É. GOURSAT

Sur quelques transformations des équations aux dérivées partielles

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 2e série, tome 4 (1902), p. 299-340
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1902_2_4__299_0>

SUR QUELQUES TRANSFORMATIONS

DES

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

DU SECOND ORDRE (1),

PAR M. É. GOURSAT.

En étudiant certaines transformations des surfaces à courbure totale constante, M. Bäcklund (2) a été conduit au problème général suivant :

Étant donné un système de quatre relations distinctes

$$F_i(x, y, z, p, q;\ x', y', z', p', q') = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

entre les coordonnées des éléments de deux systèmes (E), (E′), *déterminer les surfaces du système* (E) *auxquelles correspondent des surfaces de* (E′).

Il existe toujours des surfaces du système (E) auxquelles correspondent des surfaces du système (E′), et, dans certains cas, ces surfaces sont les intégrales d'une équation aux dérivées partielles du second ordre. Il peut arriver aussi que les surfaces de (E′) qui correspondent à des surfaces de (E) soient elles-mêmes les intégrales d'une seconde équation aux dérivées partielles du second ordre. Lorsque cette circonstance se présente on dit que l'on passe de l'une de ces équations à l'autre par une *transformation de Bäcklund,* qui est définie par les quatre relations $F_i = 0$.

Dans une Thèse récente, M. J. Clairin (3) a fait une étude systématique de ces transformations et obtenu un certain nombre de résultats intéressants; ainsi, en se basant uniquement sur des caractères invariants relativement à une transformation de contact, il a établi une classification rationnelle de ces transforma-

(1) La plupart des résultats contenus dans ce Mémoire ont été résumés dans deux Notes présentées à l'Académie des Sciences (*Comptes rendus,* 24 février et 5 mai 1902).

(2) *Mathematische Annalen,* t. XVII et XIX.

(3) *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure,* 1902.

tions en trois espèces. D'un autre côté, il a montré qu'une équation aux dérivées partielles du second ordre prise au hasard ne provient pas d'une transformation de Bäcklund. Parmi les nombreuses questions qui restent encore à résoudre, deux des plus importantes sont celles-ci :

1° Former tous les systèmes de quatre relations $F_i = 0$ définissant une transformation de Bäcklund d'une espèce déterminée;

2° Une équation du second ordre étant donnée, reconnaître si elle provient d'une transformation de Bäcklund, et trouver cette transformation. Quand on cherche à traiter analytiquement ce dernier problème on est conduit à un certain nombre d'équations simultanées entre quatre fonctions inconnues. L'étude directe de ce système paraît à peu près impraticable. Il y a, du reste, une cause de complication évidente *a priori*. En effet, si une équation du second ordre provient d'une transformation de Bäcklund d'une certaine espèce, elle provient aussi d'une infinité de transformations de même espèce que l'on obtient en combinant la première avec une transformation de contact quelconque. Si nos équations simultanées admettent un système de solutions, elles doivent donc en admettre une infinité, dépendant de fonctions arbitraires.

J'ai pu simplifier le problème en supposant que les équations $F_i = 0$, qui définissent la transformation, admettent une transformation de contact infinitésimale par rapport à l'élément x', y', z', p', q'. On peut alors supposer, sans diminuer la généralité, que les équations $F_i = 0$ ne renferment pas z'. En introduisant une forme de Pfaff convenable, on a plusieurs systèmes d'équations simultanées à examiner successivement, dans chacun desquels ne figure qu'une seule inconnue. De plus, toutes les transformations de Bäcklund, qui se déduisent de l'une d'elles en la combinant avec une transformation de contact quelconque, correspondent à une même solution de nos équations simultanées et, par conséquent, se déterminent en même temps.

I.

1. Soient

$$(1) \quad \begin{cases} x' = X(x, y, z, p, q), & y' = Y(x, y, z, p, q), \\ p' = P(x, y, z, p, q), & q' = Q(x, y, z, p, q) \end{cases}$$

un système de quatre relations où les seconds membres X, Y, P, Q sont des fonctions quelconques de x, y, z, p, q. A tout élément (x, y, z, p, q) ces formules font correspondre ∞^1 éléments (x', y', z', p', q'); les valeurs de x', y', p', q' sont données par les formules elles-mêmes, tandis que la valeur de z' reste arbitraire. Tous ces éléments se déduisent de l'un d'entre eux en déplaçant le point (x', y', z') le long d'une parallèle à l'axe Oz, tandis que le plan de l'élément reste parallèle à lui-même. Le problème de Bäcklund peut s'énoncer ainsi :

Quelles surfaces faut-il faire décrire à l'élément (x, y, z, p, q) *pour qu'on puisse leur faire correspondre des surfaces décrites par l'élément* x', y', z', p', q'?

Soit

$$z = \Phi(x, y) \tag{2}$$

l'équation d'une surface décrite par l'élément (x, y, z, p, q); on a

$$p = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \tag{3}$$

et, en remplaçant z, p, q par les valeurs précédentes dans X, Y, P, Q, l'équation

$$dz' = p'\,dx' + q'\,dy' \tag{4}$$

doit être complètement intégrable, puisque le second membre ne renferme pas z.

Cette équation s'écrit encore, en remplaçant x', y', p', q' par leurs expressions (1),

$$\begin{aligned} dz' = \mathrm{P}\Big[\Big(\frac{d\mathrm{X}}{dx} + \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial p} r + \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial q} s\Big) dx + \Big(\frac{d\mathrm{X}}{dy} + \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial p} s + \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial q} t\Big) dy\Big] \\ + \mathrm{Q}\Big[\Big(\frac{d\mathrm{Y}}{dx} + \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial p} r + \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial q} s\Big) dx + \Big(\frac{d\mathrm{Y}}{dy} + \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial p} s + \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial q} t\Big) dy\Big], \end{aligned} \tag{5}$$

où r, s, t désignent les dérivées partielles du second ordre de la fonction $\Phi(x, y)$, et où l'on a posé

$$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + p\frac{\partial}{\partial z}, \qquad \frac{d}{dy} = \frac{\partial}{\partial y} + q\frac{\partial}{\partial z}.$$

En écrivant la condition d'intégrabilité, on voit facilement que les dérivées du troisième ordre disparaissent, et il reste une équation de Monge-Ampère pour déterminer la fonction $\Phi(x, y)$,

$$\mathrm{R}_{pq}(rt - s^2) + \mathrm{R}_{yp} r + \mathrm{R}_{xq} t + \mathrm{R}_{xy} + \mathrm{S}s = 0, \tag{6}$$

les coefficients R_{pq}, R_{yp}, R_{xq}, R_{xy}, S ayant les valeurs suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{R}_{pq} &= \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial p}\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial q} - \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial q}\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial p} + \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial p}\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial q} - \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial q}\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial p}, \\ \mathrm{R}_{yp} &= \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial p}\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial p}\frac{d\mathrm{X}}{dy} + \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial p}\frac{d\mathrm{Q}}{dy} - \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial p}\frac{d\mathrm{Y}}{dy}, \\ \mathrm{R}_{xq} &= \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial q}\frac{d\mathrm{X}}{dx} - \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial q}\frac{d\mathrm{P}}{dx} + \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial q}\frac{d\mathrm{Y}}{dx} - \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial q}\frac{d\mathrm{Q}}{dx}, \\ \mathrm{R}_{xy} &= \frac{d\mathrm{P}}{dy}\frac{d\mathrm{X}}{dx} - \frac{d\mathrm{P}}{dx}\frac{d\mathrm{X}}{dy} + \frac{d\mathrm{Q}}{dy}\frac{d\mathrm{Y}}{dx} - \frac{d\mathrm{Q}}{dx}\frac{d\mathrm{Y}}{dy}, \\ \mathrm{S} &= \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial q}\frac{d\mathrm{P}}{dy} + \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial p}\frac{d\mathrm{X}}{dx} - \frac{d\mathrm{P}}{dx}\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial p} - \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial q}\frac{d\mathrm{X}}{dy} \\ &\quad + \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial q}\frac{d\mathrm{Q}}{dy} + \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial p}\frac{d\mathrm{Y}}{dx} - \frac{d\mathrm{Q}}{dx}\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial p} - \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial q}\frac{d\mathrm{Y}}{dy}. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Ces formules peuvent s'écrire sous une forme abrégée en posant

$$
(8)\qquad \left\{
\begin{aligned}
F_1 &= P\frac{dX}{dx} + Q\frac{dY}{dx},\\
F_2 &= P\frac{dX}{dy} + Q\frac{dY}{dy},\\
F_3 &= P\frac{\partial X}{\partial p} + Q\frac{\partial Y}{\partial p},\\
F_4 &= P\frac{\partial X}{\partial q} + Q\frac{\partial Y}{\partial q};
\end{aligned}
\right.
$$

les relations (7) sont alors équivalentes aux suivantes

$$
(9)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&R_{pq} = \frac{\partial F_3}{\partial q} - \frac{\partial F_4}{\partial p}, \qquad R_{yp} = \frac{dF_3}{dy} - \frac{\partial F_2}{\partial p},\\
&R_{xq} = \frac{\partial F_1}{\partial q} - \frac{dF_4}{dx}, \qquad R_{xy} = \frac{dF_1}{dy} - \frac{dF_2}{dx},\\
&\qquad S = \frac{dF_4}{dy} - \frac{\partial F_2}{\partial q} + \frac{\partial F_1}{\partial p} - \frac{dF_3}{dx}.
\end{aligned}
\right.
$$

Observons que l'on a identiquement

$$
(10)\qquad P\,\overline{dX} + Q\,\overline{dY} = F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dp + F_4\,dq,
$$

en désignant par $\overline{dX}$ et $\overline{dY}$ ce que deviennent dX et dY quand on y remplace dz par $p\,dx + q\,dy$.

2. Pour que la condition d'intégrabilité (4) soit vérifiée identiquement, quelle que soit la fonction $\Phi(x, y)$, il faut et il suffit que l'on ait à la fois

$$R_{pq} = R_{yp} = R_{xq} = R_{xy} = S = 0.$$

La première condition

$$\frac{\partial F_3}{\partial q} - \frac{\partial F_4}{\partial p} = 0$$

montre que F_3 et F_4 sont les dérivées partielles par rapport aux variables p et q respectivement, d'une fonction $U(x, y, z, p, q)$,

$$F_3 = \frac{\partial U}{\partial p}, \qquad F_4 = \frac{\partial U}{\partial q}.$$

Les relations $R_{yp} = 0$, $R_{xq} = 0$ deviennent alors

$$\frac{\partial F_2}{\partial p} = \frac{\partial^2 U}{\partial p\,\partial y} + q\frac{\partial^2 U}{\partial p\,dz}, \qquad \frac{\partial F_1}{\partial q} = \frac{\partial^2 U}{\partial q\,\partial x} + p\frac{\partial^2 U}{\partial q\,\partial z},$$

et l'on en tire

$$F_2 = \frac{dU}{dy} + V(x, y, z, q), \qquad F_1 = \frac{dU}{dx} + W(x, y, z, p).$$

Les deux dernières conditions $R_{xy} = 0$, $S = 0$ donnent ensuite

$$\frac{dV}{dx} = \frac{dW}{dy}, \qquad \frac{\partial V}{\partial q} - \frac{\partial W}{\partial p} = 0;$$

la dernière montre que la valeur commune de $\frac{\partial V}{\partial q}$ et $\frac{\partial W}{\partial p}$ est à la fois indépendante de p et de q. C'est donc une fonction $H(x, y, z)$ des variables x, y, z seulement, et l'on a

$$V = H(x, y, z)q + K(x, y, z), \qquad W = H(x, y, z)p + L(x, y, z);$$

en remplaçant V et W par ces expressions dans la condition $\frac{dV}{dx} = \frac{dW}{dy}$, elle devient

$$\frac{\partial K}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} + \left(\frac{\partial K}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial y}\right)p + \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z}\right)q = 0,$$

et se décompose en trois conditions distinctes

$$\frac{\partial K}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial y}, \qquad \frac{\partial K}{\partial z} = \frac{\partial H}{\partial y}, \qquad \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial z}.$$

Nous pouvons donc poser

$$L = \frac{\partial T}{\partial x}, \qquad K = \frac{\partial T}{\partial y}, \qquad H = \frac{\partial T}{\partial z},$$

T étant une fonction de x, y, z, et nous avons pour expression générale des fonctions F_1, F_2, F_3, F_4, lorsque la condition (4) est vérifiée identiquement,

$$(11) \qquad F_1 = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x} + p\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z}, \qquad F_2 = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y} + q\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z}, \qquad F_3 = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial p}, \qquad F_4 = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial q},$$

en posant $\mathfrak{F} = U + T$.

Il est facile de vérifier et d'expliquer ce résultat. En effet, on tire des formules précédentes

$$(12) \qquad F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dp + F_4\,dq = d\mathfrak{F} - \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z}(dz - p\,dx - q\,dy);$$

d'autre part, la définition même des fonctions F_1, F_2, F_3, F_4 donne l'identité

$$(13)\qquad \begin{aligned} &F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dp + F_4\,dq \\ &\qquad = P\,dX + Q\,dY - \left(P\frac{\partial X}{\partial z} + Q\frac{\partial Y}{\partial z}\right)(dz - p\,dx - q\,dy), \end{aligned}$$

et, en rapprochant ces deux formules, on en déduit la nouvelle identité

$$(14)\qquad d\mathfrak{F} - P\,dX - Q\,dY = \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z} - P\frac{\partial X}{\partial z} - Q\frac{\partial Y}{\partial z}\right)(dz - p\,dx - q\,dy).$$

Les formules (1), jointes à la relation

$$z' = \mathfrak{F}(x, y, z, p, q),$$

définissent donc une transformation de contact, et par suite à toute surface décrite par l'élément (x, y, z, p, q) correspond une surface décrite par l'élément (x', y', z', p', q').

3. Laissant de côté ce cas singulier, nous voyons que la fonction $\Phi(x, y)$ doit être une intégrale de l'équation de Monge-Ampère (6); à toute surface intégrale (Σ) de cette équation correspondent une infinité de surfaces (Σ') décrites par l'élément (x', y', z', p', q'). Toutes ces surfaces, dépendant d'une constante arbitraire, s'obtiendront par une quadrature au moyen de l'équation (4).

