W. STEKLOFF

Mémoire sur le mouvement d'un corps solide dans un liquide indéfini

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 2e série, tome 4 (1902), p. 171-219
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1902_2_4__171_0>

MÉMOIRE

SUR LE

MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE

DANS UN LIQUIDE INDÉFINI,

PAR M. W. STEKLOFF.

INTRODUCTION.

1. Le problème du mouvement d'un corps solide dans un liquide indéfini a été posé pour la première fois par Dirichlet en 1852 [1].

Quelques années après, Clebsch, suivant une voie indiquée par Dirichlet, a déduit les équations du mouvement dans le cas particulier d'un ellipsoïde (*Journal de Crelle,* t. 52; 1856).

Ensuite, MM. Thomson et Tait ont établi ces équations dans le cas plus général à l'aide du principe d'Hamilton.

Enfin M. Kirchhoff, en 1871, a développé les idées de MM. Thomson et Tait et a représenté sous la forme usuelle les équations dont il s'agit.

Mais la méthode de M. Kirchhoff ne s'applique qu'aux corps limités par des surfaces simplement connexes (comme l'ont remarqué MM. C. Neumann et Boltzmann), et la méthode la plus naturelle pour établir les équations du mouvement est celle de Dirichlet, qui ramène le problème considéré au problème du mouvement d'un corps solide libre soumis à des forces extérieures données et à des forces de pression du liquide, appliquées normalement à la surface du corps.

Il s'agit, dans le Chapitre I de ce Mémoire, d'établir les équations du mouvement, par la méthode tout à l'heure mentionnée, dans ces suppositions générales :

---

[1] L. DIRICHLET, *Ueber einige Fälle, in welchen sich die Bewegung eines festen Körpers in einem incompressibeln flüssigen Medium theoretisch bestimmen lässt* (*Berliner Monatsberichte,* 1852).

1° Le corps solide est limité par une surface fermée (S) *de l'ordre arbitraire (fini) de connexion* ayant partout un plan tangent déterminé;

2° A l'intérieur du corps il existe un nombre fini q de cavités, limitées par des surfaces fermées, ayant les mêmes propriétés que (S), et remplies de liquides incompressibles;

3° Le corps solide est soumis à des forces extérieures quelconques; les fluides sont soumis à des forces ayant une fonction de forces;

4° La vitesse du mouvement du liquide indéfini contenant le corps mobile, ainsi que celle des liquides contenus dans les cavités, dérive d'un potentiel, et les liquides considérés sont incompressibles et idéaux.

2. L'intégration de ces équations différentielles représente, comme l'on sait, des difficultés presque insurmontables, même dans le cas de l'absence de toute force accélératrice.

Il faut d'abord étudier ce dernier problème, le plus simple; c'est ce que je fais dans le Chapitre II de ce Mémoire, en supposant en même temps que la surface du corps soit simplement connexe.

Je propose une méthode générale, à savoir la méthode d'intégration par des approximations successives, qui s'applique toujours, quel que soit le corps solide, pourvu que le rapport

$$\varepsilon = \frac{\rho}{M},$$

ρ étant la densité du fluide indéfini, M étant la masse totale du corps et des fluides remplissant les cavités, ait une valeur suffisamment petite.

Cette méthode ramène le problème général à l'intégration bien connue des équations du mouvement d'un corps solide libre et à celle de certaines équations linéaires à coefficients variables qui se ramène aux quadratures.

3. Comme les équations du mouvement admettent les solutions périodiques pour $\varepsilon = 0$, ils peuvent les admettre aussi, d'après les théorèmes connus de M. H. Poincaré, pour des valeurs assez petites de ε.

La solution de cette question intéressante fait l'objet du Chapitre III de ce Mémoire, où je démontre l'existence d'une infinité de solutions périodiques ayant lieu, quel que soit le corps solide.

4. Je dois remarquer que ces idées ont été énoncées pour la première fois dans mon Ouvrage *Sur le mouvement d'un corps solide dans un liquide indéfini,* paru en russe en 1893; mais comme le but principal de cet Ouvrage con-

sistait dans la discussion des cas particuliers, où le problème se ramène aux quadratures, je m'y suis borné aux remarques générales. Maintenant, je vais développer en détail mes recherches.

CHAPITRE I.

MOUVEMENT DU LIQUIDE INDÉFINI ET DES LIQUIDES REMPLISSANT LES CAVITÉS.

1. Soit $m+1$ l'ordre de connexion de volume du corps solide, plongé dans un liquide indéfini. Il est possible de rendre ce volume simplement connexe en pratiquant des *coupures;* pour cela, il suffit de prendre m coupures convenablement choisies.

Dans les volumes à connexion multiple on peut tracer des courbes fermées pouvant se réduire, par une déformation continue, à un point, sans sortir du volume et des contours fermés qui ne peuvent se réduire à un point sans sortir du volume.

Nous appellerons ces dernières courbes *contours principaux*.

Les courbes de première espèce ne traversent pas les coupures; les contours principaux les traversent nécessairement.

Désignons par F la fonction des vitesses du liquide indéfini.

F reste uniforme tant qu'on ne traverse pas la coupure, mais la différence des valeurs que prend cette fonction en deux points infiniment voisins d'une coupure, situés de part et d'autre de cette coupure, est finie et s'appelle *circulation principale* correspondant au contour principal qui traverse la coupure considérée.

Cette circulation est une constante déterminée pour chaque contour principal, correspondant à une coupure donnée, et s'appelle *constante cyclique*.

Le nombre de ces constantes est égal à m.

La constante cyclique correspondant au contour principal donné est égale à la valeur de l'intégrale

$$I=\int(U\,dx+V\,dy+W\,dz),$$

prise le long de ce contour, U, V, W étant les composantes de la vitesse d'un point x, y, z du fluide suivant les axes des coordonnées.

Nous désignerons ces constantes par

$$k_s \qquad (s=1, 2, \ldots, m).$$

2. Désignons par n la direction de la normale extérieure à (S) (surface du corps), par

$$\frac{\partial F_i}{\partial n} \quad \text{et} \quad \frac{\partial F_e}{\partial n}$$

les dérivées normales, intérieure et extérieure, de F sur (S).

Envisageons maintenant trois axes mobiles Ox, Oy, Oz, liés au corps solide, et désignons par

$$u, \quad v, \quad w$$

les composantes de la vitesse du point O suivant les axes Ox, Oy, Oz, par

$$p, \quad q, \quad r$$

les composantes d'une rotation instantanée ω.

Les nombres k_s étant donnés, le problème du mouvement du liquide indéfini se ramène au problème suivant :

Trouver à l'extérieur de (S) *une fonction* F *satisfaisant aux conditions suivantes :*

1° F *est une fonction harmonique à l'extérieur de* (S);

2° F *reste continue le long de tout contour fermé de première espèce, tracé dans le liquide, et varie brusquement à la constante* k_s, *lorsque le point décrivant* $s^{\text{ième}}$ *contour principal traverse la coupure correspondante;*

3° *La différence* F — C, C *étant une constante, tend uniformément vers zéro, lorsque la distance* R *du point* x, y, z *à l'origine des coordonnées croît au delà de toute limite;*

4° *La dérivée normale extérieure de* F *satisfait à la condition*

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_e}{\partial n} &= (u + qz - ry)\cos(n, x)\\ &\quad + (v + rx - pz)\cos(n, y) + (w + py - qx)\cos(n, z) \qquad \text{sur} \quad (S).\end{aligned}$$

On sait que *ce problème ne peut admettre plus d'une solution.*

On peut représenter F sous la forme suivante :

$$F = F_1 + \sum_{s=1}^{m} k_s \mathfrak{I}_s = F_1 + F_2, \tag{1}$$

où F est une fonction satisfaisant aux conditions 1°, 3° et 4°, *continue* avec ses dérivées de deux premiers ordres à l'extérieur de (S), $\mathfrak{I}_s (s = 1, 2, \ldots, m)$ sont des fonctions ne dépendant pas de u, v, w, p, q, r, harmoniques à l'extérieur de (S), variant brusquement à l'unité lorsque le point décrivant le $s^{\text{ième}}$ contour principal traverse la coupure correspondante, et restant uniforme le long de toutes les autres coupures tracées dans le liquide.

Ces fonctions s'annulent à l'infini avec ses dérivées du premier ordre et satisfont aux conditions

$$\frac{\partial \vartheta_{se}}{\partial n} = 0 \qquad \text{sur la surface du corps.}$$

On appelle cette fonction ϑ_s fonction *monocyclique correspondant à la constante cyclique* k_s.

La fonction F_2 satisfera donc à la condition

$$\frac{\partial F_{2e}}{\partial n} = 0 \qquad \text{sur} \quad (S).$$

Quant à la fonction F_1, elle sera linéaire en u, v, w; p, q, r

$$F_1 = u\varphi_1 + v\varphi_2 + w\varphi_3 + p\psi_1 + q\psi_2 + r\psi_3 + C, \tag{2}$$

φ_j, $\psi_j (s = 1, 2, 3)$ étant des fonctions du point x, y, z jouissant des propriétés suivantes :

a. Elles sont harmoniques et continues à l'extérieur de (S), ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres.

b. Elles tendent uniformément vers zéro lorsque R croît indéfiniment.

c. Elles satisfont aux conditions

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi_{1e}}{\partial n} &= \cos(n, x), & \frac{\partial \psi_{1e}}{\partial n} &= y\cos(n, z) - z\cos(n, y) \\
\frac{\partial \varphi_{2e}}{\partial n} &= \cos(n, y), & \frac{\partial \psi_{2e}}{\partial n} &= z\cos(n, x) - x\cos(n, z) \\
\frac{\partial \varphi_{3e}}{\partial n} &= \cos(n, z), & \frac{\partial \psi_{3e}}{\partial n} &= x\cos(n, y) - y\cos(n, x)
\end{aligned}\right\} \quad \text{sur} \quad (S).$$

On sait que les conditions énoncées (a, b, c) caractérisent complètement chacune des fonctions φ_j, ψ_j et, par conséquent, la fonction F_1.

Il résulte de ce qui précède que la fonction F

$$F = F_1 + F_2$$

satisfait à toutes les conditions 1°, 2°, 3° et 4°.

La fonction F étant ainsi déterminée, nous aurons

$$u = \frac{\partial F}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial F}{\partial y}, \qquad w = \frac{\partial F}{\partial z},$$

et le problème du mouvement du liquide indéfini sera résolu.

3. Pour déterminer le potentiel F_n des vitesses du liquide remplissant la $n^{\text{ième}}$ cavité, limitée par la surface fermée (S_n), dont l'ordre de connexion soit égal à p_n, posons

$$F_n = F_{1n} + \sum_{s=1}^{p_n} k_s^{(n)} \mathfrak{I}_s^{(n)} = F_{1n} + F_{2n},$$

$k_s^{(n)}$ étant des constantes cycliques correspondant à la surface (S_n), $\mathfrak{I}_s^{(n)}$ étant des fonctions monocycliques correspondant aux constantes $k_s^{(n)}$, F_{1n} étant une fonction de la forme

$$F_{1n} = ux + vy + wz + p\psi_1^{(n)} + q\psi_2^{(n)} + r\psi_3^{(n)}.$$

Quant aux fonctions $\varphi_j^{(n)}$, elles sont harmoniques à l'intérieur de (S_n), continues avec ses dérivées des deux premiers ordres, et satisfont aux conditions

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \psi_{1i}^{(n)}}{\partial n} &= y\cos(n, z) - z\cos(n, y) \\ \frac{\partial \psi_{2i}^{(n)}}{\partial n} &= z\cos(n, x) - x\cos(n, z) \\ \frac{\partial \psi_{3i}^{(n)}}{\partial n} &= x\cos(n, y) - y\cos(n, x) \quad (^1) \end{aligned} \right\} \quad \text{sur la surface} \quad (S_n).$$

La fonction F_n étant ainsi déterminée, nous aurons

$$u = \frac{\partial F_n}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial F_n}{\partial y}, \qquad w = \frac{\partial F_n}{\partial z} \quad (^2),$$

et le problème du mouvement du liquide dans la $n^{\text{ième}}$ cavité sera résolu.

FORCE VIVE DES MASSES LIQUIDES ET DU SYSTÈME TOTAL.

4. Considérons un volume quelconque dont l'ordre de connexion est égal à $m+1$.

Soient U et V deux fonctions cycliques à l'intérieur du volume; soient

$$(4) \qquad k_s \quad \text{et} \quad k'_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, m)$$

leurs constantes cycliques.

Désignons par $d\tau$ l'élément de volume considéré, limité par une surface

---

(1) n désigne la direction de la normale extérieure à (S_n).

(2) u, v, w désignent les composantes de la vitesse du liquide remplissant la $n^{\text{ième}}$ cavité.

fermée (S), par ds l'élément superficiel de (S), par $d\sigma_s (s = 1, 2, \ldots, m)$ l'élément de $s^{\text{ième}}$ coupure.

Employant le théorème de Green, on trouve

$$(5) \qquad \int\sum \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}d\tau = \int \mathrm{U}\frac{\partial \mathrm{V}_i}{\partial n}ds - \sum_{s=1}^{m} k_s \int \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n}d\sigma_s$$

$$= \int \mathrm{V}\frac{\partial \mathrm{U}_i}{\partial n}ds - \sum_{s=1}^{m} k'_s \int \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial n}d\sigma_s,$$

en choisissant convenablement la direction positive de la normale n aux coupures correspondant aux constantes k_s et k'_s.

Considérons maintenant le domaine (D′), extérieur à (S).

Soient U et V deux fonctions cycliques à l'extérieur de (S), correspondantes aux constantes (4).

On trouve, comme précédemment,

$$(5_1) \qquad \int\sum \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}d\tau' = -\int \mathrm{U}\frac{\partial \mathrm{V}_e}{\partial n}ds + \sum_{s=1}^{m} k_s \int \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial n}d\sigma_s$$

$$= -\int \mathrm{V}\frac{\partial \mathrm{U}_e}{\partial n}ds + \sum_{s=1}^{m} k'_s \int \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial n}d\sigma_s,$$

$d\tau'$ étant le volume du domaine (D′).

5. Désignons par T_2 la force vive, par ρ la densité du liquide indéfini.

On trouve

$$2\mathrm{T}_2 = \rho\int\sum\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}\right)^2 d\tau',$$

F étant le potentiel des vitesses.

On sait que F est une fonction cyclique dont les constantes cycliques sont égales à

$$k_s \qquad (s = 1, 2, 3, \ldots, m) \qquad (\text{n}^{\text{os}}\ 1 \text{ et } 2).$$

On a donc, en vertu de (5_1),

$$2\mathrm{T}_2 = -\rho\int \mathrm{F}\frac{\partial \mathrm{F}_e}{\partial n}ds + \sum_{s=1}^{m} k_s \int \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial n}d\sigma_s,$$

d'où, en remarquant que

$$F = F_1 + F_2,$$

et en tenant compte des propriétés de F_1 et F_2, indiquées plus haut, on tire aisément

$$2T_2 = -\rho\int F_1 \frac{\partial F_{1e}}{\partial n} ds + \rho\sum_{s=1}^{m} k_s \int \frac{\partial F_2}{\partial n} d\sigma_s + \rho\left(\sum_{s=1}^{m} k \int \frac{\partial F_1}{\partial n} d\sigma_s - \int F_2 \frac{\partial F_{1e}}{\partial n} ds\right).$$

Posons dans (5_1)

$$U = F_2, \qquad V = F_1, \qquad k'_s = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, m).$$

On aura

$$\sum_{s=1}^{m} k_s \int \frac{\partial F_1}{\partial n} d\sigma_s - \int F_2 \frac{\partial F_1}{\partial n} ds = 0$$

et, par suite,

$$2T_2 = -\rho\int F_1 \frac{\partial F_{1e}}{\partial n} ds + \rho\sum_{s=1}^{m} k_s \int \frac{\partial F_2}{\partial n} d\sigma_s.$$

Désignons maintenant par T_{2n} la force vive du liquide remplissant $n^{\text{ième}}$ cavité.

