ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

P. DUHEM

Recherches sur l'hydrodynamique

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 2e série, tome 4 (1902), p. 101-169
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1902_2_4__101_0>

RECHERCHES SUR L'HYDRODYNAMIQUE,

PAR M. P. DUHEM.

DEUXIÈME PARTIE.

SUR LA PROPAGATION DES ONDES.

(SUITE ET FIN.)

CHAPITRE II.

LA MÉTHODE D'HUGONIOT.

§ 1. — Définitions diverses. Les deux lemmes d'Hugoniot.

Nous avons étudié, au Chapitre précédent, les propriétés des surfaces le long desquelles les éléments du mouvement d'un fluide, c'est-à-dire les six quantités

$$u, \quad v, \quad w, \quad \rho, \quad \Pi, \quad T,$$

sont discontinus. Dorénavant, nous supposerons que, dans la région étudiée, et pendant le laps de temps considéré, ils demeurent continus. Mais, dans cette région et pendant ce laps de temps, chacun de ces éléments peut se composer de plusieurs fonctions analytiques différentes. De là découlent divers problèmes qui seront examinés aux deux Chapitres suivants. Au présent Chapitre sera exposée la méthode propre à traiter ces problèmes.

Considérons une certaine région de l'espace et un certain laps de temps. Soient $u_1(x, y, z, t)$, $u_2(x, y, z, t)$ deux fonctions analytiques uniformes définies en tous les points (x, y, z) de cette région et à tous les instants t de ce laps de temps.

Supposons qu'à l'instant t une certaine surface S soit tracée dans la région considérée et qu'elle partage cette région en deux parties 1 et 2.

Supposons que cette surface S jouisse, à l'instant t, des propriétés suivantes :

Sur la surface S, les deux fonctions u_1, u_2 sont égales entre elles; il en est de même de deux dérivées partielles correspondantes quelconques de ces deux fonctions par rapport aux variables x, y, z, t, jusqu'aux dérivées partielles de l'ordre $(n-1)$ inclusivement; mais il existe au moins une dérivée partielle d'ordre n de la fonction u_1 qui, sur la surface S, n'est pas égale à la dérivée partielle correspondante de la fonction u_2.

Une fonction $u(x, y, z, t)$, égale à $u_1(x, y, z, t)$ dans la région 1, et à $u_2(x, y, z, t)$ dans la région 2, est continue, mais non analytique, dans la région totale considérée; on dit qu'*à l'instant t, cette fonction $u(x, y, z, t)$ admet la surface* S *pour onde d'ordre n*.

En particulier, à l'instant t, la surface S sera une onde du premier ordre pour la fonction $u(x, y, z, t)$ si, en tout point de la surface S et à l'instant t, on a

$$u_1 = u_2,$$

tandis que l'une au moins des quatre égalités

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u_2}{\partial x}, \qquad \frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\partial u_2}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u_1}{\partial z} = \frac{\partial u_2}{\partial z}, \qquad \frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial u_2}{\partial t}$$

est inexacte sur la surface S et à l'instant t.

De même, la surface S sera, à l'instant t, une onde du second ordre pour la fonction $u(x, y, z, t)$ si l'on a, en tout point de cette surface et à tout instant, les cinq égalités

$$u_1 = u_2,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u_2}{\partial x}, \qquad \frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\partial u_2}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u_1}{\partial z} = \frac{\partial u_2}{\partial z}, \qquad \frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial u_2}{\partial t},$$

tandis qu'il existe au moins une dérivée partielle du second ordre de la fonction u_1 qui, à l'instant t et sur la surface S, n'est pas égale à la dérivée partielle correspondante de la fonction u_2.

Une surface le long de laquelle la fonction u serait discontinue pourrait, à ce point de vue, être regardée comme une onde d'ordre 0.

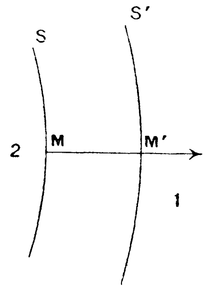
Lorsque nous mènerons à une telle surface une normale, nous la dirigerons du côté 2 vers le côté 1 et nous désignerons par α, β, γ les cosinus des angles que cette direction fait avec Ox, Oy, Oz.

Il arrivera souvent qu'aux divers instants t d'un certain laps de temps on pourra faire correspondre une surface S variable avec t et qu'à chacun de ces instants t la surface S sera une onde d'ordre n pour la fonction $u(x, y, z, t)$; on dira alors que cette surface variable avec t représente une *onde persistante*.

Soient S, S′ (*fig.* 12) les positions respectives d'une telle onde aux instants t et $(t + dt)$. Par un point M de la surface S, menons une normale à cette surface;

cette normale rencontre en M' la surface S'; désignons par δ la longueur MM',

Fig. 12.



comptée positivement si la direction MM' va du côté 2 au côté 1, et négativement dans le cas contraire; posons enfin :

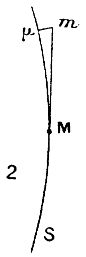
$$\delta = \mathfrak{N}\, dt.$$

$\mathfrak{N}$ sera la *vitesse normale du déplacement de l'onde.*

L'étude des ondes de divers ordres d'une fonction repose sur deux lemmes à la fois très simples et très féconds. Ces deux lemmes ont été donnés par Hugoniot qui en a tiré, touchant la Mécanique, de remarquables conséquences [1].

Soit M un point d'une surface S qui est, à l'instant t, pour la fonction u, une

Fig. 13.



onde du premier ordre (*fig.* 13). Soient a, b, c trois quantités finies assujetties seulement à la relation

$$(95) \qquad a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$$

et ε une quantité infiniment petite. Par le point M, menons un segment Mm dont

[1] Hugoniot, *Journal de Mathématiques pures et appliquées,* 4e série, t. III, 1887, p. 477.

les composantes soient εa, εb, εc; ce segment sera tangent en M à la surface S.

Les deux fonctions u_1, u_2 étant analytiques dans la partie de l'espace que l'on considère, on peut écrire

$$\frac{u_1(\mathrm{M}) - u_1(m)}{\varepsilon} = \frac{\partial u_1}{\partial x} a + \frac{\partial u_1}{\partial y} b + \frac{\partial u_1}{\partial z} c + \varepsilon \theta_1,$$

$$\frac{u_2(\mathrm{M}) - u_2(m)}{\varepsilon} = \frac{\partial u_2}{\partial x} a + \frac{\partial u_2}{\partial y} b + \frac{\partial u_2}{\partial z} c + \varepsilon \theta_2,$$

les dérivées partielles du second membre se rapportant au point M et les quantités θ_1, θ_2 demeurant finies lorsque ε tend vers o.

Retranchons ces égalités membre à membre en observant que

$$u_1(\mathrm{M}) = u_2(\mathrm{M});$$

nous trouvons l'égalité

$$(96) \qquad \frac{u_1(m) - u_2(m)}{\varepsilon} + \varepsilon(\theta_1 - \theta_2)$$
$$= \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial x}\right) a + \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) b + \left(\frac{\partial u_2}{\partial z} - \frac{\partial u_1}{\partial z}\right) c.$$

Projetons normalement le point M en μ sur la surface S; *si la courbure de la surface* S *au point* M' *n'est pas infiniment grande,* la distance $m\mu$ est un infiniment petit du second ordre par rapport à ε. Alors les fonctions u_1, u_2 étant analytiques, on peut écrire

$$u_1(m) = u_1(\mu) + \varepsilon^2 \varphi_1,$$

$$u_2(m) = u_2(\mu) + \varepsilon^2 \varphi_2,$$

φ_1, φ_2 demeurant finis lorsque ε tend vers o.

Si l'on observe en outre que

$$u_1(\mu) = u_2(\mu),$$

on voit que la relation (96) devient

$$\varepsilon(\varphi_1 - \varphi_2 + \theta_1 - \theta_2) = \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial x}\right) a + \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) b + \left(\frac{\partial u_2}{\partial z} - \frac{\partial u_1}{\partial z}\right) c.$$

Le premier membre tend vers o avec ε; le second ne dépend pas de ε; il doit donc être nul. L'égalité

$$\left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial x}\right) a + \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) b + \left(\frac{\partial u_2}{\partial z} - \frac{\partial u_1}{\partial z}\right) c = 0$$

est donc une conséquence de l'égalité (95).

Pour cela, il faut et il suffit qu'il existe une grandeur l telle que l'on ait, quels que soient a, b, c, l'égalité

$$\left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial x} - \alpha l\right) a + \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{\partial u_1}{\partial y} - \beta l\right) b + \left(\frac{\partial u_2}{\partial z} - \frac{\partial u_1}{\partial z} - \gamma l\right) c = 0.$$

D'où la proposition suivante, qui est le PREMIER LEMME D'HUGONIOT :

Soit S *une surface qui est, à l'instant* t, ONDE DU PREMIER ORDRE *pour la fonction* u. *A chaque point de cette surface où la courbure n'est pas infinie correspond une grandeur* l *telle que*

$$(97)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial x} &= \alpha l, \\ \frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{\partial u_1}{\partial y} &= \beta l, \\ \frac{\partial u_2}{\partial z} - \frac{\partial u_1}{\partial z} &= \gamma l. \end{aligned}\right.$$

Supposons maintenant que la surface S soit, pour la fonction u, une *onde du premier ordre persistante;* soient S sa position à l'instant t et S′ sa position à un instant t', voisin de t. Par un point M de la surface S menons une normale à cette surface; cette normale rencontre en M′ la surface S′. Si les coordonnées du point M sont x, y, z et si les coordonnées du point M′ sont x', y', z', on a, par définition de la vitesse $\mathfrak{N}$,

$$\begin{aligned} \frac{x'-x}{t'-t} &= \mathfrak{N}\alpha + \varphi(t'-t), \\ \frac{y'-y}{t'-t} &= \mathfrak{N}\beta + \psi(t'-t), \\ \frac{z'-z}{t'-t} &= \mathfrak{N}\gamma + \chi(t'-t), \end{aligned}$$

les quantités φ, ψ, χ demeurant finies lorsque $(t'-t)$ tend vers 0.

D'autre part, la fonction u_1 étant analytique, on aura

$$\frac{u_1(\mathrm{M}', t') - u_1(\mathrm{M}, t)}{t'-t} = \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{x'-x}{t'-t} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{y'-y}{t'-t} + \frac{\partial u_1}{\partial z}\frac{z'-z}{t'-t} + \theta_1(t'-t),$$

θ_1 ne croissant pas au delà de toute limite lorsque $(t'-t)$ tend vers 0, et les dérivées partielles se rapportant au point M et à l'instant t.

Ces diverses égalités permettent d'écrire

$$\frac{u_1(M', t') - u_1(M, t)}{t' - t} = \frac{\partial u_1}{\partial t} + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\alpha + \frac{\partial u_1}{\partial y}\beta + \frac{\partial u_1}{\partial z}\gamma\right)\mathfrak{N} + \eta_1(t' - t),$$

η_1 ne croissant pas au delà de toute limite lorsque $(t' - t)$ tend vers o.

On a de même

$$\frac{u_2(M', t') - u_2(M, t)}{t' - t} = \frac{\partial u_2}{\partial t} + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\alpha + \frac{\partial u_2}{\partial y}\beta + \frac{\partial u_2}{\partial z}\gamma\right)\mathfrak{N} + \eta_2(t' - t),$$

η_2 ne croissant pas au delà de toute limite lorsque $(t' - t)$ tend vers o.

Retranchons membre à membre ces deux égalités, en observant que

$$u_1(M, t) = u_2(M, t), \qquad u_1(M', t') = u_2(M', t')$$

et en tenant compte des égalités (97). Nous trouvons

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{\partial u_1}{\partial t} + \mathfrak{N} l = (\eta_1 - \eta_2)(t' - t).$$

Le second membre de cette égalité tend vers o avec $(t' - t)$; le premier, qui ne dépend pas de $(t' - t)$, doit être nul; d'où le DEUXIÈME LEMME D'HUGONIOT :

Soit une fonction u qui admet une ONDE PERSISTANTE DU PREMIER ORDRE; *à chaque instant et en tout point de l'onde relative à cet instant, pourvu qu'en ce point la courbure de l'onde ne soit pas infiniment grande, on a l'égalité*

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{\partial u_1}{\partial t} + \mathfrak{N} l = 0. \tag{98}$$

On observera que les deux lemmes précédents demeureraient vrais au cas où les trois variables x, y, z seraient remplacées par un nombre quelconque de variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

§ 2. — EXPRESSION DE LA VITESSE DE DÉPLACEMENT $\mathfrak{N}$ POUR LES ONDES DE DIVERS ORDRES [1].

Les lemmes précédents suffisent à résoudre le problème suivant :

Une fonction u admet une onde persistante d'ordre n; au moyen des déri-

---

[1] *Sur le théorème d'Hugoniot et quelques théorèmes analogues* (*Comptes rendus*, t. CXXXI, 24 décembre 1900, p. 1171).

vées partielles d'ordre n des fonctions u_1, u_2, former une expression de la vitesse de déplacement $\mathfrak{N}$ qui demeure invariable par un changement de coordonnées rectangulaires.

1° *Onde du premier ordre.* — Les égalités (97) et (98) donnent les trois relations

$$(99)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{N}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}-\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)&=-\left(\frac{\partial u_2}{\partial t}-\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)\alpha,\\ \mathfrak{N}\left(\frac{\partial u_2}{\partial y}-\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)&=-\left(\frac{\partial u_2}{\partial t}-\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)\beta,\\ \mathfrak{N}\left(\frac{\partial u_2}{\partial z}-\frac{\partial u_1}{\partial z}\right)&=-\left(\frac{\partial u_2}{\partial t}-\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)\gamma.\end{aligned}\right.$$

Élevons au carré les deux membres de chacune de ces égalités et ajoutons membre à membre les résultats obtenus; nous trouvons la formule

$$(100)\qquad \mathfrak{N}^2\left\{\left[\frac{\partial(u_2-u_1)}{\partial x}\right]^2+\left[\frac{\partial(u_2-u_1)}{\partial y}\right]^2+\left[\frac{\partial(u_2-u_1)}{\partial z}\right]^2\right\}=\left[\frac{\partial(u_2-u_1)}{\partial t}\right]^2$$

qui résout, pour les ondes du premier ordre, la question posée.

2° *Onde du second ordre.* — Une telle onde est onde du premier ordre pour la fonction $\frac{\partial u}{\partial x}$ et aussi pour la fonction $\frac{\partial u}{\partial t}$; à chacune de ces deux fonctions appliquons la première des égalités (99); nous trouvons les deux égalités

$$\mathfrak{N}\frac{\partial^2(u_2-u_1)}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2(u_2-u_1)}{\partial x\,\partial t}\alpha,$$

$$\mathfrak{N}\frac{\partial^2(u_2-u_1)}{\partial x\,\partial t}=-\frac{\partial^2(u_2-u_1)}{\partial t^2}\alpha.$$

Multipliées membre à membre, elles donnent la première des égalités

$$\mathfrak{N}^2\frac{\partial^2(u_2-u_1)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2(u_2-u_1)}{\partial t^2}\alpha^2,$$

$$\mathfrak{N}^2\frac{\partial^2(u_2-u_1)}{\partial y^2}=\frac{\partial^2(u_2-u_1)}{\partial t^2}\beta^2,$$

$$\mathfrak{N}^2\frac{\partial^2(u_2-u_1)}{\partial z^2}=\frac{\partial^2(u_2-u_1)}{\partial t^2}\gamma^2.$$

Les deux autres se démontrent d'une manière analogue.

En ajoutant membre à membre ces égalités, nous trouvons la relation

$$\mathfrak{N}^2 \Delta(u_2 - u_1) = \frac{\partial^2(u_2 - u_1)}{\partial t^2}, \tag{101}$$

qui résout, pour les ondes du second ordre, le problème posé.

Cette relation est due à Hugoniot (¹).

3° *Onde d'ordre pair : $n = 2q$.* — Désignons par Δ_q le résultat de l'opération Δ répétée q fois de suite. Nous allons prouver que l'on a

$$\mathfrak{N}^n \Delta_q(u_2 - u_1) = \frac{\partial^n(u_2 - u_1)}{\partial t^n}. \tag{102}$$

L'égalité (101) nous montre que cette formule est exacte lorsqu'on fait $q = 1$ et, partant, $n = 2$; pour en établir la généralité, il nous suffit de prouver que, si elle est vraie jusqu'à une certaine valeur de q et, partant, de n, elle demeure encore vraie lorsqu'on augmente q d'une unité et, partant, n de deux unités.

En d'autres termes, il s'agit de prouver que si la formule (102) est exacte pour toutes les ondes d'ordre pair jusqu'à l'ordre $n = 2q$, on a, pour toute onde d'ordre $(n + 2)$,

$$\mathfrak{N}^{n+2} \Delta_{q+1}(u_2 - u_1) = \frac{\partial^{n+2}(u_2 - u_1)}{\partial t^{n+2}}. \tag{102 bis}$$

Une onde d'ordre $(n + 2)$ pour la fonction u est une onde d'ordre 2 pour la fonction $\Delta_q u$; on a donc, selon la formule (101),

$$\mathfrak{N}^2 \Delta_{q+1}(u_2 - u_1) = \frac{\partial^2 \Delta_q(u_2 - u_1)}{\partial t^2}.$$

Une onde d'ordre $(n + 2)$ pour la fonction u est une onde d'ordre n pour la fonction $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$; on a donc, selon la formule (102),

$$\mathfrak{N}^n \Delta_q \frac{\partial^2(u_2 - u_1)}{\partial t^2} = \frac{\partial^{n+2}(u_2 - u_1)}{\partial t^{n+2}}.$$

Enfin

$$\frac{\partial^2 \Delta_q(u_2 - u_1)}{\partial t^2} = \Delta_q \frac{\partial^2(u_2 - u_1)}{\partial t^2}.$$

Ces trois égalités justifient l'égalité (102 *bis*).

(¹) HUGONIOT, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4ᵉ série, t. III, 1887, p. 477.

4° *Onde d'ordre impair :* $n = 2q+1$. — Une onde d'ordre $(2q+1)$ pour la fonction u est du premier ordre pour la fonction $\Delta_q u$; on a donc, selon la formule (100),

$$\mathfrak{N}^2\left\{\left[\frac{\partial\,\Delta_q(u_2-u_1)}{\partial x}\right]^2+\left[\frac{\partial\,\Delta_q(u_2-u_1)}{\partial y}\right]^2+\left[\frac{\partial\,\Delta_q(u_2-u_1)}{\partial z}\right]^2\right\}=\left[\frac{\partial\,\Delta_q(u_2-u_1)}{\partial t}\right]^2.$$

Cette onde est en même temps d'ordre $2q$ par rapport à la fonction $\frac{\partial u}{\partial t}$, en sorte que la formule (102) donne

$$\mathfrak{N}^{2q}\,\Delta_q\frac{\partial(u_2-u_1)}{\partial t}=\frac{\partial^n(u_2-u_1)}{\partial t^n}.$$

Enfin

$$\frac{\partial\,\Delta_q(u_2-u_1)}{\partial t}=\Delta_q\frac{\partial(u_2-u_1)}{\partial t}.$$

Ces trois égalités nous donnent la formule

$$\begin{aligned}\text{(103)}\qquad \mathfrak{N}^{2n}\left\{\left[\frac{\partial\,\Delta_q(u_2-u_1)}{\partial x}\right]^2+\left[\frac{\partial\,\Delta_q(u_2-u_1)}{\partial y}\right]^2\right.\\ \left.+\left[\frac{\partial\,\Delta_q(u_2-u_1)}{\partial z}\right]^2\right\}=\left[\frac{\partial^n(u_2-u_1)}{\partial t^n}\right]^2\end{aligned}$$

qui achève de résoudre le problème posé.

