liouville, on a, n et k étant deux nombres entiers quelconques tels que la fraction $\frac{k}{n}$ soit comprise dans un intervalle (α, β) renfermant $\frac{\omega}{\pi}$, l'inégalité

$$\left|n\frac{\omega}{\pi} - k\right| > \frac{\mathrm{A}}{n^{d-1}}, \tag{e}$$

A étant un nombre fixe qui ne dépend que de l'intervalle (α, β). A tout nombre entier positif n faisons correspondre le nombre entier k compris entre $n\frac{\omega}{\pi}-\frac{1}{2}$ et $n\frac{\omega}{\pi}+\frac{1}{2}$, de façon que l'on ait

$$n\frac{\omega}{\pi}-\frac{1}{2}<k<n\frac{\omega}{\pi}+\frac{1}{2},$$

et par suite

$$\frac{\omega}{\pi}-\frac{1}{2n}<\frac{k}{n}<\frac{\omega}{\pi}+\frac{1}{2n}.$$

La fraction $\frac{k}{n}$ est donc comprise dans l'intervalle $\left(\frac{\omega}{\pi}-\frac{1}{2}, \frac{\omega}{\pi}+\frac{1}{2}\right)$, et le nombre A qui figure dans l'inégalité (e) est fixé par là même. D'après la façon dont on choisit le nombre k, on a

$$\frac{A}{n^{d-1}}<\left|n\frac{\omega}{\pi}-k\right|<\frac{1}{2}$$

ou

$$\frac{A\pi}{n^{d-1}}<|n\omega-k\pi|<\frac{\pi}{2};$$

on en déduit que l'on a aussi

$$|\sin n\omega|>\sin\left(\frac{A\pi}{n^{d-1}}\right).$$

Lorsque n augmente indéfiniment, $\frac{A\pi}{n^{d-1}}$ tend vers zéro; à partir d'une valeur de n assez grande, on aura donc, λ étant un nombre positif inférieur à l'unité,

$$|\sin n\omega|>\frac{\lambda A\pi}{n^{d-1}}$$

et, par suite,

$$\sqrt[n]{|\sin n\omega|}>\frac{\sqrt[n]{\lambda A\pi}}{n^{\frac{d-1}{n}}}.$$

Lorsque n croît indéfiniment, $n^{\frac{d-1}{n}}$ tend vers l'unité (car son logarithme tend vers zéro); comme $|\sin n\omega|$ est <1, on en conclut que $\sqrt[n]{|\sin n\omega|}$ a pour limite l'unité.

Lorsque $\frac{\omega}{\pi}$ est un nombre algébrique non rationnel, la série $\sum\frac{a_n}{\sin n\omega}x^n$ a donc le même rayon de convergence que la série $\sum a_n x^n$.

La même propriété a lieu pour une infinité de nombres transcendants. On sait, en effet, qu'il existe une infinité de nombres transcendants α tels que l'on ait

$$\left|\frac{p}{q} - \alpha\right| > \frac{1}{10\,000\,q^2},$$

quels que soient les nombres entiers p et q (1). Si le rapport $\frac{\omega}{\pi}$ est égal à un de ces nombres transcendants, les raisonnements qui précèdent s'appliquent sans modification, et l'expression $\sqrt[n]{|\sin n\omega|}$ a pour limite l'unité.

2° Pour que la plus petite des limites de $\sqrt[n]{|\sin n\omega|}$ soit zéro, il faut et il suffit que l'on ait, pour une infinité de valeurs de n,

$$(e') \qquad \left|n\frac{\omega}{\pi} - k\right| < \varepsilon^n,$$

k étant entier et ε désignant un nombre positif arbitraire. On déduit en effet de cette inégalité, en supposant $\varepsilon < \frac{1}{2}$,

$$|\sin n\omega| < \sin(\pi\varepsilon^n) < \pi\varepsilon^n$$

et par suite

$$\sqrt[n]{|\sin n\omega|} < \varepsilon\pi^{\frac{1}{n}}.$$

Supposons $\omega > 0$; si l'incommensurable $\frac{\omega}{\pi}$ est réduit en fraction continue, on a

$$\left|q_\lambda\frac{\omega}{\pi} - p_\lambda\right| < \frac{1}{q_{\lambda+1}},$$

$\frac{p_\lambda}{q_\lambda}$ et $\frac{p_{\lambda+1}}{q_{\lambda+1}}$ étant deux réduites consécutives. Pour que l'inégalité (e') ait lieu pour une infinité de valeurs de n, aussi petit que soit ε, il suffira que l'on ait, pour une infinité de valeurs de l'entier λ,

$$q_{\lambda+1} > A^{q_\lambda},$$

A étant une fonction de λ qui augmente indéfiniment avec λ. On peut évidemment satisfaire à cette condition d'une infinité de manières. Il y a donc une infinité de nombres transcendants β tels que, si l'on pose $\omega = \pi\beta$, la plus petite des limites de $\sqrt[n]{|\sin n\omega|}$ soit égale à zéro. On voit aisément qu'il existe une infinité de nombres transcendants de cette espèce dans tout intervalle.

Pour ces valeurs de ω, la série

$$\sum \frac{a_n}{\sin n\omega} x^n$$

---

(1) E. Borel, *Leçons sur la Théorie des fonctions*, p. 32.

sera divergente, sauf pour $x = 0$, si, à partir d'une valeur assez grande de n, $\sqrt[n]{|a_n|}$ reste supérieur à un nombre fixe $m > 0$.

4. Nous avons encore à traiter deux problèmes préliminaires analogues au premier.

Soit $F(x, y)$ *une fonction holomorphe des variables indépendantes* x *et* y *dans le domaine du point* $x = 0$, $y = 0$. *Déterminer une fonction holomorphe* $\varphi(x)$ *de la variable* x, *et une fonction holomorphe* $\psi(y)$ *de la variable* y, *de telle façon que la fonction*

$$z = F(x, y) + \varphi(x) + \psi(y)$$

se réduise identiquement à zéro quand on y remplace y *par* x *ou par* αx, α *étant une constante dont le module est différent de l'unité.*

Supposons, pour fixer les idées, $|\alpha| > 1$. Choisissons un nombre positif R assez petit pour que la fonction $F(x, y)$ soit holomorphe dans le domaine $\mathfrak{D}(R, |\alpha|R)$ ou, plus simplement, $\mathfrak{D}(R)$, défini par les inégalités

$$|x| < R, \qquad |y| < R|\alpha|,$$

et que $|F(x, y)|$, $\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right|$, $\left|\frac{\partial F}{\partial y}\right|$ restent inférieurs respectivement à trois nombres fixes μ, μ_1, μ_2, lorsque les variables x et y satisfont aux inégalités précédentes. Les deux fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(y)$