Nous trouverons, comme précédemment, en tenant compte de (5),

$$2T_{2n} = \rho_n \int F_{1n} \frac{\partial F_{1n,i}}{\partial n} ds^{(n)} - \rho_n \sum_{s=1}^{p_n} k_s^{(n)} \int \frac{\partial F_{2n}}{\partial n} d\sigma_s^{(n)},$$

où ρ_n désigne la densité du liquide considéré, $ds_s^{(n)}$ l'élément superficiel de la surface (S_n) (n° 3), $d\sigma_s^{(n)}$ l'élément de la coupure correspondant à la constante $k_s^{(n)}$.

6. Posons, pour abréger l'écriture,

$$\rho\int \sum \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} d\tau' = (U, V) = (V, U),$$

$$2T_3 = -\rho\int F_1 \frac{\partial F_{1e}}{\partial n} ds, \qquad 2T_4 = -\rho\sum k_s \int \frac{\partial F_2}{\partial n} d\sigma_s.$$

On peut écrire

$$2T_2 = 2T_3 + 2T_4,$$

ou, en vertu de (1) et (2),

$$\begin{aligned}
2\mathrm{T}_3 = {} & (\varphi_1, \varphi_1)u^2 + (\varphi_2, \varphi_2)v^2 + (\varphi_3, \varphi_3)w^2 \\
& + 2(\varphi_2, \varphi_3)vw + 2(\varphi_1, \varphi_3)uw + 2(\varphi_1, \varphi_2)uv \\
& + (\psi_1, \psi_1)p^2 + (\psi_2, \psi_2)q^2 + (\psi_3, \psi_3)r^2 \\
& + 2(\psi_2, \psi_3)qr + 2(\psi_1, \psi_3)pr + 2(\psi_1, \psi_2)pq \\
& + 2(\varphi_1, \psi_1)up + 2(\varphi_1, \psi_2)uq + 2(\varphi_1, \psi_3)uv \\
& + 2(\varphi_2, \psi_1)vp + 2(\varphi_2, \psi_2)vq + 2(\varphi_2, \psi_3)vr \\
& + 2(\varphi_3, \psi_1)wp + 2(\varphi_3, \psi_2)wq + 2(\varphi_3, \psi_3)wr,
\end{aligned}$$

$$2\mathrm{T}_4 = \sum_{s=1}^{m} \mathrm{K}_{ss} k_s^2 + 2\sum_{s,p} \mathrm{K}_{sp} k_s k_p,$$

$$\mathrm{K}_{ss} = \rho \int \frac{\partial \mathfrak{S}_s}{\partial n} d\sigma_s, \qquad \mathrm{K}_{sp} = \rho \int \frac{\partial \mathfrak{S}_s}{\partial n} d\sigma_p = \rho \int \frac{\partial \mathfrak{S}_p}{\partial n} d\sigma_s.$$

7. Soit q le nombre de cavités du corps solide.

Désignons par T_{2n} la force vive du liquide remplissant $n^{\text{ième}}$ cavité. On peut écrire

$$2\mathrm{T}_{2n} = 2\mathrm{T}_{3n} + 2\mathrm{T}_{4n}.$$

Nous obtiendrons l'expression de T_{3n} et T_{4n} en remplaçant, dans T_3 et T_4, φ_j par x, y, z, ψ_j par $\psi_j^{(n)}$, K et k par $\mathrm{K}^{(n)}$ et $k^{(n)}$ et en supposant que les indices s et p prennent les valeurs $1, 2, \ldots, p_n$ ($n = 1, 2, \ldots, q$).

Désignons par $x_c^{(n)}, y_c^{(n)}, z_c^{(n)}$ les coordonnées du centre de gravité, par M_n la masse totale du liquide remplissant $n^{\text{ième}}$ cavité, par $d\tau^{(n)}$ l'élément de volume de cette cavité.

On trouve aisément, en tenant compte de (3),

$$\begin{aligned}
(x, z) &= (y, y) = (z, z) = \mathrm{M}_n, \\
(x, y) &= (x, z) = (y, z) = 0, \\
(x, \psi_1^{(n)}) &= (y, \psi_2^{(n)}) = (z, \psi_3^{(n)}) = 0,
\end{aligned}$$

$$(y, \psi_3^{(n)}) = -(z, \psi_2^{(n)}) = \rho_n \int x \, d\tau^{(n)} = \mathrm{M}_n x_c^{(n)},$$

$$(z, \psi_1^{(n)}) = -(x, \psi_3^{(n)}) = \rho_n \int y \, d\tau^{(n)} = \mathrm{M}_n y_c^{(n)},$$

$$(x, \psi_2^{(n)}) = -(y, \psi_1^{(n)}) = \rho_n \int z \, d\tau^{(n)} = \mathrm{M}_n z_c^{(n)}.$$

On a donc

$$2T_{3n} = M_n(u^2+v^2+w^2) + 2M_n[(vr - wq)x_c^{(n)} + (wp - ur)y_c^{(n)} + (uq - vp)z_c^{(n)}]$$
$$+ p^2(\psi_1^{(n)}, \psi_1^{(n)}) + q^2(\psi_2^{(n)}, \psi_2^{(n)}) + r^2(\psi_3^{(n)}, \psi_3^{(n)})$$
$$+ 2(\psi_1^{(n)}, \psi_2^{(n)})pq + 2(\psi_1^{(n)}, \psi_3^{(n)})pr + 2(\psi_2^{(n)}, \psi_3^{(n)})qr.$$

en résulte que *l'on peut considérer* $T_{3n}(n = 1, 2, \ldots, q)$ *comme force vive d'un corps solide dont la masse totale est égale à la masse totale du liquide de* $n^{\text{ième}}$ *cavité, le centre de gravité coïncide avec celui du liquide, les moments d'inertie par rapport aux axes* Ox, Oy, Oz *sont égaux à*

$$(\psi_1^{(n)}, \psi_1^{(n)}), \quad (\psi_2^{(n)}, \psi_2^{(n)}), \quad (\psi_3^{(n)}, \psi_3^{(n)}) \qquad (n = 1, 2, \ldots, q)$$

et les produits d'inertie sont égaux à

$$(\psi_1^{(n)}, \psi_2^{(n)}), \quad (\psi_1^{(n)}, \psi_3^{(n)}), \quad (\psi_2^{(n)}, \psi_3^{(n)}) \qquad (n = 1, 2, \ldots, q).$$

8. Désignons maintenant par T' la force vive du corps solide plongé dans le liquide indéfini, par T la force vive du système total (de toutes les masses liquides et du corps solide, pris ensemble).

On trouve

$$2T = 2T' + 2\sum_{n=1}^{q} T_{3n} + 2T_3 + S,$$

où l'on a posé

$$S = 2T_4 + 2\sum_{n=1}^{q} T_{4n},$$

S étant une forme quadratique de

$$k_s \quad (s = 1, 2, \ldots, m), \qquad k_s^{(n)} \quad \begin{pmatrix} n = 1, 2, \ldots, q \\ s = 1, 2, \ldots, p_n \end{pmatrix}$$

à coefficients constants ne dépendant pas de u, v, w, p, q, r.

Désignons par M la masse totale du corps solide et des liquides remplissant les cavités, par x_c, y_c, z_c les coordonnées du centre de gravité de ce système composé que nous désignerons par (C). Soient enfin A', B', C' et D', E', F' les moments et les produits d'inertie du corps solide.

Il est aisé de voir que *l'on peut considérer*

$$T' + \sum_{n=1}^{q} T_{3n}$$

comme force vive d'un corps solide dont la masse est égale à M, *le centre de* *gravité coïncide avec celui du système* (C), *les moments d'inertie sont égaux à*

$$A = A' + \sum_{n=1}^{q} (\psi_1^{(n)}, \psi_1^{(n)}), \qquad B = B' + \sum_{n=1}^{q} (\psi_2^{(n)}, \psi_2^{(n)}), \qquad C = C' + \sum_{n=1}^{q} (\psi_3^{(n)}, \psi_3^{(n)})$$

et les produits d'inertie sont égaux à

$$D = D' + \sum_{n=1}^{q} (\psi_2^{(n)}, \psi_3^{(n)}), \qquad E = E' + \sum_{n=1}^{q} (\psi_1^{(n)}, \psi_3^{(n)}), \qquad F = F' + \sum_{n=1}^{q} (\psi_1^{(n)}, \psi_2^{(n)}).$$

Désignons par $\mathcal{T}$ la force vive de ce corps solide. On peut écrire

$$2T = 2\mathcal{T} + 2T_3 + S.$$

PRESSION DANS LE LIQUIDE INDÉFINI ET DANS LES LIQUIDES REMPLISSANT DES CAVITÉS.

9. Désignons par p la pression en un point quelconque du liquide indéfini, par p_n la pression dans le liquide remplissant $n^{\text{ième}}$ cavité ($n = 1, 2, \ldots, q$).

Envisageons un système d'axes fixes ξ, η, ζ et désignons par

$$\Phi(\xi, \eta, \zeta, t) \quad (1)$$

le potentiel des vitesses du liquide indéfini.

Nous obtiendrons F en remplaçant dans Φ les variables ξ, η, ζ par leurs expressions en x, y, z.

Désignons les cosinus directeurs des axes mobiles par rapport aux axes fixes par

$$\alpha_i, \quad \beta_i, \quad \gamma_i \qquad (i = 1, 2, 3),$$

par α, β, γ les coordonnées du point O (du pôle).

On a

$$x = (\xi - \alpha)\alpha_1 + (\eta - \beta)\beta_1 + (\zeta - z)\gamma_1, \qquad \ldots$$

et

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial t},$$

où

$$\frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t}$$

---

(1) t désigne le temps.

sont les composantes de la vitesse d'entraînement W du point ξ, η, ζ suivant les axes fixes.

D'autre part

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\xi}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\xi}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial\xi}=\frac{\partial F}{\partial x}\alpha_1+\frac{\partial F}{\partial y}\alpha_2+\frac{\partial F}{\partial z}\alpha_3, \quad \ldots \qquad \text{pour } \eta \text{ et } \zeta.$$

On a donc

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial t}+\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial t}=\frac{\partial F}{\partial x}W_x+\frac{\partial F}{\partial y}W_y+\frac{\partial F}{\partial z}W_z,$$

où

$$W_x=u+qz-ry,$$
$$W_y=v+rx-pz,$$
$$W_z=w+py-qx,$$

c'est-à-dire

$$(6)\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial t}=\frac{\partial F}{\partial t}-\left[\frac{\partial F}{\partial x}(u+qz-ry)+\frac{\partial F}{\partial y}(v+rx-pz)+\frac{\partial F}{\partial z}(w+py-qz)\right].$$

Supposons que le liquide soit soumis à des forces ayant une fonction des forces que nous désignerons par U.

La formule de Lagrange nous donne

$$\frac{p}{\rho}=U+C-\frac{\partial\Phi}{\partial t}-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta}\right)^2\right],$$

C étant une fonction ne dépendant que de t, d'où, en tenant compte de (6) et de l'égalité évidente

$$\sum\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right)^2=\sum\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2,$$

on tire immédiatement

$$(7)\qquad \frac{p}{\rho}=U+C-\frac{\partial F}{\partial t}-\frac{1}{2}\sum\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2$$
$$+\frac{\partial F}{\partial x}(u+qz-ry)+\frac{\partial F}{\partial y}(v+rx-pz)+\frac{\partial F}{\partial z}(w+py-qx).$$

Nous trouverons de la même manière

$$\frac{p_n}{\rho_n}=U_n+C_n-\frac{\partial F_n}{\partial t}-\frac{1}{2}\sum\left(\frac{\partial F_n}{\partial x}\right)^2$$
$$+\frac{\partial F_n}{\partial x}(u+qz-ry)+\frac{\partial F_n}{\partial y}(v+rx-pz)+\frac{\partial F_n}{\partial z}(w+py-qx),$$

U_n étant la fonction des forces agissant sur les points du liquide de $n^{\text{ième}}$ cavité, C_n étant une fonction ne dépendant que du temps.

10. Désignons maintenant par

$$p_x, \quad p_y, \quad p_z$$

les projections sur les axes Ox, Oy, Oz de la résultante générale des forces des pressions exercées par le liquide indéfini sur la surface (S) du corps, par

$$p_{nx}, \quad p_{ny}, \quad p_{nz} \qquad (n = 1, 2, \ldots, q)$$

les projections correspondantes des forces des pressions exercées sur la paroi de $n^{\text{ième}}$ cavité par les masses fluides remplissant cette cavité.

Désignons ensuite par

$$q_x, \quad q_y, \quad q_z$$

les projections du moment résultant par rapport à O des pressions du liquide indéfini sur (S), par

$$q_{nx}, \quad q_{ny}, \quad q_{nz} \qquad (n = 1, 2, \ldots, q)$$

les projections correspondantes pour le liquide remplissant $n^{\text{ième}}$ cavité.

Formons d'abord les expressions p_x, p_y, p_z.

Désignons par α, β, γ les angles de la normale extérieure n à (S) avec les axes des coordonnées.

On trouve, en tenant compte de (7),

$$\begin{aligned} -p_x = \rho \int (\mathrm{U} + \mathrm{C}) \cos\alpha\, ds - \rho \int \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial t} \cos\alpha\, ds \\ - \frac{\rho}{2} \int \sum \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}\right)^2 \cos\alpha\, ds + \rho \int \sum \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x} (u + qz - ry) \cos\alpha\, ds, \end{aligned}$$

les intégrales étant étendues sur la surface (S) du corps.

Soit $d\sigma$ l'élément superficiel de la sphère (σ) du rayon R ayant son centre à l'origine des coordonnées.

Désignons, en général, par

$$\lim_{\mathrm{R}=\infty} \int f(x, y, z)\, d\sigma$$

la limite vers laquelle tend l'intégrale

$$\int f(x, y, z)\, d\sigma,$$

lorsque R tend vers l'infini.

Il est aisé de voir que

$$\lim_{R=\infty}\int\sum\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2\cos\alpha\, d\sigma = 0,$$

où α désigne l'angle de la normale intérieure à (σ) avec l'axe des x.

Considérons maintenant l'expression suivante :

$$\lim_{R=\infty} I = \lim_{R=\infty}\int\sum\frac{\partial F}{\partial x}(u+qz-ry)\cos\alpha\, d\sigma.$$

Supposons que R soit suffisamment grand et employons le développement connu

$$F_1 = \text{const.} + \frac{S_1}{R^2} + \frac{S_2}{R^3} + \ldots,$$

S_1, S_2, ... étant les fonctions sphériques.

On sait que le produit $R^k S_k$ est un polynome homogène de degré k en x, y, z.

On peut donc écrire

$$F_1 = \text{const.} + \frac{ax+by+cz}{R^3} + \varepsilon = \text{const.} + \varphi + \varepsilon, \tag{8}$$

a, b, c étant des constantes.

Si R est infiniment grand, φ sera infiniment petit du second ordre, ε sera infiniment petit d'ordre plus élevé.