On voit de suite que ces formules conduiraient presque immédiatement à la solution du problème suivant, que nous nous bornerons à énoncer :

Donner de la vitesse $\mathfrak{N}$, pour les ondes de divers ordres, une expression qui ne varie pas par un changement quelconque de coordonnées curvilignes orthogonales.

§ 3. — Applications diverses de la méthode d'Hugoniot.

Avant d'appliquer la méthode d'Hugoniot aux questions d'Hydrodynamique faisons usage des formules précédentes pour étudier diverses équations aux dérivées partielles que l'on rencontre en Physique mathématique.

La première que nous considérerons, avec Hugoniot [1], est l'équation

$$\text{(104)}\qquad a^2\,\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

[1] Hugoniot, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4e série, t. III, 1887, p. 477.

où a est une constante réelle, que l'on rencontre dans l'étude des petits mouvements des fluides; la comparaison des égalités (101) et (104) montre de suite que si une intégrale de cette équation offre une onde du second ordre, cette onde se déplace avec une vitesse

$$\mathfrak{N} = \pm a. \tag{105}$$

Ce résultat s'étend d'ailleurs à toutes les ondes d'ordre supérieur à 2 que pourrait présenter une intégrale de l'équation (104). En effet, une onde d'ordre n ($n > 2$) pour la fonction u est du deuxième ordre pour la fonction $\frac{\partial^{n-2} u}{\partial t^{n-2}}$; et, d'autre part, cette fonction vérifie encore une équation de la forme (104), comme on le voit en différentiant ($n - 2$) fois par rapport à t les deux membres de l'équation (104).

Des considérations semblables [1] s'appliquent à l'*équation des télégraphistes :*

$$a^2 \Delta u - \mu \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{106}$$

où a et μ sont deux constantes réelles. En tout point d'une onde du second ordre pour la fonction u, on a

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial u_2}{\partial t},$$

en sorte que l'équation (106) exige que l'on ait, en un tel point,

$$a^2 \Delta(u_2 - u_1) = \frac{\partial^2(u_2 - u_1)}{\partial t^2}.$$

La comparaison de cette égalité avec l'égalité (101) montre que la vitesse de déplacement d'une onde du second ordre pour une intégrale de l'équation (106) est encore donnée par l'égalité (105).

Comme dans le cas précédent, ce résultat s'étend aux ondes d'ordre supérieur à 2.

Il peut arriver que les formules du § 2 conduisent à attribuer à $\mathfrak{N}^2$, pour les ondes d'un certain ordre, une valeur infinie ou négative; dans ce cas, nous sommes certains qu'une intégrale de l'équation considérée n'admet pas d'onde persistante de l'ordre considéré.

---

[1] *Sur l'interprétation théorique des expériences hertziennes* (*L'Éclairage électrique,* t. IV, 1895, p. 494).

Ainsi, en tout point d'une onde du second ordre pour la fonction u, on a

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial u_2}{\partial t};$$

une intégrale de l'équation

$$(107) \qquad \Delta u = \mu \frac{\partial u}{\partial t},$$

que l'on rencontre dans la théorie de la conductibilité, ne pourrait donc admettre une onde du second ordre sans que l'on eût, en tous les points de cette onde,

$$\Delta(u_2 - u_1) = 0,$$

partant, selon l'égalité (101),

$$\mathfrak{N}^2 = \infty.$$

Une intégrale de l'équation

$$(108) \qquad a^2 \Delta u + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

ne pourrait admettre une onde du second ordre sans que l'on eût, en vertu de l'égalité (101),

$$\mathfrak{N}^2 = -a^2.$$

Les intégrales des deux équations (107), (108) ne sauraient donc admettre d'onde persistante du second ordre; cette proposition s'étend sans peine aux ondes d'ordre supérieur à 2 et fournit le théorème suivant :

Si, de part et d'autre d'une surface S *qui peut varier avec* t, *deux fonctions analytiques* u_1, u_2 *vérifient soit l'équation* (107), *soit l'équation* (108), *et si l'on a, en tout point de la surface* S *et à tout instant,*

$$u_1 = u_2,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u_2}{\partial x}, \qquad \frac{\partial u_1}{\partial y} = \frac{\partial u_2}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u_1}{\partial z} = \frac{\partial u_2}{\partial z}, \qquad \frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial u_2}{\partial t},$$

les deux fonctions u_1, u_2 *se prolongent analytiquement l'une l'autre.*

L'équation

$$(109) \qquad a^2 \frac{\partial}{\partial t} \Delta u - \mu \Delta u - \mu' \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

se rencontre dans l'étude de la propagation de l'électricité au sein des corps conducteurs [1] et dans l'étude des petits mouvements des fluides compressibles visqueux [2]. Imaginons qu'une intégrale de cette équation admette une onde du troisième ordre. Nous aurons, en tout point de cette onde,

$$\Delta(u_2 - u_1) = 0, \qquad \frac{\partial^2(u_2 - u_1)}{\partial t^2} = 0,$$

partant

$$\Delta \frac{\partial(u_2 - u_1)}{\partial t} = 0.$$

D'autre part, cette onde du troisième ordre pour la fonction u serait du premier ordre pour la fonction Δu; si elle était persistante, on aurait, en vertu des égalités (97) et (98),

$$\mathfrak{N} \frac{\partial}{\partial x} \Delta(u_2 - u_1) = -\alpha \frac{\partial}{\partial t} \Delta(u_2 - u_1) = -\alpha \Delta \frac{\partial(u_2 - u_1)}{\partial t}$$

et, partant,

$$\mathfrak{N} = 0.$$

Une intégrale de l'équation (109) ne peut donc admettre d'onde persistante du troisième ordre [3], ni, comme on le prouverait sans peine, d'onde persistante d'ordre plus élevé, à moins que cette onde ne soit immobile.

Une intégrale de l'équation de Laplace

$$\Delta u = 0, \tag{110}$$

où u est une fonction des seules variables x, y, z, à l'exclusion de t, peut-elle admettre une onde du second ordre? Appliquée immédiatement, l'égalité (101) devient une identité; mais on peut remarquer que les théorèmes précédents sont encore vrais si, au lieu des trois variables x, y, z, la fonction étudiée ne dépend que de deux variables x, y; qu'en remplaçant dans l'équation précédente la lettre z par la lettre t, elle devient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

---

(1) *Sur l'interprétation théorique des expériences hertziennes* (*L'Éclairage électrique*, t. IV, 1895, p. 494).

(2) *Sur la généralisation d'un théorème de Clebsch* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5e série, t. VI, 1900, p. 213).

(3) *Sur la théorie électrodynamique de Helmholtz et la théorie électromagnétique de la lumière* (*Archives néerlandaises des Sciences exactes et naturelles*, 2e série, t. V, 1901, p. 227).

et que, si une intégrale de cette équation admettait une onde persistante du second ordre, la formule (101) donnerait, pour cette onde,

$$\mathcal{K}^2 = -1,$$

ce qui est impossible.

Le même procédé conduit, sans aucune difficulté, à la démonstration de la proposition suivante :

Une intégrale de l'équation aux dérivées partielles d'ordre $2n$

$$\Delta_n u + A \frac{\partial^{2n-1} u}{\partial x^{2n-1}} + B \frac{\partial^{2n-1} u}{\partial x^{2n-2} \partial y} + \ldots + L u = 0, \tag{111}$$

où A, B, ..., L *sont des fonctions des seules variables* x, y, z, *analytiques dans tout l'espace, et où* u *est une fonction des seules variables* x, y, z, *n'admet ni onde d'ordre* n, *ni onde d'ordre supérieur à* n.

Ce théorème entraîne l'impossibilité d'ondes dont l'ordre serait égal ou supérieur à 2 non seulement pour les intégrales de l'équation de Laplace, mais encore pour les intégrales de l'équation

$$\Delta u + k^2 u = 0, \tag{112}$$

que l'on rencontre dans l'étude des mouvements vibratoires des fluides et dans une foule de questions d'Acoustique, d'Optique ou d'Électrodynamique.

Il démontre l'impossibilité d'ondes d'ordre égal ou supérieur à 4 pour les intégrales de l'équation

$$\Delta \Delta u = 0, \tag{113}$$

que l'on rencontre dans l'étude des corps élastiques isotropes en équilibre.

§ 4. — Les paramètres de M. Hadamard.

Les deux lemmes d'Hugoniot, énoncés et démontrés au § 1, peuvent être étendus aux ondes d'ordre n sous une forme très remarquable qui a été indiquée par M. Hadamard [1].

Supposons que la surface S soit, à l'instant t, onde d'ordre n pour la fonction u; elle est évidemment onde d'ordre 1 pour la fonction $\frac{\partial^{(n-1)} u}{\partial x^a \partial y^b \partial z^c \partial t^p}$, où

$$a + b + c = n - p - 1.$$

[1] J. Hadamard, *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXX, p. 50, 19 décembre 1900.

A cette fonction appliquons le premier terme d'Hugoniot, qu'expriment les égalités (97); nous aurons les égalités

$$\frac{\dfrac{\partial^n (u_2 - u_1)}{\partial x^{a+1}\,\partial y^b\,\partial z^c\,\partial t^p}}{\alpha} = \frac{\dfrac{\partial^n (u_2 - u_1)}{\partial x^a\,\partial y^{b+1}\,\partial z^c\,\partial t^p}}{\beta} = \frac{\dfrac{\partial^n (u_2 - u_1)}{\partial x^a\,\partial y^b\,\partial z^{c+1}\,\partial t^p}}{\gamma}$$

que l'on peut encore écrire

$$\frac{\dfrac{\partial^n (u_2 - u_1)}{\partial x^{a+1}\,\partial y^b\,\partial z^c\,\partial t^p}}{\alpha^{a+1}\,\beta^b\,\gamma^c} = \frac{\dfrac{\partial^n (u_2 - u_1)}{\partial x^a\,\partial y^{b+1}\,\partial z^c\,\partial t^p}}{\alpha^a\,\beta^{b+1}\,\gamma^c} = \frac{\dfrac{\partial^n (u_2 - u_1)}{\partial x^a\,\partial y^b\,\partial z^{c+1}\,\partial t^p}}{\alpha^a\,\beta^b\,\gamma^{c+1}}.$$

Le rapport

$$\frac{\dfrac{\partial^n (u_2 - u_1)}{\partial x^{a+1}\,\partial y^b\,\partial z^c\,\partial t^p}}{\alpha^{a+1}\,\beta^b\,\gamma^c}$$

prend donc, en un point donné de l'onde, une valeur qui ne change pas lorsqu'au numérateur on remplace une dérivation par rapport à x par une dérivation par rapport à y ou par une dérivation par rapport à z, pourvu qu'en même temps, au dénominateur, on remplace un facteur α par un facteur β ou par un facteur γ.

Cela posé, considérons la fonction

$$\frac{\partial^n (u_2 - u_1)}{\partial x^i\,\partial y^j\,\partial z^k\,\partial t^p},$$

où i, j, k ont des valeurs entières et non négatives qui vérifient la relation

$$i + j + k = n - p. \tag{114}$$

Cette fonction peut se déduire de la fonction

$$\frac{\partial^n (u_2 - u_1)}{\partial x^{n-p}\,\partial t^p}$$

en remplaçant j fois de suite une différentiation par rapport à x par une différentiation par rapport à y et k fois de suite une différentiation par rapport à x par une différentiation par rapport à z.

Nous arrivons ainsi, au théorème suivant :

Premier lemme de M. Hadamard. — *Si la fonction u admet à l'instant t la surface* S *pour onde d'ordre n, en chaque point de cette onde le rapport*

$$\frac{\dfrac{\partial^n (u_2 - u_1)}{\partial x^i\,\partial y^j\,\partial z^k\,\partial t^p}}{\alpha^i\,\beta^j\,\gamma^k},$$

où les indices i, j, k peuvent prendre toutes les valeurs entières et non négatives qui vérifient l'égalité

$$i + j + k = n - p,$$

a une valeur l_p qui dépend de p, mais point de i, j, k.

Ce lemme peut donc encore s'énoncer de la manière suivante :

A chaque point de la surface S *correspondent* $(n+1)$ *paramètres*

$$l_0, \quad l_1, \quad \ldots, \quad l_n,$$

au moyen desquels toutes les dérivées partielles d'ordre de la différence $(u_2 - u_1)$ *s'expriment, en ce point, par les formules*

$$(115)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^n(u_2-u_1)}{\partial x^i\,\partial y^j\,\partial z^k} = \alpha^i\beta^j\gamma^k l_0 \qquad (i+j+k=n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial^n(u_2-u_1)}{\partial x^i\,\partial y^j\,\partial z^k\,\partial t^p} = \alpha^i\beta^j\gamma^k l_p \qquad (i+j+k=n-p), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial^n(u_2-u_1)}{\partial x\,\partial t^{n-1}} = \alpha\, l_{n-1}, \qquad \dfrac{\partial^n(u_2-u_1)}{\partial y\,\partial t^{n-1}} = \beta\, l_{n-1}, \qquad \dfrac{\partial^n(u_2-u_1)}{\partial z\,\partial t^{n-1}} = \gamma\, l_{n-1}, \\ \qquad\qquad\qquad \dfrac{\partial^n(u_2-u_1)}{\partial t^n} = l_n. \end{array}\right.$$

Supposons maintenant que la surface S soit, pour la fonction u, une onde *persistante* d'ordre n. Prenons un point sur cette surface ; en ce point, les trois quantités α, β, γ, ne peuvent être nulles à la fois; pour fixer les idées, supposons α différent de o.

L'onde considérée est une onde persistante du premier ordre pour la fonction

$$\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-p-1}\,\partial t^p}.$$

A cette fonction appliquons la seconde égalité (99), qui découle du second lemme d'Hugoniot; nous trouvons

$$(116)\qquad \mathfrak{N}\,\frac{\partial^n(u_2-u_1)}{\partial x^{n-p}\,\partial t^p} + \alpha\,\frac{\partial^n(u_2-u_1)}{\partial x^{n-p-1}\,\partial t^{p+1}} = 0.$$

Mais les égalités (115) donnent

$$\frac{\partial^n(u_2-u_1)}{\partial x^{n-p}\,\partial t^p} = \alpha^{n-p} l_p,$$

$$\frac{\partial^n(u_2-u_1)}{\partial x^{n-p-1}\,\partial t^{p+1}} = \alpha^{n-p-1} l_{p+1}.$$

Moyennant ces égalités, et après suppression du facteur α^{n-p} qui n'est pas nul, l'égalité (116) prend la forme

$$l_{p+1} + \mathfrak{M}\, l_p = 0 \tag{117}$$

qui entraîne la proposition suivante :

Second lemme de M. Hadamard. — *Si la surface* S *est, pour la fonction u, une onde persistante d'ordre n, les* $(n+1)$ *paramètres*

$$l_0, \quad l_1, \quad \ldots, \quad l_n$$

forment, en chaque point de cette onde et à chaque instant, une progression géométrique de raison $-\mathfrak{M}$.

On peut donner [1] des paramètres

$$l_0, \quad l_1, \quad \ldots, \quad l_n$$

des expressions, formées au moyen des dérivées partielles d'ordre n de la différence $(u_2 - u_1)$, expressions qui ne changent pas par un changement quelconque de coordonnées rectangulaires.

Deux cas sont à distinguer :

Premier cas : $(n-p)$ *est pair*,

$$n - p = 2q. \tag{118}$$

Visiblement, nous avons, pour une fonction f quelconque,

$$\Delta_q f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)^{(q)},$$

la puissance qui figure au second membre étant une puissance symbolique. Il en résulte que

$$\Delta_q \frac{\partial^p (u_2 - u_1)}{\partial t^p} = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial^p (u_2 - u_1)}{\partial t^p} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{\partial^p (u_2 - u_1)}{\partial t^p} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{\partial^p (u_2 - u_1)}{\partial t^p}\right]^{(q)}.$$

Les égalités (115) transforment sans peine cette égalité en

$$\Delta_q \frac{\partial^p (u_2 - u_1)}{\partial t^p} = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^q\, l_p$$

(1) *Sur les théorèmes d'Hugoniot, les lemmes de M. Hadamard et la propagation des ondes dans les fluides visqueux* (*Comptes rendus*, t. CXXXII, 13 mai 1901, p. 1163).

ou bien, comme $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$, en

(119) $$l_p=\frac{\partial^p}{\partial t^p}\Delta_q(u_2-u_1),$$

formule qui résout la question proposée.

Deuxième cas : $(n-p)$ *est impair,*

(120) $$n-p=2q+1.$$

Dans ce cas, on a

$$\Delta_q\frac{\partial^{p+1}(u_2-u_1)}{\partial x\,\partial t^p}$$
$$=\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial^{p+1}(u_2-u_1)}{\partial x\,\partial t^p}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{\partial^{p+1}(u_2-u_1)}{\partial y\,\partial t^p}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{\partial^{p+1}(u_2-u_1)}{\partial z\,\partial t^p}\right]^{(q)}.$$

Selon les égalités (115), cette égalité devient

$$\Delta_q\frac{\partial^{p+1}(u_2-u_1)}{\partial x\,\partial t^p}=\alpha(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^q\,l_p$$

et donne la première des égalités

$$\alpha\,l_p=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^p\Delta_q(u_2-u_1)}{\partial t^p},$$
$$\beta\,l_p=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^p\Delta_q(u_2-u_1)}{\partial t^p},$$
$$\gamma\,l_p=\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial^p\Delta_q(u_2-u_1)}{\partial t^p}.$$

Les deux autres se démontrent d'une manière analogue.

Si l'on élève au carré ces trois égalités et qu'on ajoute membre à membre les résultats obtenus, on trouve la formule

(121) $$l_p^2=\left[\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^p\Delta_q(u_2-u_1)}{\partial t^p}\right]^2+\left[\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^p\Delta_q(u_2-u_1)}{\partial t^p}\right]^2+\left[\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial^p\Delta_q(u_2-u_1)}{\partial t^p}\right]^2$$

qui résout la question posée.

L'égalité (117) nous permet d'écrire, en vertu de la dernière égalité (115),

(122) $$(-\mathfrak{N})^{n-p}\,l_p=\frac{\partial^n(u_2-u_1)}{\partial t^n}.$$

Si $(n-p)$ *est pair,*

(118) $$n-p=2q,$$

les égalités (119) et (122) donnent la relation

$$(123) \qquad \mathcal{N}^{n-p} \frac{\partial^p}{\partial t^p} \Delta_q(u_2 - u_1) = \frac{\partial^n (u_2 - u_1)}{\partial t^n}.$$

Si $(n-p)$ *est impair,*

$$(120) \qquad n - p = 2q + 1,$$

les égalités (121) et (122) donnent

$$(124) \quad \mathcal{N}^{2(n-p)} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^p \Delta_q(u_2 - u_1)}{\partial t^p} \right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^p \Delta_q(u_2 - u_1)}{\partial t^p} \right]^2 + \left[\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial^p \Delta_q(u_2 - u_1)}{\partial t^p} \right]^2 \right\} = \left[\frac{\partial^n (u_2 - u_1)}{\partial t^n} \right]^2.$$

Ces égalités (123) et (124) redonnent immédiatement les formules démontrées au § 2. En effet, si n est pair, l'égalité (118) est vérifiée lorsqu'on y fait $p = 0$, et l'égalité (123) reproduit l'égalité (102); si n est impair, l'égalité (120) est vérifiée lorsqu'on y fait $p = 0$, et l'égalité (124) reproduit l'égalité (103).

§ 5. — Onde qui propage un vecteur. — Vecteurs de M. Hadamard.