Les coefficients R_{pq}, R_{yp}, R_{xq}, R_{xy}, S de l'équation (6) dépendant de quatre fonctions arbitraires X, Y, P, Q, il semble qu'on doit pouvoir l'identifier avec une équation quelconque de la même forme. La suite du calcul montrera qu'il n'en est rien. Nous allons d'abord chercher à quelles conditions doivent satisfaire ces coefficients pour que l'équation (6) provienne d'une condition d'intégrabilité d'une relation de la forme (4) sans aucune réduction sur les coefficients. Cela revient à chercher les conditions d'intégrabilité du système (9), où l'on considère F_1, F_2, F_3, F_4 comme les fonctions inconnues.

Nous traiterons d'abord le cas particulier suivant. Si les formules (1) sont de la forme

$$(15)\qquad x' = x, \qquad y' = y, \qquad p' = f(x, y, z, p), \qquad q' = \varphi(x, y, z, q),$$

la condition d'intégrabilité conduit à l'équation du second ordre

$$Ss + R = 0,$$

où l'on a

$$(16)\qquad S = \frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial \varphi}{\partial q}, \qquad R = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}q - \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial z}p;$$

inversement, les fonctions R et S étant données, cherchons à quelles conditions les équations (16) et les relations

$$(17)\qquad \frac{\partial f}{\partial q}=0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial p}=0$$

sont compatibles.

Des relations (16) et (17) on déduit aisément les conditions suivantes, qui sont *nécessaires :*

$$(18)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 S}{\partial p\,\partial q}=0, \qquad \dfrac{\partial^2 R}{\partial p^2}=\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{\partial S}{\partial p}\right), \qquad \dfrac{\partial^2 R}{\partial q^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial S}{\partial q}\right), \qquad \dfrac{\partial^2 R}{\partial p\,\partial q}=\dfrac{\partial S}{\partial z}, \\ \dfrac{d^2 S}{dx\,dy}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial R}{\partial p}\right)+\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{\partial R}{\partial q}\right), \end{cases}$$

où l'on a posé

$$\frac{d^2}{dx\,dy}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dy}\right).$$

Ces conditions sont aussi *suffisantes*. La première montre que S est la somme d'une fonction des variables (x, y, z, p) et d'une fonction des variables (x, y, z, q). On peut donc toujours trouver deux fonctions $f_1(x, y, z, p)$ et $\varphi_1(x, y, z, q)$ telles que l'on ait

$$(19)\qquad \frac{\partial f_1}{\partial p}-\frac{\partial \varphi_1}{\partial q}=S,$$

et la première des équations (16) devient

$$\frac{\partial (f-f_1)}{\partial p}=\frac{\partial (\varphi-\varphi_1)}{\partial q}.$$

La valeur commune des deux membres de cette équation est indépendante de p et de q, et, par suite, les fonctions f et φ doivent être de la forme

$$f=f_1+Up+V, \qquad \varphi=\varphi_1+Uq+W,$$

U, V, W étant trois fonctions inconnues de x, y, z. La seconde des relations (16) devient, en remplaçant f et φ par les valeurs précédentes,

$$(20)\qquad \mathfrak{R}=\frac{\partial V}{\partial y}-\frac{\partial W}{\partial x}+\left(\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{\partial W}{\partial z}\right)p+\left(\frac{\partial V}{\partial z}-\frac{\partial U}{\partial x}\right)q,$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$\mathfrak{R}=R-\left(\frac{df_1}{dy}-\frac{d\varphi_1}{dx}\right).$$

Des conditions (18) et de la formule (19) on déduit sans peine que l'on a

$$(18)' \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial^2 \mathfrak{R}}{\partial p^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \mathfrak{R}}{\partial q^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \mathfrak{R}}{\partial p\, \partial q} = 0, \\ &\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial z} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial p}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial q}\right); \end{aligned} \right.$$

$\mathfrak{R}$ est donc une fonction linéaire en p et q, et de la relation (20) on conclut que l'on a

$$(21) \quad \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial z} = \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial p}, \qquad \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial z} - \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} = \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial q}, \qquad \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial x} = \mathfrak{R} - p\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial p} - q\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial q}.$$

La condition d'intégrabilité bien connue de ce système

$$(22) \quad \frac{\partial^2 \mathfrak{R}}{\partial p\, \partial x} + \frac{\partial^2 \mathfrak{R}}{\partial q\, \partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\left(p\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial p} + q\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial q} - \mathfrak{R}\right) = 0$$

est précisément identique à la dernière des relations $(18)'$. Cette condition étant supposée remplie, on peut prendre arbitrairement une des fonctions U, V, W; prendre, par exemple, $\mathrm{U} = 0$. Des deux premières équations (21) on tire alors

$$\mathrm{V} = \int_{z_0}^{z} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial q}\, dz + \psi(x, y), \qquad \mathrm{W} = -\int_{z_0}^{z} \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial p}\, dz + \pi(x, y),$$

et, en portant ces expressions de V et de W dans la dernière, elle devient

$$\int_{z_0}^{z} \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{R}}{\partial q\, \partial y} + \frac{\partial^2 \mathfrak{R}}{\partial p\, \partial x}\right) dz + \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \pi}{\partial x} = \mathfrak{R} - p\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial p} - q\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial q},$$

ou, en tenant compte de la relation (22),

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \pi}{\partial x} = \left(\mathfrak{R} - p\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial p} - q\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial q}\right)_{z = z_0}.$$

Il suffira de prendre pour $\psi(x, y)$ et $\pi(x, y)$ deux fonctions de x et de y satisfaisant à cette dernière condition pour avoir une intégrale des équations (21); une des fonctions ψ ou π reste encore arbitraire.

En résumé, *les conditions* (18) *sont nécessaires et suffisantes pour que les équations* (16) *et* (17) *soient compatibles. Si elles sont vérifiées, toutes les solutions s'obtiennent par des quadratures.*

Si l'on a obtenu un premier système de solutions (f, φ), tout autre système de solutions peut s'écrire $(f+\lambda, \varphi+\mu)$, les fonctions λ et μ vérifiant les relations

$$\frac{\partial\lambda}{\partial q}=0, \qquad \frac{\partial\mu}{\partial p}=0, \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial p}=\frac{\partial\mu}{\partial q}, \qquad \frac{d\lambda}{dy}=\frac{d\mu}{dx};$$

on démontre, comme au paragraphe précédent, que l'on doit avoir

$$\lambda=\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial z}p+\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x}, \qquad \mu=\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial z}q+\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y}$$

H étant une fonction arbitraire de x, y, z. Il est clair, en effet, que la condition d'intégrabilité de l'équation

$$dz'=\left(f+\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial z}p+\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x}\right)dx+\left(\varphi+\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial z}q+\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y}\right)dy$$

est indépendante de la fonction $\mathrm{H}(x, y, z)$.

4. Considérons maintenant le cas général des équations (9) où les coefficients R_{pq}, R_{yp}, R_{xq}, R_{xy}, S sont quelconques. On peut toujours, et d'une infinité de manières, trouver quatre fonctions f_1, f_2, f_3, f_4 satisfaisant aux trois premières

$$(23) \qquad \frac{\partial f_3}{\partial q}-\frac{\partial f_4}{\partial p}=\mathrm{R}_{pq}, \qquad \frac{df_3}{dy}-\frac{\partial f_2}{\partial p}=\mathrm{R}_{yp}, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial q}-\frac{df_4}{dx}=\mathrm{R}_{xq};$$

on peut, par exemple, se donner f_4, et l'on obtiendra ensuite f_3, f_2, f_1 par des quadratures. En posant

$$\mathrm{F}_1=f_1+\Phi_1, \qquad \mathrm{F}_2=f_2+\Phi_2, \qquad \mathrm{F}_3=f_3+\Phi_3, \qquad \mathrm{F}_4=f_4+\Phi_4,$$

ces trois équations deviennent

$$\frac{\partial\Phi_3}{\partial q}=\frac{\partial\Phi_4}{\partial p}, \qquad \frac{\partial\Phi_2}{\partial p}=\frac{\partial\Phi_3}{\partial y}+q\frac{\partial\Phi_3}{\partial z}, \qquad \frac{\partial\Phi_1}{\partial q}=\frac{\partial\Phi_4}{\partial x}+p\frac{\partial\Phi_4}{\partial z};$$

on a vu plus haut (n° 2) que la solution la plus générale de ces équations était donnée par les formules

$$\Phi_3=\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial p}, \qquad \Phi_4=\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial q},$$
$$\Phi_1=\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}+p\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z}+f(x,y,z,p), \qquad \Phi_2=\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}+q\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z}+\varphi(x,y,z,q),$$

U étant une fonction arbitraire de x, y, z, p, q; f une fonction de x, y, z, p, et φ une fonction de x, y, z, q.

Cela étant, posons, dans les équations (9),

$$
\begin{aligned}
F_1 &= f_1 + \frac{\partial U}{\partial x} + p\frac{\partial U}{\partial z} + f(x, y, z, p),\\
F_2 &= f_2 + \frac{\partial U}{\partial y} + q\frac{\partial U}{\partial z} + \varphi(x, y, z, q),\\
F_3 &= f_3 + \frac{\partial U}{\partial p},\\
F_4 &= f_4 + \frac{\partial U}{\partial q}.
\end{aligned}
$$

Les trois premières équations sont vérifiées identiquement, et il reste les quatre équations

$$
(24)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{df}{dy} - \frac{d\varphi}{dx} = R_{xy} + \frac{df_2}{dx} - \frac{df_1}{dy}, &&\frac{\partial f}{\partial q} = 0,\\
&\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial \varphi}{\partial q} = S + \frac{\partial f_2}{\partial q} - \frac{\partial f_1}{\partial p} + \frac{df_3}{dx} - \frac{df_4}{dy}, &&\frac{\partial \varphi}{\partial p} = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

On retrouve ainsi un système de la forme (16). En appliquant les conditions d'intégrabilité de ce système, tout en tenant compte de ce que f_1, f_2, f_3, f_4 sont des intégrales des équations (23), on obtient par un calcul un peu long, mais qui ne présente pas de difficultés, les conditions d'intégrabilité du système général (9). Ces conditions sont les suivantes :

$$
(25)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial R_{xq}}{\partial p}\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial R_{yp}}{\partial q}\right) = \frac{\partial^2 R_{xy}}{\partial p\,\partial q} + \frac{d^2 R_{pq}}{dx\,dy} - \frac{\partial S}{\partial z},\\
&\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial R_{yp}}{\partial p}\right) + \frac{d^2 R_{pq}}{dy^2} = \frac{\partial^2 R_{xy}}{\partial p^2} + \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial R_{yp}}{\partial q}\right) - 2\frac{\partial R_{yp}}{\partial z},\\
&\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial R_{xq}}{\partial q}\right) + \frac{d^2 R_{pq}}{dx^2} = \frac{\partial^2 R_{xy}}{\partial q^2} + \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial R_{xq}}{\partial p}\right) - 2\frac{\partial R_{xq}}{\partial z},\\
&\frac{\partial^2 S}{\partial p\,\partial q} + \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial R_{pq}}{\partial q}\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial R_{pq}}{\partial p}\right) = \frac{\partial^2 R_{xq}}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 R_{yp}}{\partial q^2} - 3\frac{\partial R_{pq}}{\partial z},\\
&\frac{d^2 S}{dx\,dy} + \frac{d^2 R_{xq}}{dy^2} + \frac{d^2 R_{yp}}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial R_{xy}}{\partial p}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial R_{xy}}{\partial q}\right) - \frac{\partial R_{xy}}{\partial z}.
\end{aligned}
\right.
$$

Le calcul que nous venons de faire prouve que, si ces conditions sont satisfaites, les équations (9) admettent une infinité de systèmes de solutions que l'on obtiendra par des quadratures. Si l'on connaît un premier système de solutions, d'après ce qu'on a vu au n° 2, on obtiendra tous les autres systèmes de solutions en remplaçant F_1, F_2, F_3, F_4 par

$$F_1+\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial x}+p\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial z},\quad F_2+\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial y}+q\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial z},\quad F_3+\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial p},\quad F_4+\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial q},$$

respectivement, $\mathcal{F}$ étant une fonction arbitraire de x, y, z, p, q.