Il s'ensuit que

$$\lim_{R=\infty}\int\sum\frac{\partial F}{\partial x}u\cos\alpha\, d\sigma = 0,$$

$$\lim_{R=\infty}\int\sum\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}(qz-ry)\cos\alpha\, d\sigma = 0.$$

On a donc

$$\begin{aligned}\lim_{R=\infty} I &= \lim_{R=\infty}\int\sum\frac{\partial\varphi}{\partial x}(qz-ry)\cos\alpha\, d\sigma\\ &= \lim_{R=\infty}\int\sum a(qz-ry)\cos\alpha\, d\sigma = \lim_{R=\infty}\left[(rb-qc)\int\frac{x^2}{R^4}d\sigma + \int\frac{p}{R^4}d\sigma\right],\end{aligned}$$

p désignant une fonction linéaire homogène en yz, zx, xy.

Il est aisé de s'assurer que

$$\left\{\begin{aligned}&\int\frac{xy}{R^4}d\sigma = \int\frac{zx}{R^4}d\sigma = \int\frac{yz}{R^4}d\sigma = 0,\\ &\int\frac{x^2}{R^4}d\sigma = \int\frac{y^2}{R^4}d\sigma = \int\frac{z^2}{R^4}d\sigma = \frac{4}{3}\pi,\end{aligned}\right. \tag{9}$$

quel que soit R. Par conséquent,

$$\lim_{R=\infty} I = \tfrac{4}{3}\pi(rb - qc);$$

d'où, en posant

$$B = \tfrac{4}{3}\pi\rho b, \qquad C = \tfrac{4}{3}\pi\rho c,$$

on tire

$$\rho \lim_{R=\infty} I = rB - qC.$$

On peut donc écrire

$$\begin{aligned} -p_x = \rho\int (U + C)\cos\alpha\, ds - \rho\int \frac{\partial F}{\partial t}\cos\alpha\, dS - \frac{\rho}{2}\int \sum\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 \cos\alpha\, dS \\ + \rho\int \sum \frac{\partial F}{\partial x}(u + qz - ry)\cos\alpha\, dS + qC - rB, \end{aligned}$$

en entendant par dS l'élément superficiel de la surface (S) du corps et de la sphère (σ) du rayon R infiniment grand, prises ensemble.

Posons, pour abréger l'écriture,

$$K = -\frac{\rho}{2}\int \sum\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 \cos\alpha\, dS + \rho\int \sum \frac{\partial F}{\partial x}(u + qz - ry)\cos\alpha\, dS,$$

et désignons par $d\tau'$ l'élément de volume de l'espace, limité par la surface (S) et par la sphère (σ).

On trouve, en employant la transformation de Green,

$$K = \rho\int\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}U + \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}V + \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial z}W\right)d\tau' + \rho q\int \frac{\partial F}{\partial z}d\tau' - \rho r\int \frac{\partial F}{\partial y}d\tau',$$

où l'on a posé

$$U = \frac{\partial F}{\partial x} - (u + qz - ry), \qquad V = \frac{\partial F}{\partial y} - (v + rx - pz), \qquad W = \frac{\partial F}{\partial z} + (w + py - qx),$$

U, V, W étant les composantes de la vitesse relative des points du liquide indéfini par rapport au corps solide.

D'autre part,

$$\rho\int\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}U + \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}V + \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial z}W\right)d\tau' = -\rho\int \frac{\partial F}{\partial x}(U\cos\alpha + V\cos\beta + W\cos\gamma)\,dS = 0.$$

On a, en effet,

$$\lim_{R=\infty}\int \frac{\partial F}{\partial x}(U\cos\alpha + V\cos\beta + W\cos\gamma)\,d\sigma = 0$$

et

$$\int \frac{\partial F}{\partial x}(U\cos\alpha + V\cos\beta + W\cos\gamma)\, ds = 0,$$

puisque

$$U\cos\alpha + V\cos\beta + W\cos\gamma = 0 \qquad \text{sur} \quad (S).$$

On a donc

$$K = \rho q \int \frac{\partial F}{\partial z} d\tau' - \rho r \int \frac{\partial F}{\partial z} d\tau'.$$

D'autre part, d'après le théorème de Green (*voir* n° 4),

$$(10) \quad \begin{cases} R'_1 = -\rho \int \frac{\partial F}{\partial x} d\tau' = \rho \int F\cos\alpha\, dS - \rho \sum_{s=1}^{m} k_s \int \cos\alpha\, d\sigma_s, \\ R'_2 = -\rho \int \frac{\partial F}{\partial y} d\tau' = \rho \int F\cos\beta\, dS - \rho \sum_{s=1}^{m} k_s \int \cos\beta\, d\sigma_s, \\ R'_3 = -\rho \int \frac{\partial F}{\partial z} d\tau' = \rho \int F\cos\gamma\, dS - \rho \sum_{s=1}^{m} k_s \int \cos\gamma\, d\sigma_s, \end{cases}$$

ou, en tenant compte de (8) et (9),

$$(11) \quad \begin{cases} R'_1 = R_1 + \rho \lim_{R=\infty} \int F\cos\alpha\, d\sigma = R_1 + A & (A = \tfrac{4}{3}\pi\rho a), \\ R'_2 = R_2 + \rho \lim_{R=\infty} \int F\cos\beta\, d\sigma = R_2 + B & (B = \tfrac{4}{3}\pi\rho b), \\ R'_3 = R_3 + \rho \lim_{R=\infty} \int F\cos\gamma\, d\sigma = R_3 + C & (C = \tfrac{4}{3}\pi\rho c), \end{cases}$$

où l'on a posé

$$(12) \quad \begin{cases} R_1 = \rho \int F\cos\alpha\, ds - \rho \sum_{s=1}^{m} k_s \int \cos\alpha\, d\sigma_s, \\ R_2 = \rho \int F\cos\beta\, ds - \rho \sum_{s=1}^{m} k_s \int \cos\beta\, d\sigma_s, \\ R_3 = \rho \int F\cos\gamma\, ds - \rho \sum_{s=1}^{m} k_s \int \cos\gamma\, d\sigma_s. \end{cases}$$

Par conséquent,

$$K = rR_2 - qR_3 + rB - qC.$$

Supposons maintenant que la fonction U soit uniforme et continue dans l'espace tout entier.

On trouve

$$\int (\mathrm{U} + \mathrm{C}) \cos\alpha \, ds = \int \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} d\tau,$$

$d\tau$ étant l'élément de volume limité par la surface (S).

Il résulte de ce qui précède que

(13)
$$p_x = -\rho \int \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} d\tau + q\mathrm{R}_3 - r\mathrm{R}_2 + \frac{d\mathrm{R}_1}{dt}.$$

Nous trouverons ensuite, de la même manière,

$$p_y = -\rho \int \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y} d\tau + r\mathrm{R}_1 - p\mathrm{R}_3 + \frac{d\mathrm{R}_2}{dt},$$

$$p_z = -\rho \int \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z} d\tau + p\mathrm{R}_2 - q\mathrm{R}_1 + \frac{d\mathrm{R}_3}{dt}.$$

Quant à p_{nx}, p_{ny}, p_{nz}, ils se représenteront sous la forme suivante

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} p_{nx} &= \rho_n \int \frac{\partial \mathrm{U}_n}{\partial x} d\tau^{(n)} + q\mathrm{R}_3^{(n)} - r\mathrm{R}_2^{(n)} + \frac{d\mathrm{R}_1^{(n)}}{dt} \\ p_{ny} &= \rho_n \int \frac{\partial \mathrm{U}_n}{\partial y} d\tau^{(n)} + r\mathrm{R}_1^{(n)} - p\mathrm{R}_3^{(n)} + \frac{d\mathrm{R}_2^{(n)}}{dt} \\ p_{nz} &= \rho_n \int \frac{\partial \mathrm{U}_n}{\partial z} d\tau^{(n)} + p\mathrm{R}_2^{(n)} - q\mathrm{R}_1^{(n)} + \frac{d\mathrm{R}_3^{(n)}}{dt} \end{aligned} \right\}. \qquad (n = 1, 2, \ldots, q),$$

où

$$\mathrm{R}_1^{(n)} = \rho_n \int \mathrm{F}_n \cos\alpha \, ds^{(n)} - \rho_n \sum_{s=1}^{p_n} k_s^{(n)} \int \cos\alpha \, d\sigma_s^{(n)},$$

$$\mathrm{R}_2^{(n)} = \rho_n \int \mathrm{F}_n \cos\beta \, ds^{(n)} - \rho_n \sum_{s=1}^{p_n} k_s^{(n)} \int \cos\beta \, d\sigma_s^{(n)},$$

$$\mathrm{R}_3^{(n)} = \rho_n \int \mathrm{F}_n \cos\gamma \, ds^{(n)} - \rho_n \sum_{s=1}^{p_n} k_s^{(n)} \int \cos\gamma \, d\sigma_s^{(n)}.$$

Dans ces formules, nous entendons par α, β, γ les angles de la normale intérieure à (S_n) avec les axes des coordonnées.

11. Formons maintenant les expressions de

$$q_x, \quad q_y, \quad q_z, \qquad q_{nx}, \quad q_{ny}, \quad q_{nz} \qquad (n = 1, 2, \ldots, q).$$

Posons, pour abréger l'écriture,

$$(15)\quad \left\{ \begin{aligned} & u_1 = u + qz - ry, \qquad v_1 = v + rx - pz, \qquad w_1 = w + py - qx, \\ & \qquad\qquad p_1 = -\frac{1}{2} \sum \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \sum \frac{\partial F}{\partial x} u_1. \end{aligned} \right.$$

On a

$$-q_x = \int p(y\cos\gamma - z\cos\beta)\,ds,$$

d'où, en raisonnant comme précédemment (n° 10), on tire

$$(16)\quad \begin{aligned} -q_x = \rho \int (U + C)(y\cos\gamma - z\cos\beta)\,ds - \rho \int \frac{\partial F}{\partial t}(y\cos\gamma - z\cos\beta)\,ds \\ + \rho \int p_1(y\cos\gamma - z\cos\beta)\,dS, \end{aligned}$$

car

$$\lim_{R=\infty} \int p_1(y\cos\gamma - z\cos\beta)\,d\sigma = 0.$$

Le théorème de Green donne

$$q_{1x} = \rho \int p_1(y\cos\gamma - z\cos\beta)\,dS = -\rho \int \left(\frac{\partial p_1}{\partial z} y - \frac{\partial p_1}{\partial y} z\right) d\tau',$$

où, en vertu de (15),

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_1}{\partial z} y - \frac{\partial p_1}{\partial y} z = \frac{\partial \psi}{\partial x} U + \frac{\partial \psi}{\partial y} V + \frac{\partial \psi}{\partial z} W + w \frac{\partial F}{\partial y} - v \frac{\partial F}{\partial z} \\ + q\left(\frac{\partial F}{\partial x} y - \frac{\partial F}{\partial y} x\right) - r\left(\frac{\partial F}{\partial z} x - \frac{\partial F}{\partial x} z\right), \end{aligned}$$

$$\psi = \frac{\partial F}{\partial y} z - \frac{\partial F}{\partial z} y.$$

Il est aisé de s'assurer (*voir* numéro précédent) que

$$\begin{aligned} & \int \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} U + \frac{\partial \psi}{\partial y} V + \frac{\partial \psi}{\partial z} \partial W\right) d\tau' \\ & = -\int \psi(U\cos\alpha + V\cos\beta + W\cos\gamma)\,dS \\ & = -\lim_{R=\infty} \int \left(\frac{\partial F}{\partial y} z - \frac{\partial F}{\partial z} y\right)(U\cos\alpha + V\cos\beta + W\cos\gamma)\,d\sigma = wB - vC. \end{aligned}$$

On a donc

$$q_{1x} = \rho v \int \frac{\partial F}{\partial z} d\tau' - \rho w \int \frac{\partial F}{\partial y} d\tau'$$
$$+ \rho q \int \left(\frac{\partial F}{\partial y} x - \frac{\partial F}{\partial x} y \right) d\tau' - \rho r \int \left(\frac{\partial F}{\partial x} z - \frac{\partial F}{\partial z} x \right) d\tau' + v C - w B.$$

Or, d'après le théorème de Green,

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} S_2 &= -\rho \int \left(\frac{\partial F}{\partial x} z - \frac{\partial F}{\partial z} x \right) d\tau' \\ &= \rho \int F(z \cos\alpha - x \cos\gamma)\, ds - \rho \sum_{s=1}^{m} k_s \int (z \cos\alpha - x \cos\gamma)\, d\sigma_s, \\ S_3 &= -\rho \int \left(\frac{\partial F}{\partial y} x - \frac{\partial F}{\partial x} y \right) d\tau' \\ &= \rho \int F(x \cos\beta - y \cos\alpha)\, ds - \rho \sum_{s=1}^{m} k_s \int (x \cos\beta - y \cos\alpha)\, d\sigma_s, \end{aligned} \right.$$

puisque

$$\lim_{R=\infty} \int F(z \cos\alpha - x \cos\gamma)\, d\sigma = 0,$$
$$\lim_{R=\infty} \int F(x \cos\beta - y \cos\alpha)\, d\sigma = 0.$$

On a donc, en vertu de (10), (11), (12) et (17),

$$q_{1x} = w R_2 - v R_3 + r S_2 - q S_3.$$

D'autre part (*voir* numéro précédent),

$$\int (U + C)(y \cos\gamma - z \cos\beta)\, ds = -\int \left(z \frac{\partial U}{\partial y} - y \frac{\partial U}{\partial z} \right) d\tau,$$

et l'équation (16) devient

$$(18) \qquad q_x = v R_3 - w R_2 + q S_3 - r S_2 + \frac{dS_1}{dt} + \rho \int \left(z \frac{\partial U}{\partial y} - y \frac{\partial U}{\partial z} \right) d\tau,$$

où l'on a posé

$$(17_1) \qquad S_1 = \rho \int F(y \cos\gamma - z \cos\beta)\, ds - \rho \sum_{s=1}^{m} k_s \int (y \cos\gamma - z \cos\beta)\, d\sigma_s.$$

La même méthode nous donnera ensuite

$$(18)\quad \begin{cases} q_y = w R_1 - u R_3 + r S_1 - p S_3 + \dfrac{dS_2}{dt} + \rho \displaystyle\int \left(x \frac{\partial U}{\partial z} - z \frac{\partial U}{\partial x} \right) d\tau, \\ q_z = u R_2 + v R_1 + p S_2 - q S_1 + \dfrac{dS_3}{dt} + \rho \displaystyle\int \left(y \frac{\partial U}{\partial x} - x \frac{\partial U}{\partial y} \right) d\tau. \end{cases}$$

Quant à q_{nx}, q_{ny}, q_{nz}, il est aisé de s'assurer qu'ils se représentent sous la forme suivante :

$$(19)\quad q_{nx} = v R_3^{(n)} - w R_2^{(n)} + q S_3^{(n)} - r S_2^{(n)} + \frac{dS_1^{(n)}}{dt} - \rho_n \int \left(\frac{\partial U_n}{\partial y} - y \frac{\partial U_n}{\partial z} \right) d\tau^{(n)},$$ et ainsi de suite pour q_{ny}, q_{nz},

où

$$S_1^{(n)} = \rho_n \int F_n (y \cos\gamma - z \cos\beta)\, ds^{(n)} - \rho_n \sum_{s=1}^{p_n} k_s^{(n)} \int (y \cos\gamma - z \cos\beta)\, d\sigma_s^{(n)},$$ et ainsi de suite pour S_2 et S_3.