Supposons que les trois fonctions

$$u(x, y, z, t), \quad v(x, y, z, t), \quad w(x, y, z, t)$$

soient les trois composantes d'un vecteur V. Si la surface S est, à l'instant t, onde d'ordre n pour l'une au moins des trois fonctions u, v, w et si, pour les deux autres, elle est onde d'ordre n ou d'ordre supérieur à n, ou enfin d'ordre infini, cas auquel elle n'interrompt pas le caractère analytique de ces deux fonctions, on dit que *la surface* S *est, à l'instant* t, *onde d'ordre* n *pour le vecteur* V.

La notion de *permanence* de l'onde s'étend sans peine à ce cas.

Si la surface S est onde d'ordre n pour le vecteur V, les dérivées partielles d'ordre n de la fonction $(u_2 - u_1)$ s'expriment toutes par les égalités (115), au moyen des $(n+1)$ paramètres $l_0, l_1, \ldots, l_n$; les dérivées partielles d'ordre n de la fonction $(v_2 - v_1)$ s'expriment de même au moyen de $(n+1)$ paramètres $m_0, m_1, \ldots, m_n$; enfin les dérivées partielles d'ordre n de la fonction $(w_2 - w_1)$ s'expriment de même au moyen de $(n+1)$ paramètres $n_0, n_1, \ldots, n_n$.

Mais les paramètres l_p, m_p, n_p peuvent être regardés comme les trois composantes d'un vecteur W_p. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Si, à l'instant t, *la surface* S *est onde d'ordre* n *pour le vecteur* V, *il* *existe, en chaque point de cette surface,* $(n+1)$ *vecteurs*

$$\mathrm{W}_0, \quad \mathrm{W}_1, \quad \ldots, \quad \mathrm{W}_n,$$

au moyen desquels s'expriment, en ce point et à cet instant, les dérivées partielles d'ordre n des composantes de la différence géométrique $\mathrm{V}_2 - \mathrm{V}_1$.

Supposons maintenant que l'onde soit persistante. Les égalités (117) nous donneront les relations

$$l_{p+1} + \mathfrak{N} l_p = 0, \qquad m_{p+1} + \mathfrak{N} m_p = 0, \qquad n_{p+1} + \mathfrak{N} n_p = 0,$$

qui entraînent la proposition suivante :

Si la surface S *est une onde permanente d'ordre n pour le vecteur* V, *à chaque instant et en chaque point de cette onde, les* $(n+1)$ *vecteurs* W_0, W_1, ..., W_n *sont dirigés suivant une même droite; si on les compte positivement suivant une direction* D *choisie sur cette droite, ils forment une progression géométrique de raison* $(-\mathfrak{N})$.

La direction D se nomme alors *direction de la perturbation propagée par l'onde* S; lorsqu'elle est sans cesse normale à l'onde S, on dit que celle-ci propage une *perturbation longitudinale;* lorsqu'elle est sans cesse tangente à l'onde S, on dit que celle-ci propage une *perturbation transversale.*

Les considérations contenues en ce dernier paragraphe sont dues en entier à M. Hadamard.

CHAPITRE III.

DES ONDES DANS LES FLUIDES VISQUEUX.

§ 1. — Des ondes du premier ordre par rapport a certains éléments du mouvement (1).

Imaginons qu'en un fluide visqueux une surface σ soit, à l'instant t, onde au moins du premier ordre pour les trois composantes u, v, w de la vitesse, pour la température T et, en outre, si le fluide est compressible, pour la densité.

(1) *Sur les théorèmes d'Hugoniot, les lemmes de M. Hadamard et la propagation des ondes dans les fluides visqueux* (*Comptes rendus,* t. CXXXII, 13 mai 1901, p. 1163). *Des ondes qui peuvent persister en un fluide visqueux* (*Ibid.*, t. CXXXIII, 14 octobre 1901, p. 579).

Quant à la pression Π, nous ne la contraindrons pas à varier d'une manière continue au travers de la surface considérée.

Cette onde pourra-t-elle être persistante ?

Pour discuter cette question, nous n'avons pas le droit de faire usage des équations du mouvement des fluides visqueux, telles qu'elles sont données par les équations (74) de la première Partie; celles-ci, en effet, reposent sur une transformation qui a été exposée en cette première Partie, au § 3 du Chapitre I, et la légitimité de cette transformation, comme nous l'avons formellement observé en cet endroit, est subordonnée à une condition : c'est que les six quantités ν_x, ν_y, ν_z, τ_x, τ_y, τ_z soient continues dans tout le fluide et admettent, en tous les points de ce fluide, des dérivées partielles finies.

Or, si nous admettons pour ν_x, ν_y, ν_z, τ_x, τ_y, τ_z les expressions données par les égalités (51) de la première Partie ou (43) de la seconde Partie, nous voyons que ces six quantités sont précisément discontinues le long de l'onde σ.

Nous devons donc renoncer à imposer à la quantité $d\mathfrak{G}_\nu$, donnée par l'égalité (46) de la première Partie, la transformation que nous lui avions fait subir et chercher à la transformer d'une autre manière.

Traçons dans le fluide, à l'instant t, une surface fermée Σ contenant la surface σ à son intérieur; soit a la masse fluide que renferme la surface σ, et soit b la masse fluide qui lui est extérieure.

La quantité $d\mathfrak{G}_\nu$ peut toujours s'exprimer ainsi

$$d\mathfrak{G}_\nu = d\mathfrak{G}_{\nu a} + d\mathfrak{G}_{\nu b}, \tag{125}$$

$d\mathfrak{G}_{\nu a}$, $d\mathfrak{G}_{\nu b}$ étant définis par les égalités

$$d\mathfrak{G}_{\nu a} = \int_a \left[\nu_x \frac{\partial\, \delta x}{\partial x} + \ldots + \tau_z \left(\frac{\partial\, \delta x}{\partial y} + \frac{\partial\, \delta y}{\partial x}\right)\right] d\varpi, \tag{126}$$

$$d\mathfrak{G}_{\nu b} = \int_b \left[\nu_x \frac{\partial\, \delta x}{\partial x} + \ldots + \tau_z \left(\frac{\partial\, \delta x}{\partial y} + \frac{\partial\, \delta y}{\partial x}\right)\right] d\varpi. \tag{127}$$

Au sein de la partie b, les six quantités ν_x, ν_y, ν_z, τ_x, τ_y, τ_z sont continues et admettent des dérivées partielles qui sont finies; on peut donc appliquer à $d\mathfrak{G}_{\nu b}$ la transformation que, dans la première Partie, nous avons fait subir à la quantité $d\mathfrak{G}_\nu$ tout entière.

Conservons à p_x, p_y, p_z, q_x, q_y, q_z la signification que donnent les égalités (48) et (49) de la première Partie; en chaque point de la surface Σ désignons par n_b la normale vers l'intérieur de la partie b; posons

$$\left\{\begin{aligned} \pi_x &= -[\nu_x \cos(n_b, x) + \tau_z \cos(n_b, y) + \tau_y \cos(n_b, z)],\\ \pi_y &= -[\tau_z \cos(n_b, x) + \nu_y \cos(n_b, y) + \tau_y \cos(n_b, z)],\\ \pi_z &= -[\tau_y \cos(n_b, x) + \tau_x \cos(n_b, y) + \nu_z \cos(n_b, z)],\end{aligned}\right. \tag{128}$$

et les égalités (125) et (127) nous permettront d'écrire

$$(129)\qquad \begin{aligned} d\mathfrak{T}_v = d\mathfrak{T}_{va} &+ \int_b (q_x\,\delta x + q_y\,\delta y + q_z\,\delta z)\,d\varpi \\ &+ \int_S (p_x\,\delta x + p_y\,\delta y + p_z\,\delta z)\,dS \\ &+ \int_\Sigma (\pi_x\,\delta x + \pi_y\,\delta y + \pi_z\,\delta z)\,d\Sigma. \end{aligned}$$

Choisissons la surface Σ d'une manière particulière.

De part et d'autre de la surface σ menons deux surfaces dont la distance h à la surface Σ soit infiniment petite; l'une de ces surfaces, Σ_1, se trouvera du côté 1 de la surface σ; l'autre, Σ_2, se trouvera du côté 2. Nous composerons la surface Σ de l'ensemble des deux surfaces Σ_1 et Σ_2; nous écrirons l'égalité (129) et nous y ferons tendre h vers 0.

Le volume occupé par la masse a du fluide tend vers 0 avec h; dès lors, il résulte de l'égalité (126) que $d\mathfrak{T}_{va}$ tend vers 0; de plus, au second membre de l'égalité (129), le second terme tend vers l'intégrale

$$\int (q_x\,\delta x + q_y\,\delta y + q_z\,\delta z)\,d\varpi,$$

étendue au volume entier occupé par le fluide; à ce même second membre le troisième terme ne varie pas avec h; il nous reste donc à chercher la forme limite du terme

$$(130)\qquad \int_\Sigma (\pi_x\,\delta x + \pi_y\,\delta y + \pi_z\,\delta z)\,d\Sigma.$$

Cette intégrale se partage en deux autres intégrales analogues, l'une relative à la surface Σ_1, l'autre relative à la surface Σ_2.

Chaque élément $d\Sigma_1$ de la surface Σ_1 a pour limite un élément $d\sigma$ de la surface σ; les quantités $\cos(n_b, x)$, $\cos(n_b, y)$, $\cos(n_b, z)$ relatives au premier ont pour limites respectives les quantités α, β, γ relatives au second; les quantités ν_x, ν_y, ν_z, τ_x, τ_y, τ_z ont pour limites respectives ν_{x1}, ν_{y1}, ν_{z1}, τ_{x1}, τ_{y1}, τ_{z1}. Si donc on pose

$$(131)\qquad \begin{cases} \pi_{x1} = \nu_{x1}\,\alpha + \tau_{z1}\,\beta + \tau_{y1}\,\gamma, \\ \pi_{y1} = \tau_{z1}\,\alpha + \nu_{y1}\,\beta + \tau_{x1}\,\gamma, \\ \pi_{z1} = \tau_{y1}\,\alpha + \tau_{x1}\,\beta + \nu_{z1}\,\gamma, \end{cases}$$

la partie de l'intégrale (130) qui se rapporte à la surface Σ_1 aura pour limite

$$-\int_\sigma (\pi_{x1}\,\delta x + \pi_{y1}\,\delta y + \pi_{z1}\,\delta z)\,d\sigma.$$

Si l'on pose de même

$$(131\ bis)\qquad \begin{cases} \pi_{x2} = \nu_{x2}\alpha + \tau_{z2}\beta + \tau_{y2}\gamma, \\ \pi_{y2} = \tau_{z2}\alpha + \nu_{y2}\beta + \tau_{x2}\gamma, \\ \pi_{z2} = \tau_{y2}\alpha + \tau_{x2}\beta + \nu_{z2}\gamma, \end{cases}$$

la partie de l'intégrale (130) qui provient de la surface Σ_2 aura pour limite

$$\int_\sigma (\pi_{x2}\,\delta x + \pi_{y2}\,\delta y + \pi_{z2}\,\delta z)\,d\sigma.$$

On pourra donc écrire, en observant que les quantités δx, δy, δz doivent être continues même au travers de la surface σ,

$$(132)\qquad \begin{aligned} d\mathfrak{T}_v = & \int (q_x\,\delta x + q_y\,\delta y + q_z\,\delta z)\,d\varpi \\ & + \int_S (p_x\,\delta x + p_y\,\delta y + p_z\,\delta z)\,dS \\ & + \int_\sigma [(\pi_{x2} - \pi_{x1})\,\delta x + (\pi_{y2} - \pi_{y1})\,\delta y + (\pi_{z2} - \pi_{z1})\,\delta z]\,\delta\sigma. \end{aligned}$$

Telle est l'égalité que l'on doit substituer à l'égalité (47) de la première Partie.

C'est cette expression (132) de $d\mathfrak{T}_v$ que nous devons introduire dans l'équation fondamentale (2) de la première Partie, en sorte que l'on devra avoir, en toute modification virtuelle,

$$(133)\qquad \begin{aligned} d\mathfrak{T}_e + d\mathfrak{T}_j - \delta_T\mathcal{F} & + \int (q_x\,\delta x + q_y\,\delta y + q_z\,\delta z)\,d\varpi \\ & + \int_S (p_x\,\delta x + p_y\,\delta y + p_z\,\delta z)\,dS \\ & + \int_\sigma [(\pi_{x2} - \pi_{x1})\,\delta x + (\pi_{y2} - \pi_{y1})\,\delta y + (\pi_{z2} - \pi_{z1})\,\delta z]\,d\sigma = 0. \end{aligned}$$

Nous pouvons appliquer tout d'abord cette égalité à une modification virtuelle pour laquelle on ait, en tout point de la surface σ,

$$\delta x = 0, \qquad \delta y = 0, \qquad \delta z = 0.$$

Nous serons alors conduits à la proposition suivante :

Il existe une grandeur finie Π, continue dans tout le fluide, sauf peut-être en la surface σ, telle que l'on ait :

1° En tous les points de la surface S qui limite le fluide, les égalités [Ire Partie, égalités (76)]

$$(134)\qquad \begin{cases} \Pi\cos(n_i, x) = \mathrm{P}_x + p_x, \\ \Pi\cos(n_i, y) = \mathrm{P}_y + p_y, \\ \Pi\cos(n_i, z) = \mathrm{P}_z + p_z; \end{cases}$$

2° En tout point de la masse fluide hors la surface σ, les égalités [Ire Partie, égalités (74) et (75)]

$$(135)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\Pi}{\partial x} - \rho(\mathrm{X}_i + \mathrm{X}_e - \gamma_x) - q_x = 0, \\ \dfrac{\partial\Pi}{\partial y} - \rho(\mathrm{X}_i + \mathrm{X}_e - \gamma_y) - q_y = 0, \\ \dfrac{\partial\Pi}{\partial z} - \rho(\mathrm{X}_i + \mathrm{X}_e - \gamma_z) - q_z = 0 \end{cases}$$

et, si le fluide est compressible, l'égalité

$$(136)\qquad \Pi + \rho^2(\mathrm{A}_i + \mathrm{A}_e) - \rho^2\frac{\partial\zeta}{\partial\rho} = 0.$$

Donnons maintenant à la masse fluide un déplacement virtuel quelconque. Au moyen des égalités (134), (135), (136), et par un calcul très semblable à celui qui occupe le début du Chapitre I, § 8, nous trouverons que l'on a

$$\begin{aligned} d\mathfrak{C}_e + d\mathfrak{C}_j - \delta_{\mathrm{T}}\mathfrak{F} + \int (q_x\,\delta x + q_y\,\delta y + q_z\,\delta z)\,d\varpi \\ + \int_{\mathrm{S}} (p_x\,\delta x + p_y\,\delta y + p_z\,\delta z)\,d\mathrm{S} \\ = \int_\sigma (\Pi_2 - \Pi_1)(\alpha\,\delta x + \beta\,\delta y + \gamma\,\delta z)\,d\sigma. \end{aligned}$$

Si l'on conserve alors à $\mathfrak{P}_{x1}$, $\mathfrak{P}_{y1}$, $\mathfrak{P}_{z1}$, $\mathfrak{P}_{x2}$, $\mathfrak{P}_{y2}$, $\mathfrak{P}_{z2}$ le sens que donnent les égalités (35) et (35 *bis*), l'égalité (133) devient

$$\int_\sigma [(\mathfrak{P}_{x2} - \mathfrak{P}_{x1})\,\delta x + (\mathfrak{P}_{y2} - \mathfrak{P}_{y1})\,\delta y + (\mathfrak{P}_{z2} - \mathfrak{P}_{z1})\,\delta z]\,d\sigma = 0.$$

Cette égalité doit avoir lieu quelle que soit la modification virtuelle imposée au fluide, par conséquent quelle que soit, le long de la surface σ, la loi de variation des quantités δx, δy, δz; la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est la suivante :

On a, en tout point de l'onde σ, les trois égalités

$$
(137) \qquad \left\{
\begin{aligned}
&\mathfrak{P}_{x2} - \mathfrak{P}_{x1} = 0,\\
&\mathfrak{P}_{y2} - \mathfrak{P}_{y1} = 0,\\
&\mathfrak{P}_{z2} - \mathfrak{P}_{z1} = 0,
\end{aligned}
\right.
$$

qui peuvent s'*écrire plus explicitement,* en vertu des égalités (35) et (35 *bis*),

$$
(138) \qquad \left\{
\begin{aligned}
&(\nu_{x2} - \nu_{x1})\alpha + (\tau_{z2} - \tau_{z1})\beta + (\tau_{y2} - \tau_{y1})\gamma + (\Pi_2 - \Pi_1)\alpha = 0,\\
&(\tau_{z2} - \tau_{z1})\alpha + (\nu_{y2} - \nu_{y1})\beta + (\tau_{x2} - \tau_{x1})\gamma + (\Pi_2 - \Pi_1)\beta = 0,\\
&(\tau_{y2} - \tau_{y1})\alpha + (\tau_{x2} - \tau_{x1})\beta + (\nu_{z2} - \tau_{z1})\gamma + (\Pi_2 - \Pi_1)\gamma = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Les quantités ν_x, ν_y, ν_z, τ_x, τ_y, τ_z sont supposées données par les égalités (43).

Or, selon ce que nous avons vu au Chapitre II, § 5, il doit exister, en chaque point de la surface σ, un vecteur (l_0, m_0, n_0) tel que l'on ait

$$
(139) \qquad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial(u_2 - u_1)}{\partial x} = \alpha l_0, &\quad &\frac{\partial(u_2 - u_1)}{\partial y} = \beta l_0, &\quad &\frac{\partial(u_2 - u_1)}{\partial z} = \gamma l_0,\\
&\frac{\partial(v_2 - v_1)}{\partial x} = \alpha m_0, & &\frac{\partial(v_2 - v_1)}{\partial y} = \beta m_0, & &\frac{\partial(v_2 - v_1)}{\partial z} = \gamma m_0,\\
&\frac{\partial(w_2 - w_1)}{\partial x} = \alpha n_0, & &\frac{\partial(w_2 - w_1)}{\partial y} = \beta n_0, & &\frac{\partial(w_2 - w_1)}{\partial z} = \gamma n_0.
\end{aligned}
\right.
$$

Ces égalités donnent

$$
(140) \qquad \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial z} - \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\partial w_1}{\partial z} = \alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0,
$$

$$
(141) \qquad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial v_2}{\partial z} + \frac{\partial w_2}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial w_1}{\partial y} = \gamma m_0 + \beta n_0,\\
&\frac{\partial w_2}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial z} - \frac{\partial w_1}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial z} = \alpha n_0 + \gamma l_0,\\
&\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial x} = \beta l_0 + \alpha m_0.
\end{aligned}
\right.
$$

En vertu de ces égalités (139), (140), (141), les égalités (43) donnent

$$
(142) \qquad \left\{
\begin{aligned}
&\nu_{x2} - \nu_{x1} = -\lambda(\rho, \mathrm{T})(\alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0) - 2\mu(\rho, \mathrm{T})\alpha l_0,\\
&\nu_{y2} - \nu_{y1} = -\lambda(\rho, \mathrm{T})(\alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0) - 2\mu(\rho, \mathrm{T})\beta m_0,\\
&\nu_{z2} - \nu_{z1} = -\lambda(\rho, \mathrm{T})(\alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0) - 2\mu(\rho, \mathrm{T})\gamma n_0,\\
&\tau_{x2} - \tau_{x1} = -\mu(\rho, \mathrm{T})(\gamma m_0 + \beta n_0),\\
&\tau_{y2} - \tau_{y1} = -\mu(\rho, \mathrm{T})(\alpha n_0 + \gamma l_0),\\
&\tau_{z2} - \tau_{z1} = -\mu(\rho, \mathrm{T})(\beta l_0 + \alpha m_0).
\end{aligned}
\right.
$$

En vertu de ces égalités (142), les égalités (138) deviennent

$$(143)\quad \begin{cases} \alpha[\Pi_2 - \Pi_1 - (\lambda + 2\mu)(\alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0)] - \mu[\beta(\beta l_0 - \alpha m_0) - \gamma(\alpha n_0 - \gamma l_0)] = 0, \\ \beta[\Pi_2 - \Pi_1 - (\lambda + 2\mu)(\alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0)] - \mu[\gamma(\gamma m_0 - \beta n_0) - \alpha(\beta l_0 - \alpha m_0)] = 0, \\ \gamma[\Pi_2 - \Pi_1 - (\lambda + 2\mu)(\alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0)] - \mu[\alpha(\alpha n_0 - \gamma l_0) - \beta(\gamma m_0 - \beta n_0)] = 0. \end{cases}$$

Ajoutons ces égalités membre à membre après les avoir multipliées respectivement par α, β, γ; nous trouvons

$$(144)\qquad \Pi_2 - \Pi_1 - [\lambda(\rho, T) + 2\mu(\rho, T)](\alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0) = 0.$$

Pour tirer les conséquences de cette égalité, nous distinguerons deux cas, selon que le fluide est ou non compressible.