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n, \qquad \psi(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n y^n,$$

doivent satisfaire aux deux équations de condition

$$F(x, x) + \varphi(x) + \psi(x) = 0, \tag{9}$$

$$F(x, \alpha x) + \varphi(x) + \psi(\alpha x) = 0. \tag{10}$$

Soient

$$F(x, x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \qquad F(x, \alpha x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n; \tag{11}$$

lorsque l'on a $|x| < R$, $|\alpha x|$ est $< R|\alpha|$, et les deux fonctions $F(x, x)$, $F(x, \alpha x)$ de la seule variable x sont holomorphes dans le cercle C de rayon R décrit de l'origine comme centre. De plus, le module de chacune de ces fonctions reste inférieur à μ, et l'on a, par conséquent (nº 1),

$$|a_n| \leqq \frac{\mu}{R^n}, \qquad |b_n| \leqq \frac{\mu}{R^n}. \tag{12}$$

Les conditions (9) et (10) développées conduisent aux relations suivantes, pour déterminer les coefficients inconnus c_n et d_n,

$$c_n + d_n + a_n = 0, \qquad c_n + d_n \alpha^n + b_n = 0.$$

On a évidemment

$$a_0 = F(0, 0) = b_0,$$

et, pour $n = 0$, les deux relations précédentes se réduisent à une seule

$$c_0 + d_0 + a_0 = 0.$$

Or, on ne change pas le problème en retranchant de $F(x, y)$ une constante arbitraire K, à condition d'ajouter à $\varphi(x)$ et à $\psi(y)$ deux autres constantes dont la somme est égale à K. Pour achever de préciser le problème, nous supposerons que les trois fonctions $F(x, y)$, $\varphi(x)$, $\psi(y)$ sont nulles pour $x = y = 0$; on aura donc

$$c_0 = d_0 = 0.$$

Pour $n > 0$, les coefficients c_n et d_n ont les valeurs suivantes :

$$c_n = \frac{b_n - a_n \alpha^n}{\alpha^n - 1}, \qquad d_n = \frac{a_n - b_n}{\alpha^n - 1}. \tag{13}$$

D'après les formules (12), on a

$$|c_n| \leqq \frac{\mu}{R^n} \frac{|\alpha|^n + 1}{|\alpha|^n - 1}, \qquad |b_n| \leqq \frac{2\mu}{R^n \{|\alpha|^n - 1\}}.$$

Lorsque n croît indéfiniment, les deux expressions $\frac{|\alpha|^n + 1}{|\alpha|^n - 1}$ et $\frac{|\alpha|^n}{|\alpha|^n - 1}$ tendent vers l'unité puisque nous avons supposé $|\alpha| > 1$. Soit K un nombre positif satisfaisant aux deux conditions

$$\frac{|\alpha|^n + 1}{|\alpha|^n - 1} < K, \qquad \frac{2|\alpha|^n}{|\alpha|^n - 1} < K,$$

pour toutes les valeurs positives du nombre entier n.

Les séries $\varphi(x)$ et $\psi(y)$ admettent respectivement pour fonctions majorantes les deux séries

$$(14) \qquad \Phi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu K}{R^n} x^n, \qquad \Psi(y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu K}{R^n |\alpha|^n} y^n.$$

La série $\varphi(x)$ est donc convergente dans le cercle de rayon R, et la série $\psi(y)$ dans le cercle de rayon $R|\alpha|$, et la fonction obtenue

$$z = F(x, y) + \varphi(x) + \psi(y)$$

est holomorphe dans le même domaine $\mathfrak{D}$ que la fonction $F(x, y)$.

5. Nous aurons besoin pour la suite d'avoir des limites supérieures des modules de ces deux fonctions $\varphi(x)$, $\psi(y)$, et de leurs dérivées $\varphi'(x)$, $\psi'(y)$, dans les domaines précédents. On les obtient aisément, en tenant compte des relations (9) et (10).

Supposons d'abord

$$|x| \leqq \frac{R}{|\alpha|};$$

on a évidemment

$$|\varphi(x)| < \Phi\left(\frac{R}{|\alpha|}\right),$$

c'est-à-dire

$$|\varphi(x)| < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu K}{|\alpha|^n} = \frac{\mu K}{|\alpha| - 1}.$$

D'autre part, si nous changeons x en αx dans l'équation (9), elle devient

$$F(\alpha x, \alpha x) + \varphi(\alpha x) + \psi(\alpha x) = 0,$$

et cette relation a lieu pourvu que l'on ait

$$|\alpha x| < R \qquad \text{ou} \qquad |x| < \frac{R}{|\alpha|}.$$

En retranchant l'équation (10) de cette nouvelle relation, il vient

$$\varphi(\alpha x) = \varphi(x) + F(x, \alpha x) - F(\alpha x, \alpha x).$$

Lorsque $|x|$ est $< \frac{R}{|\alpha|}$, $|\alpha x|$ est $< R$ et les deux fonctions $F(x, \alpha x)$, $F(\alpha x, \alpha x)$ ont leurs modules inférieurs à μ. On a donc

$$|\varphi(\alpha x)| < \frac{\mu K}{|\alpha| - 1} + 2\mu = \mu \left\{ 2 + \frac{K}{|\alpha| - 1} \right\}$$

lorsque $|\alpha x|$ est inférieur à R. Cela revient à dire que l'on a

$$(15) \qquad |\varphi(x)| < \mu \left\{ 2 + \frac{K}{|\alpha| - 1} \right\},$$

lorsque $|x|$ *est plus petit que* R.

On a de même, si $|x| < R$,

$$|\psi(x)| < \Psi(R),$$

c'est-à-dire

$$|\psi(x)| < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu K}{|\alpha|^n} = \frac{\mu K}{|\alpha| - 1}.$$

D'autre part, on tire des relations (9) et (10)

$$\psi(\alpha x) = \psi(x) + F(x, x) - F(x, \alpha x);$$

lorsque $|x|$ est $< R$, $|\alpha x|$ est $< R|\alpha|$, et l'on a encore

$$|\psi(\alpha x)| < \frac{\mu K}{|\alpha| - 1} + 2\mu = \mu \left\{ 2 + \frac{K}{|\alpha| - 1} \right\}.$$

Cela revient à dire que l'on a

$$(16) \qquad |\psi(y)| < \mu \left\{ 2 + \frac{K}{|\alpha| - 1} \right\}$$

lorsque $|y|$ *est inférieur à* $R|\alpha|$.

Cherchons encore une limite supérieure du module de $\varphi'(x)$ et de $\psi'(y)$. La fonction $\varphi'(x)$ a pour fonction majorante

$$\Phi'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\mu K}{R^n} x^{n-1},$$

et, par conséquent, si $|x|$ est $< \dfrac{R}{|\alpha|}$,

$$|\varphi'(x)| < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\mu K}{R|\alpha|^{n-1}} = \frac{\mu K}{R} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{|\alpha|^{n-1}} = \frac{\mu K}{R} \frac{|\alpha|^2}{(|\alpha| - 1)^2}.$$

D'autre part, on tire de l'une des relations écrites plus haut

$$\alpha\varphi'(\alpha x) = \varphi'(x) + F'_x(x, \alpha x) + \alpha F'_y(x, \alpha x) - \alpha F'_x(\alpha x, \alpha x) - \alpha F'_y(\alpha x, \alpha x),$$

où $F'_y(x, \alpha x)$ représente la dérivée $F'_y(x, y)$ où l'on aurait remplacé y par αx après la différentiation.