12. Transformons maintenant les expressions

$$R_j \quad \text{et} \quad S_j \qquad (j = 1, 2, 3).$$

On trouve, en remplaçant F par son expression qui résulte immédiatement de (1) et (2) et en tenant compte des propriétés des fonctions

$$\varphi_j, \quad \psi_j \qquad (j = 1, 2, 3),$$

énoncées plus haut (n° 2),

$$-R_j = u(\varphi_1, \varphi_j) + v(\varphi_2, \varphi_j) + w(\varphi_3, \varphi_j) + p(\psi_1, \varphi_j) + q(\psi_2, \varphi_j) + r(\psi_3, \varphi_j) + G_j,$$
$$-S_j = u(\varphi_1, \psi_j) + v(\varphi_2, \psi_j) + w(\varphi_3, \psi_j) + p(\psi_1, \psi_j) + q(\psi_2, \psi_j) + r(\psi_3, \psi_j) + H_j,$$

où l'on a posé

$$G_j = \sum_{s=1}^{m} k_s \left(\int \cos\alpha \, d\sigma_s - \int \Im_s \frac{\partial \varphi_j}{\partial n} ds \right) = \sum_{s=1}^{m} k_s \int \left(\cos\alpha - \frac{\partial \varphi_j}{\partial n} \right) d\sigma_s,$$

$$H_j = \sum_{s=1}^{m} k_s \left[\int (y \cos\gamma - z \cos\beta)\, d\sigma_s - \int \Im_s \frac{\partial \psi_j}{\partial n} ds \right] = \sum_{s=1}^{m} k_s \int \left((y \cos\gamma - z \cos\beta) - \frac{\partial \psi_j}{\partial n} \right) d\sigma_s.$$

La simple comparaison des expressions

$$R_j, \quad S_j \qquad (j = 1, 2, 3)$$

avec celle de la force vive T_2 du liquide indéfini nous conduit aux relations suivantes :

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} -R_1 &= \frac{\partial T_2}{\partial u} + G_1 = \frac{\partial T''}{\partial u}, & -S_1 &= \frac{\partial T_2}{\partial p} + H_1 = \frac{\partial T''}{\partial p}, \\ -R_2 &= \frac{\partial T_2}{\partial v} + G_2 = \frac{\partial T''}{\partial v}, & -S_2 &= \frac{\partial T_2}{\partial q} + H_2 = \frac{\partial T''}{\partial q}, \\ -R_3 &= \frac{\partial T_2}{\partial w} + G_3 = \frac{\partial T''}{\partial w}, & -S_3 &= \frac{\partial T_2}{\partial r} + H_3 = \frac{\partial T''}{\partial r}, \end{aligned}\right.$$

où

$$T'' = T_2 + G_1 u + G_2 v + G_3 w + H_1 p + H_2 q + H_3 r.$$

Quant à $R_j^{(n)}$, $S_j^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots, q)$, nous trouverons aisément

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} -R_1^{(n)} &= \frac{\partial T''_n}{\partial u}, & -R_2^{(n)} &= \frac{\partial T''_n}{\partial v}, & -R_3^{(n)} &= \frac{\partial T''_n}{\partial w}; \\ -S_1^{(n)} &= \frac{\partial T''_n}{\partial p}, & -S_2^{(n)} &= \frac{\partial T''_n}{\partial q}, & -S_3^{(n)} &= \frac{\partial T''_n}{\partial r}, \end{aligned}\right.$$

où

$$T''_n = T_{2n} + H_1^{(n)} p + H_2^{(n)} q + H_3^{(n)} r,$$

$$H_j^{(n)} = \sum_{s=1}^{p_n} k_s^{(n)} \int \left(y\cos\gamma - z\cos\beta - \frac{\partial \psi_j^{(n)}}{\partial n} \right) d\sigma_s^{(n)}.$$

13. Désignons par

$$\mathfrak{P}_x,\quad \mathfrak{P}_y,\quad \mathfrak{P}_z \quad \text{et} \quad \mathfrak{Q}_x,\quad \mathfrak{Q}_y,\quad \mathfrak{Q}_z$$

les projections de la résultante générale et du moment résultant par rapport à O des pressions du liquide indéfini et des masses fluides remplissant des cavités.

On a évidemment

$$\mathfrak{P}_x = p_x + \sum_{n=1}^{q} p_{nx}, \qquad \mathfrak{P}_y = p_y + \sum_{n=1}^{q} p_{ny}, \qquad \mathfrak{P}_z = p_z + \sum_{n=1}^{q} p_{nz},$$

$$\mathfrak{Q}_x = q_x + \sum_{n=1}^{q} q_{nx}, \qquad \mathfrak{Q}_y = q_y + \sum_{n=1}^{q} q_{ny}, \qquad \mathfrak{Q}_z = q_z + \sum_{n=1}^{q} q_{nz}.$$

En remplaçant $p_x, \ldots, q_x, \ldots; p_{nx}, \ldots, q_{nx}, \ldots$ par leurs expressions (13), (14), (18), (19) et en tenant compte de (20) et (21), on trouve finalement

$$(22)\quad \mathfrak{P}_x = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial u}\right) + r\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial v} - q\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial w} - \rho\int\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}d\tau + \sum_{n=1}^{q}\rho_n\int\frac{\partial \mathrm{U}_n}{\partial x}d\tau^{(n)},\quad \text{et ainsi de suite,}$$

$$(23)\quad \mathfrak{Q}_x = -\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial p}\right) + w\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial v} - v\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial w} + r\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial q} - q\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial r}$$
$$+\rho\int\left(z\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y} - y\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z}\right)d\tau - \sum_{n=1}^{q}\rho_n\int\left(z\frac{\partial \mathrm{U}_n}{\partial y} - y\frac{\partial \mathrm{U}_n}{\partial z}\right)d\tau^{(n)},\quad \text{et ainsi de suite.}$$

Dans les formules précédentes,

$$\mathfrak{T} = \mathrm{T}'' + \sum_{n=1}^{q}\mathrm{T}''_n.$$

ÉQUATIONS GÉNÉRALES DU MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE DANS UN LIQUIDE INDÉFINI.

14. On peut considérer un corps solide, plongé dans un liquide indéfini, comme un corps solide libre, soumis à des forces extérieures données et à des forces des pressions exercées par le liquide indéfini et par les masses fluides remplissant des cavités sur les parois du corps.

Désignons par

$$\mathrm{X},\quad \mathrm{Y},\quad \mathrm{Z}$$

les projections de la résultante générale des forces extérieures agissant sur les divers points du corps; par

$$\mathrm{M}_x,\quad \mathrm{M}_y,\quad \mathrm{M}_z$$

les projections de leur moment résultant.

Les équations du mouvement se représenteront sous la forme suivante

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right) = r\frac{\partial T}{\partial v} - q\frac{\partial T}{\partial w} + \mathrm{X} + \mathfrak{P}_x,$$

et ainsi de suite pour les axes des y et des z,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right) = w\frac{\partial T}{\partial v} - v\frac{\partial T}{\partial w} + r\frac{\partial T}{\partial q} - q\frac{\partial T}{\partial r} + \mathrm{M}_x + \mathfrak{Q}_x,$$

et ainsi de suite pour les axes des y et des z.

En remplaçant $\mathfrak{P}_x$, $\mathfrak{Q}_x$, ... par leurs expressions (22) et (23) et en posant

$$\mathrm{T} = T + \mathfrak{T},$$

on trouve finalement les équations cherchées sous la forme suivante

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial u}\right) = r\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial v} - q\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial w} - \rho\int\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}d\tau + \sum_{n=1}^{q}\rho_n\int\frac{\partial \mathrm{U}_n}{\partial x}d\tau^{(n)} + \mathrm{X},\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial v}\right) = p\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial w} - r\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial u} - \rho\int\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}d\tau + \sum_{n=1}^{q}\rho_n\int\frac{\partial \mathrm{U}_n}{\partial y}d\tau^{(n)} + \mathrm{Y},\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial w}\right) = q\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial u} - p\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial v} - \rho\int\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z}d\tau + \sum_{n=1}^{q}\rho_n\int\frac{\partial \mathrm{U}_n}{\partial z}d\tau^{(n)} + \mathrm{Z};\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p}\right) = w\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial v} - v\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial w} + r\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q} - q\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial r}\\
&\qquad + \rho\int\left(z\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y} - y\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z}\right)d\tau - \sum_{n=1}^{q}\rho_n\int\left(z\frac{\partial \mathrm{U}_n}{\partial y} - y\frac{\partial \mathrm{U}_n}{\partial z}\right)d\tau^{(n)} + \mathrm{M}_x,\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q}\right) = u\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial w} - w\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial u} + p\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial r} - r\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p}\\
&\qquad + \rho\int\left(x\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z} - z\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}\right)d\tau - \sum_{n=1}^{q}\rho_n\int\left(x\frac{\partial \mathrm{U}_n}{\partial z} - z\frac{\partial \mathrm{U}_n}{\partial x}\right)d\tau^{(n)} + \mathrm{M}_y,\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial r}\right) = v\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial u} - u\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial v} + q\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p} - p\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q}\\
&\qquad + \rho\int\left(y\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} + x\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}\right)d\tau - \sum_{n=1}^{q}\rho_n\int\left(y\frac{\partial \mathrm{U}_n}{\partial x} - x\frac{\partial \mathrm{U}_n}{\partial y}\right)d\tau^{(n)} + \mathrm{M}_z.
\end{aligned}\right.$$

En posant

$$u = v = w = p = q = r = 0,$$

nous obtiendrons les conditions générales de l'équilibre d'un corps solide dans un liquide indéfini

$$(25)\quad \left\{\begin{aligned}
&\mathrm{X} - \rho\int\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}d\tau + \sum_{n=1}^{q}\rho_n\int\frac{\partial \mathrm{U}_n}{\partial x}d\tau^{(n)} = 0, \qquad \ldots,\\
&\mathrm{M}_x + \rho\int\left(z\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y} - y\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z}\right)d\tau - \sum_{n=1}^{q}\rho_n\int\left(z\frac{\partial \mathrm{U}_n}{\partial y} - y\frac{\partial \mathrm{U}_n}{\partial z}\right)d\tau^{(n)} = 0, \qquad \ldots
\end{aligned}\right.$$

CHAPITRE II.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT DANS LE CAS DE L'ABSENCE DE TOUTE FORCE ACCÉLÉRATRICE.

1. Supposons maintenant que les forces extérieures agissant sur les points du corps solide et les forces agissant sur les masses fluides satisfassent aux conditions (25).

Supposons encore, *pour plus de simplicité,* que la surface (S) du corps, ainsi que les surfaces (S_n) qui limitent des cavités, soient simplement connexes.

Ces conditions étant remplies, on tire de (24) les équations connues de M. Kirchhoff

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right) &= r\frac{\partial T}{\partial v} - q\frac{\partial T}{\partial w},\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right) &= p\frac{\partial T}{\partial w} - r\frac{\partial T}{\partial u},\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial w}\right) &= q\frac{\partial T}{\partial u} - p\frac{\partial T}{\partial v},\end{aligned}\right.$$

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right) &= w\frac{\partial T}{\partial v} - v\frac{\partial T}{\partial w} + r\frac{\partial T}{\partial q} - q\frac{\partial T}{\partial r},\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q}\right) &= u\frac{\partial T}{\partial w} - w\frac{\partial T}{\partial u} + p\frac{\partial T}{\partial r} - r\frac{\partial T}{\partial p},\\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right) &= v\frac{\partial T}{\partial u} - u\frac{\partial T}{\partial v} + q\frac{\partial T}{\partial p} - p\frac{\partial T}{\partial q},\end{aligned}\right.$$

où (n^{os} 5, 6, 7 et 13)

$$(3)\qquad T = \mathit{T} + T_2 + \sum_{n=1}^{q} T_{2n}.$$

Ces équations admettent trois intégrales connues

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} 2T &= L,\\ \left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial w}\right)^2 &= M,\\ \frac{\partial T}{\partial u}\frac{\partial T}{\partial p} + \frac{\partial T}{\partial v}\frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial T}{\partial w}\frac{\partial T}{\partial r} &= N,\end{aligned}\right.$$

L, M, N étant des constantes arbitraires.

2. Le théorème du n° 8 montre que le problème du mouvement d'un corps solide donné ayant des cavités remplies par les masses fluides se ramène, dans le cas considéré, au problème du mouvement d'un autre corps solide dont la force vive est égale à

$$\mathfrak{T} = T + \sum_{n=1}^{q} \mathrm{T}_{2n}.$$

Prenons le centre de gravité de ce dernier corps pour l'origine des coordonnées, et dirigeons les axes des coordonnées suivant les axes de l'ellipsoïde central d'inertie.

Désignons ensuite par a_1, b_1, c_1 les moments d'inertie par rapport aux axes de coordonnées, et posons

$$a = \frac{a_1}{\mathrm{M}}, \qquad b = \frac{b_1}{\mathrm{M}}, \qquad c = \frac{c_1}{\mathrm{M}},$$

$$\varepsilon = \frac{\rho}{\mathrm{M}},$$

M étant la masse totale du corps dont il s'agit.

Posons encore

$$\mathrm{A} = \frac{b-c}{a}, \qquad \mathrm{B} = \frac{c-a}{b}, \qquad \mathrm{C} = \frac{a-b}{c}.$$

Les équations (1) et (2) deviennent alors

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= rv - qw + \varepsilon p'_x, \\ \frac{dv}{dt} &= pw - ru + \varepsilon p'_y, \\ \frac{dw}{dt} &= qu - pv + \varepsilon p'_z, \end{aligned} \right.$$

$$(6) \qquad \frac{dp}{dt} = \mathrm{A}\, rq + \varepsilon q'_x, \qquad \frac{dq}{dt} = \mathrm{B}\, pr + \varepsilon q'_y, \qquad \frac{dr}{dt} = \mathrm{C}\, pq + \varepsilon q'_z,$$

où l'on a posé, en remplaçant, pour simplifier l'écriture, T_2 par T,

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{M}p'_x &= r\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial v} - q\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial w} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial u}\right), \\ \mathrm{M}p'_y &= p\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial w} - r\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial u} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial v}\right), \\ \mathrm{M}p'_z &= q\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial u} - p\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial v} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial w}\right), \end{aligned} \right.$$

et

$$(8)\quad \begin{cases} aq'_x = w\dfrac{\partial T}{\partial v} - v\dfrac{\partial T}{\partial w} + r\dfrac{\partial T}{\partial q} - q\dfrac{\partial T}{\partial r} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial p}\right), \\ bq'_y = u\dfrac{\partial T}{\partial w} - w\dfrac{\partial T}{\partial u} + p\dfrac{\partial T}{\partial r} - r\dfrac{\partial T}{\partial p} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial q}\right), \\ cq'_z = v\dfrac{\partial T}{\partial u} - u\dfrac{\partial T}{\partial v} + q\dfrac{\partial T}{\partial p} - p\dfrac{\partial T}{\partial q} - \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial r}\right). \end{cases}$$

3. Résolvons les équations (5) et (6) par rapport aux dérivées

$$\frac{du}{dt},\quad \frac{dv}{dt},\quad \frac{dw}{dt},\quad \frac{dp}{dt},\quad \frac{dq}{dt},\quad \frac{dr}{dt}.$$

Nous obtiendrons

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = f_1(u, v, w, p, q, r, \varepsilon), \\ \dfrac{dv}{dt} = f_2(u, v, w, p, q, r, \varepsilon), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{dr}{dt} = f_6(u, v, w, p, q, r, \varepsilon), \end{cases}$$

où $f_s(s = 1, 2, \ldots, 6)$ sont des polynomes du second degré en u, v, w, p, q, r à coefficients constants et les fonctions du paramètre ε holomorphes en ε, pourvu que $|\varepsilon|$ ne surpasse pas un certain nombre μ assez petit.