Supposons d'abord que le fluide soit incompressible. Dans ce cas, l'on a

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial w_2}{\partial z} = 0$$

et, par conséquent, en vertu de l'égalité (140),

$$(145)\qquad \alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0 = 0.$$

Cette égalité (145), jointe à l'égalité (144), donne

$$(146)\qquad \Pi_2 = \Pi_1.$$

Il n'est donc pas possible, en un fluide incompressible, d'observer une surface au passage de laquelle les composantes de la vitesse et la température varieraient d'une manière continue, tandis que la pression varierait d'une manière discontinue.

Par anticipation, nous avions énoncé ce théorème au Chapitre I, § 11.

Moyennant l'égalité (144), les égalités (143) peuvent s'écrire :

$$\mu(\rho, T)[l_0 - \alpha(\alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0)] = 0,$$
$$\mu(\rho, T)[m_0 - \beta(\alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0)] = 0,$$
$$\mu(\rho, T)[n_0 - \gamma(\alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0)] = 0$$

ou bien, en observant que l'on a [I^{re} Partie, condition (62 *bis*)],

$$\mu(\rho, T) > 0$$

et en tenant compte de l'égalité (145),

$$(147)\qquad l_0 = 0, \qquad m_0 = 0, \qquad n_0 = 0.$$

Les égalités (139) deviennent alors

$$(148)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{\partial u_1}{\partial x} = \dfrac{\partial u_2}{\partial x}, & \dfrac{\partial u_1}{\partial y} = \dfrac{\partial u_2}{\partial y}, & \dfrac{\partial u_1}{\partial z} = \dfrac{\partial u_2}{\partial z}, \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial x} = \dfrac{\partial v_2}{\partial x}, & \dfrac{\partial v_1}{\partial y} = \dfrac{\partial v_2}{\partial y}, & \dfrac{\partial v_1}{\partial z} = \dfrac{\partial v_2}{\partial z}, \\ \dfrac{\partial w_1}{\partial x} = \dfrac{\partial w_2}{\partial x}, & \dfrac{\partial w_1}{\partial y} = \dfrac{\partial w_2}{\partial y}, & \dfrac{\partial w_1}{\partial z} = \dfrac{\partial w_2}{\partial z}. \end{array}\right.$$

Supposons maintenant que l'onde σ soit *persistante*. Selon ce que nous avons vu au Chapitre I, § 5, nous aurons

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{\partial u_1}{\partial t} + \mathcal{M} l_0 &= 0, \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} - \frac{\partial v_1}{\partial t} + \mathcal{M} m_0 &= 0, \\ \frac{\partial w_2}{\partial t} - \frac{\partial w_1}{\partial t} + \mathcal{M} n_0 &= 0. \end{aligned}$$

Moyennant les égalités (147), ces égalités deviennent

$$(149)\qquad \frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial u_2}{\partial t}, \qquad \frac{\partial v_1}{\partial t} = \frac{\partial v_2}{\partial t}, \qquad \frac{\partial w_1}{\partial t} = \frac{\partial w_2}{\partial t}.$$

Voyons maintenant ce que donne l'égalité (144) lorsque le fluide est supposé compressible.

Dans ce cas, nous devons écrire, de part et d'autre de la surface σ,

$$(136)\qquad \Pi + \rho^2(A_i + A_e) - \rho^2 \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho} = 0,$$

ρ et T variant d'une manière continue lorsqu'on traverse la surface σ; il en est de même, d'après ce que nous avons vu (Ire Partie, Chap. I, § 4), de

$$\rho^2(A_i + A_e) - \rho^2 \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho}$$

et, partant, de Π. On a donc

$$(146)\qquad \Pi_1 = \Pi_2.$$

L'égalité (144) devient alors

$$[\lambda(\rho, T) + 2\mu(\rho, T)](\alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0) = 0.$$

Mais on a [I[re] Partie, condition (65)]

$$\lambda(\rho, T) + 2\mu(\rho, T) > 0.$$

L'égalité précédente devient donc

$$(145) \qquad \alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0 = 0.$$

Les égalités (148) et (149) s'établissent alors comme dans le cas précédent; l'onde considérée ne peut persister que si elle est, par rapport aux composantes de la vitesse, d'ordre supérieur au premier.

Dans le cas où le fluide est compressible, la densité variant d'une manière continue sur la surface σ, il doit exister une grandeur R_0 telle que l'on ait, en tout point de la surface σ,

$$(150) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial(\rho_2 - \rho_1)}{\partial x} = \alpha R_0, \qquad \dfrac{\partial(\rho_2 - \rho_1)}{\partial y} = \beta R_0, \qquad \dfrac{\partial(\rho_2 - \rho_1)}{\partial z} = \gamma R_0, \\ \dfrac{\partial(\rho_2 - \rho_1)}{\partial t} + \mathfrak{N} R_0 = 0. \end{cases}$$

En vertu des égalités (148) et (150), l'équation de continuité

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + u\frac{\partial\rho}{\partial x} + v\frac{\partial\rho}{\partial y} + w\frac{\partial\rho}{\partial z} + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0$$

donne, en tout point de la surface σ,

$$(151) \qquad (\alpha u + \beta v + \gamma w - \mathfrak{N}) R_0 = 0.$$

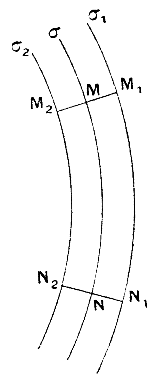
La température étant également continue sur la surface σ, il existe une grandeur Θ_0 telle que, sur cette surface,

$$(152) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial(T_2 - T_1)}{\partial x} = \alpha \Theta_0, \qquad \dfrac{\partial(T_2 - T_1)}{\partial y} = \beta \Theta_0, \qquad \dfrac{\partial(T_2 - T_1)}{\partial z} = \gamma \Theta_0, \\ \dfrac{\partial(T_2 - T_1)}{\partial t} + \mathfrak{N} \Theta_0 = 0. \end{cases}$$

Supposons, d'abord, le *fluide bon conducteur*.

De part et d'autre de la surface σ, traçons (*fig.* 14) deux surfaces σ_1, σ_2, parallèles à σ et situées à une distance h de σ. Sur la surface σ prenons une aire $MN = A$; par le contour de cette aire, élevons des normales à la surface σ; ces normales découpent sur la surface σ_1 une aire $M_1 N_1$ et sur la surface σ_2 une aire $M_2 N_2$. Pendant le temps dt, le fluide qui se trouve à l'instant t dans le volume $M_1 N_1 M_2 N_2$ (ou a) dégage une quantité de chaleur $\lambda\, dt$, qui s'obtiendrait en faisant la somme, pour tous les éléments de ce volume, de la quantité dQ donnée par l'égalité (90).

Fig. 14.



D'autre part, en désignant par k le coefficient de conductibilité calorifique du fluide, cette quantité de chaleur est donnée par l'expression

$$-dt\int k\frac{\partial T}{\partial n_a}dS,$$

dS étant un élément de la surface $M_1N_1M_2N_2$ qui entoure le volume a et n_a la normale de l'élément dS vers l'intérieur du volume a. Nous avons donc

$$\lambda = -\int k\frac{\partial T}{\partial n_a}dS. \tag{153}$$

Cette égalité est générale.

Faisons maintenant tendre h vers o et cherchons la forme limite de l'égalité (153).

L'égalité (90) de la première Partie permet d'établir immédiatement que λ est de l'ordre du volume a et tend vers o avec h.

L'intégrale qui figure au second membre se compose de trois parties :

Une première partie, relative à l'aire latérale $M_1N_1M_2N_2$, tend vers o avec h.

Une seconde partie, relative à l'aire M_1N_1, a pour limite

$$-\int_A k\left(\frac{\partial T_1}{\partial x}\alpha + \frac{\partial T_1}{\partial y}\beta + \frac{\partial T_1}{\partial z}\gamma\right)d\sigma.$$

Une troisième partie, relative à l'aire M_2N_2, a pour limite

$$\int_A k\left(\frac{\partial T_2}{\partial x}\alpha + \frac{\partial T_2}{\partial y}\beta + \frac{\partial T_2}{\partial z}\gamma\right)d\sigma.$$

Si nous tenons compte des égalités (152), nous voyons que l'intégrale $\int k \frac{\partial T}{\partial n_a} dS$ a pour limite $\int_A k\Theta_0 d\sigma$ et que la forme limite de l'égalité (153) est

$$\int_A k\Theta_0 \, d\sigma = 0.$$

L'aire A étant une aire quelconque prise sur la surface σ, il revient au même de dire que l'on a, en tous les points de la surface σ,

$$\Theta_0 = 0. \tag{154}$$

Supposons maintenant que *le fluide soit mauvais conducteur*. La quantité de chaleur dQ dégagée dans le temps dt par chaque élément $d\varpi$ du fluide est égale à 0. Selon l'égalité (90) de la première Partie, cette condition s'exprime par l'égalité

$$\begin{aligned}
&T\rho \frac{\partial^2 \zeta(\rho, T)}{\partial T^2}\left(\frac{\partial T}{\partial x}u + \frac{\partial T}{\partial y}v + \frac{\partial T}{\partial z}w + \frac{\partial T}{\partial t}\right)\\
&- T\rho^2 \frac{\partial^2 \zeta(\rho, T)}{\partial \rho\, \partial T}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\\
&+ \lambda(\rho, T)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\\
&+ 2\mu(\rho, T)\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right.\\
&\qquad\qquad \left. + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right] = 0.
\end{aligned}$$

En vertu des égalités (148) et (152), cette quantité se réduit à

$$(\alpha u + \beta v + \gamma w - \mathfrak{N})\,\Theta_0 = 0. \tag{155}$$

La démonstration des égalités (154) et (155) est évidemment valable pour tous les fluides, compressibles ou non, visqueux ou non; l'égalité (154) suppose seulement que l'onde soit au moins du *premier* ordre par rapport à u, v, w et ρ.

En réunissant les résultats obtenus, nous allons être en mesure de répondre à cette question :

Au sein d'un fluide visqueux en mouvement, peut-on observer une surface qui soit onde persistante du premier ordre pour l'une au moins des six quantités u, v, w, ρ, Π, T et onde d'ordre égal ou supérieur à 1 pour les cinq autres?

PREMIÈRE SECTION. — *Fluides incompressibles bons conducteurs.*

Les égalités (148) et (149) montrent que la surface σ est d'ordre supérieur au premier pour les composantes u, v, w de la vitesse; les égalités (152) et (154) montrent qu'il en est de même pour la température. Si la surface σ était onde du premier ordre pour l'un des éléments du mouvement, ce ne pourrait être que pour la pression Π. Mais nous démontrerons au paragraphe suivant la proposition que voici : Si, en un fluide incompressible, une surface σ est onde au moins du second ordre pour u, v, w, T, elle est au moins du second ordre pour la pression Π. Admettant d'avance cette proposition, nous pouvons énoncer ce théorème :

Au sein d'un fluide visqueux, incompressible, bon conducteur, aucune surface ne peut être onde persistante du premier ordre pour l'un au moins des éléments du mouvement et d'ordre égal ou supérieur à 1 pour les autres.

DEUXIÈME SECTION. — *Autres fluides.*

PREMIER CAS. — *On n'a pas*

$$\mathfrak{N} = \alpha u + \beta v + \gamma w. \tag{156}$$

Dans ce cas, si le fluide est compressible, on a, en vertu de l'égalité (151),

$$R_0 = 0. \tag{157}$$

Si le fluide est mauvais conducteur, on a, en vertu de l'égalité (155),

$$\Theta_0 = 0. \tag{154}$$

Dès lors, en vertu des égalités (148) et (149), la surface considérée est onde au moins du second ordre par rapport aux composantes u, v, w de la vitesse; en vertu des égalités (154) et (152) il en est de même par rapport à la température T; enfin, si le fluide est compressible, en vertu des égalités (157) et (150) il en est de même de la densité ρ.

Reste à savoir si l'onde considérée ne pourrait pas être du premier ordre par rapport à la pression Π.

Si le fluide considéré est incompressible, cela sera impossible en vertu de la proposition que nous avons déjà invoquée et qui sera démontrée au paragraphe suivant.

Dans le cas où le fluide est compressible et où les actions qu'il subit ne sont pas newtoniennes, la démonstration de cette proposition nécessite quelques remarques préliminaires.

Si, dans un certain domaine, la densité ρ admet, par rapport à x, y, z, t, des dérivées partielles jusqu'à l'ordre n inclusivement et si ces dérivées sont continues, il en est certainement de même, en général, de la fonction A_e; mais il n'est nullement certain qu'il en soit de même de la grandeur A_i; l'existence ou la non-existence de ces dérivées dépend évidemment de la manière dont la fonction $\psi(\rho, \rho', r)$, qui est infinie pour $r = 0$, se comporte pour les valeurs de r voisines de o. Aussi avons-nous été amenés (I^re Partie, Chap. I, § 4) à faire l'HYPOTHÈSE suivante :

La fonction $\psi(\rho, \rho', r)$ est d'une nature telle que la grandeur A_i admette par rapport à x, y, z, t des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre n dans tout domaine où la densité ρ admet des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre n.

Dans tous les cas où cette hypothèse est justifiée l'égalité

$$\Pi + \rho^2(A_i + A_e) - \rho^2 \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho} = 0 \tag{136}$$

nous montre que, *si, dans un certain domaine, en un fluide compressible, la densité ρ et la température T admettent des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre n, il en est de même de la pression Π.*

Dès lors, les égalités (150), (152), (154) et (157) nous montrent que la surface σ est, pour la pression Π, en un fluide compressible, une onde d'ordre supérieur au premier.

Nous pouvons désormais énoncer la proposition suivante :

En un fluide visqueux, il est impossible d'observer une onde qui soit du premier ordre pour certains éléments du mouvement et d'ordre au moins égal à 1 pour les autres, à moins que l'onde ne soit la surface de séparation de deux masses fluides qui restent les mêmes pendant toute la durée du mouvement.

DEUXIÈME CAS. — *On a*

$$\mathfrak{N} = \alpha u + \beta v + \gamma w. \tag{156}$$

Dans ce cas, si le fluide est compressible, l'égalité (151) est compatible avec l'hypothèse que R_0 est différent de o; si le fluide est mauvais conducteur, l'égalité (155) est compatible avec l'hypothèse que Θ_0 est différent de o; nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

En un fluide visqueux, qui est ou mauvais conducteur, ou compressible, ou à la fois compressible et mauvais conducteur, on peut observer des ondes qui sont du premier ordre par rapport à certains éléments du mouvement et d'ordre supérieur au premier pour les autres. Les deux masses fluides que sépare une telle onde restent les mêmes pendant toute la durée du mouvement.

Une telle onde présente, pour les diverses espèces de fluides, les caractères suivants :

1° Fluides incompressibles et mauvais conducteurs. — *L'onde, du premier ordre pour* T *et* Π, *est d'ordre plus élevé pour* u, v, w.

2° Fluides compressibles et bons conducteurs. — *L'onde, du premier ordre pour* ρ *et* Π, *est d'ordre plus élevé pour* u, v, w *et* T.

3° Fluides compressibles et mauvais conducteurs. — *L'onde, du premier ordre pour* ρ, Π *et* T, *est d'ordre plus élevé pour* u, v, w.

§ 2. — Des ondes du second ordre par rapport a certains éléments du mouvement.

Supposons qu'à l'instant t, au sein d'un fluide visqueux, une surface σ soit onde au moins du second ordre pour les composantes u, v, w de la vitesse, pour la température T et, en outre, si le fluide est compressible, pour la densité ρ. Quant à la pression Π, nous supposerons seulement, au début, que, pour elle, l'onde est au moins du premier ordre. Nous serons amené ainsi à démontrer un théorème invoqué au paragraphe précédent.

La condition restrictive indiquée en la I^re Partie, au Chapitre I, § 3, est remplie dans l'hypothèse où nous nous plaçons. Nous pouvons donc faire usage des équations du mouvement des fluides visqueux sous la forme qui a été donnée en cet endroit par les égalités (74). Cette forme n'est autre que celle qui est donnée en la présente Partie par les égalités (135), avec les expressions suivantes de q_x, q_y, q_z [I^re Partie, égalités (58)] :

$$(158)\quad \left\{\begin{aligned}
q_x &= (\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x} + \mu\,\Delta u + \theta\frac{\partial\lambda}{\partial x}\\
&\quad + 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\mu}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial\mu}{\partial y} + \left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\frac{\partial\mu}{\partial z},\\
q_y &= (\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial y} + \mu\,\Delta v + \theta\frac{\partial\lambda}{\partial y}\\
&\quad + \left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial\mu}{\partial x} + 2\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial\mu}{\partial y} + \left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\frac{\partial\mu}{\partial z},\\
q_z &= (\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial z} + \mu\,\Delta w + \theta\frac{\partial\lambda}{\partial z}\\
&\quad + \left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\frac{\partial\mu}{\partial x} + \left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)\frac{\partial\mu}{\partial y} + 2\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial\mu}{\partial z},
\end{aligned}\right.$$

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

L'onde σ étant supposée au moins du deuxième ordre pour u, v, w, il existe en chaque point de cette surface un vecteur l_0, m_0, n_0 tel que l'on ait

$$(159)\quad \left\{\begin{array}{lll} \dfrac{\partial^2(u_2-u_1)}{\partial x^2}=\alpha^2 l_0, & \dfrac{\partial^2(u_2-u_1)}{\partial y^2}=\beta^2 l_0, & \dfrac{\partial^2(u_2-u_1)}{\partial z^2}=\gamma^2 l_0, \\ \dfrac{\partial^2(u_2-u_1)}{\partial y\,\partial z}=\beta\gamma l_0, & \dfrac{\partial^2(u_2-u_1)}{\partial z\,\partial x}=\gamma\alpha l_0, & \dfrac{\partial^2(u_2-u_1)}{\partial x\,\partial y}=\alpha\beta l_0, \\ \dfrac{\partial^2(v_2-v_1)}{\partial x^2}=\alpha^2 m_0, & \dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots, \\ \dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots \end{array}\right.$$

ρ et T étant continus, ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre, sur la surface σ, il en est de même de $\lambda(\rho, T)$ et de $\mu(\rho, T)$, de sorte que les égalités (158) permettent d'écrire

$$(160)\quad \left\{\begin{array}{l} q_{x2}-q_{x1}=[\lambda(\rho,T)+\mu(\rho,T)](\alpha l_0+\beta m_0+\gamma n_0)\alpha+\mu(\rho,T)l_0, \\ q_{y2}-q_{y1}=[\lambda(\rho,T)+\mu(\rho,T)](\alpha l_0+\beta m_0+\gamma n_0)\beta+\mu(\rho,T)m_0, \\ q_{z2}-q_{z1}=[\lambda(\rho,T)+\mu(\rho,T)](\alpha l_0+\beta m_0+\gamma n_0)\gamma+\mu(\rho,T)n_0. \end{array}\right.$$