Si l'on suppose $|x| < \frac{R}{|\alpha|}$, $|\alpha|x$ est $<R$, et les modules des fonctions $F'_x(x, \alpha x)$, $F'_x(\alpha x, \alpha x)$ sont inférieurs à μ_1, ceux des fonctions $F'_y(x, \alpha x)$, $F'_y(\alpha x, \alpha x)$ inférieurs à μ_2. On a donc, *pourvu que* $|x|$ *soit* $< |R|$,

$$|\varphi'(x)| < \frac{1}{|\alpha|}\left\{\frac{\mu K}{R}\frac{|\alpha|^2}{(|\alpha|-1)^2} + |\alpha|\left\{2\mu_2+\mu_1\right\}+\mu_1\right\}$$

ou

$$(17) \qquad |\varphi'(x)| < \frac{\mu K}{R}\frac{|\alpha|}{(|\alpha|-1)^2} + 2\mu_2 + \mu_1\frac{1+|\alpha|}{|\alpha|}.$$

La fonction $\psi'(x)$ admet de même pour fonction majorante la série

$$\psi'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\mu K}{R^n|\alpha|^n}x^{n-1}.$$

Si l'on suppose $|x| < R$, on aura donc

$$|\psi'(x)| < \frac{\mu K}{R}\sum_{1}^{+\infty}\frac{n}{|\alpha|^n} = \frac{\mu K}{R}\frac{|\alpha|}{(|\alpha|-1)^2}.$$

D'autre part, de la relation

$$\psi(\alpha x) = \psi(x) + F(x, x) - F(x, \alpha x)$$

on tire

$$\alpha\psi'(\alpha x) = \psi'(x) + F'_x(x, x) + F'_y(x, x) - F'_x(x, \alpha x) - \alpha F'_y(x, \alpha x).$$

Lorsque $|x| < R$, $|\alpha x|$ est $< |\alpha| R$ et, par suite, *pour toutes les valeurs de* y *telles que* $|y| < |\alpha| R$, on a

$$|\psi'(y)| < \frac{1}{|\alpha|}\left\{\frac{\mu K}{R}\frac{|\alpha|^2}{(|\alpha|-1)^2} + 2\mu_1 + \mu_2 + \mu_2|\alpha|\right\}$$

ou

$$(18) \qquad |\psi'(y)| < \frac{\mu K}{R}\frac{|\alpha|}{(|\alpha|-1)^2} + \frac{2\mu_1}{|\alpha|} + \mu_2\frac{1+|\alpha|}{|\alpha|}.$$

La fonction $z = F(x, y) + \varphi(x) + \psi(y)$ est donc holomorphe dans le domaine $\mathcal{D}$ et l'on a, dans ce domaine,

$$|z| < \mu\left[5 + \frac{2K}{|\alpha|-1}\right],$$

$$\left|\frac{\partial z}{\partial x}\right| < \frac{\mu K}{R}\frac{|\alpha|}{(|\alpha|-1)^2} + 2\mu_2 + \mu_1\left(2+\frac{1}{|\alpha|}\right),$$

$$\left|\frac{\partial z}{\partial y}\right| < \frac{\mu K}{R}\frac{|\alpha|}{(|\alpha|-1)^2} + \frac{2\mu_1}{|\alpha|} + \mu_2\left(2+\frac{1}{|\alpha|}\right).$$

Ces inégalités peuvent s'écrire sous forme abrégée

$$(19)\qquad \begin{cases} |z| < A\mu, & \left|\dfrac{\partial z}{\partial x}\right| < \dfrac{B\mu}{R} + C\mu_1 + D\mu_2, \\ & \left|\dfrac{\partial z}{\partial y}\right| < E\,\dfrac{\mu}{R} + F\mu_1 + G\mu_2, \end{cases}$$

A, B, C, D, E, F, G étant des constantes positives dont on a trouvé l'expression, qui ne dépendent que de $|\alpha|$ (¹).

6. Le second problème préliminaire que nous avons encore à traiter est le suivant :

Soit $f(x, y)$ une fonction holomorphe dans le domaine du point $x = y = 0$. Déterminer une intégrale de l'équation

$$(20)\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = f(x, y)$$

qui s'annule identiquement quand on y remplace y par x, ou par αx, α étant une constante dont le module est plus grand que l'unité.

Désignons toujours par $\mathfrak{D}(R)$ le domaine défini par les inégalités $|x| < R$, $|y| < |\alpha| R$; nous supposons que la fonction $f(x,y)$ est holomorphe dans ce domaine et que $|f(x, y)|$ reste inférieur à un nombre positif M pour tout point de $\mathfrak{D}$. L'équation (20) admet l'intégrale particulière

$$(21)\qquad F(x,y) = \int_0^x dx \int_0^y f(x, y)\, dy,$$

qui est holomorphe dans le même domaine et qui s'annule pour $x = 0$, quel que soit y, et pour $y = 0$, quel que soit x. De la formule (21) on tire

$$(22)\qquad \frac{\partial F}{\partial x} = \int_0^y f(x,y)\, dy, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = \int_0^x f(x, y)\, dx.$$

(¹) Lorsque α est de la forme $\alpha = e^{\theta i}$, l'angle θ étant incommensurable avec π, et tel que la limite de $\sqrt[n]{\left|\sin\dfrac{n\theta}{2}\right|}$ soit l'unité pour n infini, les deux séries obtenues pour $\varphi(x)$ et $\psi(y)$ sont encore convergentes dans le cercle de rayon R, mais les formules qui donnent les limites supérieures de $|\varphi(x)|$, $|\varphi'(x)|$, $|\psi(y)|$, $|\psi'(y)|$ dans ce domaine deviennent illusoires.

Si le point (x, y) est situé dans un domaine $\mathcal{D}(r)$ défini par les inégalités $|x| < r$, $|y| < |\alpha| r$, où $r \leqq R$, on a dans ce domaine, d'après les formules (22),

$$\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right| < M |\alpha| r, \qquad \left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| < M r$$

et, par suite,

$$|F(x, y)| < M |\alpha| r^2.$$

Toute autre intégrale de l'équation (20) est donnée par la formule

$$z = F(x, y) + \varphi(x) + \psi(y), \tag{23}$$

$\varphi(x)$ et $\psi(y)$ étant des fonctions arbitraires, et il n'y a plus qu'à choisir ces fonctions de façon que l'intégrale ainsi obtenue s'annule identiquement quand on y remplace y par x ou par αx : ce qui fait précisément l'objet du problème précédent. Nous avons vu comment on pouvait obtenir une intégrale satisfaisant à ces conditions, et holomorphe dans le même domaine $\mathcal{D}(R)$ que $f(x, y)$. Pour avoir une limite supérieure du module de cette intégrale z dans le domaine $\mathcal{D}(r)$, ainsi que des modules des dérivées partielles $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, il suffira de remplacer, dans les formules (19), R, μ, μ_1, μ_2 par r, $M|\alpha|r^2$, $M|\alpha|r$, Mr respectivement. On aura donc, dans le domaine $\mathcal{D}(r)$,

$$|z| < MHr^2, \qquad \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right| < MH_1 r, \qquad \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right| < MH_2 r, \tag{24}$$

H, H_1, H_2 étant trois constantes positives qui ne dépendent que de $|\alpha|$.

7. Arrivons maintenant au problème qui est l'objet essentiel de cette étude.

Soient $f(x, y, z, p, q)$ une fonction des cinq variables x, y, z, p, q, régulière dans le voisinage des valeurs $x = y = z = p = q = 0$, et α une constante dont le module est supérieur à 1 ; *trouver une intégrale de l'équation*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) \tag{25}$$

qui soit régulière dans le domaine du point $x = y = 0$, et qui s'annule identiquement quand on y remplace y par x ou par αx.