On peut donc, pour intégrer ces équations, appliquer la méthode des approximations successives en représentant u, v, w, p, q, r sous la forme des séries, ordonnées suivant les puissances de ε et se réduisant à α, β, γ; α', β', γ' pour $t = t_0$, $\alpha, \beta, \ldots$ étant les constantes données.

On trouve, pour $\varepsilon = 0$,

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{du_0}{dt} = r_0 v_0 - q_0 w_0, \\ \dfrac{dv_0}{dt} = p_0 w_0 - r_0 u_0, \\ \dfrac{dw_0}{dt} = q_0 u_0 - p_0 v_0, \end{cases}$$

$$(11)\quad \frac{dp_0}{dt} = A r_0 q_0, \qquad \frac{dq_0}{dt} = B p_0 r_0, \qquad \frac{dr_0}{dt} = C q_0 p_0,$$

c'est-à-dire les équations du mouvement d'un corps solide libre dans le vide.

On sait que les fonctions $u_0, v_0, \ldots, r_0$ sont continues pour

$$t_0 \leqq t \leqq t_0 + l = \mathrm{T},$$

l étant un nombre quelconque positif.

Les solutions des équations (9) correspondant aux valeurs initiales

$$u = \alpha, \quad v = \beta, \quad w = \gamma; \quad p = \alpha', \quad q = \beta', \quad r = \gamma' \quad \text{pour} \quad t = t_0$$

sont des fonctions holomorphes en ε, pourvu que $|\varepsilon|$ soit la plus petite des quantités

$$\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{M}(e^{\alpha l} - 1)} \quad \text{et} \quad \mu,$$

K, M, α étant des nombres finis positifs, choisis convenablement [1].

Pour obtenir ces solutions des équations (9), ou, ce qui revient au même, des équations (5) et (6), il suffit de déterminer les fonctions $u_k, v_k, w_k, p_k, q_k, r_k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ dans les séries

$$(12) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} u = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u_k, & v = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k, & w = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k w_k, \\ p = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k p_k, & q = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k q_k, & r = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k r_k, \end{array} \right.$$

sous les conditions

$$\left. \begin{array}{l} u_0 = \alpha, \quad v_0 = \beta, \quad w_0 = \gamma; \quad p_0 = \alpha', \quad q_0 = \beta', \quad r_0 = \gamma' \\ \quad u_k = v_k = w_k = p_k = q_k = r_k = 0 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots) \end{array} \right\} \quad \text{pour} \quad t = t_0.$$

4. Nous nous plaçons cependant sur un autre point de vue un peu plus général.

Désignons d'abord par T_k ce que revient T, quand on y remplace u, v, w, p, q, r respectivement par $u_k, v_k, w_k, p_k, q_k, r_k$.

On trouve

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial u} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \frac{\partial \mathrm{T}_k}{\partial u_k}, \qquad \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial v} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \frac{\partial \mathrm{T}_k}{\partial v_k}, \qquad \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial w} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \frac{\partial \mathrm{T}_k}{\partial w_k},$$

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \frac{\partial \mathrm{T}_k}{\partial p_k}, \qquad \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \frac{\partial \mathrm{T}_k}{\partial q_k}, \qquad \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial r} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \frac{\partial \mathrm{T}_k}{\partial r_k},$$

---

[1] *Voir*, par exemple, E. LINDELÖF, *Démonstration de quelques théorèmes sur les équations différentielles* (*Journal de Mathématiques*, 1901).

Substituons maintenant les valeurs (12) de u, v, w, p, q, r dans (5) et (6).

Nous obtiendrons les équations (10) et (11) pour $u_0, v_0, w_0, p_0, q_0, r_0$ et les équations suivantes pour déterminer de proche en proche tous les $u_k, v_k, w_k, p_k, q_k, r_k$ à partir de $k=1$,

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{du_k}{dt} &= r_0 v_k - q_0 w_k + X_1^{(k)},\\ \frac{dv_k}{dt} &= p_0 w_k - r_0 u_k + X_2^{(k)},\\ \frac{dw_k}{dt} &= q_0 u_k - p_0 v_k + X_3^{(k)},\end{aligned}\right.$$

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dp_k}{dt} &= A(q_0 r_k + r_0 q_k) + Y_1^{(k)},\\ \frac{dq_k}{dt} &= B(r_0 p_k + p_0 r_k) + Y_2^{(k)},\\ \frac{dr_k}{dt} &= C(p_0 q_k + q_0 p_k) + Y_3^{(k)},\end{aligned}\right.$$

où l'on a posé, pour abréger l'écriture,

$$X_1^{(k)} = \sum_{s=1}^{k} (r_s v_{k-s} - q_s w_{k-s}) + \frac{1}{M}\left\{\sum_{s=0}^{k-1}\left(r_s\frac{\partial T_{k-1-s}}{\partial v_{k-1-s}} - q_s\frac{\partial T_{k-1-s}}{\partial w_{k-1-s}}\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_{k-1}}{\partial u_{k-1}}\right)\right\}$$

et ainsi de suite pour $X_2^{(k)}$, $X_3^{(k)}$,

$$Y_1^{(k)} = A\sum_{s=1}^{k-1} q_s r_{k-s} + \frac{1}{a}\left\{\sum_{s=0}^{k-1}\left[w_s\frac{\partial T_{k-1-s}}{\partial v_{k-1-s}} - v_s\frac{\partial T_{k-1-s}}{\partial w_{k-1-s}} + r_s\frac{\partial T_{k-1-s}}{\partial q_{k-1-s}} - q_s\frac{\partial T_{k-1-s}}{\partial r_{k-1-s}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_{k-1}}{\partial p_{k-1}}\right)\right]\right\}$$

et ainsi de suite pour $Y_2^{(k)}$, $Y_3^{(k)}$.

Il est aisé de voir que $X_j^{(k)}$ $(j=1, 2, 3)$ ne dépendent que de

$$\begin{aligned} &u_s,\ v_s,\ w_s \qquad (s=0, 1, 2, \ldots, k-1),\\ &p_s,\ q_s,\ r_s \qquad (s=0, 1, 2, \ldots, k),\end{aligned}$$

$Y_j^{(k)}$ $(j=1, 2, 3)$ ne dépendent que de

$$\left.\begin{matrix} u_s, & v_s, & w_s\\ p_s, & q_s, & r_s\end{matrix}\right\} \qquad (k=0, 1, 2, \ldots, k-1).$$

Après avoir trouvé les fonctions u_0, v_0, w_0, p_0, q_0, r_0, nous déterminerons p_1, q_1, r_1 par l'intégration des équations linéaires (14) (en y posant $k=1$), puis nous trouverons u_1, v_1, w_1 en intégrant les équations (13), si l'on y fait $k=1$.

En général, après avoir trouvé

$$u_s, \quad v_s, \quad w_s \quad (s=0, 1, 2, \ldots, k-1),$$
$$p_s, \quad q_s, \quad r_s \quad (s=0, 1, 2, \ldots, k),$$

nous obtiendrons u_k, v_k, w_k à l'aide des équations (13) et, après cela, p_{k+1}, q_{k+1}, r_{k+1} par l'intégration des équations (14) (en y remplaçant k par $k+1$), et ainsi de suite.

Chaque intégration introduira trois constantes arbitraires qui doivent être choisies sous la seule condition que les séries (12) soient convergentes.

Le choix de ces constantes comporte encore un large degré d'arbitraire, de sorte que nous pouvons construire une infinité de séries (12), absolument convergentes, représentant les solutions des équations (5) et (6) [ou (1) et (2)] (1).

5. Cette méthode, dont nous venons d'exposer les principes, a été indiquée, il y a 8 ans (en 1893), dans ma Thèse *Sur le mouvement d'un corps solide dans un liquide indéfini,* où j'ai appelé pour la première fois l'attention sur les équations (13) et (14) (2).

6 ans après, M. G. Kobb a appliqué la même méthode pour établir l'existence des solutions périodiques du problème de la rotation d'un corps autour d'un point fixe dans son Mémoire, paru en 1899 dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* (3).

Les équations (12) et (13) du Mémoire de M. G. Kobb (p. 10) sont identiques avec celles (14) et (15) (p. 55) de ma Thèse, citée plus haut [ou avec celles (13) et (14) de ce Mémoire]; seulement, dans le cas de M. G. Kobb, γ_λ, γ'_λ, γ''_λ dépendent de cosinus directeurs des axes mobiles avec la verticale, tandis que, dans nos équations, u_k, v_k, w_k sont liés avec les composantes de la vitesse du centre de gravité du corps plongé dans le liquide.

Pour intégrer les équations (13) et (14), je pourrais employer la méthode de

---

(1) *Voir* M. A. Liapounoff, *Problème général de stabilité du mouvement.* Édition de la Société mathématique de Kharkow, 1892, p. 8.

(2) W. Stekloff, *Sur le mouvement d'un corps solide dans un liquide indéfini* (*Annales de l'Université de Kharkow,* 1893, p. 51 et suiv.).

(3) G. Kobb, *Sur les solutions périodiques du problème de la rotation d'un corps autour d'un point fixe* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse,* 2e série, t. I, n° 1, 1899, p. 5 et suiv.).

M. G. Kobb, en la modifiant convenablement, mais je préfère reproduire ici une analyse différente en exposant en détail mes recherches antérieures sur ce sujet, que j'ai indiquées seulement en termes généraux dans mon Ouvrage cité plus haut.

6. Considérons d'abord les équations (10) et (11).

On a

$$ap_0^2 + bq_0^2 + cr_0^2 = h,$$
$$a^2p_0^2 + b^2q_0^2 + c^2r_0^2 = l^2,$$

h et l étant des constantes arbitraires.

Posons avec M. Hermite

$$\alpha = \frac{l}{a}, \qquad \beta = \frac{l}{b}, \qquad \gamma = \frac{l}{c}, \qquad \delta = \frac{h}{l}$$

et supposons, pour fixer les idées, que

$$\alpha < \beta < \delta < \gamma \qquad \text{ou} \qquad \alpha > \beta > \delta > \gamma.$$

On sait que

$$(15) \quad \begin{cases} p_0 = -\alpha \dfrac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{cn}\omega}, \qquad q_0 = \beta \dfrac{\operatorname{dn}\omega \operatorname{sn} u}{\operatorname{cn}\omega}, \qquad r_0 = \gamma \dfrac{\operatorname{sn}\omega \operatorname{dn} u}{i \operatorname{cn} u} \qquad (i = \sqrt{-1}), \\ u = n(t - t_0), \qquad n^2 = (\delta - \alpha)(\gamma - \beta), \end{cases}$$

où ω est un argument qu'on peut déterminer par les conditions

$$\operatorname{cn}\omega = \sqrt{\frac{\gamma - \alpha}{\gamma - \delta}}, \qquad \operatorname{dn}\omega = \sqrt{\frac{\gamma - \alpha}{\gamma - \beta}}.$$

p_0, q_0, r_0 sont les fonctions périodiques de t avec la période réelle

$$\Omega = \frac{4}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}} = \frac{4\mathrm{K}}{n},$$

où

$$k^2 = \frac{(\beta - \alpha)(\gamma - \delta)}{(\delta - \alpha)(\gamma - \beta)}.$$

Quant aux équations (10), elles admettent un système des solutions indépendantes

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned}
&u' = -\frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{cn}\omega}, \qquad v' = \frac{\operatorname{dn}\omega \operatorname{sn} u}{\operatorname{cn}\omega}, \qquad w' = \frac{\operatorname{sn}\omega \operatorname{dn} u}{i\operatorname{cn}\omega},\\
&u'' = \frac{\Theta_1(0)\,\mathrm{H}(u-\omega)}{\mathrm{H}_1(\omega)\,\Theta(u)}\,e^{i\lambda u}, \qquad u''' = \frac{\Theta_1(0)\,\mathrm{H}(u+\omega)}{\mathrm{H}_1(\omega)\,\Theta(u)}\,e^{-i\lambda u},\\
&v'' = \frac{\Theta(0)\,\mathrm{H}_1(u-\omega)}{\mathrm{H}_1(\omega)\,\Theta(u)}\,e^{i\lambda u}, \qquad v''' = \frac{\Theta(0)\,\mathrm{H}_1(u+\omega)}{\mathrm{H}_1(\omega)\,\Theta(u)}\,e^{-i\lambda u},\\
&w'' = \frac{\mathrm{H}_1(0)\,\Theta(u-\omega)}{i\mathrm{H}_1(\omega)\,\Theta(u)}\,e^{i\lambda u}, \qquad w''' = \frac{\mathrm{H}_1(0)\,\Theta(u+\omega)}{i\mathrm{H}_1(\omega)\,\Theta(u)}\,e^{-i\lambda u},\\
&\qquad\qquad i\lambda = \frac{i\alpha}{n} + \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)},
\end{aligned}\right.$$

λ étant une constante réelle, H, H_1, Θ, Θ_1 étant les fonctions de Jacobi [1].

Les intégrales générales des équations (10) se représenteront sous la forme suivante

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned}
u_0 &= \mathrm{B}_1 u' + \mathrm{B}_2 u'' + \mathrm{B}_3 u''',\\
v_0 &= \mathrm{B}_1 v' + \mathrm{B}_2 v'' + \mathrm{B}_3 v''',\\
w_0 &= \mathrm{B}_1 w' + \mathrm{B}_2 w'' + \mathrm{B}_3 w''' \quad {}^{(2)},
\end{aligned}\right.$$

u', v', ..., w''' étant les fonctions définies par les formules (16).

7. Le problème se ramène à l'intégration des équations (13) et (14).

Les équations (13) dépourvues de seconds membres coïncident avec (10); il ne reste qu'à étudier les équations linéaires

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{d\mathrm{P}}{dt} &= \mathrm{A}(q_0\mathrm{R} + r_0\mathrm{Q}),\\
\frac{d\mathrm{Q}}{dt} &= \mathrm{B}(r_0\mathrm{P} + p_0\mathrm{R}),\\
\frac{d\mathrm{R}}{dt} &= \mathrm{C}(p_0\mathrm{Q} + q_0\mathrm{P}) \quad {}^{(3)},
\end{aligned}\right.$$

c'est-à-dire les équations (14) sans seconds membres.

Il est aisé de s'assurer que ces équations admettent les solutions particulières

(1) *Voir* H. HERMITE, *Sur quelques applications des fonctions elliptiques*, p. 24 et suiv. Paris; 1885.

(2) *Voir* les équations (18) de mon Ouvrage : *Sur le mouvement, etc.*, p. 57. Kharkow; 1893.

(3) *Voir* les équations (16) du même Ouvrage, p. 56.

de la forme suivante

$$(19)\qquad \begin{cases} P_1 = A q_0 r_0, & Q_1 = B r_0 p_0, & R_1 = C p_0 q_0, \\ P_2 = p_0 + t P_1, & Q_2 = q_0 + t Q_1, & R_2 = r_0 + t R_1. \end{cases}$$

Posons

$$(20)\qquad \begin{cases} P = C_1 P_1 + C_2 P_2, \\ Q = C_1 Q_1 + C_2 Q_2, \\ R = C_1 R_1 + C_2 R_2 + z, \end{cases}$$

C_1, C_2, z étant les nouvelles inconnues.