Les hypothèses faites sur u, v, w nous assurent que γ_x, γ_y, γ_z varient d'une manière continue au travers de la surface σ; les hypothèses faites sur ρ, jointes à ce qui a été supposé en la I^re Partie, Chapitre I, § 4, nous assurent qu'il en est de même pour X_i, X_e, Y_i, Y_e, Z_i, Z_e; enfin, la surface σ étant onde au moins du premier ordre pour la pression Π, il existe assurément un vecteur P, tel que

$$(161)\quad \frac{\partial(\Pi_2-\Pi_1)}{\partial x}=\alpha P,\qquad \frac{\partial(\Pi_2-\Pi_1)}{\partial y}=\beta P,\qquad \frac{\partial(\Pi_2-\Pi_1)}{\partial z}=\gamma P.$$

Dès lors, les équations (135) permettent d'écrire, en chaque point de la surface σ,

$$(162)\quad \left\{\begin{array}{l} \{P-[\lambda(\rho,T)+\mu(\rho,T)](\alpha l_0+\beta m_0+\gamma n_0)\}\alpha-\mu(\rho,T)l_0=0, \\ \{P-[\lambda(\rho,T)+\mu(\rho,T)](\alpha l_0+\beta m_0+\gamma n_0)\}\beta-\mu(\rho,T)m_0=0, \\ \{P-[\lambda(\rho,T)+\mu(\rho,T)](\alpha l_0+\beta m_0+\gamma n_0)\}\gamma-\mu(\rho,T)n_0=0. \end{array}\right.$$

Ajoutons membre à membre ces égalités après les avoir multipliées respectivement par α, β, γ et nous trouvons

$$(163)\quad P-[\lambda(\rho,T)+2\mu(\rho,T)](\alpha l_0+\beta m_0+\gamma n_0)=0.$$

Supposons, tout d'abord, que le fluide soit *incompressible*. Nous aurons identiquement

$$\theta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0,$$

partant,

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial z} = 0,$$

ce qui permettra d'écrire, en tout point de la surface σ,

$$\frac{\partial(\theta_2 - \theta_1)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial(\theta_2 - \theta_1)}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial(\theta_2 - \theta_1)}{\partial z} = 0$$

ou bien, en vertu des égalités (159),

$$\begin{aligned}(\alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0)\,\alpha &= 0,\\ (\alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0)\,\beta &= 0,\\ (\alpha l_0 + \beta m_6 + \gamma n_0)\,\gamma &= 0,\end{aligned}$$

égalités qui entraînent celle-ci :

$$\alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0 = 0. \tag{164}$$

L'égalité (163) donne alors

$$\mathrm{P} = 0 \tag{165}$$

et partant, selon les égalités (161),

$$\frac{\partial(\Pi_2 - \Pi_1)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial(\Pi_2 - \Pi_1)}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial(\Pi_2 - \Pi_1)}{\partial z} = 0. \tag{166}$$

D'ailleurs, si l'onde est persistante, on doit avoir, selon l'égalité (98),

$$\frac{\partial(\Pi_2 - \Pi_1)}{\partial t} + \mathfrak{M}\mathrm{P} = 0,$$

en sorte que l'égalité (165) donne

$$\frac{\partial(\Pi_2 - \Pi_1)}{\partial t} = 0. \tag{167}$$

Les égalités (166) et (167) justifient le théorème suivant, déjà invoqué au précédent paragraphe :

Au sein d'un fluide visqueux incompressible, une onde persistante, qui est au moins du second ordre pour les composantes u, v, w de la vitesse et pour la température T, *est aussi au moins du second ordre pour la pression* Π.

Supposons maintenant le fluide *compressible*. D'après ce qui a été dit au paragraphe **1**, la surface σ, onde du second ordre pour la densité ρ et la température T, est aussi onde du second ordre pour la pression Π; on a donc encore

$$P = 0, \tag{165}$$

en sorte que l'égalité (163) devient

$$[\lambda(\rho, T) + 2\mu(\rho, T)](\alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0) = 0.$$

Mais on a [I^re Partie, condition (65)]

$$\lambda(\rho, T) + 2\mu(\rho, T) > 0.$$

L'égalité précédente devient donc

$$\alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0 = 0. \tag{164}$$

Les égalités (164) et (165) étant ainsi établies pour tous les fluides visqueux, reportons-les dans les égalités (162); nous trouvons

$$\mu(\rho, T) l_0 = 0, \qquad \mu(\rho, T) m_0 = 0, \qquad \mu(\rho, T) n_0 = 0,$$

et comme on a [I^re Partie, condition (62 *bis*)]

$$\mu(\rho, T) > 0,$$

les égalités précédentes deviennent

$$l_0 = 0, \qquad m_0 = 0, \qquad n_0 = 0. \tag{168}$$

D'autre part, d'après ce que nous avons vu au Chapitre II, § 5, il existe un vecteur l_1, m_1, n_1 tel que l'on ait

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial^2(u_2 - u_1)}{\partial x\,\partial t} = \alpha l_1, &&\frac{\partial^2(u_2 - u_1)}{\partial y\,\partial t} = \beta l_1, &&\frac{\partial^2(u_2 - u_1)}{\partial z\,\partial t} = \gamma l_1,\\
&\frac{\partial^2(v_2 - v_1)}{\partial x\,\partial t} = \alpha m_1, &&\frac{\partial^2(v_2 - v_1)}{\partial y\,\partial t} = \beta m_1, &&\frac{\partial^2(v_2 - v_1)}{\partial z\,\partial t} = \gamma m_1,\\
&\frac{\partial^2(w_2 - w_1)}{\partial x\,\partial t} = \alpha n_1, &&\frac{\partial^2(w_2 - w_1)}{\partial y\,\partial t} = \beta n_1, &&\frac{\partial^2(w_2 - w_1)}{\partial z\,\partial t} = \gamma n_1,
\end{aligned}\right. \tag{169}$$

et si l'onde considérée est persistante, on a

$$\left\{\begin{aligned}
&l_1 + \mathfrak{N} l_0 = 0, &&m_1 + \mathfrak{N} m_0 = 0, &&n_1 + \mathfrak{N} n_0 = 0,\\
&\frac{\partial^2(u_2 - u_1)}{\partial t^2} + \mathfrak{N} l_1 = 0, &&\frac{\partial^2(v_2 - v_1)}{\partial t^2} + \mathfrak{N} m_1 = 0, &&\frac{\partial^2(w_2 - w_1)}{\partial t^2} + \mathfrak{N} n_1 = 0.
\end{aligned}\right. \tag{170}$$

Les égalités (159), (168), (169), (170) nous enseignent alors que toutes les dérivées partielles du second ordre des différences $(u_2 - u_1)$, $(v_2 - v_1)$, $(w_2 - w_1)$ sont nulles sur la surface σ. Si l'onde considérée est persistante, elle est certainement d'ordre supérieur au second pour les composantes de la vitesse.

Si le fluide est compressible, il existe deux grandeurs R_0, R_1, telles que l'on ait, en tout point de la surface σ,

$$(171)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2(\rho_2 - \rho_1)}{\partial x^2} = \alpha^2 R_0, & \dfrac{\partial^2(\rho_2 - \rho_1)}{\partial y^2} = \beta^2 R_0, & \dfrac{\partial^2(\rho_2 - \rho_1)}{\partial z^2} = \gamma^2 R_0, \\ \dfrac{\partial^2(\rho_2 - \rho_1)}{\partial y\, \partial z} = \beta\gamma R_0, & \dfrac{\partial^2(\rho_2 - \rho_1)}{\partial z\, \partial x} = \gamma\alpha R_0, & \dfrac{\partial^2(\rho_2 - \rho_1)}{\partial x\, \partial y} = \alpha\beta R_0, \end{cases}$$

$$(172)\quad \frac{\partial^2(\rho_2 - \rho_1)}{\partial x\, \partial t} = \alpha R_1, \qquad \frac{\partial^2(\rho_2 - \rho_1)}{\partial y\, \partial t} = \beta R_1, \qquad \frac{\partial^2(\rho_2 - \rho_1)}{\partial z\, \partial t} = \gamma R_1.$$

En outre, si l'onde est persistante,

$$(173)\quad R_1 + \mathfrak{N} R_0 = 0, \qquad \frac{\partial^2(\rho_2 - \rho_1)}{\partial t^2} + \mathfrak{N} R_1 = 0.$$

L'équation de continuité nous enseigne que l'on a identiquement, en tout point,

$$(174)\quad K = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\rho u + \frac{\partial}{\partial y}\rho v + \frac{\partial}{\partial z}\rho w = 0,$$

partant

$$\frac{\partial K}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial K}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial K}{\partial z} = 0,$$

ce qui permet d'écrire, en tout point de la surface σ,

$$\frac{\partial(K_2 - K_1)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial(K_2 - K_1)}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial(K_2 - K_1)}{\partial z} = 0$$

ou bien, en vertu des égalités (171), (172), (173) et (174),

$$(\alpha u + \beta v + \gamma w - \mathfrak{N}) R_0 \alpha = 0,$$
$$(\alpha u + \beta v + \gamma w - \mathfrak{N}) R_0 \beta = 0,$$
$$(\alpha u + \beta v + \gamma w - \mathfrak{N}) R_0 \gamma = 0,$$

égalités qui donnent

$$(175)\quad (\alpha u + \beta v + \gamma w - \mathfrak{N}) R_0 = 0.$$

Il existe deux grandeurs Θ_0, Θ_1 telles que, sur la surface σ,

$$(176)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2(T_2-T_1)}{\partial x^2}=\alpha^2\Theta_0, && \frac{\partial^2(T_2-T_1)}{\partial y^2}=\beta^2\Theta_0, && \frac{\partial^2(T_2-T_1)}{\partial z^2}=\gamma^2\Theta_0,\\ &\frac{\partial^2(T_2-T_1)}{\partial y\,\partial z}=\beta\gamma\Theta_0, && \frac{\partial^2(T_2-T_1)}{\partial z\,\partial x}=\gamma\alpha\Theta_0, && \frac{\partial^2(T_2-T_1)}{\partial x\,\partial y}=\alpha\beta\Theta_0,\end{aligned}\right.$$

$$(177)\quad \frac{\partial^2(T_2-T_1)}{\partial x\,\partial t}=\alpha\ \Theta_1,\qquad \frac{\partial^2(T_2-T_1)}{\partial y\,\partial t}=\beta\ \Theta_1,\qquad \frac{\partial^2(T_2-T_1)}{\partial z\,\partial t}=\gamma\ \Theta_1.$$

En outre, si l'onde est persistante, on a

$$(178)\qquad \Theta_1+\mathfrak{N}\Theta_0=0,\qquad \frac{\partial^2(T_2-T_1)}{\partial t^2}+\mathfrak{N}\Theta_1=0.$$

Considérons la relation supplémentaire [Ire Partie, égalité (94)] et supposons d'abord le *fluide bon conducteur :*

$$k(\rho,T)>0.$$

Elle nous donnera, en tout point de la surface σ,

$$k(\rho,T)\,\Delta(T_2-T_1)=0$$

ou, selon les égalités (176),

$$k(\rho,T)\,\Theta_0=0,$$

ou enfin

$$(179)\qquad \Theta_0=0.$$

Supposons, au contraire, le *fluide mauvais conducteur :*

$$k(\rho,T)=0.$$

Nous aurons, en tout point,

$$\begin{aligned}(180)\quad J=\frac{T}{E}\rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial T^2}&\left(\frac{\partial T}{\partial x}u+\frac{\partial T}{\partial y}v+\frac{\partial T}{\partial z}w+\frac{\partial T}{\partial t}\right)\\ &-\frac{T}{E}\rho^2\frac{\partial^2\zeta}{\partial T\,\partial\rho}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\\ &+\frac{\lambda(\rho,T)}{E}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\\ &+\frac{2\mu(\rho,T)}{E}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right.\\ &\qquad\left.+\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]=0,\end{aligned}$$

partant

$$\frac{\partial J}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial J}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial J}{\partial z} = 0,$$

ce qui permet d'écrire, en tout point de la surface σ,

$$\frac{\partial(J_2 - J_1)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial(J_2 - J_1)}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial(J_2 - J_1)}{\partial z} = 0.$$

Si l'on observe que la surface σ, onde du second ordre pour ρ et T, est d'ordre supérieur au second pour u, v, w, on voit que ces égalités deviennent

$$\begin{aligned}
u\frac{\partial^2(T_2 - T_1)}{\partial x^2} + v\frac{\partial^2(T_2 - T_1)}{\partial x\,\partial y} + w\frac{\partial^2(T_2 - T_1)}{\partial x\,\partial z} + \frac{\partial^2(T_2 - T_1)}{\partial x\,\partial t} &= 0,\\
u\frac{\partial^2(T_2 - T_1)}{\partial y\,\partial x} + v\frac{\partial^2(T_2 - T_1)}{\partial y^2} + w\frac{\partial^2(T_2 - T_1)}{\partial y\,\partial z} + \frac{\partial^2(T_2 - T_1)}{\partial y\,\partial t} &= 0,\\
u\frac{\partial^2(T_2 - T_1)}{\partial z\,\partial x} + v\frac{\partial^2(T_2 - T_1)}{\partial z\,\partial y} + w\frac{\partial^2(T_2 - T_1)}{\partial z^2} + \frac{\partial^2(T_2 - T_1)}{\partial z\,\partial t} &= 0,
\end{aligned}$$

ou bien, en vertu des égalités (176), (177), (178),

$$\begin{aligned}
(\alpha u + \beta v + \gamma w - \mathfrak{N})\Theta_0\alpha &= 0,\\
(\alpha u + \beta v + \gamma w - \mathfrak{N})\Theta_0\beta &= 0,\\
(\alpha u + \beta v + \gamma w - \mathfrak{N})\Theta_0\gamma &= 0.
\end{aligned}$$

Ces égalités donnent

$$(181) \qquad (\alpha u + \beta v + \gamma w - \mathfrak{N})\Theta_0 = 0.$$

Discutons les diverses égalités obtenues.

Première Section. — *Fluides incompressibles et bons conducteurs.*

L'égalité (179), jointe aux égalités (176), (177), (178), nous enseigne que la surface σ est onde d'ordre supérieur au second pour la température T, comme elle l'est déjà pour les composantes u, v, w de la vitesse; si donc elle pouvait être du second ordre par rapport à quelque élément du mouvement, ce serait par rapport à la pression Π; mais, au paragraphe suivant, nous démontrerons qu'elle est, au moins, du troisième ordre par rapport à la pression Π; nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Au sein d'un fluide visqueux, incompressible et bon conducteur, on ne peut observer aucune onde qui soit du second ordre par rapport à certains éléments du mouvement et d'ordre au moins égal à 2 par rapport aux autres éléments.

DEUXIÈME SECTION. — *Autres fluides.*

Ici, nous devons distinguer deux cas.

PREMIER CAS. — *On n'a pas*

$$\mathcal{M} = \alpha u + \beta v + \gamma w. \tag{156}$$

Dans ce cas, l'égalité (181) donne l'égalité

$$\Theta_0 = 0, \tag{179}$$

même si le fluide est mauvais conducteur. Les égalités (176), (177), (178) montrent alors que la surface σ est, pour la température T, une onde d'ordre supérieur à 2.

Si le fluide est compressible, l'égalité (175) donne

$$R_0 = 0,$$

ce qui, moyennant les égalités (171), (172), (173), montre que la surface σ est une onde au moins du troisième ordre pour la densité ρ.

Il reste à examiner si l'onde ne peut pas être du second ordre par rapport à la pression Π. Que cela soit impossible pour un fluide incompressible, nous en sommes assurés par un théorème qui sera démontré au paragraphe suivant; si, au contraire, le fluide est compressible, nous savons, par ce qui a été dit au § 1, que la surface σ, onde au moins du troisième ordre pour la densité ρ et la température T, est, au moins, du troisième ordre pour la pression Π.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

En aucun fluide visqueux on ne peut observer une onde qui soit du second ordre par rapport à certains éléments du mouvement et d'ordre au moins égal à 2 pour les autres, à moins que les deux masses fluides séparées par cette onde ne demeurent les mêmes pendant toute la durée du mouvement.

SECOND CAS. — *On a*

$$\mathcal{M} = \alpha u + \beta v + \gamma w. \tag{156}$$

Dans ce cas, si le fluide est mauvais conducteur, l'égalité (181) peut être vérifiée, bien que Θ_0 diffère de 0; si le fluide est compressible, l'égalité (175) peut être vérifiée, bien que R_0 diffère de 0.

Nous pouvons donc énoncer les propositions suivantes :

Si un fluide visqueux est ou mauvais conducteur, ou compressible, ou à la fois mauvais conducteur et compressible, on peut y observer une onde du second *ordre par rapport à certains éléments du mouvement, d'ordre supérieur à 2 pour les autres éléments et qui, pendant toute la durée du mouvement, sépare les mêmes masses fluides.*

Pour les diverses catégories de fluides visqueux, cette onde présente les particularités suivantes :

Fluide visqueux, incompressible et mauvais conducteur. — *Du second ordre par rapport à la température* T *et à la pression* Π, *l'onde est au moins du troisième ordre par rapport aux composantes* u, v, w *de la vitesse.*

Fluide visqueux, compressible et bon conducteur. — *Du second ordre par rapport à la densité* ρ *et à la pression* Π, *l'onde est au moins du troisième ordre par rapport aux composantes* u, v, w *de la vitesse et à la température* T.

Fluide visqueux, compressible et mauvais conducteur. — *Du second ordre par rapport à la densité* ρ, *à la température* T *et à la pression* Π, *l'onde est au moins du troisième ordre par rapport aux composantes* u, v, w *de la vitesse.*

§ 3. — Des ondes du troisième ordre par rapport a certains éléments du mouvement.

Continuant notre analyse, nous allons supposer que la surface σ est au moins onde du troisième ordre relativement aux grandeurs

$$u, \quad v, \quad w, \quad \rho, \quad \mathrm{T}.$$

En ce qui concerne la pression Π, nous supposerons seulement qu'elle est au moins du second ordre.

Selon les lemmes de M. Hadamard, énoncés et démontrés au Chapitre précédent, les dérivées du troisième ordre $(u_2 - u_1)$, $(v_2 - v_1)$, $(w_2 - w_1)$ s'expriment toutes, sur la surface σ, au moyen de quatre vecteurs (l_0, m_0, n_0), (l_1, m_1, n_1), (l_2, m_2, n_2), (l_3, m_3, n_3). Si l'onde σ est persistante, on a

$$\begin{array}{lll} l_1 + \mathfrak{N} l_0 = 0, & l_2 + \mathfrak{N} l_1 = 0, & l_3 + \mathfrak{N} l_2 = 0, \\ m_1 + \mathfrak{N} m_0 = 0, & m_2 + \mathfrak{N} m_1 = 0, & m_3 + \mathfrak{N} m_2 = 0, \\ n_1 + \mathfrak{N} n_0 = 0, & n_2 + \mathfrak{N} n_1 = 0, & n_3 + \mathfrak{N} n_2 = 0. \end{array}$$

Il suffira de démontrer que

$$l_0 = 0, \qquad m_0 = 0, \qquad n_0 = 0 \tag{182}$$

pour prouver que toutes les dérivées partielles du troisième ordre de $(u_2 - u_1)$, $(v_2 - v_1)$, $(w_2 - w_1)$ sont nulles sur la surface σ, et que celle-ci est une onde au moins du quatrième ordre pour les composantes u, v, w de la vitesse.