5. Ayant obtenu F_1, F_2, F_3, F_4, pour avoir X, Y, P, Q, considérons la forme de Pfaff

$$(26)\qquad F_1\,dx+F_2\,dy+F_3\,dp+F_4\,dq+H(dz-p\,dx-q\,dy)+dK,$$

où H et K désignent deux fonctions arbitraires de x, y, z, p, q, et soit

$$(27)\qquad dZ+P\,dX+Q\,dY$$

une forme réduite pour cette expression. Si nous remplaçons partout dz par $p\,dx+q\,dy$, il vient

$$P\,\overline{dX}+Q\,\overline{dY}=F_1\,dx+F_2\,dy+F_3\,dp+F_4\,dq \\ +\frac{d(K-Z)}{dx}\,dx+\frac{d(K-Z)}{dy}\,dy+\frac{\partial(K-Z)}{\partial p}\,dp+\frac{\partial(K-Z)}{\partial q}\,\partial q.$$

Quelles que soient les fonctions H et K, les fonctions

$$F_1+\frac{d(K-Z)}{dx},\quad F_2+\frac{d(K-Z)}{dy},\quad F_3+\frac{\partial(K-Z)}{\partial p},\quad F_4+\frac{\partial(K-Z)}{\partial q}$$

forment un système de solutions des équations (9). Si donc nous prenons pour X, Y, P, Q les fonctions qui figurent dans la forme réduite (27), la condition d'intégrabilité de l'équation

$$dz'=P\,dX+Q\,dY$$

conduira précisément à l'équation (6). Cette équation peut donc s'obtenir d'une infinité de manières au moyen de formules de la forme (1), puisque les fonctions H et K restent arbitraires. Mais toutes les solutions ainsi obtenues ne sont pas essentiellement distinctes. En effet, remplaçons K par une autre fonction K_1, et soit

$$dZ_1+P_1\,dX_1+Q_1\,dY_1$$

une forme réduite pour la nouvelle forme de Pfaff, de telle sorte que l'on ait

$$dZ_1+P_1\,dX_1+Q_1\,dY_1=dZ+P\,dX+Q\,dY+d(K_1-K),$$

ou encore

$$(28)\qquad d(Z_1 - Z - K_1 + K) + P_1\,dX_1 + Q_1\,dY_1 = P\,dX + Q\,dY.$$

En partant des formules

$$(29)\qquad \begin{cases} x'' = X_1(x, y, z, p, q), & y'' = Y_1(x, y, z, p, q), \\ p'' = P_1(x, y, z, p, q), & q'' = Q_1(x, y, z, p, q), \end{cases}$$

et, en écrivant la condition d'intégrabilité de $p''\,dx'' + q''\,dy''$, on est encore conduit à l'équation (6). Mais l'identité (28) prouve que X_1, Y_1, P_1, Q_1 sont des fonctions de X, Y, P, Q, et les formules

$$\begin{aligned} X_1 &= \psi_1(X, Y, P, Q), \\ Y_1 &= \psi_2(X, Y, P, Q), \\ P_1 &= \psi_3(X, Y, P, Q), \\ Q_1 &= \psi_4(X, Y, P, Q), \end{aligned}$$

qui expriment X_1, Y_1, P_1, Q_1 au moyen de X, Y, P, Q, définissent une transformation de contact [1] en (x, p). On passera donc des formules (1) aux formules (29) en effectuant une transformation de contact en (x, p) sur les variables x', y', p', q'. Nous ne considérons pas ces diverses solutions comme distinctes. Il est clair, en effet, que si $p'\,dx' + q'\,dy'$ est une différentielle exacte, il en est de même de $p''\,dx'' + q''\,dy''$. On voit de la même façon que les diverses formes réduites d'une même forme de Pfaff (26) ne sont pas essentiellement distinctes.

Nous pouvons donc supposer $K = 0$, et à toute fonction $H(x, y, z, p, q)$ correspond une forme de Pfaff

$$(30)\qquad F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dp + F_4\,dq + H(dz - p\,dx - q\,dy),$$

qui, ramenée à la forme canonique, fait connaître un système de formules (1) conduisant à l'équation (6). Les divers systèmes de formules correspondant aux diverses formes réduites de l'expression se ramènent à un seul par des transformations de contact en (x, p).

6. Une équation de Monge-Ampère étant donnée, pour qu'elle puisse s'obtenir de la façon qui vient d'être étudiée, il n'est pas nécessaire que ses coefficients vérifient les relations (25); il suffit que l'on puisse trouver un facteur λ, dépendant de x, y, z, p, q, tel qu'en multipliant tous les coefficients de l'équation

---

(1) *Voir*, par exemple, le Mémoire de M. Darboux, *Sur le problème de Pfaff* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. VI, p. 65).

proposée par ce facteur λ, on obtienne de nouveaux coefficients satisfaisant aux conditions (25). On a ainsi un système de *cinq* équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre pour déterminer le facteur inconnu λ. Il semble presque évident que ces équations doivent être incompatibles, si l'équation de Monge-Ampère donnée est absolument quelconque; on s'en assure aisément en examinant des cas particuliers.

Prenons, par exemple, une équation ne renfermant que x, y, z, p, q, r; on a

$$R_{pq} = 0, \qquad R_{xq} = 0, \qquad S = 0,$$

et les équations (25) donnent les conditions

$$\frac{\partial^2 R_{yp}}{\partial q^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 R_{xy}}{\partial q^2} = 0,$$

de sorte que l'équation doit être bilinéaire en r et q.

Supposons encore que l'équation ne renferme ni r, ni t. On a, dans ce cas,

$$R_{pq} = R_{yp} = R_{xq} = 0,$$

et les équations (25) donnent les conditions

$$\frac{\partial^2 S}{\partial p\, \partial q} = 0, \qquad \frac{\partial^2 R_{xy}}{\partial p\, \partial q} = 0,$$

de sorte que l'équation doit être de la forme

$$s = \frac{P + Q}{P_1 + Q_1},$$

P et P_1 étant des fonctions de x, y, z, p et Q, Q_1 des fonctions de x, y, z, q.

Prenons encore l'équation

$$s + f(z) = 0; \tag{31}$$

nous pouvons poser

$$R_{pq} = 0, \qquad R_{yp} = 0, \qquad R_{xq} = 0, \qquad R_{xy} = \lambda f(z), \qquad S = \lambda,$$

λ étant un facteur inconnu, et les conditions (25) deviennent

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial p\, \partial q} = 0, \qquad \frac{\partial^2 (\lambda f(z))}{\partial p\, \partial q} = \frac{\partial \lambda}{\partial z},$$

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial p}\right) = \frac{\partial^2 (\lambda f(z))}{\partial p^2}, \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial q}\right) = \frac{\partial^2 (\lambda f(z))}{\partial q^2},$$

$$\frac{d^2 \lambda}{dx\, dy} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial (\lambda f(z))}{\partial p}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial (\lambda f(z))}{dq}\right) - \frac{\partial (\lambda f(z))}{\partial z}.$$

Les deux premières montrent que λ doit être de la forme

$$\lambda = \varphi(x, y, p) + \psi(x, y, q);$$

les deux suivantes deviennent alors

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y\, \partial p} = f(z) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2}, \qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x\, \partial q} = f(z) \frac{\partial^2 \psi}{\partial q^2}.$$

Si la fonction $f(z)$ ne se réduit pas à une constante, comme nous le supposons, il faudra que l'on ait

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y\, \partial p} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x\, \partial q} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial q^2} = 0,$$

et l'on aura, pour λ, une fonction de la forme

$$\lambda = \mathrm{X}p - \mathrm{Y}q + \mu(x, y).$$

La dernière condition devient

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial x\, \partial y} + \mu f'(z) = (\mathrm{X}' - \mathrm{Y}') f(z);$$

ou satisfait à cette équation en prenant $\mathrm{X}' = \mathrm{Y}' = \mathrm{C}$, $\mu = 0$. Pour qu'il y ait d'autres solutions il faudra que l'on ait aussi

$$\mu f''(z) = (\mathrm{X}' - \mathrm{Y}') f'(z),$$

c'est-à-dire que $\dfrac{f''(z)}{f'(z)}$ soit indépendant de z; la fonction $f(z)$ aura donc la forme

$$f(z) = az + b, \tag{32}$$

ou la forme

$$f(z) = e^{az+b}, \tag{33}$$

a et b étant des coefficients constants. Dans le premier cas on devra avoir

$$\mathrm{X}' = \mathrm{Y}' = \mathrm{C}, \qquad \frac{\partial^2 \mu}{\partial x\, \partial y} + a\mu = 0,$$

et dans le second cas

$$\mu = \frac{\mathrm{X}' - \mathrm{Y}'}{a},$$

les fonctions X, Y restant arbitraires.

II.

7. Tout système de formules de la forme (1) conduit bien à une équation de Monge-Ampère pour déterminer les surfaces (Σ) décrites par l'élément (x, y, z, p, q), auxquelles correspondent des surfaces (Σ') décrites par l'élément (x', y', z', p', q'). Mais les surfaces (Σ') elles-mêmes ne sont pas en général les intégrales d'une équation du second ordre, car on déduit des relations (1) deux équations simultanées du troisième ordre pour définir z' en fonction de x' et de y', lorsque les fonctions X, Y, P, Q sont quelconques. Nous sommes donc conduits à examiner la question suivante. Les fonctions F_1, F_2, F_3, F_4 étant connues, comment faut-il prendre la fonction H pour qu'en ramenant l'expression

$$F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dp + F_4\,dq + H(dz - p\,dx - q\,dy) \tag{34}$$

à une forme réduite

$$dZ + P\,dX + Q\,dY,$$

les formules

$$\left\{\begin{array}{ll} x' = X(x, y, z, p, q), & y' = Y(x, y, z, p, q), \\ p' = P(x, y, z, p, q), & q' = Q(x, y, z, p, q) \end{array}\right. \tag{35}$$

définissent une transformation de Bäcklund?

Nous rappellerons d'abord quelques propositions bien connues qui jouent un rôle important dans la théorie du problème de Pfaff [1]. Étant donnée l'expression différentielle

$$\Theta_d = X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 + \ldots + X_n\,dx_n, \tag{36}$$

où $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des fonctions données de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, le système d'équations différentielles

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}\,dx_1 + \ldots + a_{n1}\,dx_n = 0, \\ a_{12}\,dx_1 + \ldots + a_{n2}\,dx_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{1n}\,dx_1 + \ldots + a_{nn}\,dx_n = 0, \end{array}\right. \tag{37}$$

où l'on a posé

$$a_{ik} = \frac{\partial X_i}{\partial x_k} - \frac{\partial X_k}{\partial x_i},$$

---

[1] DARBOUX, *Sur le problème de Pfaff* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. VI, 1882).

est un *système invariant* associé à la forme de Pfaff (36). Si l'on remplace les n variables x_i par n variables indépendantes nouvelles y_i, la forme Θ_d se change en une forme analogue

$$Y_1\,dy_1 + Y_2\,dy_2 + \ldots + Y_n\,dy_n,$$

où $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ sont des fonctions de $y_1, y_2, \ldots, y_n$, et le système (37) est remplacé par un système de même forme

$$\begin{aligned} &b_{11}\,dy_1 + \ldots + b_{n1}\,dy_n = 0,\\ &b_{12}\,dy_1 + \ldots + b_{n2}\,dy_n = 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ &b_{1n}\,dy_1 + \ldots + b_{nn}\,dy_n = 0, \end{aligned}$$

où

$$b_{ik} = \frac{\partial Y_i}{\partial y_k} - \frac{\partial Y_k}{\partial y_i}.$$

Dans le cas de la forme (34), le nombre des variables indépendantes est égal à 5. Les équations (37) se réduisent à quatre équations distinctes, car le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} & a_{51}\\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} & a_{52}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} & a_{53}\\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & a_{54}\\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & a_{55} \end{vmatrix}$$

est un déterminant de Pfaff d'ordre impair, d'après les relations évidentes

$$a_{ii} = 0, \qquad a_{ik} + a_{ki} = 0.$$

Nous supposerons qu'elles se réduisent à *quatre* équations distinctes, et non à un nombre moindre. Elles admettent alors quatre intégrales distinctes, dont il est facile d'avoir la signification. En effet, l'expression (34) étant supposée ramenée à l'une des formes réduites,

$$dZ + P\,dX + Q\,dY, \quad P\,dX + Q\,dY,$$

le système invariant (37) se réduit pour l'une ou l'autre de ces deux formes à

$$dX = 0, \qquad dY = 0, \qquad dP = 0, \qquad dQ = 0;$$

les fonctions X, Y, P, Q, qui figurent dans la forme réduite, sont donc des intégrales du système invariant (37), et toute autre intégrale de ce système est une fonction arbitraire de X, Y, P, Q. Si la forme (34) pouvait être ramenée à l'une des deux formes

$$dZ + P\,dX, \quad P\,dX,$$

le système invariant correspondant se réduirait à deux équations distinctes seulement qui s'écriraient avec les variables de la forme réduite

$$dX = 0, \qquad dP = 0.$$

C'est le cas exceptionnel que nous laissons de côté.

Le système invariant qui correspond à l'expression (34) est

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial F_1}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial x} + q\frac{\partial H}{\partial x} - p\frac{\partial H}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial F_1}{\partial p} - \frac{\partial F_3}{\partial x} - H - p\frac{\partial H}{\partial p}\right)dp&\\ + \left(\frac{\partial F_1}{\partial q} - p\frac{\partial H}{\partial q} - \frac{\partial F_4}{\partial x}\right)dq + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{dH}{dx}\right)dz &= 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} - q\frac{\partial H}{\partial x} + p\frac{\partial H}{\partial y}\right)dx + \left(\frac{\partial F_2}{\partial p} - \frac{\partial F_3}{\partial y} - q\frac{\partial H}{\partial p}\right)dp&\\ + \left(\frac{\partial F_2}{\partial q} - q\frac{\partial H}{\partial q} - H - \frac{\partial F_4}{\partial y}\right)dq + \left(\frac{\partial F_2}{\partial z} - \frac{dH}{dy}\right)dz &= 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial F_3}{\partial x} + H + p\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial F_1}{\partial p}\right)dx + \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} + q\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial F_2}{\partial p}\right)dy&\\ + \left(\frac{\partial F_3}{\partial q} - \frac{\partial F_4}{\partial p}\right)dq + \left(\frac{\partial F_3}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial p}\right)dz &= 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial F_4}{\partial x} + p\frac{\partial H}{\partial q} - \frac{\partial F_1}{\partial q}\right)dx + \left(\frac{\partial F_4}{\partial y} + H + q\frac{\partial H}{\partial q} - \frac{\partial F_2}{\partial q}\right)dy&\\ + \left(\frac{\partial F_4}{\partial p} - \frac{\partial F_3}{\partial q}\right)dp + \left(\frac{\partial F_4}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial q}\right)dz &= 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{dH}{dx} - \frac{\partial F_1}{\partial z}\right)dx + \left(\frac{dH}{dy} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)dy&\\ + \left(\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial F_3}{\partial z}\right)dp + \left(\frac{\partial H}{\partial q} - \frac{\partial F_4}{\partial z}\right)dq &= 0;\end{aligned}$$

ce système peut encore s'écrire, en ajoutant à la première équation la dernière multipliée par p, et à la seconde équation la dernière multipliée par q,