On aura

$$(21)\qquad \begin{cases} \dfrac{dC_1}{dt} P_1 + \dfrac{dC_2}{dt} P_2 = A q_0 z, \\ \dfrac{dC_1}{dt} Q_1 + \dfrac{dC_2}{dt} Q_2 = B p_0 z, \\ \dfrac{dC_1}{dt} R_1 + \dfrac{dC_2}{dt} R_2 + \dfrac{dz}{dt} = 0, \end{cases}$$

d'où l'on tire immédiatement

$$\frac{dC_1}{dt}(P_1 Q_2 - Q_1 P_2) = z(A q_0 Q_2 - B p_0 P_2),$$

$$\frac{dC_2}{dt}(P_1 Q_2 - Q_1 P_2) = z(B p_0 P_1 - A q_0 Q_1).$$

Or, en vertu de (19),

$$P_1 Q_2 - Q_1 P_2 = r_0(A q_0^2 - B p_0^2), \qquad A q_0^2 - B p_0^2 \gtrless 0,$$
$$A q_0 Q_2 - B p_0 P_2 = A q_0^2 - B p_0^2, \qquad B p_0 P_1 - A q_0 Q_1 = 0.$$

On a donc

$$\frac{dC_1}{dt} r_0 = z, \qquad \frac{dC_2}{dt} = 0 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad C_2 = \text{const.}$$

La dernière des équations (21) devient

$$\frac{dz}{z} + \frac{dr_0}{r_0} = 0;$$

d'où

$$z = \frac{C_3}{r_0},$$

C_3 étant une constante arbitraire, et

$$C_1 = C_3 \int \frac{dt}{r_0^2} + \text{const.}$$

Les intégrales générales des équations (18) se représenteront sous la forme suivante

$$(22) \qquad \begin{cases} P = C_1 P_1 + C_2 P_2 + C_3 P_1 \displaystyle\int \frac{dt}{r_0^2}, \\ Q = C_1 Q_1 + C_2 Q_2 + C_3 Q_1 \displaystyle\int \frac{dt}{r_0^2}, \\ R = C_1 R_1 + C_2 R_2 + C_3 \left(R_1 \displaystyle\int \frac{dt}{r_0^2} + \frac{1}{r_0} \right), \end{cases}$$

$C_j (j = 1, 2, 3)$ étant des constantes arbitraires, ou

$$(22_1) \qquad \begin{cases} P = C_1 P_1 + C_2 P_2 + C_3 P_3, \\ Q = C_1 Q_1 + C_2 Q_2 + C_3 Q_3, \\ R = C_1 R_1 + C_2 R_2 + C_3 R_3, \end{cases}$$

en posant, pour abréger,

$$(23) \qquad \begin{cases} P_3 = P_1 K, \qquad Q_3 = Q_1 K, \qquad R_3 = R_1 K + \dfrac{1}{r_0}, \\ K = \displaystyle\int \frac{dt}{r_0^2}. \end{cases}$$

8. Posons maintenant dans (14) $k = 1$.

Nous aurons

$$(24) \qquad \begin{cases} a \dfrac{dp_1}{dt} = (b - c)(q_0 r_1 + r_0 q_1) + a Y_1^{(1)}, \\ b \dfrac{dq_1}{dt} = (c - a)(r_0 p_1 + p_0 r_1) + b Y_2^{(1)}, \\ c \dfrac{dr_1}{dt} = (a - b)(p_0 q_1 + q_0 p_1) + c Y_3^{(1)}, \end{cases}$$

$Y_j^{(1)} (j = 1, 2, 3)$ étant les fonctions connues de t.

La méthode de variation des constantes arbitraires nous permet de représenter les intégrales générales de ces équations sous la forme suivante

$$(25) \qquad \begin{cases} p_1 = C_1^{(1)} P_1 + C_2^{(1)} P_2 + C_3^{(1)} P_3, \\ q_1 = C_1^{(1)} Q_1 + C_2^{(1)} Q_2 + C_3^{(1)} Q_3, \\ r_1 = C_1^{(1)} R_1 + C_2^{(1)} R_2 + C_3^{(1)} R_3, \end{cases}$$

où $C_j^{(1)}(j=1,2,3)$ sont les fonctions de t dont les dérivées satisfont aux équations

$$(26)\qquad \begin{cases} \dfrac{dC_1^{(1)}}{dt}P_1+\dfrac{dC_2^{(1)}}{dt}P_2+\dfrac{dC_3^{(1)}}{dt}P_3=Y_1^{(1)}, \\ \dfrac{dC_1^{(1)}}{dt}Q_1+\dfrac{dC_2^{(1)}}{dt}Q_2+\dfrac{dC_3^{(1)}}{dt}Q_3=Y_2^{(1)}, \\ \dfrac{dC_1^{(1)}}{dt}R_1+\dfrac{dC_2^{(1)}}{dt}R_2+\dfrac{dC_3^{(1)}}{dt}R_3=Y_3^{(1)}. \end{cases}$$

Il est aisé de voir que le déterminant

$$(27)\qquad \Delta=\begin{vmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ Q_1 & Q_2 & Q_3 \\ R_1 & R_2 & R_3 \end{vmatrix}=Aq_0^2-Bp_0^2=\frac{l^2-hc}{ab}=C,$$

C étant une constante différente de zéro.

Les équations (26) donnent

$$(28)\qquad C_1'=KS_1+\frac{q_0Y_1^{(1)}-p_0Y_2^{(1)}}{r_0\Delta}+tR_1,\qquad C_2'=-R_1,\qquad C_3'=-S_1,$$

où l'on a posé

$$R_1=\frac{Q_1Y_1^{(1)}-P_1Y_2^{(1)}}{r_0\Delta},$$

$$S_1=\frac{1}{\Delta}[Y_1^{(1)}(q_0R_1-r_0Q_1)+Y_2^{(1)}(r_0P_1-p_0R_1)+Y_3^{(1)}(p_0Q_1-q_0P_1)].$$

Posons encore

$$(29)\qquad \begin{cases} H_1^{(1)}=(c-a)r_0cY_3^{(1)}-(a-b)q_0bY_2^{(1)}, \\ H_2^{(1)}=(a-b)p_0aY_1^{(1)}-(b-c)r_0cY_3^{(1)}, \\ H_3^{(1)}=(b-c)q_0bY_2^{(1)}-(c-a)p_0aY_1^{(1)}. \end{cases}$$

On trouve, en tenant compte de (27) et de (19),

$$(30)\qquad -R_1=\frac{H_3^{(1)}}{l^2-hc},\qquad S_1=\frac{1}{c(l^2-hc)}(ap_0^2H_1^{(1)}+bq_0^2H_2^{(1)}+cr_0^2H_3^{(1)}).$$

Les équations (28) donnent

$$C_1^{(1)}=c_1^{(1)}+\int KS_1\,dt+\int tR_1\,dt+\int\frac{q_0Y_1^{(1)}-p_0Y_2^{(1)}}{r_0\Delta}dt,$$

$$C_2^{(1)}=c_2^{(1)}-\int R_1\,dt,$$

$$C_3^{(1)}=c_3^{(1)}-\int S_1\,dt,$$

$c_j^{(1)}(j=1,2,3)$ étant des nouvelles constantes arbitraires.

On trouve donc, en vertu de (25),

$$(31)\qquad \left\{\begin{aligned} p_1 &= c_1^{(1)}P_1 + M_1 p_0 + N_1 P_1,\\ q_1 &= c_1^{(1)}Q_1 + M_1 q_0 + N_1 Q_1,\\ r_1 &= c_1^{(1)}R_1 + M_1 r_0 + N_1 R_1 + \frac{c_3^{(1)}}{r_0} - \frac{1}{r_0}\int S_1\,dt,\end{aligned}\right.$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$M_1 = c_2^{(1)} - \int R_1\,dt,$$

$$\begin{aligned} N_1 = \int tR_1\,dt - t\int R_1\,dt + tc_2^{(1)} + c_3^{(1)}K \\ - K\int S_1\,dt + \int KS_1\,dt + \int \frac{q_0 Y_1^{(1)} - p_0 Y_2^{(1)}}{r_0\Delta}\,dt.\end{aligned}$$

Posons ensuite

$$R_1' = \int R_1\,dt, \qquad S_1' = \int S_1\,dt.$$

Il viendra

$$(32)\qquad \left\{\begin{aligned} M_1 &= c_2^{(1)} - R_1',\\ N_1 &= tc_2^{(1)} + Kc_3^{(1)} - \int R_1'\,dt - \int \frac{S_1'}{r_0^2}\,dt + \int \frac{q_0 Y_1^{(1)} - p_0 Y_2^{(1)}}{r_0\Delta}\,dt.\end{aligned}\right.$$

9. Les expressions de p_1, q_1, r_1 étant trouvées, passons aux équations (13) en y faisant $k=1$.

On trouve

$$(33)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{du_1}{dt} &= r_0 v_1 - q_0 w_1 + X_1^{(1)},\\ \frac{dv_1}{dt} &= p_0 w_1 - r_0 u_1 + X_2^{(1)},\\ \frac{dw_1}{dt} &= q_0 u_1 - p_0 v_1 + X_3^{(1)},\end{aligned}\right.$$

$X_j^{(1)}$ $(j=1, 2, 3)$ étant les fonctions connues de t.

On peut écrire

$$(34)\qquad \left\{\begin{aligned} u_1 &= B_1^{(1)}u' + B_2^{(1)}u'' + B_3^{(1)}u''',\\ v_1 &= B_1^{(1)}v' + B_2^{(1)}v'' + B_3^{(1)}v''',\\ w_1 &= B_1^{(1)}w' + B_2^{(1)}w'' + B_3^{(1)}w''',\end{aligned}\right.$$

$B_j^{(1)}$ $(j=1, 2, 3)$ étant les fonctions de t dont les dérivées satisfont aux équations linéaires

$$\frac{dB_1^{(1)}}{dt}u' + \frac{dB_2^{(1)}}{dt}u'' + \frac{dB_3^{(1)}}{dt}u''' = X_1^{(1)},$$

$$\frac{dB_1^{(1)}}{dt}v' + \frac{dB_2^{(1)}}{dt}v'' + \frac{dB_3^{(1)}}{dt}v''' = X_2^{(1)},$$

$$\frac{dB_1^{(1)}}{dt}w' + \frac{dB_2^{(1)}}{dt}w'' + \frac{dB_3^{(1)}}{dt}w''' = X_3^{(1)},$$

d'où l'on tire aisément

$$(35)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dB_1^{(1)}}{dt} &= u'\,X_1^{(1)} + v'\,X_2^{(1)} + w'\,X_3^{(1)},\\ \frac{dB_2^{(1)}}{dt} &= \frac{1}{2}(u'''X_1^{(1)} + v'''X_2^{(1)} + w'''X_3^{(1)}),\\ \frac{dB_3^{(1)}}{dt} &= \frac{1}{2}(u''\,X_1^{(1)} + v''\,X_2^{(1)} + w''\,X_3^{(1)}). \end{aligned}\right.$$

On trouve donc

$$(36)\qquad \left\{\begin{aligned} B_1^{(1)} &= b_1^{(1)} + \int(u'\,X_1^{(1)} + v'\,X_2^{(1)} + w'\,X_3^{(1)})\,dt = b_1^{(1)} + \psi_1^{(1)}(t),\\ B_2^{(1)} &= b_2^{(1)} + \frac{1}{2}\int(u'''X_1^{(1)} + v'''X_2^{(1)} + w'''X_3^{(1)})\,dt = b_2^{(1)} + \psi_2^{(1)}(t),\\ B_3^{(1)} &= b_3^{(1)} + \frac{1}{2}\int(u''\,X_1^{(1)} + v''\,X_2^{(1)} + w''\,X_3^{(1)})\,dt = b_3^{(1)} + \psi_3^{(1)}(t), \end{aligned}\right.$$

$b_j^{(1)} (j = 1, 2, 3)$ étant des nouvelles constantes arbitraires, $\psi_j^{(1)}(t) (j = 1, 2, 3)$ étant les fonctions connues de t.

Substituant ces expressions de $B_j^{(1)}$ dans (34), nous trouverons u_1, v_1, w_1 en fonctions connues de t.

10. Après avoir trouvé

$$u_j,\quad v_j,\quad w_j,\qquad p_j,\quad q_j,\quad r_j\qquad (j = 0, 1),$$

nous obtiendrons p_2, q_2, r_2 à l'aide des équations (14) en y faisant $k = 2$, puis u_2, v_2, w_2 à l'aide des équations (13) en y posant $k = 2$, et ainsi de suite.

Supposons, en général, qu'on ait déjà trouvé

$$u_j,\quad v_j,\quad w_j,\qquad p_j,\quad q_j,\quad r_j\qquad (j = 0, 1, 2, \ldots, k-1).$$

Les équations (14) nous donneront ensuite

$$(37)\quad \begin{cases} p_k = c_1^{(k)} P_1 + p_0 M_k + P_1 N_k \\ q_k = c_1^{(k)} Q_1 + q_0 M_k + Q_1 N_k, \\ r_k = c_1^{(k)} R_1 + r_0 M_k + R_1 N_k + \dfrac{c_3^{(k)}}{r_0} - \dfrac{1}{r_0} \displaystyle\int S_k \, dt, \end{cases}$$

où l'on a posé

$$(38)\quad \begin{cases} M_k = c_2^{(k)} - R'_k, \\ N_k = t c_2^{(k)} + K c_3^{(k)} - \displaystyle\int R'_k \, dt - \int \frac{S'_k}{r_0^2} dt + \int \frac{q_0 Y_1^{(k)} - p_0 Y_2^{(k)}}{r_0 \Delta} dt, \\ R_k = \dfrac{(c-a) p_0 a Y_1^{(k)} - (b-c) q_0 b Y_2^{(k)}}{l^2 - hc}, \end{cases}$$

$$(39)\quad S_k = \frac{1}{c(l^2 - hc)} (a p_0^2 H_1^{(k)} + b q_0^2 H_2^{(k)} + c r_0^2 H_3^{(k)}),$$

$$(40)\quad R'_k = \int R_k \, dt, \qquad S'_k = \int S_k \, dt,$$

$$(41)\quad \begin{cases} H_1^{(k)} = (c-a) r_0 c Y_3^{(k)} - (a-b) q_0 b Y_2^{(k)}, \\ H_2^{(k)} = (a-b) p_0 a Y_1^{(k)} - (b-c) r_0 c Y_3^{(k)}, \\ H_3^{(k)} = (b-c) q_0 b Y_2^{(k)} - (c-a) p_0 a Y_1^{(k)}. \end{cases}$$

Moyennant ensuite les équations (13), nous obtiendrons

$$(42)\quad \begin{cases} u_k = b_1^{(k)} u' + b_2^{(k)} u'' + b_3^{(k)} u''' + [u' \psi_1^{(k)}(t) + u'' \psi_2^{(k)}(t) + u''' \psi_3^{(k)}(t)], \\ v_k = b_1^{(k)} v' + b_2^{(k)} v'' + b_3^{(k)} v''' + [v' \psi_1^{(k)}(t) + v'' \psi_2^{(k)}(t) + v''' \psi_3^{(k)}(t)], \\ w_k = b_1^{(k)} w' + b_2^{(k)} w'' + b_3^{(k)} w''' + [w' \psi_1^{(k)}(t) + w'' \psi_2^{(k)}(t) + w''' \psi_3^{(k)}(t)], \end{cases}$$

où $\psi_j^{(k)}(t)$ sont les fonctions de t, définies par des quadratures

$$(43)\quad \begin{cases} \psi_1^{(k)}(t) = \displaystyle\int (u' X_1^{(k)} + v' X_2^{(k)} + w' X_3^{(k)}) \, dt, \\ \psi_2^{(k)}(t) = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int (u''' X_1^{(k)} + v''' X_2^{(k)} + w''' X_3^{(k)}) \, dt, \\ \psi_3^{(k)}(t) = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int (u'' X_1^{(k)} + v'' X_2^{(k)} + w'' X_3^{(k)}) \, dt. \end{cases}$$

11. Il ne reste qu'à substituer les valeurs trouvées de

$$u_j, \quad v_j, \quad w_j, \qquad p_j, \quad q_j, \quad r_j \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots)$$

dans les séries (12) pour obtenir les solutions générales des équations du mouvement (1) et (2) sous la forme des séries ordonnées suivant les puissances du paramètre ε.