Toutes les dérivées partielles du second ordre de la différence $(\Pi_2 - \Pi_1)$ s'expriment, sur la surface σ, au moyen de trois quantités P_0, P_1, P_2, liées par les relations

$$P_1 + \mathfrak{N} P_0 = 0, \qquad P_2 + \mathfrak{N} P_1 = 0.$$

Il suffira de prouver que l'on a

$$P_0 = 0 \tag{183}$$

pour démontrer que l'onde σ est au moins du troisième ordre par rapport à la pression Π.

Considérons les équations, vérifiées en tout point du fluide [égalités (135) et (158)],

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Pi}{\partial x} - \rho(X_i + X_e - \gamma_x) - (\lambda+\mu)\frac{\partial \theta}{\partial x} - \mu\,\Delta u - \theta\frac{\partial \lambda}{\partial x}&\\ - 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \mu}{\partial x} - \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial \mu}{\partial y} - \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\frac{\partial \mu}{\partial z} &= 0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots&\end{aligned}$$

En différentiant la première de ces égalités par rapport à x, la seconde par rapport à y et la troisième par rapport à z, nous obtenons trois nouvelles égalités, vérifiées en tout point du fluide, et qui sont

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} - (\lambda+\mu)\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \mu\frac{\partial}{\partial x}\Delta u + \ldots = 0,\\ &\frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} - (\lambda+\mu)\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} - \mu\frac{\partial}{\partial y}\Delta v + \ldots = 0,\\ &\frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} - (\lambda+\mu)\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \mu\frac{\partial}{\partial z}\Delta w + \ldots = 0,\end{aligned}\right. \tag{184}$$

les ... désignant des termes qui varient d'une manière continue lorsqu'on traverse la surface σ.

Ces égalités montrent de suite que l'on a, sur la surface σ,

$$\left\{\begin{aligned}&\{P_0 - [\lambda(\rho,T) + \mu(\rho,T)](\alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0)\}\alpha^2 - \mu(\rho,T)\alpha l_0 = 0,\\ &\{P_0 - [\lambda(\rho,T) + \mu(\rho,T)](\alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0)\}\beta^2 - \mu(\rho,T)\beta l_0 = 0,\\ &\{P_0 - [\lambda(\rho,T) + \mu(\rho,T)](\alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0)\}\gamma^2 - \mu(\rho,T)\gamma l_0 = 0.\end{aligned}\right. \tag{185}$$

En ajoutant ces égalités membre à membre, on trouve l'égalité

$$P_0 - [\lambda(\rho,T) + 2\mu(\rho,T)](\alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0) = 0. \tag{186}$$

Supposons d'abord que le fluide soit incompressible.

Nous avons, en tout point, $\theta = 0$, partant $\Delta\theta = 0$, ce qui donne, sur la surface σ,

$$\alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0 = 0. \tag{187}$$

L'égalité (186) devient alors

$$P_0 = 0. \tag{183}$$

D'où le théorème suivant, invoqué sans démonstration au paragraphe précédent :

Au sein d'un fluide incompressible, une onde qui est au moins du troisième ordre par rapport à u, v, w *et* T, *est aussi au moins du troisième ordre par rapport à* Π.

Si le fluide est compressible, nous savons, par ce qui a été dit au § 1, que la surface σ, onde au moins du troisième ordre par rapport à ρ et à T, est au moins du troisième ordre par rapport à Π; nous avons donc l'égalité (183). Mais, d'autre part, nous avons l'inégalité [I[re] Partie, inégalité (65)]

$$\lambda(\rho, T) + 2\mu(\rho, T) > 0.$$

Les égalités (183) et (186) nous donnent alors l'égalité (187).

Les égalités (183) et (187) étant vraies en toutes circonstances, les égalités (185) donnent

$$l_0 = 0, \qquad m_0 = 0, \qquad n_0 = 0, \tag{182}$$

car on a [I[re] Partie, inégalité (62 *bis*)]

$$\mu(\rho, T) > 0.$$

L'onde considérée est donc au moins du quatrième ordre par rapport aux composantes u, v, w de la vitesse.

Sur la surface σ, toutes les dérivées du troisième ordre de la différence $(\rho_2 - \rho_1)$ s'expriment au moyen de quatre grandeurs R_0, R_1, R_2, R_3, liées par les relations

$$R_1 + \mathfrak{N} R_0 = 0, \qquad R_2 + \mathfrak{N} R_1 = 0, \qquad R_3 + \mathfrak{N} R_2 = 0. \tag{188}$$

L'égalité $R_0 = 0$ enseigne que la surface σ est onde au moins du quatrième ordre pour la densité ρ.

Si le fluide est compressible, on a, en chaque point et à chaque instant,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\rho u + \frac{\partial}{\partial y}\rho v + \frac{\partial}{\partial z}\rho w = 0$$

et, par conséquent,

$$\Delta\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\rho u + \frac{\partial}{\partial y}\rho v + \frac{\partial}{\partial z}\rho w\right) = 0.$$

Cette égalité peut s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\rho + u\frac{\partial}{\partial x}\Delta\rho + v\frac{\partial}{\partial y}\Delta\rho + w\frac{\partial}{\partial z}\Delta\rho + \ldots = 0,$$

... désignant des termes qui varient d'une manière continue au travers de la surface σ.

On en conclut sans peine, en vertu des égalités (188), que l'on a, sur la surface σ,

$$(189) \qquad (\alpha u + \beta v + \gamma w - \mathfrak{N})\mathrm{R}_0 = 0.$$

Sur la surface σ, les dérivées du troisième ordre de la température T s'expriment au moyen de quatre quantités Θ_0, Θ_1, Θ_2, Θ_3, liées par les relations

$$(190) \qquad \Theta_1 + \mathfrak{N}\Theta_0 = 0, \qquad \Theta_2 + \mathfrak{N}\Theta_1 = 0, \qquad \Theta_3 + \mathfrak{N}\Theta_2 = 0.$$

Si l'on a

$$(191) \qquad \Theta_0 = 0,$$

l'onde considérée est au moins du quatrième ordre par rapport à la température T.

Supposons d'abord le fluide *bon conducteur*. En tout point et à tout instant sont vérifiées la relation supplémentaire [Ire Partie, égalité (94)] et aussi les égalités que l'on obtient en différentiant celle-ci par rapport à x, ou à y, ou à z. Ces dernières égalités peuvent s'écrire

$$k(\rho, \mathrm{T})\frac{\partial}{\partial x}\Delta\mathrm{T} + \ldots = 0,$$

$$k(\rho, \mathrm{T})\frac{\partial}{\partial y}\Delta\mathrm{T} + \ldots = 0,$$

$$k(\rho, \mathrm{T})\frac{\partial}{\partial z}\Delta\mathrm{T} + \ldots = 0,$$

les ... désignant des termes qui varient d'une manière continue au travers de la surface σ. On en conclut sans peine que l'on a, sur la surface σ,

$$\alpha\Theta_0 = 0, \qquad \beta\Theta_0 = 0, \qquad \gamma\Theta_0 = 0,$$

ce qui entraîne l'égalité (191).

Supposons maintenant le fluide *mauvais conducteur*. L'égalité (180) est vérifiée en tout point et à tout instant; il en est de même de l'égalité

$$\Delta\mathrm{J} = 0$$

qui peut s'écrire

$$\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{E}}\rho\frac{\partial^2\zeta}{\partial\mathrm{T}^2}\left(u\frac{\partial}{\partial x}\Delta\mathrm{T}+v\frac{\partial}{\partial y}\Delta\mathrm{T}+w\frac{\partial}{\partial z}\Delta\mathrm{T}+\frac{\partial}{\partial t}\Delta\mathrm{T}\right)+\ldots=0,$$

... désignant un ensemble de termes qui varient d'une manière continue au travers de la surface σ. On en conclut, en vertu des égalités (190), que l'on a, en tout point de la surface σ,

$$(\alpha u+\beta v+\gamma w-\mathfrak{N})\Theta_0=0. \tag{192}$$

La discussion s'achève alors comme au paragraphe précédent et conduit aux conclusions que voici :

Au sein d'un FLUIDE VISQUEUX, INCOMPRESSIBLE ET BON CONDUCTEUR, *on ne peut observer aucune onde qui soit du troisième ordre par rapport à certains éléments du mouvement et d'ordre au moins égal à* 3 *pour les autres éléments.*

Au sein de tout autre FLUIDE VISQUEUX, *on peut observer une telle onde.*

Si le fluide est INCOMPRESSIBLE ET MAUVAIS CONDUCTEUR, *cette onde est du troisième ordre pour* T *et* Π *et d'ordre au moins égal à* 4 *pour* u, v, w.

Si le fluide est COMPRESSIBLE ET BON CONDUCTEUR, *cette onde est du troisième ordre pour* ρ *et* Π *et d'ordre au moins égal à* 4 *pour* u, v, w *et* T.

Si le fluide est COMPRESSIBLE ET MAUVAIS CONDUCTEUR, *cette onde est du troisième ordre pour* ρ, T *et* Π *et d'ordre au moins égal à* 4 *pour* u, v, w.

Les deux masses fluides que sépare la surface de l'onde demeurent les mêmes pendant toute la durée du mouvement, car on a

$$\mathfrak{N}=\alpha u+\beta v+\gamma w. \tag{193}$$

§ 4. — Résumé des propriétés des ondes au sein des fluides visqueux [1].

On voit sans peine que les démonstrations données aux §§ 2 et 3 s'étendent de proche en proche et s'appliquent aux ondes de tous ordres. Si l'on réunit alors ce qui a été dit dans le présent Chapitre aux résultats obtenus au Chapitre I, § 11, on parvient à des théorèmes entièrement généraux au sujet des ondes qui peuvent persister en un fluide visqueux. Ces théorèmes s'appliquent même aux surfaces de discontinuité pour certains éléments, surfaces qui sont des ondes d'ordre 0 par rapport à ces éléments.

---

(1) *Des ondes qui peuvent persister en un fluide visqueux* (*Comptes rendus*, t. CXXXIII, 14 octobre 1901, p. 579).

Voici ces théorèmes :

THÉORÈME I. — *Au sein d'un* FLUIDE VISQUEUX, INCOMPRESSIBLE ET BON CONDUCTEUR, *il ne peut persister aucune onde, quel qu'en soit l'ordre par rapport aux divers éléments du mouvement.*

En toute la masse d'un tel fluide et pendant toute la durée du mouvement, sauf peut-être à un instant isolé, u, v, w *et* T *sont des fonctions continues et analytiques de* x, y, z, t.

THÉORÈME II. — *Au sein d'un* FLUIDE VISQUEUX *qui est ou* COMPRESSIBLE, *ou* MAUVAIS CONDUCTEUR, *ou* A LA FOIS COMPRESSIBLE ET MAUVAIS CONDUCTEUR, *on peut observer des ondes persistantes.*

Si le fluide est INCOMPRESSIBLE ET MAUVAIS CONDUCTEUR, *une onde d'ordre n par rapport à* T *et à* Π *est au moins d'ordre* $(n+1)$ *par rapport à* u, v, w.

Si le fluide est COMPRESSIBLE ET BON CONDUCTEUR, *une onde d'ordre n par rapport à* ρ *et à* Π *est au moins d'ordre* $(n+1)$ *par rapport à* u, v, w *et à* T.

Si le fluide est COMPRESSIBLE ET MAUVAIS CONDUCTEUR, *une onde d'ordre n par rapport à* ρ, *à* T *et à* Π *est au moins d'ordre* $(n+1)$ *par rapport à* u, v, w.

THÉORÈME III. — *La vitesse de déplacement de l'onde est égale, en chacun des points de cette onde, à la projection de la vitesse du fluide sur la normale à l'onde :*

$$\mathfrak{N} = \alpha u + \beta v + \gamma w.$$

Les ondes partagent donc le fluide en masses qui demeurent les mêmes pendant toute la durée du mouvement.

Au sein de chacune de ces masses u, v, w, ρ, T, Π *sont des fonctions continues et analytiques de* x, y, z, t.

CHAPITRE IV.

DES ONDES DANS LES FLUIDES PARFAITS.

§ 1. — QUELQUES PROPRIÉTÉS THERMODYNAMIQUES DES FLUIDES SANS VISCOSITÉ (¹).

Dans ce Chapitre, nous nous proposons d'étudier les propriétés des *fluides parfaits,* c'est-à-dire des fluides pour lesquels les deux coefficients de viscosité

(¹) *Sur les chaleurs spécifiques des fluides dont les éléments sont soumis à leurs actions mutuelles* (*Comptes rendus,* t. CXXXII, 11 février 1901, p. 292).

sont identiquement nuls :

$$\lambda(\rho, T) = 0, \qquad \mu(\rho, T) = 0.$$

Nous exposerons d'abord quelques considérations sur les coefficients calorifiques de ces fluides, considérations qui nous seront utiles ensuite.

Dans une modification réelle ou virtuelle où la densité ρ et la température T varient de $\delta\rho$, δT, la masse élémentaire dm dégage une quantité de chaleur dQ que donne l'égalité (82) de la première Partie, à condition d'y supprimer le travail $d\tau_v\, d\varpi$ des actions de viscosité; nous avons donc

$$dQ = \frac{T}{E}\left(\frac{\partial^2 \zeta(\rho, T)}{\partial\rho\, \partial T}\delta\rho + \frac{\partial^2 \zeta(\rho, T)}{\partial T^2}\delta T\right). \tag{194}$$

La quantité

$$c(\rho, T) = -\frac{T}{E}\frac{\partial^2 \zeta(\rho, T)}{\partial T^2} \tag{195}$$

est [Ire Partie, égalité (84)] la *chaleur spécifique à densité constante* du fluide.

Selon le *postulat de Helmholtz,* cette quantité est essentiellement positive :

$$c > 0, \qquad \frac{\partial^2 \zeta(\rho, T)}{\partial T^2} < 0. \tag{196}$$

D'autre part, en tout point non situé sur une surface de discontinuité, nous avons [Ire Partie, égalité (75)]

$$\Pi + \rho^2(A_i + A_e) - \rho\frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial\rho} = 0. \tag{197}$$

Nous allons écrire cette dernière condition sous une forme un peu différente.

Considérons les fonctions $\mathcal{A}_i(R, x, y, z, t)$, $\mathcal{A}_e(R, x, y, z, t)$, définies en la Ire Partie, Chapitre I, § 4.

Nous aurons

$$A_i(x, y, z, t) = \mathcal{A}_i(\rho, x, y, z, t),$$
$$A_e(x, y, z, t) = \mathcal{A}_e(\rho, x, y, z, t)$$

L'égalité (197) pourra alors s'écrire

$$\Pi + \rho^2[\mathcal{A}_i(\rho, x, y, z, t) + \mathcal{A}_e(\rho, x, y, z, t)] - \rho^2\frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial\rho} = 0. \tag{198}$$

Cette égalité peut s'interpréter.

Supprimons toutes les parties du fluide qui sont contiguës à l'élément dm;

mais, aux corps extérieurs qui exercent l'action $\mathcal{A}_e(\rho, x, y, z, t)$, adjoignons d'autres corps exerçant précisément une action égale à $\mathcal{A}_i(\rho, x, y, z, t)$. Pour conserver à l'élément dm sa densité et son état de repos ou de mouvement, il faudra appliquer à sa surface une pression Π donnée par l'égalité (198).

Supposons ces corps extérieurs fictifs choisis de telle manière que la forme de la fonction $\mathcal{A}_i(\rho, x, y, z, t)$ demeure invariable. A des variations $\delta\rho$, δT de la densité ρ et de la température T correspondrait une variation $\delta\Pi$ de la pression Π donnée par l'égalité

$$(199) \qquad \delta\Pi + \rho\left[2\left(\mathcal{A}_i + \mathcal{A}_e - \frac{\partial\zeta}{\partial\rho}\right) + \rho\left(\frac{\partial\mathcal{A}_i}{\partial\rho} + \frac{\partial\mathcal{A}_e}{\partial\rho} - \frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho^2}\right)\right]\delta\rho - \rho^2\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho\,\partial T}\delta T = 0.$$

Posons

$$(200) \qquad J(\rho, T, x, y, z, t) = \rho\left[2\left(\frac{\partial\zeta}{\partial\rho} - \mathcal{A}_i - \mathcal{A}_e\right) + \rho\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho^2} - \frac{\partial\mathcal{A}_i}{\partial\rho} - \frac{\partial\mathcal{A}_e}{\partial\rho}\right)\right].$$

L'égalité (199) nous enseigne que si, dans la modification définie plus haut à laquelle cette égalité se rapporte, la température T demeure invariable, la densité ρ augmente de $\left(\frac{d\rho}{d\Pi}\right)_T \delta\Pi$, avec

$$(201) \qquad \left(\frac{d\rho}{d\Pi}\right)_T = \frac{1}{J},$$

tandis que si la pression Π demeure invariable, la densité augmente de $\left(\frac{d\rho}{dT}\right)_\Pi \delta T$, avec

$$(202) \qquad \left(\frac{d\rho}{dT}\right)_\Pi = -\frac{\rho^2}{J}\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho\,\partial T}.$$

Au sein d'un fluide qui est en état d'équilibre stable, on a (1)

$$(203) \qquad J > 0.$$

Toutes les fois que cette inégalité est vérifiée, $\left(\frac{d\rho}{d\Pi}\right)_T$ est positif et $\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho\,\partial T}$ est de signe contraire à $\left(\frac{d\rho}{dT}\right)_\Pi$.

Considérons une modification du genre de celles que nous venons de définir et où la pression Π garde une valeur invariable; ρ croît de $\left(\frac{d\rho}{dT}\right)_\Pi \delta T$; selon les éga-

(1) *Sur la stabilité de l'équilibre d'une masse fluide dont les éléments sont soumis à leurs actions mutuelles* [*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5e série, t. III, p. 174; condition (63); 1897].

lités (194) et (195), la quantité de chaleur dégagée par l'élément dm devient

$$dQ = \left[\frac{T}{E}\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho\,\partial T}\left(\frac{d\rho}{dT}\right)_{\Pi} - c(\rho, T)\right]\delta T$$

ou bien, en vertu de l'égalité (202),

$$(204) \qquad dQ = -\,C(\rho, T, x, y, z, t)\,\delta T,$$

en posant

$$(205) \qquad C(\rho, T, x, y, z, t) = c(\rho, T) + \frac{T}{E}\frac{\rho^2}{J(\rho, T, x, y, z, t)}\left[\frac{\partial^2\zeta(\rho, T)}{\partial\rho\,\partial T}\right]^2.$$

La quantité $C(\rho, T, x, y, z, t)$ peut, en vertu de l'égalité (204), être regardée comme la *chaleur spécifique à pression constante* de l'élément dm; elle diffère de la chaleur spécifique à densité constante par un caractère essentiel; pour la connaître, il ne suffit pas de connaître la densité ρ et la température T au sein de l'élément dm; il faut en outre connaître la disposition et l'état des corps dont proviennent les actions extérieures, la figure du fluide et la distribution des masses au sein de cette figure.

Si la condition de stabilité (203) *est satisfaite, la chaleur spécifique à pression constante* $C(\rho, T, x, y, z, t)$ *est, en chaque point, supérieure à la chaleur spécifique à densité constante.*

Considérons une des modifications pour lesquelles est écrite l'égalité (199) et supposons qu'elle constitue, pour l'élément dm, une modification *isentropique*.