$$
(38)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\left(\frac{dF_1}{dy} - \frac{dF_2}{dx}\right) dy + \left(\frac{\partial F_1}{\partial p} - H - \frac{dF_3}{dx}\right) dp \\
&\qquad + \left(\frac{\partial F_1}{\partial q} - \frac{dF_4}{dx}\right) dq + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{dH}{dx}\right)(dz - p\,dx - q\,dy) = 0, \\
&\left(\frac{dF_2}{dx} - \frac{dF_1}{dy}\right) dx + \left(\frac{\partial F_2}{\partial p} - \frac{dF_3}{dy}\right) dp \\
&\qquad + \left(\frac{\partial F_2}{\partial q} - H - \frac{dF_4}{dy}\right) dq + \left(\frac{\partial F_2}{\partial z} - \frac{dH}{dy}\right)(dz - p\,dx - q\,dy) = 0, \\
&\left(\frac{dF_3}{dx} + H - \frac{\partial F_1}{\partial p}\right) dx + \left(\frac{dF_3}{dy} - \frac{\partial F_2}{\partial p}\right) dy \\
&\qquad + \left(\frac{\partial F_3}{\partial q} - \frac{\partial F_4}{\partial p}\right) dq + \left(\frac{\partial F_3}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial p}\right)(dz - p\,dx - q\,dy) = 0, \\
&\left(\frac{dF_4}{dx} - \frac{\partial F_1}{\partial q}\right) dx + \left(\frac{dF_4}{dy} + H - \frac{\partial F_2}{\partial q}\right) dy \\
&\qquad + \left(\frac{\partial F_4}{\partial p} - \frac{\partial F_3}{\partial q}\right) dp + \left(\frac{\partial F_4}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial q}\right)(dz - p\,dx - q\,dy) = 0, \\
&\left(\frac{dH}{dx} - \frac{\partial F_1}{\partial z}\right) dx + \left(\frac{dH}{dy} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) dy \\
&\qquad + \left(\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) dp + \left(\frac{\partial H}{\partial q} - \frac{\partial F_4}{\partial z}\right) dq = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Rappelons encore les propriétés suivantes des transformations de Bäcklund [1] : Si les formules (35) définissent une transformation de Bäcklund, elle peut être une transformation B_2 ou une transformation B_3. Elle sera une transformation B_2 si à un élément (x', y', z', p', q') correspondent ∞^1 éléments unis (x, y, z, p, q), c'est-à-dire si le déterminant

$$
\begin{vmatrix}
\frac{dX}{dx} & \frac{dX}{dy} & \frac{\partial X}{\partial p} & \frac{\partial X}{\partial q} \\
\frac{dY}{dx} & \frac{dY}{dy} & \frac{\partial Y}{\partial p} & \frac{\partial Y}{\partial q} \\
\frac{dP}{dx} & \frac{dP}{dy} & \frac{\partial P}{\partial p} & \frac{\partial P}{\partial q} \\
\frac{dQ}{dx} & \frac{dQ}{dy} & \frac{\partial Q}{\partial p} & \frac{\partial Q}{\partial q}
\end{vmatrix}
$$

est nul. Cette égalité exprime que X, Y, P, Q sont des intégrales d'une équation

(1) *Voir* la Thèse de M. Clairin; I^{re} Partie.

linéaire de la forme

$$A\frac{dV}{dx}+B\frac{dV}{dy}+C\frac{\partial V}{\partial p}+D\frac{\partial V}{\partial q}=0,$$

A, B, C, D étant des fonctions de x, y, z, p, q. Les caractéristiques de cette équation sont données par le système d'équations différentielles

$$\frac{dx}{A}=\frac{dy}{B}=\frac{dz}{Ap+Bq}=\frac{dp}{C}=\frac{dq}{D},$$

et l'on voit que ces caractéristiques doivent satisfaire à la relation

$$dz-p\,dx-q\,dy=0,$$

c'est-à-dire qu'elles forment des multiplicités M_1 d'éléments unis. Or, si X, Y, P, Q sont les fonctions qui figurent dans la forme réduite correspondant à l'équation (34), les équations

$$X=C_1,\qquad Y=C_2,\qquad P=C_3,\qquad Q=C_4$$

représentent l'intégrale générale du système (38). Il faudra donc que les équations (38) entraînent la relation $dz-p\,dx-q\,dy=0$, et cette condition est suffisante. Si l'on remplace dz par $p\,dx+q\,dy$ dans ces équations, elles devront se réduire à trois relations distinctes entre dx, dy, dp, dq. Pour cela, il faut d'abord que l'on ait

$$(39)\qquad \begin{vmatrix} 0 & \frac{dF_1}{dy}-\frac{dF_2}{dx} & \frac{\partial F_1}{\partial p}-\frac{dF_3}{dx}-H & \frac{\partial F_1}{\partial q}-\frac{dF_4}{dx} \\ \frac{dF_2}{dx}-\frac{dF_1}{dy} & 0 & \frac{\partial F_2}{\partial p}-\frac{dF_3}{dy} & \frac{\partial F_2}{\partial q}-\frac{dF_4}{dy}-H \\ \frac{dF_3}{dx}+H-\frac{\partial F_1}{\partial p} & \frac{dF_3}{dy}-\frac{\partial F_2}{\partial p} & 0 & \frac{\partial F_3}{\partial q}-\frac{\partial F_4}{\partial p} \\ \frac{dF_4}{dx}-\frac{\partial F_1}{\partial p} & \frac{dF_4}{dy}+H-\frac{\partial F_2}{\partial q} & \frac{\partial F_4}{\partial p}-\frac{\partial F_3}{\partial q} & 0 \end{vmatrix}=0.$$

Nous avons là un déterminant de Pfaff d'ordre pair, et par conséquent un carré parfait. En l'égalant à zéro, nous obtenons, pour déterminer H, une équation du second degré

$$(40)\qquad \begin{aligned}&\left(\frac{dF_1}{dy}-\frac{dF_2}{dx}\right)\left(\frac{\partial F_3}{\partial q}-\frac{\partial F_4}{\partial p}\right)+\left(\frac{\partial F_2}{\partial p}-\frac{dF_3}{dy}\right)\left(\frac{\partial F_1}{\partial q}-\frac{dF_4}{dx}\right)\\ &\quad=\left(\frac{\partial F_1}{\partial p}-\frac{dF_3}{dx}-H\right)\left(\frac{\partial F_2}{\partial q}-\frac{dF_4}{dy}-H\right);\end{aligned}$$

cette condition est suffisante, car tous les mineurs du premier ordre du déterminant précédent seront nuls aussi, et les quatre premières des équations (38) se réduiront à deux seulement.

En résumé, pour que la forme de Pfaff (34) conduise à une transformation de Bäcklund B_2, il faut et il suffit que H soit racine de l'équation (40).

8. Cherchons maintenant à quelles conditions les formules (1) définissent une transformation de Bäcklund B_3. De ces équations on déduit, en différentiant, les relations

$$dx' = \frac{dX}{dx}dx + \frac{dX}{dy}dy + \frac{\partial X}{\partial p}dp + \frac{\partial X}{\partial q}dq,$$

$$dy' = \frac{dY}{dx}dx + \frac{dY}{dy}dy + \frac{\partial Y}{\partial p}dp + \frac{\partial Y}{\partial q}dq,$$

$$r'\,dx' + s'\,dy' = \frac{dP}{dx}dx + \frac{dP}{dy}dy + \frac{\partial P}{\partial p}dp + \frac{\partial P}{\partial q}dq,$$

$$s'\,dx' + t'\,dy' = \frac{dQ}{dx}dx + \frac{dQ}{dy}dy + \frac{\partial Q}{\partial p}dp + \frac{\partial Q}{\partial q}dq,$$

qui permettent d'exprimer dx, dy, dp, dq en fonction de dx', dy', ou encore dx', dy', dp, dq en fonction de dx et de dy. En écrivant que le coefficient de dy dans dp est égal au coefficient de dx dans dq, on est conduit à la condition suivante, donnée par Bäcklund sous la forme la plus générale [1] :

$$(41)\quad [X, Y](r't' - s'^2) - [X, Q]r' + [Y, P]t' + [P, Q] + \{[X, P] - [Y, Q]\}s' = 0,$$

$[u, v]$ désignant le crochet jacobien

$$\begin{aligned}[u, v] = {} & \frac{\partial u}{\partial p}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + p\frac{\partial v}{\partial z}\right) + \frac{\partial u}{\partial q}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + q\frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ & - \frac{\partial v}{\partial p}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + p\frac{\partial u}{\partial z}\right) - \frac{\partial v}{\partial q}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + q\frac{\partial u}{\partial z}\right).\end{aligned}$$

Pour que les formules (1) définissent une transformation de Bäcklund B_3, il faut et il suffit que les rapports des coefficients de l'équation (41) ne dépendent que de X, Y, P, Q, ce qui fournit quatre conditions auxquelles doivent satisfaire les fonctions X, Y, P, Q.

Si ces fonctions étaient connues, il serait toujours facile de s'assurer si ces conditions sont vérifiées. Mais, dans le problème qui nous occupe, X, Y, P, Q ne peuvent pas être considérées comme des fonctions connues de x, y, z, p, q;

---

(1) *Voir* Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. III, p. 440.

nous savons seulement que ce sont les fonctions qui figurent dans la forme réduite de l'expression de Pfaff (34), où le coefficient H de dz est lui-même indéterminé.

Pour lever la difficulté, on peut employer l'artifice suivant, qui n'exige pas de trop longs calculs. Supposons que l'expression de Pfaff (34) soit du type indéterminé, de façon que la forme réduite soit

$$dZ + P\,dX + Q\,dY,$$

X, Y, P, Q, Z étant cinq fonctions indépendantes de x, y, z, p, q; nous poserons

$$U(f) = \frac{\partial f}{\partial Z}, \tag{42}$$

$$\begin{aligned} V(\varphi, \psi) = {} & \frac{D(\varphi, \psi)}{D(X, Y)}[X, Y] + \frac{D(\varphi, \psi)}{D(X, Q)}[X, Q] + \frac{D(\varphi, \psi)}{D(Y, P)}[Y, P] + \frac{D(\varphi, \psi)}{D(P, Q)}[P, Q] \\ & + \frac{1}{2}\left\{\frac{D(\varphi, \psi)}{D(X, P)} - \frac{D(\varphi, \psi)}{D(Y, Q)}\right\}\{[X, P] - [Y, Q]\}, \end{aligned} \tag{43}$$

f, φ, ψ étant des fonctions quelconques de X, Y, Z, P, Q. Si les rapports des cinq expressions

$$[X, Y], \quad [X, Q], \quad [Y, P], \quad [P, Q], \quad [X, P] - [Y, Q] \tag{44}$$

ne dépendent que de X, Y, P, Q, les deux équations où l'on regarde φ comme inconnue :

$$U(\varphi) = 0, \qquad V(\varphi, \psi) = 0, \tag{45}$$

formeront toujours un système complet, pourvu que l'on prenne pour ψ une intégrale quelconque de l'équation

$$U(\psi) = 0;$$

en effet, dans l'équation $V(\varphi, \psi) = 0$, les rapports des coefficients de $\frac{\partial \varphi}{\partial X}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial Y}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial P}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial Q}$ seront indépendants de Z, pourvu que la fonction ψ soit elle-même indépendante de Z. Réciproquement, si les équations (45) forment un système complet toutes les fois que ψ est indépendant de Z, les rapports des cinq expressions (44) doivent être indépendants de Z. On s'en assure aisément en faisant, par exemple, successivement $\psi = X$, $\psi = Y$, $\psi = P$, $\psi = Q$. La condition précédente est donc nécessaire et suffisante pour que les formules (1) définissent une transformation de Bäcklund.

Le principe de la méthode étant expliqué, nous allons chercher ce que devient le système (45) quand on passe des variables X, Y, Z, P, Q aux variables x, y, z, p, q. Les intégrales de l'équation $U(f) = 0$ sont précisément X, Y, P, Q, de sorte que les équations différentielles des caractéristiques doivent être identiques aux équations (38). Si f est une intégrale de $U(f) = 0$, la relation $df = 0$, ou

$$\frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy + \frac{\partial f}{\partial p}dp + \frac{\partial f}{\partial q}dq + \frac{\partial f}{\partial z}(dz - p\,dx - q\,dy) = 0,$$

doit être une conséquence des relations (38). Les quatre premières de ces relations sont distinctes si H n'est pas racine de l'équation (40) et, par suite, l'équation $\frac{\partial f}{\partial \mathrm{Z}} = 0$ devient, avec les variables x, y, z, p, q,

$$(46)\quad \begin{vmatrix} 0 & \frac{dF_1}{dy} - \frac{dF_2}{dx} & \frac{\partial F_1}{\partial p} - H - \frac{dF_3}{dx} & \frac{\partial F_1}{\partial q} - \frac{dF_4}{dx} & \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{dH}{dx} \\ \frac{dF_2}{dx} - \frac{dF_1}{dy} & 0 & \frac{\partial F_2}{\partial p} - \frac{dF_3}{dy} & \frac{\partial F_2}{\partial q} - H - \frac{dF_4}{dy} & \frac{\partial F_2}{\partial z} - \frac{dH}{dy} \\ \frac{dF_3}{dx} + H - \frac{\partial F_1}{\partial p} & \frac{dF_3}{dy} - \frac{\partial F_2}{\partial p} & 0 & \frac{\partial F_3}{\partial q} - \frac{\partial F_4}{\partial p} & \frac{\partial F_3}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial p} \\ \frac{dF_4}{dx} - \frac{\partial F_1}{\partial q} & \frac{dF_4}{dy} + H - \frac{\partial F_2}{\partial q} & \frac{\partial F_4}{\partial p} - \frac{\partial F_3}{\partial q} & 0 & \frac{\partial F_4}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{df}{dx} & \frac{df}{dy} & \frac{\partial f}{\partial p} & \frac{\partial f}{\partial q} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

9. Avant de nous occuper de l'équation $V(\varphi, \psi) = 0$, nous établirons d'abord quelques relations auxiliaires. Nous poserons, pour abréger,

$$(47)\quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dX}{dx} = a_0, \quad \frac{dX}{dy} = b_0, \quad \frac{\partial X}{\partial p} = d_0, \quad \frac{\partial X}{\partial q} = c_0, \quad \frac{dY}{dx} = a_1, \quad \frac{dY}{dy} = b_1, \quad \frac{\partial Y}{\partial p} = d_1, \quad \frac{\partial Y}{\partial q} = c_1, \\ \frac{dP}{dx} = a_3, \quad \frac{dP}{dy} = b_3, \quad \frac{\partial P}{\partial p} = d_3, \quad \frac{\partial P}{\partial q} = c_3, \quad \frac{dQ}{dx} = a_2, \quad \frac{dQ}{dy} = b_2, \quad \frac{\partial Q}{\partial p} = d_2, \quad \frac{\partial Q}{\partial q} = c_2, \\ \qquad (ad)_{ij} = a_i d_j - a_j d_i, \qquad (ab)_{ij} = a_i b_j - a_j b_i, \qquad \ldots \qquad (i, j = 0, 1, 2, 3). \end{array} \right.$$