Ces séries seront convergentes pour

$$t \leqq \mathrm{T},$$

T étant une quantité positive, si nous choisissons convenablement les constantes

$$b_j^{(k)}, \quad c_j^{(k)} \qquad \begin{pmatrix} j = 1, 2, 3 \\ k = 1, 2, 3, 4, \ldots \end{pmatrix},$$

qu'on doit assujettir, en général, à la condition que leurs modules ne surpassent pas certains nombres fixes suffisamment petits.

Si nous posons, en particulier,

$$\left.\begin{array}{lll} u_0 = \alpha, & v_0 = \beta, & w_0 = \gamma \\ p_0 = \alpha', & q_0 = \beta', & r_0 = \gamma' \\ u_k = 0, & v_k = 0, & w_k = 0 \\ p_k = 0, & q_k = 0, & r_k = 0 \end{array}\right\} \quad \text{pour} \qquad t = 0,$$

$\alpha, \beta, \gamma; \alpha', \beta', \gamma'$ étant les constantes données, nous trouverons les solutions des équations du mouvement prenant les mêmes valeurs initiales que u_0, v_0, w_0; p_0, q_0, r_0.

On peut employer les séries obtenues pour calculer approximativement les valeurs de variables

$$u, \quad v, \quad w, \qquad p, \quad q, \quad r$$

pour toutes les valeurs de t à partir de $t = t_0$ jusqu'à $t = \mathrm{T}$.

Prenant ensuite pour les valeurs initiales de

$$(44) \qquad u, \quad v, \quad w, \qquad p, \quad q, \quad r$$

leurs valeurs pour $t = \mathrm{T}$, nous pouvons construire les nouvelles séries de la forme (12), qui nous donneront les valeurs des variables (44) pour toutes les valeurs de t à partir de $t = \mathrm{T}$ jusqu'à $t = \mathrm{T}_1 > \mathrm{T}$, et ainsi de suite.

A chaque solution

$$u_0, \quad v_0, \quad w_0, \qquad p_0, \quad q_0, \quad r_0$$

des équations (10) et (11), se réduisant à $\alpha, \beta, \gamma; \alpha', \beta', \gamma'$ pour $t = t_0$, correspond une solution déterminée des équations (1) et (2) prenant les mêmes valeurs initiales que $u_0, v_0, w_0; p_0, q_0, r_0$.

Nous pouvons aussi obtenir une infinité d'autres solutions dont les valeurs initiales (pour $t = t_0$) diffèrent assez peu de $\alpha, \beta, \gamma; \alpha', \beta', \gamma'$, en choisissant les constantes arbitraires dans les expressions de

$$u_k,\quad v_k,\quad w_k,\qquad p_k,\quad q_k,\quad r_k\qquad (k=1,2,3,\ldots)$$

d'une autre manière quelconque, sous la seule condition que les séries (12) soient convergentes.

Ces séries convergent, en général, pourvu que

$$t_0 \leqq t \leqq \mathrm{T}$$

et $|\varepsilon|$ soit assez petit.

Le nombre T sera d'autant plus grand que $|\varepsilon|$ sera plus petit, et inversement.

Le cas le plus intéressant est celui où les séries dont il s'agit convergent pour toutes les valeurs de t.

Cette circonstance peut avoir lieu, $|\varepsilon|$ étant assez petit, quand toutes les fonctions

$$u_k,\quad v_k,\quad w_k,\qquad p_k,\quad q_k,\quad r_k\qquad (k=0,1,2,\ldots)$$

deviennent périodiques en t.

Nous obtiendrons alors les solutions périodiques des équations du mouvement d'un corps solide dans un liquide indéfini.

La démonstration de l'existence de ces solutions périodiques fera l'objet du Chapitre suivant.

CHAPITRE III.

EXISTENCE DES SOLUTIONS PÉRIODIQUES DES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE DANS UN LIQUIDE INDÉFINI.

1. Il est aisé de voir que les équations (1) et (2) du Chapitre précédent admettent, pour $\varepsilon=0$, la solution périodique de la forme (*voir* n° 4 du Chapitre II)

$$p_0,\quad q_0,\quad r_0,\qquad u_0=\mathrm{A}u',\qquad v_0=\mathrm{A}v',\qquad w_0=\mathrm{A}w',$$

A étant une constante arbitraire.

Supposons maintenant que nous ayons trouvé les fonctions

$$u_j,\quad v_j,\quad w_j,\qquad p_j,\quad q_j,\quad r_j$$

à partir de $j=1$ jusqu'à $j=k-1$ sous la forme des fonctions périodiques du temps, avec la période réelle ω.

Dans ce cas, $Y_j^{(k)}(j=1,2,3)$ seront périodiques en t avec la même période ω.

Démontrons qu'on peut toujours choisir les constantes $c_j^{(k)}(j=1,2,3)$ de telle manière que p_k, q_k, r_k seront aussi périodiques en t avec la période ω.

Multiplions les équations (4) successivement par p_0, q_0, r_0; nous avons, en ajoutant,

$$(1)\qquad ap_0 Y_1^{(k)} + bq_0 Y_2^{(k)} + cr_0 Y_3^{(k)} = \frac{d}{dt}(ap_0 p_k + bq_0 q_k + cr_0 r_k).$$

Multiplions les mêmes équations par u', v', w'; on trouve, en ajoutant,

$$(2)\qquad \begin{aligned} au' Y_1^{(k)} + bv' Y_2^{(k)} + cw' Y_3^{(k)} &= \frac{d}{dt}(au' p_k + bv' q_k + cw' r_k) \\ &= \frac{1}{A}\frac{d}{dt}(au_0 p_k + bv_0 q_k + cr_0 r_k), \end{aligned}$$

puisque

$$(3)\qquad ap_0 = lu' = \frac{l}{A}u_0, \qquad bq_0 = lv' = \frac{l}{A}v_0, \qquad cr_0 = lw' = \frac{l}{A}w_0.$$

Considérons maintenant les intégrales (4) qu'on peut représenter sous la forme suivante :

$$u^2 + v^2 + w^2 + ap^2 + bq^2 + cr^2 + \varepsilon T = k,$$

$$\left(u + \varepsilon\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2 + \left(v + \varepsilon\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2 + \left(w + \varepsilon\frac{\partial T}{\partial w}\right)^2 = L,$$

$$\left(u + \varepsilon\frac{\partial T}{\partial u}\right)\left(ap + \varepsilon\frac{\partial T}{\partial p}\right) + \left(v + \varepsilon\frac{\partial T}{\partial v}\right)\left(bq + \varepsilon\frac{\partial T}{\partial q}\right) + \left(w + \varepsilon\frac{\partial T}{\partial w}\right)\left(cr + \varepsilon\frac{\partial T}{\partial r}\right) = M.$$

Substituons dans ces équations les séries (12) et comparons les coefficients de $k^{\text{ième}}$ puissance de ε de deux membres.

On trouve aisément

$$(4)\qquad u_0 u_k + v_0 v_k + w_0 w_k + ap_0 p_k + bq_0 q_k + cr_0 r_k = U'_k,$$

U'_k étant une fonction ne dépendant que de

$$u_j, \quad v_j, \quad w_j, \qquad p_j, \quad q_j, \quad r_j \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots, k-1),$$

c'est-à-dire une fonction connue, périodique en t.

On a de même

$$(5)\qquad u_0 u_k + v_0 v_k + w_0 w_k = V'_k,$$

$$(6)\qquad au_0 p_k + bv_0 q_k + cw_0 r_k + ap_0 u_k + bq_0 v_k + cr_0 w_k = W'_k,$$

V'_k, W'_k étant les fonctions connues, périodiques en t.

Des équations (4) et (5) on tire immédiatement

$$ap_0 p_k + bq_0 q_k + cr_0 r_k = U_k = U'_k - V'_k,$$

où U_k est évidemment une fonction périodique de t.

L'équation (1) devient donc

$$ap_0 Y_1^{(k)} + bq_0 Y_2^{(k)} + cr_0 Y_3^{(k)} = \frac{dU_k}{dt}. \tag{7}$$

D'autre part, les équations (5) et (6) donnent, en vertu de (3),

$$au_0 p_k + bv_0 q_k + cw_0 r_k + \frac{l}{A} V'_k = W'_k,$$

ou

$$au_0 p_k + bv_0 q_k + cw_0 r_k = W'_k - \frac{l}{A} V'_k = \frac{A}{l} V_k,$$

V_k étant une fonction périodique du temps.

On a donc

$$au' Y_1^{(k)} + bv' Y_2^{(k)} + cw' Y_3^{(k)} = \frac{1}{l} \frac{dV_k}{dt},$$

d'où, en vertu de (3),

$$a^2 p_0 Y_1^{(k)} + b^2 q_0 Y_2^{(k)} + c^2 r_0 Y_3^{(k)} = \frac{dV_k}{dt}. \tag{8}$$

Les équations (7) et (8) nous conduisent à l'équation suivante :

$$c(c-a) r_0 Y_3^{(k)} - b(a-b) q_0 Y_2^{(k)} = H_1^{(k)} = \frac{d}{dt}(V_k - aU_k),$$

et de même

$$H_2^{(k)} = \frac{d}{dt}(V_k - bU_k),$$

$$H_3^{(k)} = \frac{d}{dt}(V_k - cU_k).$$

On trouve donc (*voir* n° 10 du Chapitre précédent)

$$R'_k = \int R_k\, dt = \frac{1}{hc - l^2} \int H_3^{(k)}\, dt = \frac{V_k - cU_k}{hc - l^2},$$

ce qui montre que R'_k est une fonction périodique de t.

2. Considérons maintenant l'expression de S_k [l'égalité (39) du Chapitre précédent].

On trouve, en tenant compte de (11) du Chapitre précédent,

$$\begin{aligned} c(l^2-hc)\mathrm{S}_k = ap_0^2\mathrm{H}_1^{(k)}+bq_0^2\mathrm{H}_2^{(k)}+cr_0^2\mathrm{H}_3^{(k)} = \quad & ap_0\mathrm{Y}_1^{(k)}[b(a-b)q_0^2+c(a-c)r_0^2] \\ & + bq_0\mathrm{Y}_2^{(k)}[c(b-c)r_0^2+a(b-a)p_0^2] \\ & + cr_0\mathrm{Y}_3^{(k)}[a(c-a)p_0^2+b(c-b)q_0^2], \end{aligned}$$

d'où, en remarquant que

$$ap_0^2+\ bq_0^2+\ cr_0^2=h,$$
$$a^2p_0^2+b^2q_0^2+c^2r_0^2=l^2,$$

on tire aisément, en vertu de (7) et (8),

$$\begin{aligned} \mathrm{S}_k &= \frac{1}{c(l^2-hc)}[(ha-l^2)ap_0\mathrm{Y}_1^{(k)}+(hb-l^2)bq_0\mathrm{Y}_2^{(k)}+(hc-l^2)cr_0\mathrm{Y}_3^{(k)}] \\ &= \frac{d}{dt}(\alpha\mathrm{V}_k+\beta\mathrm{U}_k), \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\alpha=\frac{h}{c(l^2-hc)},\qquad \beta=\frac{l^2}{c(hc-l^2)}.$$

On a donc

$$\mathrm{S}'_k=\int \mathrm{S}_k\,dt=\alpha\mathrm{V}_k+\beta\mathrm{U}_k,$$

d'où il résulte que S'_k est une fonction périodique de t.

3. Reprenons maintenant les équations (37) du Chapitre précédent.

Il est évident, en vertu de (38), que M_k est une fonction périodique de t.

Quant à N_k, on peut le représenter sous la forme suivante, en supposant, pour plus de simplicité, $t_0=0$:

$$\mathrm{N}_k=t\left[c_2^{(k)}+c_3^{(k)}\int_0^\omega\frac{dt}{r_0^2}-\int_0^\omega\mathrm{R}'_k\,dt-\int_0^\omega\frac{\mathrm{S}'_k}{r_0^2}dt+\int_0^\omega\frac{q_0\mathrm{Y}_1^{(k)}-p_0\mathrm{Y}_2^{(k)}}{r_0\Delta}dt\right]+\mathrm{N}'_k,$$

où N'_k est une fonction périodique de t.

N_k sera aussi périodique, si nous choisissons $c_2^{(k)}$ et $c_3^{(k)}$ de façon que l'on ait

$$(9)\qquad c_2^{(k)}+c_3^{(k)}\int_0^\omega\frac{dt}{r_0^2}=\mathrm{D}_k=\int_0^\omega\mathrm{R}'_k\,dt+\int_0^\omega\frac{\mathrm{S}'_k}{r_0^2}dt-\int_0^\omega\frac{q_0\mathrm{Y}_1^{(k)}-p_0\mathrm{Y}_2^{(k)}}{r_0\Delta}dt,$$

D_k étant une constante bien déterminée.

Les constantes $c_2^{(k)}$, $c_3^{(k)}$ étant choisies de la manière indiquée, p_k, q_k, r_k seront les fonctions périodiques du temps.

4. Passons maintenant aux équations (43) du Chapitre précédent.

Il est évident que les fonctions $X_j^{(k)}$ $(j=1, 2, 3)$ sont périodiques en t.

Multiplions les équations (13) successivement par u_0, v_0, w_0; nous avons, en ajoutant et en tenant compte de (5),

$$X_1^{(k)} u_0 + X_2^{(k)} v_0 + X_3^{(k)} w_0 = \frac{d}{dt}(u_0 u_k + v_0 v_k + w_0 w_k) = \frac{dV'_k}{dt}.$$

On a donc, en tenant compte de (43) (Chapitre précédent),

$$A\psi_1^{(k)}(t) = V'_k,$$

ce qui montre que $\psi_1^{(k)}(t)$ est une fonction périodique.

Formons maintenant l'expression de $\psi_2^{(k)}(t)$.

Il est aisé de voir que

$$\psi_2^{(k)}(t) = \int e^{-i\lambda u}\varphi^{(k)}(t)\,dt,$$

où $\varphi^{(k)}(t)$ est une fonction périodique du temps.

Il est évident qu'on peut trouver une fonction périodique $V''_k(t)$ de façon que l'on ait

$$\psi_2^{(k)}(t) = e^{-i\lambda u}V''_k(t).$$

Nous trouverons de la même manière que

$$\psi_3^{(k)}(t) = e^{i\lambda u}V'''_k(t) \quad (^1),$$

$V'''_k(t)$ étant une nouvelle fonction périodique en t.

Nous aurons donc, en tenant compte des équations (16) du Chapitre précédent,

$$\begin{aligned}
&u'\psi_1^{(k)}(t) + u''\psi_2^{(k)}(t) + u'''\psi_3^{(k)}(t)\\
&\quad = -A\frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{cn}\omega}V'_k + V''_k(t)\frac{\Theta_1(0)H(u-\omega)}{H_1(\omega)\Theta(u)} + V'''_k(t)\frac{\Theta(0)H(u+\omega)}{H_1(\omega)\Theta(u)} = G_1^{(k)}(t),\\
&v'\psi_1^{(k)}(t) + v''\psi_2^{(k)}(t) + v'''\psi_3^{(k)}(t)\\
&\quad = A\frac{\operatorname{dn}\omega\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn}\omega}V'_k + V''_k(t)\frac{\Theta(0)H_1(u-\omega)}{H_1(\omega)\Theta(u)} + V'''_k(t)\frac{\Theta(0)H_1(u+\omega)}{H_1(\omega)\Theta(u)} = G_2^{(k)}(t),\\
&w'\psi_1^{(k)}(t) + w''\psi_2^{(k)}(t) + w'''\psi_3^{(k)}(t)\\
&\quad = A\frac{\operatorname{sn}\omega\operatorname{dn} u}{i\operatorname{cn}\omega}V'_k + V''_k(t)\frac{H_1(0)\Theta(u-\omega)}{H_1(\omega)\Theta(u)} + V'''_k(t)\frac{H_1(0)\Theta(u+\omega)}{iH_1(\omega)\Theta(u)} = G_3^{(k)}(t),
\end{aligned}$$

$G_j^{(k)}$ $(j=1, 2, 3)$ étant des fonctions périodiques du temps.