Pour fixer les idées, supposons que la fonction $f(x, y, z, p, q)$ soit holomorphe dans le domaine défini par les inégalités

$$|x| < R, \qquad |y| < |\alpha| R, \qquad |z| < Z, \qquad |p| < P, \qquad |q| < Q,$$

R, Z, P, Q étant des nombres positifs, et que dans ce domaine le module de $f(x, y, z, p, q)$ reste plus petit qu'un nombre positif M. Posons $z_0 = 0$, et considérons les équations successives

$$(26)\quad \frac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y} = f(x, y, 0, 0, 0),$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 z_2}{\partial x\,\partial y} = f\left(x, y, z_1, \dfrac{\partial z_1}{\partial x}, \dfrac{\partial z_1}{\partial y}\right), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \dfrac{\partial^2 z_n}{\partial x\,\partial y} = f\left(x, y, z_{n-1}, \dfrac{\partial z_{n-1}}{\partial x}, \dfrac{\partial z_{n-1}}{\partial y}\right), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{array}\right.$$

en imposant à toutes les fonctions $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ la condition de s'annuler pour $y = x$ et pour $y = \alpha x$. Supposons que dans le domaine $\mathfrak{D}(R')$, où $R' \leqq R$, on ait

$$(27)\qquad |z_{n-1}| < Z, \qquad |p_{n-1}| < P, \qquad |q_{n-1}| < Q,$$

alors la fonction

$$f(x, y, z_{n-1}, p_{n-1}, q_{n-1})$$

sera holomorphe dans ce domaine $\mathfrak{D}(R')$, et son module restera inférieur à M. Il s'ensuit que la fonction z_n sera elle-même holomorphe dans $\mathfrak{D}(R')$, et l'on aura dans ce domaine

$$|z_n| < MR'^2 H, \qquad |p_n| < MR'H_1, \qquad |q_n| < MR'H_2.$$

Si l'on a choisi R' assez petit pour que l'on ait à la fois

$$MR'^2 H < Z, \qquad MR'H_1 < P, \qquad MR'H_2 < Q,$$

la fonction z_n satisfera aux mêmes inégalités (27) que z_{n-1}; on peut donc imaginer que l'on continue indéfiniment les opérations précédentes, et l'on obtient ainsi une suite indéfinie de fonctions

$$(28)\qquad z_0, \quad z_1, \quad z_2, \quad \dots, \quad z_{n-1}, \quad z_n, \quad z_{n+1}, \quad \dots,$$

qui sont holomorphes dans le domaine $\mathfrak{D}(R')$, et qui s'annulent identiquement quand on remplace y par x ou par αx. Chacune d'elles satisfait, dans le domaine $\mathfrak{D}(R')$, aux conditions

$$|z_i| < Z, \qquad \left|\frac{\partial z_i}{\partial x}\right| < P, \qquad \left|\frac{\partial z_i}{\partial y}\right| < Q.$$

Pour reconnaître si z_n tend vers une limite lorsque n augmente indéfiniment, il suffit d'examiner si la série

$$z_0 + (z_1 - z_0) + (z_2 - z_1) + \ldots + (z_n - z_{n-1}) + \ldots$$

est convergente. Or on déduit des équations (26)

$$(29) \qquad \frac{\partial^2(z_n - z_{n-1})}{\partial x\, \partial y} = f(x, y, z_{n-1}, p_{n-1}, q_{n-1}) - f(x, y, z_{n-2}, p_{n-2}, q_{n-2});$$

le second membre de cette formule est holomorphe dans le domaine $\mathfrak{D}(\mathrm{R}')$, et il est facile de trouver une limite supérieure de son module. On peut, en effet, d'après le théorème des accroissements finis généralisé, trouver trois nombres positifs constants U, V, W tels que l'on ait

$$\begin{aligned}|f(x, y, z_{n-1}, p_{n-1}, q_{n-1}) - f(x, y, z_{n-2}, p_{n-2}, q_{n-2})|\\ < \mathrm{U}\,|z_{n-1} - z_{n-2}| + \mathrm{V}\,|p_{n-1} - p_{n-2}| + \mathrm{W}\,|q_{n-1} - q_{n-2}|,\end{aligned}$$

lorsque $x, y, z_{n-1}, z_{n-2}, p_{n-1}, p_{n-2}, q_{n-1}, q_{n-2}$ satisfont respectivement aux inégalités

$$\begin{array}{llll} |x| < \mathrm{R}', & |y| < |\alpha|\,\mathrm{R}', & |z_{n-1}| < \mathrm{Z}, & |z_{n-2}| < \mathrm{Z}, \\ |p_{n-1}| < \mathrm{P}, & |p_{n-2}| < \mathrm{P}, & |q_{n-1}| < \mathrm{Q}, & |q_{n-2}| < \mathrm{Q}. \end{array}$$

Soit π_{n-1} une limite supérieure du module des trois différences $z_{n-1} - z_{n-2}$, $p_{n-1} - p_{n-2}$, $q_{n-1} - q_{n-2}$ dans le domaine $\mathfrak{D}(\mathrm{R}')$. D'après l'inégalité précédente, on a, dans le même domaine,

$$|f(x, y, z_{n-1}, p_{n-1}, q_{n-1}) - f(x, y, z_{n-2}, p_{n-2}, q_{n-2})| < (\mathrm{U} + \mathrm{V} + \mathrm{W})\,\pi_{n-1}.$$

Or, l'intégrale considérée $z_n - z_{n-1}$ de l'équation auxiliaire (29) est nulle pour $y = x$ et pour $y = \alpha x$. Il s'ensuit que dans un domaine $\mathfrak{D}(r)$, où $r \leqq \mathrm{R}'$, on a les inégalités

$$\begin{aligned} |z_n - z_{n-1}| &< (\mathrm{U} + \mathrm{V} + \mathrm{W})\,\pi_{n-1} r^2 \mathrm{H}, \\ |p_n - p_{n-1}| &< (\mathrm{U} + \mathrm{V} + \mathrm{W})\,\pi_{n-1} r \mathrm{H}_1, \\ |q_n - q_{n-1}| &< (\mathrm{U} + \mathrm{V} + \mathrm{W})\,\pi_{n-1} r \mathrm{H}_2. \end{aligned}$$

Choisissons r assez petit pour que l'on ait

$$(\mathrm{U} + \mathrm{V} + \mathrm{W})\, r^2 \mathrm{H} < \lambda, \qquad (\mathrm{U} + \mathrm{V} + \mathrm{W})\, r \mathrm{H}_1 < \lambda, \qquad (\mathrm{U} + \mathrm{V} + \mathrm{W})\, r \mathrm{H}_2 < \lambda,$$

λ étant un nombre positif inférieur à l'unité. Alors, en désignant par π_n la limite supérieure des trois différences $|z_n - z_{n-1}|$, $|p_n - p_{n-1}|$, $|q_n - q_{n-1}|$ pour un point (x, y) du domaine $\mathcal{D}(r)$, on aura, d'après ce qui précède,

$$\pi_n < \lambda \pi_{n-1}$$

et, par suite,

$$|z_n - z_{n-1}| < \pi_1 \lambda^n, \qquad |p_n - p_{n-1}| < \pi_1 \lambda^n, \qquad |q_n - q_{n-1}| < \pi_1 \lambda^n,$$

π_1 étant le plus grand des trois nombres Z, P, Q définis plus haut. Il en résulte que les quatre séries

$$z_0 + (z_1 - z_0) + \ldots + (z_n - z_{n-1}) + \ldots,$$

$$p_0 + (p_1 - p_0) + \ldots + (p_n - p_{n-1}) + \ldots,$$

$$q_0 + (q_1 - q_0) + \ldots + (q_n - q_{n-1}) + \ldots,$$

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x \, \partial y} + \ldots + \left(\frac{\partial^2 z_n}{\partial x \, \partial y} - \frac{\partial^2 z_{n-1}}{\partial x \, \partial y}\right) + \ldots,$$

sont uniformément convergentes dans le domaine $\mathcal{D}(r)$. Si $\omega(x, y)$ est la somme de la première, les sommes des trois autres sont respectivement $\frac{\partial \omega}{\partial x}, \frac{\partial \omega}{\partial y}, \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \, \partial y}$. La relation

$$\frac{\partial^2 z_n}{\partial x \, \partial y} = f\left(x, y, z_{n-1}, \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x}, \frac{\partial z_{n-1}}{\partial y}\right)$$

devient donc à la limite, quand on fait croître n indéfiniment,

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \, \partial y} = f\left(x, y, \omega, \frac{\partial \omega}{\partial x}, \frac{\partial \omega}{\partial y}\right).$$

Cette fonction $\omega(x, y)$ est holomorphe dans le domaine $\mathcal{D}(r)$, et elle s'annule quand on y remplace y par x ou par αx, puisqu'il en est ainsi de tous les termes de la série

$$z_0 + (z_1 - z_0) + \ldots + (z_n - z_{n-1}) + \ldots;$$

elle satisfait donc à toutes les conditions de l'énoncé.