L'entropie $\sigma(\rho, T)\,dm$ de l'élément dm est définie par l'égalité [I^re^ Partie, égalité (85)]

$$\sigma(\rho, T) = -\frac{1}{E}\frac{\partial\zeta(\rho, T)}{\partial T}.$$

On a donc, en une modification isentropique quelconque,

$$(206) \qquad \frac{\partial^2\zeta(\rho, T)}{\partial\rho\,\partial T}\delta\rho + \frac{\partial^2\zeta(\rho, T)}{\partial T^2}\delta T = 0.$$

Entre les égalités (199) et (206), éliminons δT et remplaçons $\delta\rho$ par $\left(\frac{d\rho}{d\Pi}\right)_Q \delta\Pi$. Nous trouverons, en tenant compte de l'égalité (200),

$$(207) \qquad \left[J\frac{\partial^2\zeta}{\partial T^2} - \rho^2\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho\,\partial T}\right)^2\right]\left(\frac{d\rho}{d\Pi}\right)_Q = \frac{\partial^2\zeta}{\partial T^2},$$

ce qui peut encore s'écrire

$$\left[-\frac{T}{E}\frac{\partial^2\zeta}{\partial T^2}+\frac{T}{E}\frac{\rho^2}{J}\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial\rho\,\partial T}\right)^2\right]\left(\frac{d\rho}{d\Pi}\right)_Q=-\frac{1}{J}\frac{T}{E}\frac{\partial^2\zeta}{\partial T^2}$$

ou bien, en vertu des égalités (201), (195) et (204),

$$C(\rho, T, x, y, z, t)\left(\frac{d\rho}{d\Pi}\right)_Q = c(\rho, T)\left(\frac{d\rho}{d\Pi}\right)_T, \tag{208}$$

égalité qui est la généralisation de la classique *relation de Reech*.

La relation (206), qui exprime que la modification est isentropique, peut s'écrire, en vertu de l'égalité (202),

$$\delta T = -\frac{J\left(\frac{d\rho}{dT}\right)_\Pi}{\rho^2\frac{\partial^2\zeta}{\partial T^2}}\delta\rho$$

ou bien, en vertu de l'égalité (195),

$$\delta T = \frac{TJ\left(\frac{d\rho}{dT}\right)_\Pi}{E c(\rho, T)}\delta\rho.$$

Mais ici $\delta\rho = \left(\frac{d\rho}{d\Pi}\right)_Q\delta\Pi$; si donc on tient compte des égalités (201) et (208) et si l'on remplace δT par $\left(\frac{dT}{d\Pi}\right)_Q\delta\Pi$, on trouve l'égalité

$$\left(\frac{dT}{d\Pi}\right)_Q = \frac{T}{E\,C(\rho, T, x, y, z, t)}\left(\frac{d\rho}{dT}\right)_\Pi,$$

ce qui est la généralisation d'une relation due à Joule.

Ainsi, toutes les lois que l'on démontre, en Thermodynamique élémentaire, pour un fluide soumis uniquement à une pression normale et uniforme, s'étendent à un fluide dont les éléments exercent les uns sur les autres des actions quelconques, newtoniennes ou non. Mais tandis que, dans le premier cas, ces lois sont générales, elles ne s'appliquent, dans le second cas, qu'à certaines modifications virtuelles définies d'une manière particulière, à savoir celles pour lesquelles il est permis d'écrire la relation (199).

Malgré le caractère abstrait et, semble-t-il, purement artificiel, des considérations que nous venons de développer, nous allons en reconnaître l'intérêt par l'étude de la propagation des ondes au sein des fluides parfaits.

§ 2. — Propagation des ondes au sein des fluides parfaits. Emploi des équations d'Euler.

La propagation des ondes dans les fluides parfaits a déjà fait l'objet de recherches extrêmement importantes de la part d'Hugoniot (¹); c'est à cette occasion qu'ont été imaginées les méthodes développées aux Chapitres II, III et IV du présent écrit. Toutefois, l'analyse d'Hugoniot est susceptible de certains développements et de certaines généralisations (²) que favorise singulièrement l'emploi des vecteurs de M. Hadamard.

Cette étude de la propagation des ondes dans les fluides parfaits peut se faire, comme l'a déjà observé Hugoniot, soit au moyen des équations hydrodynamiques dites *équations d'Euler,* soit au moyen des équations hydrodynamiques dites *équations de Lagrange;* nous allons employer successivement ces deux procédés, en usant d'abord des équations d'Euler.

Pour obtenir les équations d'Euler, il suffit de prendre les équations générales de l'Hydrodynamique [Ire Partie, égalités (79)] et d'y annuler les fonctions $\lambda(\rho, \mathrm{T})$, $\mu(\rho, \mathrm{T})$. Nous obtenons alors les équations

$$(209)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \Pi}{\partial x} - \rho(\mathrm{X}_i + \mathrm{X}_e) + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0,\\ &\frac{\partial \Pi}{\partial y} - \rho(\mathrm{Y}_i + \mathrm{Y}_e) + \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = 0,\\ &\frac{\partial \Pi}{\partial z} - \rho(\mathrm{Z}_i + \mathrm{Z}_e) + \rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0. \end{aligned}\right.$$

A ces équations, il faut joindre l'*équation de continuité*

$$(210)\qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\rho u + \frac{\partial}{\partial y}\rho v + \frac{\partial}{\partial z}\rho w = 0,$$

dans le cas où le fluide est compressible, la relation

$$(198)\qquad \Pi + \rho^2[\mathcal{A}_i(\rho, x, y, z, t) + \mathcal{A}_e(\rho, x, y, z, t)] - \rho^2\frac{\partial \zeta(\rho, \mathrm{T})}{\partial \rho} = 0$$

et, enfin, la *relation supplémentaire.*

(¹) Hugoniot, *Mémoire sur la propagation du mouvement dans un fluide indéfini* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées,* 4e série, t. III, 1887, p. 188, et t. IV, 1888, p. 153).

(²) *Sur les ondes longitudinales et transversales dans les fluides parfaits* (*Comptes rendus,* t. CXXXII, 3 juin 1901, p. 1303).

Imaginons qu'une surface σ soit onde persistante du premier ordre pour u, v, w. Il existera un vecteur (l_0, m_0, n_0) tel que, sur la surface σ,

$$(211)\quad \left\{\begin{array}{llll} \dfrac{\partial(u_2-u_1)}{\partial x}=\alpha l_0, & \dfrac{\partial(u_2-u_1)}{\partial y}=\beta l_0, & \dfrac{\partial(u_2-u_1)}{\partial z}=\gamma l_0, & \dfrac{\partial(u_2-u_1)}{\partial t}+\mathfrak{N} l_0=0, \\ \dfrac{\partial(v_2-v_1)}{\partial x}=\alpha m_0, & \dfrac{\partial(v_2-v_1)}{\partial y}=\beta m_0, & \dfrac{\partial(v_2-v_1)}{\partial z}=\gamma m_0, & \dfrac{\partial(v_2-v_1)}{\partial t}+\mathfrak{N} m_0=0, \\ \dfrac{\partial(w_2-w_1)}{\partial x}=\alpha n_0, & \dfrac{\partial(w_2-w_1)}{\partial y}=\beta n_0, & \dfrac{\partial(w_2-w_1)}{\partial z}=\gamma n_0, & \dfrac{\partial(w_2-w_1)}{\partial t}+\mathfrak{N} n_0=0. \end{array}\right.$$

Moyennant ces égalités, on a, sur la surface σ,

$$(212)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial u_2}{\partial t}+u\dfrac{\partial u_2}{\partial x}+v\dfrac{\partial u_2}{\partial y}+w\dfrac{\partial u_2}{\partial z} \\ \quad -\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial t}+u\dfrac{\partial u_1}{\partial x}+v\dfrac{\partial u_1}{\partial y}+w\dfrac{\partial u_1}{\partial z}\right)=(\alpha u+\beta v+\gamma w-\mathfrak{N})l_0, \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial t}+u\dfrac{\partial v_2}{\partial x}+v\dfrac{\partial v_2}{\partial y}+w\dfrac{\partial v_2}{\partial z} \\ \quad -\left(\dfrac{\partial v_1}{\partial t}+u\dfrac{\partial v_1}{\partial x}+v\dfrac{\partial v_1}{\partial y}+w\dfrac{\partial v_1}{\partial z}\right)=(\alpha u+\beta v+\gamma w-\mathfrak{N})m_0, \\ \dfrac{\partial w_2}{\partial t}+u\dfrac{\partial w_2}{\partial x}+v\dfrac{\partial w_2}{\partial y}+w\dfrac{\partial w_2}{\partial z} \\ \quad -\left(\dfrac{\partial w_1}{\partial t}+u\dfrac{\partial w_1}{\partial x}+v\dfrac{\partial w_1}{\partial y}+w\dfrac{\partial w_1}{\partial z}\right)=(\alpha u+\beta v+\gamma w-\mathfrak{N})n_0. \end{array}\right.$$

D'après ce que nous avons vu au Chapitre I, § 11, la surface σ, au travers de laquelle les composantes de la vitesse varient d'une manière continue, est onde au moins du premier ordre pour la pression Π et la densité ρ; il existe donc deux grandeurs P_0, R_0 telles que l'on ait, en tout point de la surface σ,

$$(213)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial(\Pi_2-\Pi_1)}{\partial x}=\alpha P_0, \qquad \dfrac{\partial(\Pi_2-\Pi_1)}{\partial y}=\beta P_0, \qquad \dfrac{\partial(\Pi_2-\Pi_1)}{\partial z}=\gamma P_0, \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial(\Pi_2-\Pi_1)}{\partial t}+\mathfrak{N} P_0=0, \end{array}\right.$$

$$(214)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial(\rho_2-\rho_1)}{\partial x}=\alpha R_0, \qquad \dfrac{\partial(\rho_2-\rho_1)}{\partial y}=\beta R_0, \qquad \dfrac{\partial(\rho_2-\rho_1)}{\partial z}=\gamma R_0, \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial(\rho_2-\rho_1)}{\partial t}+\mathfrak{N} R_0=0. \end{array}\right.$$

Moyennant les égalités (211) et (214), l'équation de continuité (210) montre que l'on a, en tout point de la surface σ,

$$(215) \qquad (\alpha u + \beta v + \gamma w - \mathfrak{N})\mathrm{R}_0 + \rho(\alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0) = 0.$$

En traversant la surface σ, les grandeurs X_e, Y_e, Z_e varient certainement d'une manière continue; il est aisé de voir qu'il en est de même de X_i, Y_i, Z_i; si, en effet, on se reporte à la définition de la fonction $\mathfrak{P}_i(\mathrm{R}, x, y, z, t)$ donnée en la Ire Partie, Chapitre I, § 4, on voit que X_i, Y_i, Z_i s'obtiennent en remplaçant R par $\rho(x, y, z, t)$ dans $-\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x}$, $-\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial y}$, $-\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial z}$; or, d'après ce qui a été supposé en cet endroit, la continuité de ρ assure la continuité de $-\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial x}$, $-\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial y}$, $-\frac{\partial \mathfrak{P}}{\partial z}$.

Les égalités (209), (212), (213) nous montrent alors que l'on a, en tout point de la surface σ,

$$(216) \qquad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{P}_0\alpha + \rho(\alpha u + \beta v + \gamma w - \mathfrak{N})l_0 = 0, \\ &\mathrm{P}_0\beta + \rho(\alpha u + \beta v + \gamma w - \mathfrak{N})m_0 = 0, \\ &\mathrm{P}_0\gamma + \rho(\alpha u + \beta v + \gamma w - \mathfrak{N})n_0 = 0. \end{aligned}\right.$$

Les égalités (215) et (216) sont vraies aussi bien pour les fluides compressibles que pour les fluides incompressibles, et cela quelle que soit la forme de la relation supplémentaire. Discutons, tout d'abord, les conséquences de ces égalités.

Multiplions respectivement les égalités (216) par α, β, γ et ajoutons membre à membre les égalités obtenues; nous trouvons l'égalité

$$(217) \qquad \mathrm{P}_0 + \rho(\alpha u + \beta v + \gamma w - \mathfrak{N})(\alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0) = 0.$$

D'autre part, multiplions respectivement les égalités (216) par l_0, m_0, n_0 et ajoutons membre à membre les résultats obtenus. Nous trouvons l'égalité

$$(218) \qquad \mathrm{P}_0(\alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0) + \rho(\alpha u + \beta v + \gamma w - \mathfrak{N})(l_0^2 + m_0^2 + n_0^2) = 0.$$

Parvenus à ce point, nous distinguerons deux cas :

Premier cas. — *L'onde, du premier ordre par rapport aux composantes u, v, w de la vitesse, est d'ordre supérieur au premier pour la densité ρ :*

$$(219) \qquad \mathrm{R}_0 = 0.$$

Ce cas est évidemment le seul qui puisse se présenter en un fluide incompressible.

Les égalités (219) et (215) donnent

$$(220) \qquad \alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0 = 0.$$

Selon la dénomination introduite au Chapitre II, § 5, l'onde est transversale.

L'égalité (217) donne alors

$$P_0 = 0. \tag{221}$$

L'onde est d'ordre supérieur au premier par rapport à la pression.

Enfin, l'égalité (218) donne

$$\mathfrak{N} = \alpha u + \beta v + \gamma w. \tag{222}$$

Les deux masses fluides que sépare l'onde considérée demeurent les mêmes pendant toute la durée du mouvement.

Moyennant les trois égalités (215), (217), (218), il est très facile de voir que chacune des quatre égalités (219), (220), (221), (222) a pour conséquence les trois autres. Donc, *chacune des quatre propositions que nous venons d'énoncer entraîne les trois autres.*

Deuxième cas. — *L'onde, du premier ordre par rapport aux composantes u, v, w de la vitesse, est aussi du premier ordre par rapport à la densité ρ.*

Dans ce cas, on n'a pas l'égalité (219) et, partant, on ne peut avoir aucune des trois égalités (220), (221), (222); en particulier, on n'a pas

$$P_0 = 0. \tag{221}$$

L'onde considérée est certainement du premier ordre par rapport à la pression.

Comme on n'a ni l'égalité (221), ni l'égalité (222), les égalités (216) donnent

$$\frac{l_0}{\alpha} = \frac{m_0}{\beta} = \frac{n_0}{\gamma}. \tag{223}$$

Selon la terminologie définie au Chapitre II, § 5, l'onde considérée est longitudinale.

Les égalités (215) et (217) donnent

$$[(\alpha u + \beta v + \gamma w - \mathfrak{N})^2 R_0 - P_0] (\alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0) = 0.$$

Dans le cas actuel, où aucune des égalités (219), (220), (221) n'est vérifiée, cette égalité devient

$$(\mathfrak{N} - \alpha u - \beta v - \gamma w)^2 = \frac{P_0}{R_0}. \tag{224}$$

Elle fait connaître la valeur de $\mathfrak{N}$.

Pour pousser plus loin et déterminer la valeur de $\frac{P_0}{R_0}$, il faut faire usage de l'égalité (198) (ce qui est assurément permis, puisque ce second cas ne peut se rencontrer qu'en un fluide compressible) et de la relation supplémentaire.

En tenant compte de la définition de J, donnée par l'égalité (200), l'égalité (198) nous donne

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} - J\frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho^2 \frac{\partial}{\partial x}(\mathcal{A}_i + \mathcal{A}_e) - \rho^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho\, \partial T}\frac{\partial T}{\partial x} = 0. \tag{225}$$

L'onde considérée étant au moins du premier ordre pour la température T (Chapitre I, § 11), il existe une grandeur Θ_0 telle qu'en tout point de la surface σ

$$\frac{\partial(T_2 - T_1)}{\partial x} = \alpha\Theta_0, \qquad \frac{\partial(T_2 - T_1)}{\partial y} = \beta\Theta_0, \qquad \frac{\partial(T_2 - T_1)}{\partial z} = \gamma\Theta_0. \tag{226}$$

Au passage de la surface σ, $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho\, \partial T}$ varie d'une manière continue comme ρ et T; selon les principes posés en la I^re Partie, Chapitre I, § 4, il en est de même de $\mathcal{A}_i$, $\frac{\partial \mathcal{A}_i}{\partial \rho}$, $\frac{\partial \mathcal{A}_i}{\partial x}$; enfin, il en est assurément de même de $\mathcal{A}_e$ et de ses dérivées partielles, partant de J. Dès lors, les égalités (213), (214), (225), (226) donnent, en tout point de la surface σ, la première des égalités

$$\left(P_0 - JR_0 - \rho^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho\, \partial T}\Theta_0\right)\alpha = 0,$$
$$\left(P_0 - JR_0 - \rho^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho\, \partial T}\Theta_0\right)\beta = 0,$$
$$\left(P_0 - JR_0 - \rho^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho\, \partial T}\Theta_0\right)\gamma = 0.$$

Les deux dernières s'établissent d'une manière analogue. Ces égalités donnent

$$P_0 - JR_0 - \rho^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho\, \partial T}\Theta_0 = 0. \tag{227}$$

Parvenus à ce point, nous devons scinder notre deuxième cas :

A. Le fluide est bon conducteur de la chaleur. — Dans ce cas, selon des considérations exposées au Chapitre III, § 1, considérations qui s'appliquent aussi bien aux fluides parfaits qu'aux fluides visqueux, on a

$$\Theta_0 = 0. \tag{154}$$

L'onde est d'ordre supérieur au premier par rapport à la température.

L'égalité (227) donne alors

$$\frac{P_0}{R_0} = J,$$

en sorte que l'égalité (224) devient

$$(\mathfrak{N} - \alpha u - \beta v - \gamma w)^2 = J. \tag{228}$$

Elle nous enseigne qu'*une onde longitudinale du premier ordre ne peut persister qu'au sein d'un fluide où la condition* (203) *est vérifiée.*

Selon l'égalité (201), l'égalité (228) peut encore s'écrire

$$(\mathfrak{N} - \alpha u - \beta v - \gamma w)^2 = \frac{1}{\left(\frac{d\rho}{d\Pi}\right)_T}. \tag{228 bis}$$

B. Le fluide est mauvais conducteur de la chaleur. — Dans le temps dt, chaque élément $d\varpi$ dégage une quantité de chaleur égale à o. Selon l'égalité (90) de la Ire Partie, cette condition s'écrit

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial T^2}\left(\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x} u + \frac{\partial T}{\partial y} v + \frac{\partial T}{\partial z} w\right) - \rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho\, \partial T}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0. \tag{229}$$

Selon les égalités (211) et (226), elle nous enseigne que l'on a, en tout point de la surface σ,

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial T^2}(\alpha u + \beta v + \gamma w - \mathfrak{N})\Theta_0 - \rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho\, \partial T}(\alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0) = 0. \tag{230}$$

Comme on n'a certainement ni l'égalité (220), ni l'égalité (222), Θ_0 a une valeur finie et différente de o. *L'onde considérée est assurément du premier ordre par rapport à la température.*

Les égalités (215) et (230) donnent

$$\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial T^2}\Theta_0 + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho\, \partial T} R_0\right)(\alpha u + \beta v + \gamma w - \mathfrak{N}) = 0,$$

ou bien, puisque l'égalité (222) n'est sûrement pas vérifiée,

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial T^2}\Theta_0 + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho\, \partial T} R_0 = 0.$$

L'égalité (227) devient alors

$$\frac{P_0}{R_0} = J - \frac{\rho^2 \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho\, \partial T}\right)^2}{\frac{\partial^2 \zeta}{\partial T^2}}.$$

L'égalité (224) devient donc

$$(231)\qquad (\mathfrak{N} - \alpha u - \beta v - \gamma w)^2 = J - \frac{\rho^2 \left(\dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho\, \partial T}\right)^2}{\dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial T^2}}.$$

Selon le postulatum de Helmholtz [inégalité (196)], $\dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial T^2}$ est assurément négatif, le second membre de l'égalité (231) est donc certainement positif, partout où la condition (203) est vérifiée.