---

(1) *Comparez* G. Kobb, *Sur les solutions périodiques, etc.* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1899).

Il suffit de poser

$$b_2^{(k)} = 0, \qquad b_3^{(k)} = 0$$

pour obtenir u_k, v_k, w_k en fonctions périodiques de t :

$$(10) \qquad \left\{ \begin{aligned} u_k &= -\, b_1^{(k)} \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{cn} \omega} + G_1^{(k)}(t), \\ v_k &= \quad b_1^{(k)} \frac{\operatorname{dn} \omega \operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} \omega} + G_2^{(k)}(t), \\ w_k &= \quad b_1^{(k)} \frac{\operatorname{sn} \omega \operatorname{dn} u}{i \operatorname{cn} \omega} + G_3^{(k)}(t). \end{aligned} \right.$$

5. On peut exprimer le résultat obtenu comme il suit :

Si, pour une valeur quelconque de k, les fonctions

$$Y_1^{(k)}, \quad Y_2^{(k)}, \quad Y_3^{(k)}$$

sont périodiques en t avec une période réelle ω, on peut toujours disposer les constantes arbitraires dans les expressions de

$$p_k, \quad q_k, \quad r_k, \qquad u_k, \quad v_k, \quad w_k$$

de façon qu'ils deviennent aussi périodiques en t avec la même période ω.

Or, en prenant [les équations (15) du Chapitre précédent]

$$(11) \qquad \left\{ \begin{aligned} p_0 &= -\alpha \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{cn} \omega}, & q_0 &= \beta \frac{\operatorname{dn} \omega \operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} \omega}, & r_0 &= \gamma \frac{\operatorname{sn} \omega \operatorname{dn} u}{i \operatorname{cn} \omega}, \\ x_0 &= -A \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{cn} \omega}, & v_0 &= A \frac{\operatorname{dn} \omega \operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} \omega}, & w_0 &= A \frac{\operatorname{sn} \omega \operatorname{dn} u}{i \operatorname{cn} \omega}, \end{aligned} \right.$$

nous obtiendrons $Y_1^{(1)}$, $Y_2^{(1)}$, $Y_3^{(1)}$ en fonctions périodiques de t.

On peut donc déterminer

$$(12) \qquad p_1, \quad q_1, \quad r_1, \qquad u_1, \quad v_1, \quad w_1$$

comme des fonctions périodiques de t.

Les fonctions

$$Y_1^{(2)}, \quad Y_2^{(2)}, \quad Y_3^{(2)}$$

deviendront alors périodiques.

Nous obtiendrons donc

$$(13) \qquad p_2, \quad q_2, \quad r_2, \qquad u_2, \quad v_2, \quad w_2$$

en fonctions périodiques de t.

Les fonctions (11), (12) et (13) étant périodiques, il en sera de même des fonctions

$$Y_1^{(3)},\quad Y_2^{(3)},\quad Y_3^{(3)}.$$

Nous pouvons, par conséquent, déterminer

$$p_3,\quad q_3,\quad r_3,\qquad u_3,\quad v_3,\quad w_3$$

en fonctions périodiques de t, et ainsi de suite.

Nous trouverons ainsi les séries périodiques de la forme (12) (Chapitre précédent) qui satisfont formellement aux équations du mouvement.

6. Il ne reste qu'à prouver que ces séries peuvent donner effectivement une solution périodique des équations dont il s'agit, c'est-à-dire que ces séries convergent au moins pour certaines valeurs des constantes arbitraires

$$b_1^{(k)},\quad c_j^{(k)}\qquad (j=1,2,3),$$

choisies convenablement.

En suivant une voie, indiquée par M. G. Kobb dans son Mémoire déjà cité, cherchons d'abord la condition nécessaire et suffisante pour pouvoir déterminer ces constantes de façon que l'on ait

$$u_k=0,\qquad v_k=0,\qquad w_k=0\qquad \text{pour}\qquad t=0$$
$$(k=1,2,3,\ldots).$$

Posons, k étant un indice quelconque,

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} u_k &= B_1^{(k)}u' + B_2^{(k)}u'' + B_3^{(k)}u''' = 0\\ v_k &= B_1^{(k)}v' + B_2^{(k)}v'' + B_3^{(k)}v''' = 0\\ w_k &= B_1^{(k)}w' + B_2^{(k)}w'' + B_3^{(k)}w''' = 0\end{aligned}\right\}\qquad \text{pour}\quad t=0,$$

où

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} B_1^{(k)} &= b_1^{(k)} + \int (X_1^{(k)}u' + X_2^{(k)}v' + X_3^{(k)}w')\,dt,\\ B_2^{(k)} &= \qquad \frac{1}{2}\int (X_1^{(k)}u''' + X_2^{(k)}v''' + X_3^{(k)}w''')\,dt,\\ B_3^{(k)} &= \qquad \frac{1}{2}\int (X_1^{(k)}u'' + X_2^{(k)}v'' + X_3^{(k)}w'')\,dt.\end{aligned}\right.$$

Pour que les équations (14) aient lieu, il faut et il suffit que l'on ait

$$(16)\qquad B_1^{(k)}=0,\qquad B_2^{(k)}=0,\qquad B_3^{(k)}=0\qquad \text{pour}\quad t=0,$$

puisque, comme on sait, le déterminant

$$\begin{vmatrix} u' & u'' & u''' \\ v' & v'' & v''' \\ w' & w'' & w''' \end{vmatrix}$$

ne s'annule pas pour $t = 0$.

7. Considérons maintenant les expressions de $X_1^{(k)}$, $X_2^{(k)}$, $X_3^{(k)}$ du n° 4 du Chapitre précédent.

On peut les écrire sous la forme suivante

$$\begin{aligned} X_1^{(k)} &= r_k v_0 - q_k w_0 + \Gamma_1^{(k)}, \\ X_2^{(k)} &= p_k w_0 - r_k u_0 + \Gamma_2^{(k)}, \\ X_3^{(k)} &= q_k u_0 - p_k v_0 + \Gamma_3^{(k)}, \end{aligned}$$

$\Gamma_j^{(k)}$ $(j = 1, 2, 3)$ étant des fonctions ne dépendant pas de p_k, q_k, r_k.

On a donc, en tenant compte de (15) et des relations connues entre les fonctions u', v', ..., w''',

$$\begin{aligned} B_2^{(k)} &= \frac{A}{2i}\int (p_k u'' + q_k v'' + r_k w'')\, dt + \frac{A}{2i} P_2^{(k)}, \\ B_3^{(k)} &= \frac{A}{2i}\int (p_k u''' + q_k v''' + r_k w''')\, dt + \frac{A}{2i} P_3^{(k)}, \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} \frac{A}{2i} P_2^{(k)} &= \frac{1}{2}\int (\Gamma_1^{(k)} u''' + \Gamma_2^{(k)} v''' + \Gamma_3^{(k)} w''')\, dt, \\ \frac{A}{2i} P_3^{(k)} &= \frac{1}{2}\int (\Gamma_1^{(k)} u'' + \Gamma_2^{(k)} v'' + \Gamma_3^{(k)} w'')\, dt. \end{aligned}$$

$P_2^{(k)}$, $P_3^{(k)}$ sont les fonctions connues de t (1).

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} p_k &= c_1^{(k)} P_1 + c_2^{(k)} p_0 + c_3^{(k)} P_1 K_1 - p_0 R'_k + P_1 L_k, \\ q_k &= c_1^{(k)} Q_1 + c_2^{(k)} q_0 + c_3^{(k)} Q_1 K_1 - q_0 R'_k + Q_1 L_k, \\ r_k &= c_1^{(k)} R_1 + c_2^{(k)} r_0 + c_3^{(k)} \left(Q_1 K_1 + \frac{1}{r_0} \right) - r_0 R'_k + R_1 L_k - \frac{1}{r_0} S'_k, \end{aligned}$$

(1) Nous supposons qu'on ait déjà trouvé les fonctions

$$u_j, \quad v_j, \quad w_j, \qquad p_j, \quad q_j, \quad r_j \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots, k-1).$$

où l'on a posé

$$K_1 = \int \frac{dt}{r_0^2} - \int_0^\omega \frac{dt}{r_0^2},$$

$$\begin{aligned} L_k = & \int_0^\omega R'_k\, dt - \int R'_k\, dt \\ & + \int_0^\omega \frac{S'_k}{r_0^2}\, dt - \int \frac{S'_k}{r_0^2}\, dt - \int_0^\omega \frac{q_0 Y_1^{(k)} - p_0 Y_2^{(k)}}{r_0 \Delta}\, dt + \int \frac{q_0 Y_1^{(k)} - p_0 Y_2^{(k)}}{r_0 \Delta}\, dt. \end{aligned}$$

Posons encore

$$P_1 L_k - p_0 R'_k = T_1^{(k)},$$

$$Q_1 L_k - q_0 R'_k = T_2^{(k)},$$

$$R_1 L_k - r_0 R'_k - \frac{1}{r_0} S'_k = T_3^{(k)},$$

$$\int (P_1 u'' + Q_1 v'' + R_1 w'')\, dt = A_1(t), \qquad \int (P_1 u''' + Q_1 v''' + R_1 w''')\, dt = B_1(t),$$

$$\int (p_0 u'' + q_0 v'' + r_0 w'')\, dt = A_2(t), \qquad \int (p_0 u''' + q_0 v''' + r_0 w''')\, dt = B_2(t),$$

$$\int \left[P_1 K_1 u'' + Q_1 K_1 v'' + \left(Q_1 K_1 + \frac{1}{r_0}\right) w''\right] dt = A_3(t), \qquad \int \left[P_1 K_1 u''' + Q_1 K_1 v''' + \left(Q_1 K_1 + \frac{1}{r_0}\right) w'''\right] dt = B_3(t),$$

$$\int (T_1^{(k)} u'' + T_2^{(k)} v'' + T_3^{(k)} w'')\, dt + P_2^{(k)} = -M_2^{(k)}(t),$$

$$\int (T_1^{(k)} u''' + T_2^{(k)} v''' + T_3^{(k)} w''')\, dt + P_3^{(k)} = -M_3^{(k)}(t).$$

On peut écrire

$$\frac{2i}{A} B_2^{(k)} = c_1^{(k)} A_1(t) + c_2^{(k)} A_2(t) + c_3^{(k)} A_3(t) - M_2^{(k)}(t),$$

$$\frac{2i}{A} B_3^{(k)} = c_1^{(k)} B_1(t) + c_2^{(k)} B_2(t) + c_3^{(k)} B_3(t) - M_3^{(k)}(t).$$

Cela posé, on trouve, en vertu des deux dernières des équations (16),

$$(17) \qquad \begin{cases} c_1^{(k)} A_1(0) + c_2^{(k)} A_2(0) + c_3^{(k)} A_3(0) = M_2^{(k)}(0), \\ c_1^{(k)} B_1(0) + c_2^{(k)} B_2(0) + c_3^{(k)} B_3(0) = M_3^{(k)}(0). \end{cases}$$

Ces équations, jointes à l'équation (*voir* n° 3)

$$(18) \qquad c_2^{(k)} + c_3^{(k)} \int_0^\omega \frac{dt}{r_0^2} = D_k,$$

montrent que la condition nécessaire et suffisante pour que l'on puisse déterminer les constantes $c_j^{(k)} (j = 1, 2, 3)$ de la manière indiquée plus haut, consiste en ce que le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} A_1(0) & A_2(0) & A_3(0) \\ B_1(0) & B_2(0) & B_3(0) \\ 0 & 1 & \displaystyle\int_0^\omega \frac{dt}{r_0^2} \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro.

Cette condition étant remplie, nous tirerons de (17) et (18) les valeurs bien déterminées de constantes $c_j^{(k)}$.

En désignant ensuite par $H(0)$ la valeur de

$$\int (X_1^{(k)} u' + X_2^{(k)} v' + X_3^{(k)} w')\, dt \qquad \text{pour} \quad t = 0,$$

on trouve, en tenant compte de la première des équations (15),

$$b_1^{(k)} = -H(0),$$

et les conditions

$$u_k = 0, \qquad v_k = 0, \qquad w_k = 0 \qquad \text{pour} \quad t = 0$$

seront satisfaites.

Le déterminant D ne dépend pas de l'indice k.

On peut donc calculer successivement les constantes $c_j^{(s)}$, $b_1^{(s)}$ pour toutes les valeurs de l'indice s à partir de $s = 1$ jusqu'à $s = k$, quel que soit le nombre k, de façon que l'on ait

$$u_s = 0, \qquad v_s = 0, \qquad w_s = 0 \qquad \text{pour} \quad t = 0$$
$$(s = 1, 2, 3, \ldots).$$

8. Supposons, en effet, que le déterminant D soit différent de zéro, ce qui est possible, comme il est aisé de s'en assurer.

Nous obtiendrons sous cette seule condition, à l'aide de (12) du Chapitre précédent, les séries périodiques pour

$$u, \quad v, \quad w, \qquad p, \quad q, \quad r,$$

satisfaisant formellement aux équations du mouvement [les équations (1) et (2) du Chapitre précédent], et telles que l'on a

$$u = u_0, \qquad v = v_0, \qquad w = w_0 \qquad \text{pour} \quad t = 0.$$

Cette proposition étant démontrée, il ne reste qu'à employer la méthode de M. G. Kobb (Mém. cité, p. 22-28), en la modifiant légèrement, pour établir que l'inégalité

$$D \gtrless 0$$

représente une condition nécessaire et suffisante pour que les équations du mouvement admettent la solution périodique, bien déterminée, et telle que u, v, w se réduisent à u_0, v_0, w_0 pour $t = 0$.

On en conclut aisément que les séries obtenues sont convergentes et représentent bien la solution périodique.

Ici nous ne reproduirons pas la démonstration détaillée, en renvoyant le lecteur au Mémoire cité de M. G. Kobb.

9. Au lieu de supposer

$$u = u_0, \qquad v = v_0, \qquad w = w_0 \qquad \text{pour} \quad t = 0,$$

nous aurions pu poser

$$u = u_0 + \alpha, \qquad v = v_0 + \beta, \qquad w = w_0 + \gamma \qquad \text{pour} \quad t = 0,$$

α, β, γ étant des constantes arbitraires assez petites.

Remarquons que, dans le cas considéré, les trois quantités α, β, γ sont entièrement arbitraires, de sorte que *les équations du mouvement d'un corps solide dans un liquide indéfini admettent une triple infinité de solutions périodiques dont la période commune est la même que dans la solution périodique*

$$(19) \qquad p_0, \quad q_0, \quad r_0, \qquad u_0, \quad v_0, \quad w_0$$

des équations (1) *et* (2) *du Chapitre précédent pour* $\varepsilon = 0$.

Les valeurs initiales des variables

$$u, \quad v, \quad w, \qquad p, \quad q, \quad r$$

dans les solutions périodiques dont nous venons de démontrer l'existence, *diffèrent suffisamment peu de celles des variables* (19).

Les solutions indiquées existent pour tout corps solide dont les coefficients de la force vive (M, a, b, c) *sont tels que le déterminant* D *soit différent de zéro et le paramètre* ε *soit assez petit.*