La solution de l'équation (25), dont on vient de démontrer l'existence, est développable en série entière, ordonnée suivant les puissances positives des variables x et y. On peut calculer les coefficients de ce développement par une méthode directe, sans passer par les fonctions intermédiaires $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$. On sait, en effet, que l'équation (25), jointe à celles que l'on en déduit par des différentiations successives, permet d'exprimer toutes les dérivées partielles p_{ik} (où $i > 0$, $k > 0$) au moyen de x, y, z et des dérivées p_{n0} et p_{0n}, où n est au plus égal à $i + k - 1$. Supposons que l'on ait évalué les valeurs initiales pour $x = y = 0$ de toutes les dérivées d'ordre inférieur à n de l'intégrale cherchée.

On connaîtra par là même les valeurs initiales des dérivées $p_{n-1,1}$, $p_{n-2,2}$, $\ldots$, $p_{1,n-1}$. Pour calculer p_{n0} et p_{0n}, remarquons que le groupe des termes de degré n dans le développement de l'intégrale cherchée est égal à

$$\frac{1}{1.2\ldots n}\left\{p_{n0}x^n + \frac{n}{1}p_{n-1,1}x^{n-1}y + \ldots + p_{0n}y^n\right\},$$

et le coefficient de x^n doit être nul quand on y remplace y par x ou par αx. On a donc deux équations de la forme

$$p_{n0} + p_{0n} = \mathrm{K}, \qquad p_{n0} + \alpha^n p_{0n} = \mathrm{K}_1,$$

K et K_1 ne dépendant que des autres dérivées d'ordre n, $p_{n-1,1}$, $p_{n-2,2}$, $\ldots$, $p_{1,n-1}$. Puisque α n'est pas racine de l'unité, on en déduira p_{n0} et p_{0n}. On pourra donc calculer de proche en proche, sans être jamais arrêté, les coefficients du développement.

Il est à remarquer que ce développement existe toujours, et qu'il est unique, pourvu que α ne soit pas racine de l'unité, alors même que l'on aurait $|\alpha| = 1$. Mais la convergence n'est démontrée jusqu'ici que si l'on a $|\alpha| > 1$; nous allons voir tout à l'heure qu'elle l'est aussi si $|\alpha| < 1$.

La démonstration de la convergence par la méthode habituelle des fonctions majorantes présenterait dans ce cas des difficultés spéciales, car les expressions des dérivées p_{0n}, p_{n0} en fonction des précédentes ne s'obtiennent pas par des additions et des multiplications seulement. L'emploi des approximations successives nous a permis d'éviter ces difficultés.

8. Nous allons maintenant généraliser le résultat obtenu, en remplaçant les conditions limites considérées jusqu'ici par d'autres d'un caractère moins particulier. Tout d'abord, on peut se proposer de déterminer une intégrale de l'équation (25), régulière dans le domaine du point $x = y = 0$, et s'annulant identiquement quand on y remplace y par cx ou par $c'x$, c et c' étant deux constantes telles que $\left|\frac{c'}{c}\right|$ soit différent de l'unité. Supposons, pour fixer les idées, $\left|\frac{c'}{c}\right| > 1$; si l'on fait le changement de variable $cx = x'$, l'équation (25) est remplacée par une équation de même forme et l'intégrale de la nouvelle équation doit s'annuler identiquement quand on y remplace y par x' ou par $\frac{c'}{c}x'$; nous sommes donc ramenés au problème particulier qui a été traité.

Soit, en second lieu, à *déterminer une intégrale de l'équation*

$$s = f(x, y, z, p, q),$$

holomorphe dans le domaine du point $x = y = 0$, se réduisant à une fonction donnée $\varphi(x)$ quand on remplace y par cx et à une autre fonction donnée $\psi(x)$ quand on remplace y par $c'x$.

Les deux fonctions $\varphi(x)$, $\psi(x)$ sont supposées holomorphes dans le voisinage de l'origine et satisfont à la condition $\varphi(0) = \psi(0)$; de plus nous supposons, comme tout à l'heure, que $\left|\frac{c'}{c}\right|$ est différent de l'unité. Les valeurs z_0, p_0, q_0 de l'intégrale cherchée et de ses dérivées partielles pour $x = y = 0$ sont fournies immédiatement par les relations

$$z_0 = \varphi(0), \qquad p_0 + q_0 c = \varphi'(0), \qquad p_0 + q_0 c' = \psi'(0);$$

nous supposerons que la fonction $f(x, y, z, p, q)$ est régulière dans le voisinage du système de valeurs

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad z = \varphi(0), \qquad p = p_0, \qquad q = q_0.$$

Cela étant, la fonction

$$Z = \frac{[\varphi(x) - \varphi(0)](y - c'x)}{(c - c')x} + c' \frac{\left[\psi\left(\frac{y}{c'}\right) - \psi(0)\right](y - cx)}{(c' - c)y} + \varphi(0)$$

est régulière dans le domaine de l'origine, et satisfait aux mêmes conditions que l'intégrale cherchée (1).

La transformation $z = Z + u$ conduit à une équation de même forme que l'équation proposée

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y} = F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

où, d'après les hypothèses faites sur la fonction $f(x, y, z, p, q)$, le second membre $F(x, y, u, u'_x, u'_y)$ est régulier dans le voisinage des valeurs

$$x = y = u = u'_x = u'_y = 0.$$

Il suffira encore de déterminer une intégrale holomorphe de la nouvelle équation, s'annulant identiquement quand on y remplace y par cx ou par $c'x$.

L'existence d'une intégrale de l'équation

$$s = f(x, y, z, p, q)$$

---

(1) Il est clair qu'il y a une infinité d'autres fonctions possédant les mêmes propriétés, par exemple

$$\varphi\left(\frac{y - c'x}{c - c'}\right) + \psi\left(\frac{y - cx}{c' - c}\right) - \varphi(0).$$

satisfaisant aux conditions énoncées, sous les hypothèses admises, est donc établie. Pour calculer les coefficients du développement en série entière de cette intégrale, on procédera comme il a été expliqué plus haut. Il suffit de pouvoir calculer les valeurs initiales des dérivées p_{n0}, p_{0n}, au moyen des valeurs initiales des dérivées p_{ik} (où $i+k \leqq n-1$). On a pour cela deux équations linéaires de la forme

$$p_{n0}+c^n p_{0n}=\mathrm{K}, \qquad p_{n0}+c'^n p_{0n}=\mathrm{K}',$$

les seconds membres K, K′ ne dépendant que des dérivées déjà calculées.

9. En langage géométrique, le problème le plus général résolu jusqu'ici peut s'énoncer comme il suit :

Déterminer une surface intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=f(x, y, z, p, q), \tag{30}$$

connaissant les sections de cette surface par deux plans $y=cx$, $y=c'x$, passant par l'axe des z.