Les expressions telles que $(ad)_{ij}$ sont liées par un certain nombre de relations dont nous aurons besoin; on les obtient facilement comme il suit. Désignons par u_1, u_2, u_3, u_4 quatre indéterminées, et posons

$$(48)\quad \left\{ \begin{array}{l} v_1 = a_0 u_1 + b_0 u_2 + c_0 u_3 + d_0 u_4, \\ v_2 = a_1 u_1 + b_1 u_2 + c_1 u_3 + d_1 u_4, \\ v_3 = a_2 u_1 + b_2 u_2 + c_2 u_3 + d_2 u_4, \\ v_4 = a_3 u_1 + b_3 u_2 + c_3 u_3 + d_3 u_4; \end{array} \right.$$

on tire de ces formules

$$d_3 v_1 + d_2 v_2 - d_1 v_3 - d_0 v_4 = [(ad)_{03} + (ad)_{12}]\, u_1 + [(bd)_{03} + (bd)_{12}]\, u_2 + [(cd)_{03} + (cd)_{12}]\, u_3,$$
$$c_3 v_1 + c_2 v_2 - c_1 v_3 - c_0 v_4 = [(ac)_{03} + (ac)_{12}]\, u_1 + [(bc)_{03} + (bc)_{12}]\, u_2 + [(dc)_{03} + (dc)_{12}]\, u_4,$$
$$b_3 v_1 + b_2 v_2 - b_1 v_3 - b_0 v_4 = [(ab)_{03} + (ab)_{12}]\, u_1 + [(cb)_{03} + (cb)_{12}]\, u_3 + [(db)_{03} + (db)_{12}]\, u_4,$$
$$a_3 v_1 + a_2 v_2 - a_1 v_3 - a_0 v_4 = [(ba)_{03} + (ba)_{12}]\, u_2 + [(ca)_{03} + (ca)_{12}]\, u_3 + [(da)_{03} + (da)_{12}]\, u_4.$$

En multipliant respectivement ces dernières formules par a_i, b_i, $-c_i$, $-d_i$, on obtient quatre nouvelles formules, dont nous n'écrirons que la première

$$(49)\quad \begin{aligned}&[(ad)_{03} + (bc)_{03}]v_1 + [(ad)_{02} + (bc)_{02}]v_2 - [(ad)_{01} + (bc)_{01}]v_3\\ &= [(ad)_{03} + (ad)_{12}](a_0 u_1 + d_0 u_4) + [(bd)_{03} + (bd)_{12}](a_0 u_2 + c_0 u_4]\\ &+ [(cd)_{03} + (cd)_{12}](a_0 u_3 - b_0 u_4) + [(ac)_{03} + (ac)_{12}](b_0 u_1 + d_0 u_3]\\ &+ [(bc)_{03} + (bc)_{12}](b_0 u_2 + c_0 u_4) + [(ab)_{03} + (ab)_{12}](d_0 u_2 - c_0 u_2].\end{aligned}$$

En donnant aux indéterminées u_1, u_2, u_3, u_4 des valeurs particulières, on peut obtenir des relations qui nous seront utiles. Si, par exemple, nous prenons $u_1 = d_1$, $u_2 = c_1$, $u_3 = -b_1$, $u_4 = -a_1$, on a

$$v_1 = (ad)_{01} + (bc)_{01}, \qquad v_2 = 0, \qquad v_3 = (ad)_{21} + (bc)_{21},$$

et la relation (49) devient

$$(50)\quad \begin{aligned}&[(ad)_{01} + (bc)_{01}][(ad)_{03} + (bc)_{03} + (ad)_{12} + (bc)_{12}]\\ &= [(cd)_{03} + (cd)_{12}](ba)_{01} + [(bd)_{03} + (bd)_{12}](ac)_{01} + [(ac)_{03} + (ac)_{12}](bd)_{01}\\ &+ [(ab)_{03} + (ab)_{12}](dc)_{01} + [(ad)_{03} + (ad)_{12}](ad)_{01} + [(bc)_{03} + (bc)_{12}](bc)_{01}.\end{aligned}$$

Si nous faisons de même dans l'identité (49)

$$u_1 = d_3, \qquad u_2 = c_3, \qquad u_3 = -b_3, \qquad u_4 = -a_3,$$

il vient

$$v_1 = (ad)_{03} + (bc)_{03}, \qquad v_2 = (ad)_{13} + (bc)_{13}, \qquad v_3 = (ad)_{23} + (bc)_{23}, \qquad v_4 = 0,$$

et l'on a une nouvelle relation

$$(51)\quad \begin{aligned}&[(ad)_{03} + (bc)_{03}]^2 + [(ad)_{02} + (bc)_{02}][(ad)_{13} + (bc)_{13}]\\ &\qquad - [(ad)_{01} + (bc)_{01}][(ad)_{23} + (bc)_{23}]\\ &= [(cd)_{03} + (cd)_{12}](ba)_{03} + [(bd)_{03} + (bd)_{12}](ac)_{03}\\ &+ [(ac)_{03} + (ac)_{12}](bd)_{03} + [(ab)_{03} + (ab)_{12}](dc)_{03}\\ &+ [(ad)_{03} + (ad)_{12}](ad)_{03} + [(bc)_{03} + (bc)_{12}](bc)_{03}.\end{aligned}$$

De ces relations (50) et (51), il serait facile d'en déduire d'autres par des permutations de lettres ou d'indices.

10. Cela posé, considérons l'équation

$$(52)\quad \begin{aligned} W(\varphi,\psi) = {} & [(cd)_{30}+(cd)_{21}]\,\Delta_{xy}(\varphi,\psi)+[(bd)_{30}+(bd)_{21}]\,\Delta_{xq}(\varphi,\psi) \\ & +[(ac)_{03}+(ac)_{12}]\,\Delta_{yp}(\varphi,\psi)+[(ab)_{03}+(ab)_{12}]\,\Delta_{pq}(\varphi,\psi) \\ & +\tfrac{1}{2}[(ad)_{03}+(ad)_{12}-(bc)_{03}-(bc)_{12}]\,\{\Delta_{xp}(\varphi,\psi)-\Delta_{yq}(\varphi,\psi)\}=0, \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\Delta_{xy}(\varphi,\psi)=\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\psi}{dy}-\frac{d\varphi}{dy}\frac{d\psi}{dx},\quad \Delta_{xq}(\varphi,\psi)=\frac{d\psi}{dx}\frac{\partial\varphi}{\partial q}-\frac{d\varphi}{dx}\frac{\partial\psi}{\partial q},\quad \Delta_{yp}(\varphi,\psi)=\frac{d\varphi}{dy}\frac{\partial\psi}{\partial p}-\frac{d\psi}{dy}\frac{\partial\varphi}{\partial p},$$

$$\Delta_{pq}(\varphi,\psi)=\frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{\partial\psi}{\partial q}-\frac{\partial\varphi}{\partial q}\frac{\partial\psi}{\partial p},\quad \Delta_{xp}(\varphi,\psi)=\frac{d\varphi}{dx}\frac{\partial\psi}{\partial p}-\frac{d\psi}{dx}\frac{\partial\varphi}{\partial p},\quad \Delta_{yq}(\varphi,\psi)=\frac{d\varphi}{dy}\frac{\partial\psi}{\partial q}-\frac{d\psi}{dy}\frac{\partial\varphi}{\partial q}.$$

Cherchons ce que devient cette équation quand on prend pour variables X, Y, P, Q; nous supposerons que les fonctions φ et ψ sont des intégrales de l'équation (46) ou, ce qui revient au même, de l'équation $U(f)=0$. Ces fonctions sont, par conséquent, indépendantes de Z. On a

$$\begin{aligned} \frac{D(\varphi,\psi)}{D(x,y)} = {} & \frac{D(\varphi,\psi)}{D(X,Y)}\frac{D(X,Y)}{D(x,y)}+\frac{D(\varphi,\psi)}{D(X,P)}\frac{D(X,P)}{D(x,y)}+\frac{D(\varphi,\psi)}{D(X,Q)}\frac{D(X,Q)}{D(x,y)} \\ & +\frac{D(\varphi,\psi)}{D(Y,P)}\frac{D(Y,P)}{D(x,y)}+\frac{D(\varphi,\psi)}{D(Y,Q)}\frac{D(Y,Q)}{D(x,y)}+\frac{D(\varphi,\psi)}{D(P,Q)}\frac{D(P,Q)}{D(x,y)}, \end{aligned}$$

et de même pour $\frac{D(\varphi,\psi)}{D(x,p)}$, ... Le coefficient de $\frac{D(\varphi,\psi)}{D(X,Y)}$ dans $W(\varphi,\psi)$ est donc

$$\begin{aligned} & [(cd)_{30}+(cd)_{21}]\left\{\frac{D(X,Y)}{D(x,y)}+\frac{D(X,Y)}{D(z,x)}p+\frac{D(X,Y)}{D(y,z)}q\right\} \\ & +[(bd)_{03}+(bd)_{12}]\left\{\frac{D(X,Y)}{D(x,q)}+p\frac{D(X,Y)}{D(z,q)}\right\} \\ & +[(ac)_{03}+(ac)_{12}]\left\{\frac{D(X,Y)}{D(y,p)}+q\frac{D(X,Y)}{D(z,p)}\right\}+[(ab)_{03}+(ab)_{12}]\frac{D(X,Y)}{D(p,q)} \\ & +\tfrac{1}{2}[(ad)_{03}+(ad)_{12}-(bc)_{03}-(bc)_{12}]\left\{\frac{D(X,Y)}{D(x,p)}+p\frac{D(X,Y)}{D(z,p)}-\frac{D(X,Y)}{D(y,q)}-q\frac{D(X,Y)}{D(z,q)}\right\}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire, d'après les notations (47),

$$\begin{aligned} & [(cd)_{03}+(cd)_{12}]\,(ba)_{01}+[(bd)_{03}+(bd)_{12}]\,(ac)_{01} \\ & \quad +[(ac)_{03}+(ac)_{12}]\,(bd)_{01}+[(ab_{03})+(ab)_{12}]\,(dc)_{01} \\ & \quad +\tfrac{1}{2}[(ad)_{03}+(ad)_{12}-(bc)_{03}-(bc)_{12}]\,[(ad)_{01}-(bc)_{01}]. \end{aligned}$$

En tenant compte de la relation (50), on voit aisément que ce coefficient est égal à

$$\tfrac{1}{2}[(ad)_{03}+(bc)_{03}+(ad)_{12}+(bc)_{12}]\,\{(ad)_{01}+(bc)_{01}\}.$$

On verrait de même que les coefficients de $\dfrac{D(\varphi,\psi)}{D(X,Q)}$, $\dfrac{D(\varphi,\psi)}{D(Y,P)}$, $\dfrac{D(\varphi,\psi)}{D(P,Q)}$ dans $W(\varphi,\psi)$ sont respectivement

$$\text{Pour } \frac{D(\varphi,\psi)}{D(X,Q)}\cdots\quad \tfrac{1}{2}[(ad)_{03}+(bc)_{03}+(ad)_{12}+(bc)_{12}]\,\{(ad)_{02}+(bc)_{02}\},$$

$$\text{Pour } \frac{D(\varphi,\psi)}{D(Y,P)}\cdots\quad \tfrac{1}{2}[(ad)_{03}+(bc)_{03}+(ad)_{12}+(bc)_{12}]\,\{(ad)_{13}+(bc)_{13}\},$$

$$\text{Pour } \frac{D(\varphi,\psi)}{D(P,Q)}\cdots\quad \tfrac{1}{2}[(ad)_{03}+(bc)_{03}+(ad)_{12}+(bc)_{12}]\,\{(ad)_{32}+(bc)_{32}\}.$$

Quant aux coefficients de $\dfrac{D(\varphi,\psi)}{D(X,P)}$ et de $\dfrac{D(\varphi,\psi)}{D(Y,P)}$, on vérifie aisément, au moyen de l'identité (51) et de celle que l'on en déduit en permutant les indices 0 et 3, 1 et 2, que la différence de ces coefficients est

$$\tfrac{1}{2}[(ad)_{03}+(bc)_{03}+(ad)_{12}+(bc)_{12}]\,[(ad)_{03}+(bc)_{03}-(ad)_{12}-(bc)_{12}],$$

tandis que la somme de ces coefficients est égale à δ :

$$\begin{aligned}\delta = {} & \tfrac{1}{2}[(ad)_{03}+(bc)_{03}-(ad)_{12}-(bc)_{12}]^2 \\ & + 2[(ad)_{02}+(bc)_{02}]\;[(ad)_{13}+(bd)_{13}] \\ & - 2[(ad)_{01}+(bc)_{01}]\;[(ad)_{23}+(bc)_{23}].\end{aligned} \tag{53}$$

Posons encore

$$h=(ad)_{03}+(bc)_{03}+(ad)_{12}+(bc)_{12}=-[X,P]-[Y,Q], \tag{54}$$

et observons que l'on a

$$(ad)_{01}+(bc)_{01}=-[X,Y],\qquad (ad)_{02}+(bc)_{02}=-[X,Q],$$
$$(ad)_{13}+(bc)_{13}=-[Y,P],\qquad (ad)_{32}+(bc)_{32}=-[P,Q],$$
$$(ad)_{03}+(bc)_{03}-(ad)_{12}-(bc)_{12}=[Y,Q]-[X,P];$$

d'après les calculs que nous venons de faire, nous avons l'identité

$$W(\varphi,\psi)=\frac{-h}{2}V(\varphi,\psi)+\frac{\delta}{2}\left\{\frac{D(\varphi,\psi)}{D(X,P)}+\frac{D(\varphi,\psi)}{D(Y,Q)}\right\}. \tag{55}$$