La généralisation s'offre d'elle-même. Au lieu de deux courbes planes dont les plans passent par l'axe Oz, considérons deux courbes quelconques, ayant un point commun, et satisfaisant à certaines conditions qui vont être précisées, et proposons-nous de déterminer une surface intégrale de la même équation passant par ces deux courbes.

Soient

$$y=\pi(x), \qquad z=\varphi(x)$$

les équations de l'une des courbes Γ,

$$y=\pi_1(x), \qquad z=\varphi_1(x)$$

les équations de la seconde courbe Γ_1. Nous supposerons que les fonctions $\pi(x)$, $\varphi(x)$, $\pi_1(x)$, $\varphi_1(x)$ sont holomorphes dans le domaine de l'origine et s'annulent pour $x=0$, que $\pi'(0)$, $\pi'_1(0)$ sont différents de zéro et que le module du rapport $\dfrac{\pi'(0)}{\pi'_1(0)}$ n'est pas égal à un. La première hypothèse revient à prendre pour origine le point commun aux deux courbes Γ, Γ_1. Les dérivées $\pi'(0)$, $\pi'_1(0)$ représentent les coefficients angulaires des tangentes à l'origine aux projections C, C_1 des deux courbes Γ, Γ_1 sur le plan des xy. Nous supposons par conséquent qu'aucune de ces courbes C, C_1 n'est tangente (1) à l'un des axes Ox, Oy,

(1) Les cas où il en est ainsi ont déjà été traités.

et, en outre, que le module du rapport de ces coefficients angulaires est différent de l'unité. Le nouveau problème que l'on se propose peut alors s'énoncer ainsi :

Déterminer une intégrale de l'équation (30), *régulière dans le domaine de l'origine, se réduisant à* $\varphi(x)$ *quand on* y *remplace* y *par* $\pi(x)$, *et à* $\varphi_1(x)$ *quand on* y *remplace* y *par* $\pi_1(x)$.

L'existence de cette intégrale étant admise, les coefficients du développement en série entière peuvent encore être calculés de proche en proche. Soit

$$z = \sum a_{ik} x^i y^k$$

le développement cherché; on démontre comme plus haut que les coefficients a_{ik}, où i et k sont positifs, s'expriment au moyen des coefficients a_{10}, a_{01}, ..., a_{n0}, a_{0n}, n étant au plus égal à $i+k-1$. Pour calculer les coefficients a_{n0} et a_{0n}, observons que quand on remplace y par $\pi(x)$ le coefficient de x^n est

$$a_{n0} + a_{0n}[\pi'(0)]^n + \ldots,$$

les termes non écrits étant connus, si l'on a déjà calculé les coefficients a_{10}, a_{01}, ..., $a_{n-1,0}$, $a_{0,n-1}$. Le coefficient de x^n, après la substitution de $\pi_1(x)$ à la place de y, est de même

$$a_{n0} + a_{0n}[\pi_1'(0)]^n + \ldots.$$

En identifiant ces coefficients aux coefficients de x^n dans $\varphi(x)$ et $\varphi_1(x)$ respectivement, on a deux équations linéaires qui donneront a_{n0} et a_{0n} au moyen des coefficients précédents. En particulier, les coefficients a_{10}, a_{01}, c'est-à-dire les valeurs des dérivées partielles p et q à l'origine, sont déterminés par les deux équations

$$a_{10} + a_{01}\,\pi'(0) = \varphi'(0), \qquad a_{10} + a_{01}\,\pi_1'(0) = \varphi_1'(0).$$

Au lieu d'étudier directement la convergence de ce développement, nous montrerons que ce nouveau problème peut se ramener à celui qui précède.

Les transformations ponctuelles effectuées sur les variables x, y, qui changent l'équation (30) en une équation de même espèce, sont de l'une des formes

$$(31) \qquad \begin{cases} x' = \mathrm{F}(x), \\ y' = \Phi(y), \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = \mathrm{F}(y), \\ y' = \Phi(x), \end{cases}$$

la seconde se déduisant de la première par l'échange des variables x', y'. Cherchons s'il est possible de déterminer les fonctions $\mathrm{F}(x)$, $\Phi(y)$ de façon que les deux courbes planes C, C_1

$$C\{y=\pi(x),\qquad C_1\{y=\pi_1(x),$$

soient remplacées par deux lignes droites

$$C'\{y'=\gamma x',\qquad C'_1\{y'=\gamma_1 x',$$

γ, γ_1 étant deux coefficients constants, tels que $\left|\frac{\gamma}{\gamma_1}\right|$ soit différent de l'unité. On peut évidemment, sans diminuer la généralité, supposer $\gamma_1 = 1$.

Pour que la transformation (31) change la courbe C en la courbe C' et la courbe C_1 en la courbe C'_1, il faut et il suffit que l'on ait

$$\Phi(\pi(x)) = \gamma\, F(x),\qquad \Phi(\pi_1(x)) = F(x), \tag{32}$$

et, par suite,

$$\Phi(\pi(x)) = \gamma\, \Phi(\pi_1(x)). \tag{33}$$

Cette dernière relation ne renferme plus qu'une fonction inconnue Φ, puisque $\pi(x)$ et $\pi_1(x)$ sont des fonctions connues de x; par hypothèse, ces deux fonctions sont développables en séries entières

$$\begin{aligned}\pi\,(x) &= a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots,\\ \pi_1(x) &= b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n + \ldots,\end{aligned}$$

les deux coefficients a_1 et b_1 n'étant pas nuls. Si nous posons $\pi_1(x) = X$, inversement x est une fonction holomorphe de X dans le voisinage de $X = 0$,

$$x = \frac{1}{b_1} X + \alpha_2 X^2 + \ldots,$$

et $\pi(x)$ se change à son tour en une fonction holomorphe $\omega(X)$

$$\omega(X) = \beta_1 X + \beta_2 X^2 + \ldots + \beta_n X^n + \ldots$$

le premier coefficient β_1 étant égal à $\frac{a_1}{b_1}$. La relation (33) prend la forme

$$\Phi(\omega(X)) = \gamma\, \Phi(X). \tag{34}$$

Nous voulons montrer que l'on peut satisfaire à cette relation en prenant pour $\Phi(X)$ une fonction holomorphe dans le domaine de l'origine

$$\Phi(X) = A_1 X + A_2 X^2 + \ldots + A_n X^n + \ldots,$$

le coefficient A_1 n'étant pas nul. En remplaçant X par $\omega(X)$ dans cette série et en identifiant les deux membres de la relation (34), on a d'abord

$$A_1\beta_1 = \gamma A_1,$$

ce qui montre que le problème n'est possible que si l'on suppose $\gamma = \beta_1 = \frac{a_1}{b_1}$. Ayant pris pour γ cette valeur, le coefficient A_1 est indéterminé; nous prendrons $A_1 = 1$.

Le coefficient de X^n dans le second membre de la relation (34) est γA_n, et, dans le premier membre, il est égal à

$$A_n\gamma^n + P_n(A_1, A_2, \ldots, A_{n-1};\ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n),$$

P désignant un polynome dont tous les coefficients sont réels et positifs. On a donc la relation

$$A_n(\gamma - \gamma^n) = P_n(A_1, A_2, \ldots, A_{n-1};\ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n). \tag{35}$$

Par hypothèse, γ ou $\frac{a_1}{b_1}$ a son module différent de l'unité. On pourra donc calculer de proche en proche les coefficients $A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots$ et former une série entière qui satisfait à la relation proposée (34) pourvu qu'elle soit convergente.