D'autre part, on a identiquement

$$[\varphi, \psi] = \frac{D(\varphi, \psi)}{D(X, Y)}[X, Y] + \frac{D(\varphi, \psi)}{D(X, Q)}[X, Q] + \frac{D(\varphi, \psi)}{D(Y, P)}[Y, P]$$
$$+ \frac{D(\varphi, \psi)}{D(P, Q)}[P, Q] + \frac{D(\varphi, \psi)}{D(X, P)}[X, P] + \frac{D(\varphi, \psi)}{D(Y, Q)}[Y, Q],$$

ce qui peut encore s'écrire

$$(56) \qquad [\varphi, \psi] = V(\varphi, \psi) - \frac{h}{2}\left\{ \frac{D(\varphi, \psi)}{D(X, P)} + \frac{D(\varphi, \psi)}{D(Y, Q)} \right\}.$$

Des deux équations (55) et (56) on tire

$$(57) \qquad \left(\delta - \frac{h^2}{2}\right) V(\varphi, \psi) = \delta[\varphi, \psi] + h W(\varphi, \psi),$$

et il ne nous reste plus qu'à montrer que tous les coefficients du second membre de la formule (57) s'expriment au moyen des coefficients de la forme de Pfaff (34). On a d'abord, en se reportant aux formules (7),

$$(cd)_{30} + (cd)_{21} = \frac{D(X, P)}{D(p, q)} + \frac{D(Y, Q)}{D(p, q)} = R_{pq},$$
$$(bd)_{30} + (bd)_{21} = -\frac{dX}{dy}\frac{\partial P}{\partial p} + \frac{dP}{dy}\frac{\partial X}{\partial p} - \frac{dY}{dy}\frac{\partial Q}{\partial p} + \frac{dQ}{dy}\frac{\partial Y}{\partial p} = R_{yp},$$
$$(ac)_{03} + (ac)_{12} = \frac{dX}{dx}\frac{\partial P}{\partial q} - \frac{dP}{dx}\frac{\partial X}{\partial q} + \frac{dY}{dx}\frac{\partial Q}{\partial q} - \frac{dQ}{dx}\frac{\partial Y}{\partial q} = R_{xq},$$
$$(ab)_{03} + (ab)_{12} = \frac{dX}{dx}\frac{dP}{dy} - \frac{dX}{dy}\frac{dP}{dx} + \frac{dY}{dx}\frac{dQ}{dy} - \frac{dY}{dy}\frac{dQ}{dx} = R_{xy},$$
$$(ab)_{03} + (ad)_{12} - (bc)_{03} - (bc)_{12} = \frac{dX}{dx}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{dP}{dx}\frac{\partial X}{\partial p} + \ldots\ldots\ldots\ldots = S,$$

de sorte que l'on peut encore écrire

$$(58) \qquad W(\varphi, \psi) = R_{pq}\Delta_{xy}(\varphi, \psi) + R_{yp}\Delta_{xq}(\varphi, \psi)$$
$$+ R_{xq}\Delta_{yp}(\varphi, \psi) + R_{xy}\Delta_{pq}(\varphi, \psi) + \frac{S}{2}\left\{\Delta_{xp}(\varphi, \psi) - \Delta_{yq}(\varphi, \psi)\right\}.$$

D'autre part, de l'identité

$$dZ + P\,dX + Q\,dY = F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dp + F_4\,dq + H(dz - p\,dx - q\,dy),$$

on tire facilement

$$(59) \qquad h = [P, X] + [Q, Y] = \frac{\partial F_1}{\partial p} - \frac{\partial F_3}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial q} - \frac{dF_4}{dy} - 2H.$$

Pour calculer δ, observons que si l'on permute les indices o et 1, 2 et 3 dans la formule (51), et si l'on ajoute les deux formules, l'égalité obtenue peut s'écrire

$$\begin{aligned}[]&[(ad)_{03}+(bc)_{03}-(ad)_{12}-(bc)_{12}]^2+4[(ad)_{02}+(bc)_{02}][(ad)_{13}+(bc)_{13}]\\ &\qquad\qquad -4[(ad)_{01}+(bc)_{01}][(ad)_{23}+(bc)_{23}]\\ &=[(ad)_{03}+(ad)_{12}-(bc)_{03}-(bc)_{12}]^2+4[(ab)_{03}+(ab)_{12}][(dc)_{03}+(dc)_{12}]\\ &\qquad\qquad +4[(bd)_{03}+(bd)_{12}][(ac)_{03}+(ac)_{12}],\end{aligned}$$

et l'on en tire

$$\delta=\tfrac{1}{2}\{S^2+4R_{xy}R_{pq}-4R_{yp}R_{xq}\}. \tag{60}$$

Quant au coefficient $\delta-\dfrac{h^2}{2}$ de $V(\varphi,\psi)$ dans la formule (57), on vérifie sans peine qu'il est égal au déterminant des seize quantités a_i, b_i, c_i, d_i.

L'équation $V(\varphi,\psi)=0$, où l'on suppose que φ et ψ ne dépendent que de X, Y, P, Q, est donc remplacée par l'équation

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}\{S^2+4R_{xy}R_{pq}-4R_{yp}R_{xq}\}[\varphi,\psi]\\ &\quad+\left\{\frac{\partial F_1}{\partial p}-\frac{dF_3}{dx}+\frac{\partial F_2}{\partial q}-\frac{dF_4}{dy}-2H\right\}W(\varphi,\psi)=0,\end{aligned}\tag{61}$$

où entrent seulement les variables x, y, z, p, q et les coefficients F_1, F_2, F_3, F_4, H de la forme de Pfaff (34); R_{pq}, R_{xy}, R_{yp}, R_{xq}, S sont données par les formules (7). L'équation $U(f)=0$ est de même remplacée par l'équation (46).

Remarques. — Le résultat précédent donne lieu à quelques remarques. Si $h=0$, l'équation (61) se réduit à $[\varphi,\psi]=0$; ce résultat pouvait être prévu, car on a alors $[X, P]+[Y, Q]=0$, et $V(\varphi,\psi)$ est identique à $[\varphi,\psi]$. Pour que l'équation (61) se réduise de même à $W(\varphi,\psi)=0$, il faut et il suffit que le coefficient de $[\varphi,\psi]$ soit nul, c'est-à-dire que l'équation de Monge-Ampère (6) ait ses deux systèmes de caractéristiques confondus.

On peut observer encore que le coefficient de $[\varphi,\psi]$ est un invariant de l'équation (6) relativement à une transformation de contact quelconque, tandis que $W(\varphi,\psi)$ est un covariant de la même équation relativement à ces transformations. Les deux relations

$$[\varphi,\psi]=0,\qquad W(\varphi,\psi)=0$$

expriment les conditions nécessaires et suffisantes pour que les deux équations

$$\varphi=C,\qquad \psi=C'$$

forment un système complètement intégrable, dont toutes les intégrales appartiennent à l'équation (6).

11. L'équation (46) développée donne de même, après suppression d'un facteur commun différent de zéro, et en remplaçant f par φ,

$$
\begin{aligned}
(62)\qquad & R_{pq}\left\{\frac{d\varphi}{dx}\left[\frac{\partial F_2}{\partial z}-\frac{dH}{dy}\right]-\frac{d\varphi}{dy}\left[\frac{\partial F_1}{\partial z}-\frac{dH}{dx}\right]\right\} \\
& + S_{yq}\left\{\frac{d\varphi}{dx}\left[\frac{\partial F_3}{\partial z}-\frac{\partial H}{\partial p}\right]-\frac{\partial\varphi}{\partial p}\left[\frac{\partial F_1}{\partial z}-\frac{dH}{dx}\right]\right\} \\
& + R_{yp}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial q}\left[\frac{\partial F_1}{\partial z}-\frac{dH}{dx}\right]-\frac{d\varphi}{dx}\left[\frac{\partial F_4}{\partial z}-\frac{\partial H}{\partial q}\right]\right\} \\
& + R_{xq}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial y}\left[\frac{dF_3}{dz}-\frac{\partial H}{\partial q}\right]-\frac{\partial\varphi}{\partial p}\left[\frac{\partial F_2}{\partial z}-\frac{dH}{dy}\right]\right\} \\
& + S_{xp}\left\{\frac{d\varphi}{dy}\left[\frac{\partial F_4}{\partial z}-\frac{\partial H}{\partial q}\right]-\frac{\partial\varphi}{\partial q}\left[\frac{\partial F_2}{\partial z}-\frac{dH}{dy}\right]\right\} \\
& + R_{xy}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial p}\left[\frac{\partial F_4}{\partial z}-\frac{\partial H}{\partial q}\right]-\frac{\partial\varphi}{\partial q}\left[\frac{\partial F_3}{\partial z}-\frac{\partial H}{\partial p}\right]\right\} \\
& + [R_{xy}R_{pq}-R_{xq}R_{yp}-S_{xp}S_{yq}]\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0;
\end{aligned}
$$

on a posé

$$S_{xp}=\frac{\partial F_1}{\partial p}-\frac{dF_3}{dz}-H,\qquad S_{yq}=\frac{\partial F_2}{\partial q}-\frac{dF_4}{dy}-H,$$

de façon que l'on a encore

$$
\begin{aligned}
& S_{xp}-S_{yq}=S, \\
& S_{xp}+S_{yq}=\frac{\partial F_1}{\partial p}-\frac{dF_3}{dx}+\frac{\partial F_2}{\partial q}-\frac{dF_4}{dy}-2H.
\end{aligned}
$$

Nous sommes maintenant en mesure de résoudre la question proposée, qui se ramène en définitive à celle-ci : *Trouver les conditions pour que les deux équations* (61) et (62), *où φ est la fonction inconnue, forment un système complet toutes les fois que ψ est une intégrale de l'équation* (62).

C'est un cas particulier d'un problème plus général dont la solution est bien aisée. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ un système de n variables indépendantes et un système de deux équations linéaires

$$(63)\qquad M(\varphi)=X_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}+\ldots+X_n\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}=0,$$

$$(64)\qquad L(\varphi)=l_1(\psi)\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+l_2(\psi)\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}+\ldots+l_n(\psi)\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}=0,$$

$$l_i(\psi)=\alpha_{i1}\frac{\partial\psi}{\partial x_1}+\alpha_{i2}\frac{\partial\psi}{\partial x_2}+\ldots+\alpha_{in}\frac{\partial\psi}{\partial x_n},$$

où les coefficients X_i et α_{ik} sont des fonctions des n variables indépendantes x_1, $x_2, \ldots, x_n$, vérifiant les relations

$$\alpha_{ii} = 0, \qquad \alpha_{ik} + \alpha_{ki} = 0. \tag{65}$$

Cherchons à quelles conditions les deux équations $L(\varphi) = 0$, $M(\varphi) = 0$ forment un système complet toutes les fois que l'on a $M(\psi) = 0$. Formons l'équation

$$L(M(\varphi)) - M(L(\varphi)) = 0;$$

le coefficient de $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i}$ dans cette équation est

$$L(X_i) - M(l_i(\psi))$$

ou, puisqu'on suppose que ψ est une intégrale de $M(\psi) = 0$,

$$L(X_i) + l_i(M(\psi)) - M(l_i(\psi)),$$

c'est-à-dire

$$l_1(\psi)\frac{\partial X_i}{\partial x_1} + l_2(\psi)\frac{\partial X_i}{\partial x_2} + \ldots + l_n(\psi)\frac{\partial X_i}{\partial x_n} + \sum_{k=1}^{k=n}\left\{ l_i(X_k) - M(\alpha_{ik})\right\}\frac{\partial\psi}{\partial x_k}.$$

C'est encore une forme linéaire $m_i(\psi)$, et le coefficient de $\dfrac{\partial\psi}{\partial x_k}$ dans cette expression est

$$\alpha_{1k}\frac{\partial X_i}{\partial x_1} + \alpha_{2k}\frac{\partial X_i}{\partial x_2} + \ldots + \alpha_{nk}\frac{\partial X_i}{\partial x_n} + l_i(X_k) - M(\alpha_{ik})$$

ou, d'après les relations (65),

$$l_i(X_k) - l_k(X_i) - M(\alpha_{ik}).$$

Nous poserons donc

$$m_i(\psi) = \sum_{k=1}^{n}\left\{ l_i(X_k) - l_k(X_i) - M(\alpha_{ik})\right\}\frac{\partial\psi}{\partial x_k}, \tag{66}$$

$$N(\varphi) = m_1(\psi)\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + m_2(\psi)\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \ldots + m_n(\psi)\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}; \tag{67}$$

l'équation $N(\varphi) = 0$ doit être une combinaison linéaire des équations (63) et (64), pour que celles-ci forment un système complet. Il faut, pour cela, que tous les déterminants du troisième ordre déduits du Tableau

$$\left|\begin{matrix} l_1(\psi) & l_2(\psi) & \ldots & l_n(\psi) \\ m_1(\psi) & m_2(\psi) & \ldots & m_n(\psi) \\ X_1 & X_2 & \ldots & X_n \end{matrix}\right|$$

soient nuls lorsque ψ est une intégrale de l'équation $M(\psi) = 0$.

12. En appliquant cette méthode au système formé par les équations (62) et (61), on sera conduit à un certain nombre de conditions auxquelles devra satisfaire la fonction inconnue $H(x, y, z, p, q)$; ces conditions renfermeront, en général, les dérivées partielles du second ordre de H. Je laisse de côté dans ce travail l'étude de ce système dans le cas général, et je me bornerai à quelques cas particuliers.

En premier lieu, remarquons que lorsque les coefficients de l'équation de Monge-Ampère proposée (6) ne renferment pas l'inconnue z, si les conditions (25) sont satisfaites, on peut obtenir pour F_1, F_2, F_3, F_4 des fonctions indépendantes de z. En prenant pour H une constante $H = A$, l'expression de Pfaff

$$F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dp + F_4\,dq + A(dz - p\,dx - q\,dy)$$

admettra pour forme réduite une expression de la forme

$$d(Az) + P\,dX + Q\,dY,$$

X, Y, P, Q ne dépendant que de x, y, p, q. On aura donc une infinité de transformations B_3, dépendant d'une constante arbitraire A et conduisant à l'équation proposée. Les formules qui définissent la transformation ne renferment ni z, ni z'.