La convergence se démontre par la méthode habituelle des fonctions majorantes. Nous pouvons supposer $|a_1| < |b_1|$, c'est-à-dire $|\gamma| = \rho < 1$. Cela étant, on a, quel que soit n,

$$|\beta| \leqq |\beta|^n + |\beta - \beta^n|$$

ou

$$|\beta - \beta^n| \geqq \rho - \rho^n$$

et, par suite,

$$\frac{1}{|\beta - \beta^n|} \leqq \frac{1}{\rho - \rho^n}.$$

Si nous remplaçons, dans la relation (34), γ par ρ et $\omega(X)$ par une fonction majorante de la forme

$$\frac{\rho X}{1 - aX},$$

a étant réel et positif, on obtient une équation de même forme

$$F\left(\frac{\rho X}{1 - aX}\right) = \rho F(X), \tag{34 bis}$$

et si l'on cherche à satisfaire à cette relation par une fonction holomorphe

$$F(X) = X + B_2X^2 + \ldots + B_nX^n + \ldots,$$

on obtiendra pour les coefficients B_n des nombres réels et positifs qui, d'après la façon même dont on les obtient, seront supérieurs aux modules des coefficients correspondants de la première série. Or, cette nouvelle série est convergente, car l'équation (34) *bis* admet la solution holomorphe

$$F(X) = \frac{X}{1 - \frac{aX}{1-\rho}}.$$

En remontant aux relations (32), on voit que l'on peut satisfaire à ces relations par des fonctions $F(x)$, $\Phi(x)$, holomorphes dans le domaine de l'origine, s'annulant pour $x=0$, et dont les dérivées $F'(0)$, $\Phi'(0)$ ne sont pas nulles. Les fonctions F et Φ étant déterminées de cette façon, inversement x et y sont des fonctions holomorphes des variables

$$x' = F(x), \qquad y' = \Phi(y),$$

et l'équation proposée se change en une équation de même forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x' \partial y'} = f_1\left(x', y', z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y'}\right). \tag{36}$$

Quant aux nouvelles conditions initiales, il est bien facile de les énoncer. Soient $\psi(x')$ et $\psi_1(x')$ ce que deviennent les fonctions $\varphi(x)$ et $\varphi_1(x)$ quand on remplace x par son expression en fonction de la nouvelle variable x'. L'intégrale de l'équation (36), qui correspond à l'intégrale cherchée de l'équation (30), doit se réduire à $\psi(x')$ quand on y remplace y' par $\gamma x'$ et à $\psi_1(x')$ quand on y remplace y' par x'. Nous sommes donc ramenés à l'un des problèmes traités précédemment, et la convergence du développement obtenu est assurée dans un certain domaine autour de l'origine, sous les conditions habituelles sur lesquelles nous ne reviendrons pas.

10. Les résultats précédents peuvent être étendus aux équations plus générales

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(x, y, z, p, q), \tag{37}$$

A, B, C étant des fonctions des deux variables x, y. On sait, en effet, que l'on peut ramener ces équations à la forme simple

$$\frac{\partial^2 z}{\partial X\, \partial Y} = F\left(X, Y, z, \frac{\partial z}{\partial X}, \frac{\partial z}{\partial Y}\right)$$

par une transformation ponctuelle

$$X = \varphi(x, y), \qquad Y = \psi(x, y), \tag{38}$$

X et Y étant les variables caractéristiques. Nous avons toujours supposé dans ce qui précède que le module du rapport $\frac{a_1}{b_1}$ était différent de l'unité. Pour savoir ce que devient cette condition quand on fait subir aux variables x et y une transformation ponctuelle de la forme (38), observons que a_1 et b_1 représentent les coefficients angulaires des tangentes aux projections des deux courbes données Γ, Γ_1 sur le plan des xy, tandis que les coefficients angulaires des tangentes aux directions caractéristiques issues de l'origine sont 0 et $+\infty$. Le rapport $\frac{a_1}{b_1}$ est donc égal au rapport anharmonique de ces quatre droites. Comme ce rapport anharmonique se conserve dans toute transformation ponctuelle de la forme (38), on peut énoncer la proposition générale suivante :

Deux courbes Γ, Γ_1 *ayant un point commun* O, *et non tangentes en ce point, déterminent une intégrale et une seule de l'équation* (37), *pourvu que le rapport anharmonique des tangentes à ces deux courbes, et des tangentes aux deux caractéristiques issues du point* O *dans l'élément qu'elles déterminent, ait un module différent de l'unité.*

11. Appliquons ce résultat au cas où les courbes données sont réelles, et où les coefficients A, B, C de l'équation (37) ont des valeurs réelles pour les valeurs réelles des variables x, y, au moins dans un certain domaine. Nous avons deux cas à distinguer, suivant que les caractéristiques sont réelles ou imaginaires.

Si les caractéristiques sont réelles, le rapport anharmonique des quatre droites est réel; le module de ce rapport ne peut être égal à l'unité que si le rapport lui-même est égal à ± 1. Il n'y a donc que deux cas exceptionnels où l'énoncé général est en défaut : 1° le cas où les deux courbes données Γ, Γ_1 sont tangentes; 2° le cas où les tangentes à ces deux courbes forment avec les tangentes aux caractéristiques une division harmonique.

Il n'en est plus de même si les caractéristiques sont imaginaires; dans ce cas, en effet, les coefficients angulaires des tangentes aux deux caractéristiques qui passent par un point sont imaginaires conjuguées, puisque A, B, C sont réels. Les courbes données Γ, Γ_1 étant réelles, le rapport anharmonique considéré est le quotient de deux imaginaires conjuguées; son module est égal à l'unité. Nous sommes donc toujours dans un cas exceptionnel. On voit donc que, si l'on suppose les courbes données réelles, le résultat obtenu n'est vraiment complet que pour les équations du type *hyperbolique*. Pour les équations du type *elliptique*, on est, au contraire, dans un cas d'exception où les méthodes précédentes sont insuffisantes pour décider de la convergence des séries obtenues. L'étude qui a été faite nous apprend seulement que deux circonstances tout à fait différentes peuvent se présenter. Si le rapport anharmonique en question est racine de l'unité, les équations qui déterminent les coefficients du développement de l'intégrale cherchée deviennent périodiquement incompatibles ou indéterminées. Au contraire, si ce rapport anharmonique n'est pas racine de l'unité, il ne peut y avoir qu'une intégrale holomorphe répondant à la question, mais la série obtenue n'est pas toujours convergente comme dans les cas déjà examinés.

12. Prenons, par exemple, l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0, \tag{39}$$

et soit à déterminer une intégrale holomorphe dans le domaine de l'origine, se réduisant à une fonction donnée $\varphi(x)$ quand on y remplace y par mx, et à une autre fonction donnée $\varphi_1(x)$ quand on y remplace y par $m_1 x$, les deux fonctions $\varphi(x)$ et $\varphi_1(x)$ étant nulles pour $x = 0$, et holomorphes dans le domaine de ce point.

Les coefficients angulaires des tangentes caractéristiques sont dans ce cas $+i$ et $-i$; le rapport anharmonique r des quatre droites a donc pour expression

$$r = \frac{m-i}{m+i} : \frac{m_1 - i}{m_1 + i} = \frac{mm_1 + 1 + i(m - m_1)}{mm_1 + 1 - i(m - m_1)},$$

ou encore

$$r = \frac{1 + i \operatorname{tang}\theta}{1 - i \operatorname{tang}\theta} = \frac{1 - \operatorname{tang}^2\theta + 2i \operatorname{tang}\theta}{1 + \operatorname{tang}^2\theta},$$

θ étant l'angle des deux droites $y = mx$, $y = m_1 x$. Soit α l'argument de r; on déduit de la formule précédente

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{2 \operatorname{tang}\theta}{1 - \operatorname{tang}^2\theta} = \operatorname{tang} 2\theta$$

et, par suite, $\alpha = 2\theta$. Pour que r soit racine de l'unité, il faut et il suffit que l'angle θ soit commensurable avec π. Dans ce cas, il est facile de vérifier que le problème est impossible ou indéterminé, tandis qu'il ne peut admettre plus d'une solution, si $\frac{\theta}{\pi}$ est incommensurable.

Supposons que l'on ait fait tourner les axes autour de l'origine de façon que l'axe des x vienne coïncider avec la droite $y = mx$; la droite $y = m_1 x$ aura pour équation, dans ce nouveau système d'axes,

$$y = x \operatorname{tang}\theta,$$

et l'équation (39) ne change pas de forme.

Le problème revient à déterminer une intégrale, holomorphe dans le domaine de l'origine, se réduisant, pour $y = 0$, à une fonction donnée $\varphi(x)$

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n,$$

et, pour $y = x \tang\theta$, à une fonction donnée $\psi(r)$, où $r = \sqrt{x^2 + y^2}$,

$$\psi(r) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n r^n.$$

La solution cherchée peut s'écrire, en employant les coordonnées polaires ρ, ω,

$$z = \sum_{n=1}^{+\infty} \{ c_n \rho^n \cos n\omega + d_n \rho^n \sin n\omega \}.$$

Pour $\omega = 0$, on a $\rho = x$, et la série se réduit à

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n x^n;$$

on doit donc avoir $c_n = a_n$. Pour $\omega = \theta$, ρ est égal à r; on doit donc avoir

$$a_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta = b_n.$$

Lorsque $\frac{\theta}{\pi}$ est égal à une fraction irréductible $\frac{p}{q}$, $\sin n\theta$ est nul, toutes les fois que n est un multiple de q, et dans ce cas seulement. Pour que le problème soit possible, il faut donc que l'on ait $b_n = a_n \cos n\theta$, lorsque n est un multiple de q. Si cette condition est remplie, les coefficients d_q, d_{2q}, ..., d_{mq}, ... restent arbitraires.

La série obtenue, en supposant nuls tous ces coefficients, est convergente dans le domaine de l'origine, car la valeur absolue de $\sin n\theta$ reste supérieure à un nombre fixe positif, lorsque n n'est pas un multiple de q. En ajoutant à cette intégrale une série quelconque de la forme

$$g_1 \rho^q \sin q\omega + g_2 \rho^{2q} \sin(2q\omega) + \ldots + g_\nu \rho^{\nu q} \sin(\nu q\omega) + \ldots,$$

pourvu qu'elle soit convergente, on obtient encore une intégrale holomorphe répondant à la question. Le problème proposé est donc impossible ou indéterminé, lorsque $\frac{\theta}{\pi}$ est un nombre rationnel.

Supposons, au contraire, que $\frac{\theta}{\pi}$ soit un nombre irrationnel. Il ne peut y avoir plus d'une intégrale répondant à la question, et cette intégrale, si elle existe, est représentée par la série

$$z = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \rho^n \cos n\omega + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n - a_n \cos n\theta}{\sin n\theta} \rho^n \sin n\omega.$$

La première série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \rho^n \cos n\omega$$

peut encore s'écrire

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n (s^n + s_0^n),$$

en posant $s = x + iy$, $s_0 = x - iy$, et représente une fonction holomorphe des variables x et y dans le domaine de l'origine, si la série $\varphi(x)$ a un rayon de convergence différent de zéro, comme nous le supposons.

On peut écrire aussi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n - a_n \cos n\theta}{\sin n\theta} \rho^n \sin n\omega = \frac{1}{2i}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n - a_n \cos n\theta}{\sin n\theta} (s^n - s_0^n);$$

lorsque $\frac{\theta}{\pi}$ est un nombre algébrique, ou un nombre transcendant tel que $\sqrt[n]{|\sin n\theta|}$ ait pour limite l'unité, la série du second membre représente aussi une fonction holomorphe des variables x et y dans le domaine de l'origine, puisque nous supposons que la série $\psi(r)$ a aussi un rayon de convergence différent de zéro. Mais lorsque $\frac{\theta}{\pi}$ est un nombre transcendant tel que la plus petite limite de $\sqrt[n]{|\sin n\theta|}$ soit zéro, on ne peut plus rien affirmer sans une étude particulière du numérateur $b_n - a_n \cos n\theta$.

Supposons, par exemple, $a_n = 0$, $b_n = 1$. La série considérée se réduit à

$$\sum \frac{\rho^n \sin n\omega}{\sin n\theta} = \frac{1}{2i}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s^n - s_0^n}{\sin n\theta}.$$

La série $\sum \frac{s^n}{\sin n\theta}$ est divergente, sauf pour $s = 0$, lorsque la plus petite limite de $\sqrt[n]{|\sin n\theta|}$ est égale à zéro. L'équation de Laplace n'admet donc pas d'intégrale holomorphe se réduisant à zéro pour $y=0$ et à $\frac{1}{1-r}$ pour $y=x\operatorname{tang}\theta\,(r=\sqrt{x^2+y^2})$, lorsque le rapport $\frac{\theta}{\pi}$ est un de ces nombres transcendants qui ont été définis plus haut (n° 3).

Remarque. — Il est à remarquer que, dans ce cas, la série

$$F(\rho, \omega)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\rho^n \sin n\omega}{\sin n\theta}$$

est cependant convergente pour des valeurs positives de ρ, en choisissant convenablement l'angle ω. Posons en effet $\omega=k\theta$, k étant entier, on a

$$\frac{\sin(nk\theta)}{\sin n\theta}=P(\sin n\theta, \cos n\theta),$$

P étant un polynome en $\sin n\theta$, $\cos n\theta$, de degré $k-1$, à coefficients entiers. La valeur absolue de ce polynome reste inférieure à un nombre fixe M, quel que soit le nombre entier n, car les coefficients de P ne dépendent pas de n. La série $F(\rho, \omega)$ est donc convergente pour $\omega=k\theta$, $|\rho|<1$. En d'autres termes, si l'on mène par l'origine une droite faisant un angle $k\theta$ avec l'axe ox, la série $F(\rho, \omega)$ est convergente en tous les points de cette droite dont la distance à l'origine est inférieure à l'unité. Dans un angle quelconque ayant pour sommet l'origine, il y a toujours une infinité de ces droites, puisque le rapport $\frac{\theta}{\pi}$ est incommensurable.

Au contraire, si $\frac{\omega}{\pi}$ est un nombre algébrique, $\sqrt[n]{|\sin n\omega|}$ a pour limite l'unité, et la série $F(\rho, \omega)$ est divergente sauf pour $\rho=0$. Sur une droite passant par l'origine et faisant avec l'axe ox un angle ω tel que $\frac{\omega}{\pi}$ soit un nombre algébrique, la série est donc divergente, sauf à l'origine. Il y a encore une infinité de droites de cette espèce dans tout angle ayant l'origine pour sommet. On voit donc que dans un angle, aussi petit qu'il soit, ayant son sommet à l'origine, il y a toujours une infinité de rayons sur lesquels la série est partout divergente, et une infinité de rayons sur lesquels la série est convergente, tant que la distance du point à l'origine est inférieure à l'unité.