Considérons encore des formules de la forme (15) :

$$(15) \qquad x' = x, \qquad y' = y; \qquad p' = f(x, y, z, p), \qquad q' = \varphi(x, y, z, q);$$

pour qu'elles définissent une transformation B_2, il faut que x, y, f, φ soient des intégrales d'une équation de la forme

$$A\left(\frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z}\right) + B\left(\frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z}\right) + C\frac{\partial V}{\partial p} + D\frac{\partial V}{\partial q} = 0.$$

Il est clair que l'on doit avoir

$$A = B = 0$$

et, par suite,

$$C\frac{\partial f}{\partial p} = 0, \qquad D\frac{\partial \varphi}{\partial q} = 0.$$

Comme C et D ne peuvent être nuls à la fois, f doit être indépendant de p ou φ indépendant de q. La réciproque est évidente, pourvu que celle des fonctions f, φ qui ne contient pas les dérivées de z contienne z.

Il est facile de trouver directement à quelle condition les formules (15) définissent une transformation B_3; en effet, on tire de ces formules

$$s' = \frac{df}{dy} + \frac{\partial f}{\partial p}s = \frac{d\varphi}{dx} + \frac{\partial \varphi}{\partial q}s$$

et, par suite,

$$s'\left(\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{\partial \varphi}{\partial q}\right) = \frac{\partial f}{\partial p}\frac{d\varphi}{dx} - \frac{\partial \varphi}{\partial q}\frac{df}{dy} = [f, \varphi].$$

Il faudra donc que le rapport

$$\frac{[f, \varphi]}{\dfrac{\partial f}{\partial p} - \dfrac{\partial \varphi}{\partial q}}$$

soit une fonction des quatre quantités x, y, f, φ seulement, ce qui résulte aussi de la formule générale (41) du n° 8.

III.

13. Nous allons appliquer la méthode générale à l'équation linéaire

$$(68) \qquad s + ap + bq + cz = 0,$$

où a, b, c sont des fonctions des variables indépendantes x et y, et chercher les transformations de Bäcklund de la forme (15) qui conduisent à cette équation. Le premier problème à résoudre est de déterminer un multiplicateur λ tel que, en multipliant l'équation par λ, les coefficients de la nouvelle équation vérifient les conditions (18), où

$$R = \lambda(ap + bq + cz), \qquad S = \lambda.$$

Elles donnent d'abord

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial p\, \partial q} = 0,$$

de sorte que λ doit être de la forme

$$\lambda = P + Q,$$

P étant une fonction de x, y, z, p, et Q une fonction de x, y, z, q. La relation $\dfrac{\partial^2 R}{\partial p\, \partial q} = \dfrac{\partial S}{\partial z}$ donne ensuite

$$\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial Q}{\partial z} = a\frac{\partial Q}{\partial q} + b\frac{\partial P}{\partial p},$$

ou

$$\frac{\partial P}{\partial z} - b\frac{\partial P}{\partial p} = a\frac{\partial Q}{\partial q} - \frac{\partial Q}{\partial z};$$

le premier membre de cette égalité étant indépendant de q, et le second membre indépendant de p, il s'ensuit que cette expression est une fonction $\mu(x, y, z)$

indépendante de p et de q. Si l'on remplace P par $P+\int_{z_0}^{z}\mu(x,y,z)\,dz$ et Q par $Q-\int_{z_0}^{z}\mu(x,y,z)\,dz$, la valeur de λ ne change pas, et la relation précédente nous donne

$$\frac{\partial P}{\partial z}-b\frac{\partial P}{\partial p}=a\frac{\partial Q}{\partial q}-\frac{\partial Q}{\partial z}=0;$$

il s'ensuit que P et Q sont respectivement de la forme

$$P=f(x,y,p+bz),\qquad Q=\varphi(x,y,q+az).$$

La condition $\frac{\partial^2 R}{\partial p^2}=\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)$ donne ensuite

$$\frac{\partial^2 P}{\partial p^2}(ap+bq+cz)+2a\frac{\partial P}{\partial p}=\frac{\partial^2 P}{\partial y\,\partial p}+q\frac{\partial^2 P}{\partial p\,\partial z}$$

et se réduit à

$$\frac{\partial^2 P}{\partial p^2}(ap+cz)+2a\frac{\partial P}{\partial p}=\frac{\partial^2 P}{\partial y\,\partial p}.$$

En posant $t=p+bz$, $P=f(x,y,t)$, cette équation peut s'écrire

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial t}-2a\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\left\{z\left(\frac{\partial b}{\partial y}+ab-c\right)-at\right\}=0.$$

Si l'invariant de l'équation linéaire proposée $\frac{\partial b}{\partial y}+ab-c$ n'est pas nul, ce que nous supposerons, cette relation ne peut être vérifiée que si l'on a en même temps

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=0,\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial t}-2a\frac{\partial f}{\partial t}=0,$$

car, autrement, z s'exprimerait au moyen des variables x, y, t. P est donc une fonction linéaire de $t=p+bz$:

$$P=u(p+bz)+u_1;$$

on verra de même que, si l'invariant $\frac{\partial a}{\partial x}+ab-c$ n'est pas nul, Q est une fonction linéaire de $q+az$:

$$Q=v(q+az)+v_1,$$

et le multiplicateur λ doit être de la forme

$$\lambda=up+vq+(av+bu)z+\mu(x,y),\tag{69}$$

u et v étant des fonctions de x et de y qui satisfont aux deux conditions

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2au, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 2bv. \tag{70}$$

Il reste encore à tenir compte de la dernière condition

$$\frac{d^2 S}{dx\,dy} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{d}{dx}\left\{\frac{\partial R}{\partial p}\right\} + \frac{d}{dy}\left\{\frac{\partial R}{\partial q}\right\};$$

on trouve, en faisant le calcul, qu'elle se dédouble en deux équations distinctes :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2(av+bu)}{\partial x\,\partial y} &+ 2c(av+bu)\\ &= \frac{\partial\{a(av+bu)\}}{\partial x} + \frac{\partial\{b(av+bu)\}}{\partial y} + \frac{\partial(cu)}{\partial x} + \frac{\partial(cv)}{\partial y},\end{aligned} \tag{71}$$

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial(a\mu)}{\partial x} - \frac{\partial(b\mu)}{\partial y} + c\mu = 0. \tag{72}$$

La seconde de ces équations est l'équation adjointe de l'équation linéaire proposée. Quant aux fonctions u et v, elles doivent satisfaire aux trois équations (70) et (71).

Si les coefficients a, b, c sont quelconques, ces trois équations (70) et (71) n'admettent pas d'autre solution que $u = 0$, $v = 0$; les seuls multiplicateurs sont les intégrales $\mu(x, y)$ de l'équation adjointe. Nous avons donc à rechercher à quelles conditions les équations (70) et (71) sont compatibles. On peut remarquer que l'équation (71) peut s'écrire, en tenant compte des deux autres (70), sous la forme élégante

$$\frac{\partial}{\partial y}(hv) + \frac{\partial}{\partial x}(ku) = 2ahv + 2bku, \tag{73}$$

h et k étant les invariants de l'équation linéaire

$$h = \frac{\partial a}{\partial x} + ab - c, \qquad k = \frac{\partial b}{\partial y} + ab - c.$$

Si une seule des fonctions u, v est nulle, si l'on a, par exemple, $u = 0$, v est déterminé par les deux équations

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2bv, \qquad \frac{\partial}{\partial y}(hv) = 2ahv,$$

que l'on peut écrire, en supposant h différent de zéro,

$$\frac{\partial \log v}{\partial x} = 2b, \qquad \frac{\partial \log v}{\partial y} = 2a - \frac{\partial \log h}{\partial y}; \tag{74}$$

pour qu'elles soient compatibles, il faut et il suffit que l'on ait

$$2h - 2k = \frac{\partial^2 \log h}{\partial x \, \partial y}. \tag{75}$$

Cette condition exprime que les invariants de l'équation adjointe de l'équation linéaire (68) sont identiques à ceux de l'équation obtenue par une des transformations de Laplace ([1]). On peut alors, en changeant z en ρz, ramener l'équation à la forme

$$s - \frac{1}{2} \frac{\partial \log \nu}{\partial x} q - \nu z = 0, \tag{76}$$

ν étant une fonction de x, y, qui peut être quelconque. Les équations qui déterminent v sont alors

$$\frac{\partial \log v}{\partial x} = -\frac{\partial \log \nu}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \log v}{\partial y} = -\frac{\partial \log \nu}{\partial y}$$

et l'équation (68) admet le multiplicateur

$$\lambda = \frac{C}{\nu} q + \mu(x, y), \tag{77}$$

C étant un facteur constant et $\mu(x, y)$ une solution de l'équation adjointe.

Examinons maintenant le cas où les deux fonctions u et v sont différentes de zéro. Si l'on change z en $\rho z'$, l'équation linéaire proposée (68) est remplacée par l'équation

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z'}{\partial x \, \partial y} &+ \left(a + \frac{\partial \log \rho}{\partial y}\right) \frac{\partial z'}{\partial x} \\ &+ \left(b + \frac{\partial \log \rho}{\partial x}\right) \frac{\partial z'}{\partial y} + \frac{z'}{\rho} \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x \, \partial y} + a \frac{\partial \rho}{\partial x} + b \frac{\partial \rho}{\partial y} + c\rho\right) = 0, \end{aligned} \tag{78}$$

tandis que le multiplicateur $up + vq + (av + bu)z$ est remplacé par le nouveau multiplicateur

$$u \frac{\partial z'}{\partial x} + v \frac{\partial z'}{\partial y} + \left(a + \frac{\partial \log \rho}{\partial y}\right) v z' + \left(b + \frac{\partial \log \rho}{\partial x}\right) u z';$$

on voit que u et v n'ont pas changé, tandis que a et b sont remplacés par $a + \frac{\partial \log \rho}{\partial y}$ et $b + \frac{\partial \log \rho}{\partial x}$. On peut donc choisir ρ de telle façon que l'on ait

$$\left(a + \frac{\partial \log \rho}{\partial y}\right) v + \left(b + \frac{\partial \log \rho}{\partial x}\right) u = 0;$$

([1]) Voir *Bulletin de la Société mathématique*, t. XXV, 1897, p. 36.

afin de ne pas multiplier les notations, nous supposerons qu'on a effectué cette transformation au préalable, de façon que les équations (70) et (71) admettent un système de solutions pour lequel on a

$$av + bu = 0. \tag{79}$$

La première équation (71) se réduit alors à

$$\frac{\partial(cu)}{\partial x} + \frac{\partial(cv)}{\partial y} = 0, \tag{80}$$

et ne renferme plus que c. Supposons que a et b ne soient pas nuls à la fois; on peut poser, d'après la formule (79),

$$u = a\xi, \qquad v = -b\xi;$$

les relations (70) deviennent alors

$$\frac{\partial \log\xi}{\partial y} = 2a - \frac{\partial \log a}{\partial y}, \qquad \frac{\partial \log\xi}{\partial x} = 2b - \frac{\partial \log b}{\partial x}, \tag{81}$$

et la condition d'intégrabilité est

$$2\frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial^2 \log a}{\partial x\,\partial y} = 2\frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial^2 \log b}{\partial x\,\partial y}. \tag{82}$$

Pour avoir les expressions générales des fonctions a et b satisfaisant à cette condition, posons

$$\xi a = \alpha, \qquad \xi b = \beta;$$

les formules (81) peuvent s'écrire

$$2a = \frac{\partial \log\alpha}{\partial y}, \qquad 2b = \frac{\partial \log\beta}{\partial x},$$

et l'on en tire, en divisant membre à membre,

$$\frac{\dfrac{\partial\alpha}{\partial y}}{\alpha^2} = \frac{\dfrac{\partial\beta}{\partial x}}{\beta^2};$$

$\frac{1}{\alpha}$ et $\frac{1}{\beta}$ sont donc les dérivées partielles d'une fonction $\nu(x, y)$,

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{\partial\nu}{\partial x}, \qquad \frac{1}{\beta} = \frac{\partial\nu}{\partial y},$$

et l'on a, par conséquent,

$$(83) \qquad a = -\frac{1}{2}\frac{\dfrac{\partial^2 \nu}{\partial x\,\partial y}}{\dfrac{\partial \nu}{\partial x}}, \qquad b = -\frac{1}{2}\frac{\dfrac{\partial^2 \nu}{\partial x\,\partial y}}{\dfrac{\partial \nu}{\partial y}}.$$

On a ensuite, à un facteur constant près,

$$\xi = \frac{1}{\dfrac{\partial^2 \nu}{\partial x\,\partial y}}, \qquad u = -\frac{1}{2}\frac{1}{\dfrac{\partial \nu}{\partial x}}, \qquad v = \frac{1}{2}\frac{1}{\dfrac{\partial \nu}{\partial y}},$$

et l'équation qui détermine c est de la forme

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{c}{\dfrac{\partial \nu}{\partial x}}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{c}{\dfrac{\partial \nu}{\partial y}}\right) = 0.$$

Cette relation exprime que c est un facteur intégrant pour l'équation différentielle

$$\frac{dx}{\dfrac{\partial \nu}{\partial y}} + \frac{dy}{\dfrac{\partial \nu}{\partial x}} = 0;$$

on a donc

$$c = \frac{\partial \nu}{\partial x}\frac{\partial \nu}{\partial y}\psi(\nu),$$

et l'équation linéaire proposée (68) est de la forme

$$(84) \qquad s - \frac{1}{2}\frac{\dfrac{\partial^2 \nu}{\partial x\,\partial y}}{\dfrac{\partial \nu}{\partial x}}p - \frac{1}{2}\frac{\dfrac{\partial^2 \nu}{\partial x\,\partial y}}{\dfrac{\partial \nu}{\partial y}}q + \psi(\nu)\frac{\partial \nu}{\partial x}\frac{\partial \nu}{\partial y}z = 0.$$

D'après le calcul qui vient d'être fait, cette équation admet le multiplicateur

$$(85) \qquad \lambda = C\left(\frac{p}{\dfrac{\partial \nu}{\partial x}} - \frac{q}{\dfrac{\partial \nu}{\partial y}}\right) + \mu(x, y),$$

C étant un facteur constant et $\mu(x, y)$ une intégrale de l'équation adjointe [1].

14. En définitive, si nous laissons de côté les équations admettant un invariant nul, les seules équations linéaires pour lesquelles il existe un multiplicateur autre

---

[1] Ce résultat s'applique encore lorsque a et b sont nuls. Il suffit de prendre pour $\nu(x, y)$ une fonction de la forme $\nu = f(x) + \varphi(y)$.

qu'une solution de l'équation adjointe peuvent être ramenées à l'une des deux formes (76) ou (84).

Dans le cas général, l'application de la méthode précédente conduit tout naturellement à des transformations connues, comme nous l'indiquerons rapidement. Soit $\mu(x,y)$ une solution de l'équation adjointe; l'équation

$$\mu(s+ap+bq+cz)=0$$

provient des deux équations

$$(86)\qquad \begin{cases} p'=f(x,y,z,p), \\ q'=\varphi(x,y,z,q), \end{cases}$$

pourvu que l'on ait

$$\frac{\partial f}{\partial p}-\frac{\partial \varphi}{\partial q}=\mu, \qquad \frac{df}{dy}-\frac{d\varphi}{dx}=\mu(ap+bq+cz).$$

La solution générale de ces deux équations est donnée par les formules (*voir* n° 3)

$$(86\ bis)\qquad \begin{cases} p'=f=\dfrac{\mu}{2}p+\left(\mu b-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\mu}{\partial x}\right)z+\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial z}p+\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial x}, \\ q'=\varphi=-\dfrac{\mu}{2}q+\left(\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\mu}{\partial y}-\mu a\right)z+\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial z}q+\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial y}, \end{cases}$$

H étant une fonction arbitraire de x, y, z.

Les formules (80) définissent une transformation de Bäcklund B_2, pourvu que la fonction f soit indépendante de p, ou la fonction φ indépendante de q (n° **12**). Il faut et il suffit pour cela que H soit de la forme $\frac{\mu}{2}z+\nu(x,y)$, ou de la forme $-\frac{\mu}{2}z+\nu(x,y)$.

On obtient ainsi deux classes de transformations B_2, conduisant à l'équation linéaire considérée; les formules qui les définissent peuvent s'écrire, en négligeant une transformation de contact,

$$\begin{cases} p'=\left(\mu b-\dfrac{\partial\mu}{\partial x}\right)z, \\ q'=-\mu q-\mu a z \end{cases} \qquad \text{ou} \qquad \begin{cases} p'=-\mu p-\mu b z, \\ q'=\left(a\mu-\dfrac{\partial\mu}{\partial y}\right)z; \end{cases}$$

l'élimination de z conduit aussi à une équation linéaire en z' (1).

Pour que les formules (86 *bis*) définissent une transformation B_3, la fonc-

(1) *Voir* les *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, de M. Darboux (t. II), ou mes *Leçons sur les équations aux dérivées partielles du second ordre*, t. II, p. 271 et suivantes.

tion $H(x, y, z)$ doit satisfaire à une équation de condition (nº **12**), qui doit être compatible avec les relations

$$\frac{\partial H}{\partial p} = 0, \qquad \frac{\partial H}{\partial q} = 0;$$

on aperçoit facilement un cas où ces trois équations se réduisent à une seule : c'est celui où H est de la forme $K(x, y)z$. Les formules (82) deviennent alors

$$(87) \qquad \begin{cases} p' = \left(\frac{\mu}{2} + K\right)p + \left(\mu b - \frac{1}{2}\frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial x}\right)z, \\ q' = \left(-\frac{\mu}{2} + K\right)q + \left(\frac{1}{2}\frac{\partial \mu}{\partial y} - \mu a + \frac{\partial K}{\partial y}\right)z. \end{cases}$$

D'une manière générale, si l'on a

$$f = ap + bz, \qquad \varphi = a_1 q + b_1 z,$$

a, b, a_1, b_1 étant des fonctions de x, y, la condition pour que le crochet $[f, \varphi]$ soit une fonction de x, y, f, φ est exprimée, comme on le voit aisément, par la relation

$$(88) \qquad \frac{\partial\left(\frac{b}{a}\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{b_1}{a_1}\right)}{\partial x}.$$

En appliquant cette condition aux formules (82), on obtient une équation du second ordre pour déterminer $K(x, y)$. L'intégration de cette équation du second ordre se ramène à celle de l'équation linéaire proposée. En effet, la relation (83) exprime précisément que les équations

$$ap + bz = 0, \qquad a_1 q + b_1 z = 0$$

sont compatibles. Si z_1 est une intégrale commune, il est clair que les formules (87) peuvent s'écrire

$$p' = \left(\frac{\mu}{2} + K\right) z_1 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z}{z_1}\right),$$

$$q' = \left(K - \frac{\mu}{2}\right) z_1 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z}{z_1}\right),$$

et $z = z_1$ doit être une intégrale de l'équation correspondante en z.

Connaissant z_1, on obtiendra K au moyen des deux relations

$$\left(\frac{\mu}{2} + K\right)p_1 + \left(\mu b - \frac{1}{2}\frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial x}\right)z_1 = 0,$$

$$\left(K - \frac{\mu}{2}\right)q_1 + \left(\frac{1}{2}\frac{\partial \mu}{\partial y} - \mu a + \frac{\partial K}{\partial y}\right)z_1 = 0,$$

qui donneront K par une quadrature. On retrouve ainsi des transformations bien connues [1].

15. Considérons maintenant une équation de la forme

$$s-\frac{1}{2}\frac{\partial \log \nu}{\partial x}q-\nu z=0, \tag{89}$$

qui admet le multiplicateur

$$\lambda=\frac{-2q}{\nu}+\mu(x,y),$$

$\mu(x,y)$ étant une solution de l'équation adjointe. On satisfait aux équations

$$\frac{\partial f}{\partial p}-\frac{\partial \varphi}{\partial q}=-\frac{2q}{\nu}+\mu(x,y),$$

$$\frac{df}{dy}-\frac{d\varphi}{dx}=\left\{-\frac{2q}{\nu}+\mu(x,y)\right\}\left\{-\frac{1}{2}\frac{\partial \log \nu}{\partial x}q-\nu z\right\}$$

en posant (n° 3)

$$\left\{\begin{aligned} p'&=f=\frac{\mu}{2}p-\frac{1}{2}\left\{\mu\frac{\partial \log \nu}{\partial x}+\frac{\partial \mu}{\partial x}\right\}z+\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial z}p+\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x}+z^2,\\ q'&=\varphi=-\frac{\mu}{2}q+\frac{1}{2}\frac{\partial \mu}{\partial y}z+\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial z}q+\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y}+\frac{q^2}{\nu}.\end{aligned}\right. \tag{90}$$

Ces formules définissent une transformation B_2 si H est égal à $\pm\frac{\mu}{2}z$. Prenons, par exemple, $\mathrm{H}=-\frac{\mu z}{2}$; elles deviennent

$$p'=-\left(\frac{1}{2}\mu\frac{\partial \log \nu}{\partial x}+\frac{\partial \mu}{\partial x}\right)z+z^2,$$

$$q'=-\mu q+\frac{q^2}{\nu},$$

ce que l'on peut encore écrire :

$$\left\{\begin{aligned} p'&=\left[z-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mu}{\partial x}+\frac{1}{2}\mu\frac{\partial \log \nu}{\partial x}\right)\right]^2-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial \mu}{\partial x}+\frac{1}{2}\mu\frac{\partial \log \nu}{\partial x}\right)^2,\\ q'&=\frac{1}{\nu}\left(q-\frac{\mu\nu}{2}\right)^2-\frac{\mu^2\nu}{4}.\end{aligned}\right. \tag{91}$$

---

[1] *Équations du second ordre*, t. II, p. 274-280. On s'assure aisément qu'il n'y a pas d'autres transformations B_3 de la forme (15) conduisant à l'équation (68).

Remarquons maintenant qu'en tenant compte de l'équation adjointe

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial x\, \partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial \mu}{\partial y}\frac{\partial \log \nu}{\partial x} + \frac{1}{2}\mu\frac{\partial^2 \log \nu}{\partial x\, \partial y} = \nu\mu,$$

on peut poser

$$\frac{1}{4}\int\left(\frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{1}{2}\mu\frac{\partial \log \nu}{\partial x}\right)^2 dx + \mu^2\nu\, dy = du,$$

et, en changeant $z' + u$ en z', les formules (91) deviennent

$$(92)\qquad \left\{\begin{aligned} p' &= \left[z - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{1}{2}\mu\frac{\partial \log \nu}{\partial x}\right)\right]^2,\\ q' &= \frac{1}{\nu}\left(q - \frac{\mu\nu}{2}\right)^2. \end{aligned}\right.$$

On a aussi, d'après l'équation adjointe,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{1}{2}\mu\frac{\partial \log \nu}{\partial x}\right) = \mu\nu,$$

et, en posant

$$z - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{1}{2}\mu\frac{\partial \log \nu}{\partial x}\right) = \mathrm{Z},$$

les formules (92) peuvent encore s'écrire

$$(93)\qquad p' = \mathrm{Z}^2, \qquad q' = \frac{1}{\nu}\left(\frac{\partial \mathrm{Z}}{\partial y}\right)^2.$$

L'élimination de Z conduit à l'équation

$$(94)\qquad \left(\frac{\partial^2 z'}{\partial x\, \partial y}\right)^2 = 4\nu\frac{\partial z'}{\partial x}\frac{\partial z'}{\partial y};$$

on voit donc que, quelle que soit la solution μ de l'équation adjointe que l'on adopte, l'élimination de z entre les deux équations (91) conduit à une équation du second ordre, que l'on ramène à l'équation (94) par un simple changement de la fonction inconnue. C'est une transformation que j'avais déjà étudiée en supposant $\mu = 0$ [1].

On pourrait aussi chercher si, en choisissant convenablement la fonction $\mathrm{H}(x, y, z)$, les formules (90) peuvent définir une transformation B_3; en faisant le calcul, on arrive à des équations incompatibles.

---

[1] *Bulletin de la Société mathématique*, t. XXV, 1897, p. 36.

16. Il nous reste à étudier les équations de la forme (84) :

$$(84)\qquad s - \frac{1}{2}\frac{\dfrac{\partial^2 \nu}{\partial x\,\partial y}}{\dfrac{\partial \nu}{\partial x}}p - \frac{1}{2}\frac{\dfrac{\partial^2 \nu}{\partial x\,\partial y}}{\dfrac{\partial \nu}{\partial y}}q + \psi(\nu)\frac{\partial \nu}{\partial x}\frac{\partial \nu}{\partial y}z = 0.$$

Cette équation peut encore être simplifiée; en effet, si l'on pose

$$z = f(\nu)Z,$$

elle se change en une équation de même forme :

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x\,\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\dfrac{\partial^2 \sigma}{\partial x\,\partial y}}{\dfrac{\partial \sigma}{\partial x}}\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\dfrac{\partial^2 \sigma}{\partial x\,\partial y}}{\dfrac{\partial \sigma}{\partial y}}\frac{\partial Z}{\partial y} + \{f(\nu)\psi(\nu) + f''(\nu)\}\frac{\partial \nu}{\partial x}\frac{\partial \nu}{\partial y}Z = 0,$$

où l'on a posé

$$\sigma(\nu) = \int \frac{d\nu}{[f(\nu)]^2}.$$

Si l'on a pris pour la fonction $f(\nu)$ une intégrale de l'équation

$$f''(\nu) + f(\nu)\psi(\nu) = 0,$$

l'équation (84) prend la forme réduite

$$(95)\qquad s - \frac{1}{2}\frac{\dfrac{\partial^2 \sigma}{\partial x\,\partial y}}{\dfrac{\partial \sigma}{\partial x}}p - \frac{1}{2}\frac{\dfrac{\partial^2 \sigma}{\partial x\,\partial y}}{\dfrac{\partial \sigma}{\partial y}}q = 0.$$

Elle admet le multiplicateur

$$\lambda = \frac{2p}{\dfrac{\partial \sigma}{\partial x}} - \frac{2q}{\dfrac{\partial \sigma}{\partial y}} + \mu(x, y),$$

$\mu(x, y)$ étant une solution de l'équation adjointe, et les valeurs correspondantes des fonctions $f(x, y, z, p)$, $\varphi(x, y, z, q)$ sont

$$(96)\qquad \left\{\begin{aligned} p' = f &= \frac{p^2}{\dfrac{\partial \sigma}{\partial x}} + \frac{\mu}{2}p - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu\frac{\dfrac{\partial^2 \sigma}{\partial x\,\partial y}}{\dfrac{\partial \sigma}{\partial y}}\right)z + \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial z}p + \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x},\\ q' = \varphi &= \frac{q^2}{\dfrac{\partial \sigma}{\partial y}} - \frac{\mu}{2}q + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu\frac{\dfrac{\partial^2 \sigma}{\partial x\,\partial y}}{\dfrac{\partial \sigma}{\partial x}}\right)z + \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial z}q + \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y}.\end{aligned}\right.$$

Il est clair que, quelle que soit la fonction $H(x, y, z)$, les formules (96) ne peuvent définir une transformation B_2. Pour avoir une transformation B_3, il suffit de prendre $\mu = 0$, $H = 0$; les formules (96) deviennent alors

$$p' = \frac{p^2}{\frac{\partial \sigma}{\partial x}}, \qquad q' = \frac{q^2}{\frac{\partial \sigma}{\partial y}}, \tag{96 bis}$$

et, en égalant les deux valeurs de s, on est conduit à l'équation

$$\mathcal{G}(z') = \mathcal{G}(\sigma), \tag{97}$$

où

$$\mathcal{G}(\quad) = \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial x \, \partial y}\right)^2}{\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y}}.$$

Cette équation est encore de la forme (94), et l'on voit que l'intégration de cette équation est ramenée à celle de l'équation linéaire (95).

Il est facile de déduire de là une propriété intéressante de l'équation (97). En effet, si dans l'équation (95) on remplace z par σz, on est conduit à une équation de même forme, où σ est remplacé par $\frac{1}{\sigma}$; on en conclut que l'intégration de l'équation

$$\mathcal{G}(z') = \mathcal{G}(\sigma)$$

et celle de l'équation

$$\mathcal{G}(z') = \mathcal{G}\left(\frac{1}{\sigma}\right)$$

sont deux problèmes équivalents : résultat que j'ai déjà établi par une autre méthode [1].

[1] *Bulletin de la Société mathématique*, t. XXVIII, p. 1.