En vertu de l'égalité (207), l'égalité (231) peut s'écrire

$$(232)\qquad (\mathfrak{N} - \alpha u - \beta v - \gamma w)^2 = \frac{1}{\left(\dfrac{d\rho}{d\Pi}\right)_Q}.$$

En vertu de l'égalité (208), l'égalité (232) devient

$$(233)\qquad (\mathfrak{N} - \alpha u - \beta v - \gamma w)^2 = \frac{1}{\left(\dfrac{d\rho}{d\Pi}\right)_T} \frac{C(\rho, T, x, y, z, t)}{c(\rho, T)}.$$

L'égalité (154) s'applique, au sein d'un fluide bon conducteur, aussi bien à une onde transversale qu'à une onde longitudinale; il en est de même de l'égalité (227), si le fluide est mauvais conducteur et compressible; mais, dans ce cas, on a, en tout point d'une onde transversale,

$$P_0 = 0, \qquad R_0 = 0,$$

en sorte que l'égalité (227) redonne

$$(154)\qquad \Theta_0 = 0.$$

On peut donc compléter ainsi qu'il suit ce que nous savons déjà des ONDES TRANSVERSALES :

Au sein d'un fluide bon conducteur, ou bien au sein d'un fluide compressible et mauvais conducteur, une onde transversale du premier ordre par rapport à u, v, w est d'ordre supérieur à 1 par rapport à T. *Au sein d'un fluide incompressible et mauvais conducteur, elle peut être du premier ordre par rapport à* T.

Les diverses propositions que nous venons de démontrer touchant les ondes du premier ordre par rapport aux composantes u, v, w de la vitesse s'établissent sans peine pour les ondes d'ordre supérieur au premier; les méthodes à suivre sont analogues à celles dont nous avons fait usage dans le cas des fluides visqueux, mais elles sont d'un emploi beaucoup plus simple. Nous laissons au lecteur le soin de les développer et nous nous bornerons à énoncer les théorèmes généraux que voici :

Au sein d'un fluide parfait, soumis à des actions newtoniennes ou non, il peut persister en général deux sortes d'onde d'ordre n par rapport aux composantes u, v, w de la vitesse (n étant au moins égal à 1). *La première sorte est seule possible si le fluide est incompressible :*

1° Des ondes transversales. — *Ces ondes sont au moins d'ordre* $(n+1)$ *par rapport à la densité et à la pression. Les deux masses fluides que sépare une telle onde sont les mêmes pendant toute la durée du mouvement, en sorte que la vitesse du déplacement de l'onde est donnée par la formule*

$$\mathfrak{N} = \alpha u + \beta v + \gamma w. \tag{222}$$

Enfin cette onde est au moins d'ordre $(n+1)$ *par rapport à* T, *à moins que le fluide ne soit incompressible et mauvais conducteur, cas auquel elle peut être d'ordre n par rapport à* T.

2° Des ondes longitudinales. — *Ces ondes sont aussi d'ordre n pour la densité et pour la pression.*

Au sein d'un fluide bon conducteur, *une telle onde est au moins d'ordre* $(n+1)$ *par rapport à la température* T *et sa vitesse de déplacement est donnée par la formule*

$$(\mathfrak{N} - \alpha u - \beta v - \gamma w)^2 = \frac{1}{\left(\dfrac{d\rho}{d\Pi}\right)_T}. \tag{228 bis}$$

Au sein d'un fluide mauvais conducteur, *une telle onde est d'ordre n par rapport à la température* T *et sa vitesse de déplacement est donnée par la formule*

$$(\mathfrak{N} - \alpha u - \beta v - \gamma w)^2 = \frac{1}{\left(\dfrac{d\rho}{d\Pi}\right)_T} \frac{C(\rho, T, x, y, z, t)}{c(\rho, T)}. \tag{233}$$

Cette dernière formule est la généralisation de celle que Laplace a donnée pour la vitesse de propagation du son dans l'air.

On remarquera l'analogie qui existe entre les résultats que nous venons d'obtenir pour les ondes d'ordre au moins égal à 1 par rapport à u, v, w et les résultats qui ont été énoncés, à la fin du § 8 et aux §§ 9 et 10 du Chapitre I, pour les surfaces de discontinuité ou ondes d'ordre 0 par rapport à u, v, w.

§ 3. — La méthode de Lagrange. — Considérations cinématiques.

Les problèmes relatifs aux fluides parfaits peuvent être traités par une méthode, distincte de la précédente, que l'on nomme habituellement *méthode de Lagrange*. Vu l'importance des résultats que nous venons d'obtenir par la méthode dite *d'Euler*, nous allons chercher à les retrouver par la méthode dite *de Lagrange*.

Nous allons tout d'abord rappeler quelques formules, de nature cinématique, obtenues par cette méthode.

Dans la méthode de Lagrange, chaque point matériel est déterminé par ses coordonnées a, b, c, à un instant t_0 choisi une fois pour toutes; les coordonnées x, y, z de ce même point matériel à l'instant t sont des fonctions continues et uniformes de a, b, c, t :

$$(234) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= x(a, b, c, t), \\ y &= y(a, b, c, t), \\ z &= z(a, b, c, t). \end{aligned} \right.$$

Soit $f(a, b, c, t)$ une fonction des variables a, b, c, t; nous conviendrons d'employer les notations suivantes :

$$df = \frac{\partial f}{\partial a} da + \frac{\partial f}{\partial b} db + \frac{\partial f}{\partial c} dc + \frac{\partial f}{\partial t} dt,$$

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial a} da + \frac{\partial f}{\partial b} db + \frac{\partial f}{\partial c} dc.$$

Selon ces notations,

$$da = \Delta a, \qquad db = \Delta b, \qquad dc = \Delta c.$$

Ces notations nous permettent d'écrire, en vertu des égalités (234),

$$(235) \qquad \left\{ \begin{aligned} \Delta x &= \frac{\partial x}{\partial a} \Delta a + \frac{\partial x}{\partial b} \Delta b + \frac{\partial x}{\partial c} \Delta c, \\ \Delta y &= \frac{\partial y}{\partial a} \Delta a + \frac{\partial y}{\partial b} \Delta b + \frac{\partial y}{\partial c} \Delta c, \\ \Delta z &= \frac{\partial z}{\partial a} \Delta a + \frac{\partial z}{\partial b} \Delta b + \frac{\partial z}{\partial c} \Delta c. \end{aligned} \right.$$

Posons

$$(236) \qquad \mathfrak{O}(a, b, c, t) = \frac{D(x, y, z)}{D(a, b, c)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial x}{\partial c} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial c} \\ \frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix}$$

et résolvons les équations (235) par rapport à Δa, Δb, Δc; nous trouverons, en faisant usage de la notation des déterminants fonctionnels,

$$
(237)\qquad \left\{
\begin{aligned}
\mathfrak{D}\,\Delta a &= \frac{D(y,z)}{D(b,c)}\Delta x + \frac{D(z,x)}{D(b,c)}\Delta y + \frac{D(x,y)}{D(b,c)}\Delta z,\\
\mathfrak{D}\,\Delta b &= \frac{D(y,z)}{D(c,a)}\Delta x + \frac{D(z,x)}{D(c,a)}\Delta y + \frac{D(x,y)}{D(a,b)}\Delta z,\\
\mathfrak{D}\,\Delta c &= \frac{D(y,z)}{D(a,b)}\Delta x + \frac{D(z,x)}{D(a,b)}\Delta y + \frac{D(x,y)}{D(c,a)}\Delta z.
\end{aligned}
\right.
$$

Supposons que, résolvant les égalités (234) par rapport à a, b, c, on exprime ces quantités en fonctions de x, y, z, t :

$$
(238)\qquad \left\{
\begin{aligned}
a &= a(x, y, z, t),\\
b &= b(x, y, z, t),\\
c &= c(x, y, z, t).
\end{aligned}
\right.
$$

Les égalités (237) nous donneront immédiatement

$$
(239)\qquad \left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial a}{\partial x} &= \frac{1}{\mathfrak{D}}\frac{D(y,z)}{D(b,c)}, & \frac{\partial a}{\partial y} &= \frac{1}{\mathfrak{D}}\frac{D(z,x)}{D(b,c)}, & \frac{\partial a}{\partial z} &= \frac{1}{\mathfrak{D}}\frac{D(x,y)}{D(b,c)},\\
\frac{\partial b}{\partial x} &= \frac{1}{\mathfrak{D}}\frac{D(y,z)}{D(c,a)}, & \frac{\partial b}{\partial y} &= \frac{1}{\mathfrak{D}}\frac{D(z,x)}{D(c,a)}, & \frac{\partial b}{\partial z} &= \frac{1}{\mathfrak{D}}\frac{D(x,y)}{D(c,a)},\\
\frac{\partial c}{\partial x} &= \frac{1}{\mathfrak{D}}\frac{D(y,z)}{D(a,b)}, & \frac{\partial c}{\partial y} &= \frac{1}{\mathfrak{D}}\frac{D(z,x)}{D(a,b)}, & \frac{\partial c}{\partial z} &= \frac{1}{\mathfrak{D}}\frac{D(x,y)}{D(a,b)}.
\end{aligned}
\right.
$$

Considérons une certaine surface $S(t)$, variable avec le temps t, tracée dans l'espace des x, y, z. Son équation est

$$
(240)\qquad \Phi(x, y, z, t) = 0.
$$

Si, dans cette égalité, on remplace x, y, z par leurs expressions (234), on obtient une nouvelle équation

$$
(241)\qquad \varphi(a, b, c, t) = 0,
$$

qui est l'équation d'une surface $s(t)$, variable avec le temps t et tracée dans l'espace des a, b, c. Les deux surfaces $S(t)$, $s(t)$ sont dites *correspondantes*. Les égalités (234) ou les égalités équivalentes (238) font correspondre point par point la surface $S(t)$ et la surface $s(t)$.

En un point M de la surface $S(t)$, la normale a pour cosinus directeurs α, β, γ et l'on a

$$
(242)\qquad \frac{\alpha}{\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}} = \frac{\beta}{\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}} = \frac{\gamma}{\dfrac{\partial \Phi}{\partial z}}
$$

Au point m, correspondant du point M, la surface $s(t)$ admet une normale dont λ, μ, ν sont les cosinus directeurs, et l'on a

$$(243) \qquad \frac{\lambda}{\frac{\partial \varphi}{\partial a}} = \frac{\mu}{\frac{\partial \varphi}{\partial b}} = \frac{\nu}{\frac{\partial \varphi}{\partial c}}.$$

En vertu des égalités (238), les égalités (242) peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} &\frac{\alpha}{\frac{\partial \varphi}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x}} \\ &= \frac{\beta}{\frac{\partial \varphi}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial y}} \\ &= \frac{\gamma}{\frac{\partial \varphi}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial z}}. \end{aligned}$$

En vertu des égalités (239) et (243), ces égalités prennent la forme

$$(244) \qquad \frac{\alpha}{\mathrm{L}} = \frac{\beta}{\mathrm{M}} = \frac{\gamma}{\mathrm{N}},$$

où l'on a posé

$$(245) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{L} &= \frac{\mathrm{D}(y, z)}{\mathrm{D}(b, c)}\lambda + \frac{\mathrm{D}(y, z)}{\mathrm{D}(c, a)}\mu + \frac{\mathrm{D}(y, z)}{\mathrm{D}(a, b)}\nu, \\ \mathrm{M} &= \frac{\mathrm{D}(z, x)}{\mathrm{D}(b, c)}\lambda + \frac{\mathrm{D}(z, x)}{\mathrm{D}(c, a)}\mu + \frac{\mathrm{D}(z, x)}{\mathrm{D}(a, b)}\nu, \\ \mathrm{N} &= \frac{\mathrm{D}(x, y)}{\mathrm{D}(b, c)}\lambda + \frac{\mathrm{D}(x, y)}{\mathrm{D}(c, a)}\mu + \frac{\mathrm{D}(x, y)}{\mathrm{D}(a, b)}\nu. \end{aligned} \right.$$

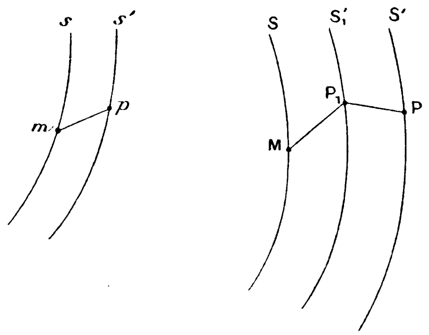
Les formules (244) et (245) permettent de calculer α, β, γ lorsque l'on connaît λ, μ, ν.

La surface $S(t)$ occupe la position S à l'instant t (*fig.* 15) et la position S' à l'instant $(t + dt)$ dans l'espace des x, y, z. Les points matériels qui, à l'instant $(t + dt)$, se trouvent sur la surface S', se trouvaient, à l'instant t, sur la surface S'_1.

A la surface S correspond, dans l'espace des a, b, c, une surface s. Aux deux surfaces S', S'_1, lieux, à des instants différents, des mêmes points matériels, correspond, dans l'espace des a, b, c, une même surface s'.

Soient M un point de la surface S et m le point correspondant de la surface s. La distance normale du point M à la surface S', comptée positivement dans la direction dont α, β, γ sont les cosinus directeurs, sera désignée par $\mathcal{M}\, dt$. La distance normale du point m à la surface s', comptée positivement dans la direc-

Fig. 15.



tion dont λ, μ, ν sont les cosinus directeurs, sera désignée par $n\, dt$. Cherchons quelle relation existe entre n et $\mathcal{M}$.

Sur la surface s', prenons un point p voisin du point m; si a, b, c sont les coordonnées du point m, $a + \Delta a$, $b + \Delta b$, $c + \Delta c$ seront celles du point p. La projection du segment mp sur la direction dont λ, μ, ν sont les cosinus directeurs sera précisément $n\, dt$. On a donc

$$(246) \qquad n\, dt = \gamma\, \Delta a + \mu\, \Delta b + \nu\, \Delta c.$$

Au point p correspond un point P sur la surface S et un point P_1 sur la surface S_1.

Les composantes de segment MP_1 sont Δx, Δy, Δz, ces quantités étant liées à $\Delta a, \Delta b, \Delta c$ par les égalités (235) ou, ce qui revient au même, par les égalités (237). Quant au segment $P_1 P$, ses composantes sont $\frac{\partial x}{\partial t} dt$, $\frac{\partial y}{\partial t} dt$, $\frac{\partial z}{\partial t} dt$.

La projection du contour MP_1P sur la direction dont α, β, γ sont les cosinus directeurs doit donner précisément $\mathcal{M}\, dt$. On a donc

$$(247) \qquad \mathcal{M}\, dt = \left(\alpha \frac{\partial x}{\partial t} + \beta \frac{\partial y}{\partial t} + \gamma \frac{\partial z}{\partial t}\right) dt + \alpha\, \Delta x + \beta\, \Delta y + \gamma\, \Delta z.$$

En vertu des égalités (237) et (245), l'égalité (246) peut s'écrire

$$(248) \qquad n\, dt = \frac{L\, \Delta x + M\, \Delta y + N\, \Delta z}{\omega}.$$

En vertu des égalités (244), l'égalité (247) peut s'écrire

$$(249) \qquad \left(\mathcal{M} - \alpha \frac{\partial x}{\partial t} - \beta \frac{\partial y}{\partial t} - \gamma \frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 dt^2 = \frac{(L\, \Delta x + M\, \Delta y + N\, \Delta z)^2}{L^2 + M^2 + N^2}.$$

Les égalités (248) et (249) donnent

$$(250)\qquad \left(\mathfrak{N} - \alpha\frac{\partial x}{\partial t} - \beta\frac{\partial y}{\partial t} - \gamma\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 = \frac{\mathfrak{D}^2}{L^2+M^2+N^2}n^2.$$

Cette formule essentielle est due à Hugoniot ([1]).

La masse du fluide qu'à l'instant t contient une surface fermée S, tracée dans l'espace des x, y, z, a pour valeur

$$\iiint \rho(x, y, z, t)\,dx\,dy\,dz,$$

l'intégrale s'étendant au volume qu'enclôt la surface S. Par le changement de variables que représentent les équations (234), cette intégrale devient

$$(251)\qquad \iiint \rho(a, b, c, t)\,\mathfrak{D}(a, b, c, t)\,da\,db\,dc,$$

l'intégrale s'étendant au volume enclos par la surface s, qui correspond à la surface S dans l'espace des a, b, c.

Supposons que la première intégrale exprime la masse invariable d'une partie du fluide toujours identique à elle-même. La surface S variera avec t, mais la surface s demeurera invariable, et il en devra être de même de l'intégrale (251).

Donc l'intégrale (251), étendue au volume que renferme une surface invariable quelconque s, tracée dans l'espace des a, b, c, garde une valeur indépendante de t. Il faut et il suffit pour cela que l'on ait

$$(252)\qquad \frac{\partial}{\partial t}[\rho(a, b, c, t)\,\mathfrak{D}(a, b, c, t)] = 0.$$

Cette égalité bien connue représente l'*équation de continuité* dans le système dit *de Lagrange*.

On peut l'écrire plus explicitement

$$\mathfrak{D}(a, b, c, t)\frac{\partial\rho(a, b, c, t)}{\partial t} + \rho(a, b, c, t)\frac{\partial\mathfrak{D}(a, b, c, t)}{\partial t} = 0$$

ou bien, en vertu de l'égalité (236), qui définit $\mathfrak{D}(a, b, c, t)$,

$$(253)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{D}\frac{\partial\rho}{\partial t} &+ \frac{D(y, z)}{D(b, c)}\frac{\partial^2 x}{\partial a\,\partial t} + \frac{D(y, z)}{D(c, a)}\frac{\partial^2 x}{\partial b\,\partial t} + \frac{D(y, z)}{D(a, b)}\frac{\partial^2 x}{\partial c\,\partial t} \\ &+ \frac{D(z, x)}{D(b, c)}\frac{\partial^2 y}{\partial a\,\partial t} + \frac{D(z, x)}{D(c, a)}\frac{\partial^2 y}{\partial b\,\partial t} + \frac{D(z, x)}{D(a, b)}\frac{\partial^2 y}{\partial c\,\partial t} \\ &+ \frac{D(x, y)}{D(b, c)}\frac{\partial^2 z}{\partial a\,\partial t} + \frac{D(x, y)}{D(c, a)}\frac{\partial^2 z}{\partial b\,\partial t} + \frac{D(x, y)}{D(a, b)}\frac{\partial^2 z}{\partial c\,\partial t} = 0. \end{aligned}$$

([1]) HUGONIOT, *Mémoire sur la propagation du mouvement dans un fluide indéfini*, seconde Partie (*Journal de Mathématiques*, 4e série, t. IV, 1888, p. 153).

§ 4. — Propagation des ondes au sein des fluides parfaits. Emploi de la méthode de Lagrange.

Il est clair que nous avons

$$u=\frac{\partial x}{\partial t},\qquad v=\frac{\partial y}{\partial t},\qquad w=\frac{\partial z}{\partial t},\tag{254}$$

$$\gamma_x=\frac{\partial^2 x}{\partial t^2},\qquad \gamma_y=\frac{\partial^2 y}{\partial t^2},\qquad \gamma_z=\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}.\tag{255}$$

En vertu des égalités (255) et en supposant le fluide parfait, ce qui entraîne

$$q_x=0,\qquad q_y=0,\qquad q_z=0,$$

les équations générales de l'Hydrodynamique [première Partie, égalité (74)] deviennent

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial \Pi}{\partial x}-\rho(X_i+X_e)+\rho\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=0,\\
&\frac{\partial \Pi}{\partial y}-\rho(Y_i+Y_e)+\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0,\\
&\frac{\partial \Pi}{\partial z}-\rho(Z_i+Z_e)+\rho\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=0.
\end{aligned}\right.\tag{256}$$

On a, d'ailleurs,

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x}=\frac{\partial \Pi}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial \Pi}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x}+\frac{\partial \Pi}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x}.$$

Cette égalité, jointe à la première des égalités (239), transforme la première des égalités (256) en la première des égalités

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{D(y,z)}{D(b,c)}\frac{\partial \Pi}{\partial a}+\frac{D(y,z)}{D(c,a)}\frac{\partial \Pi}{\partial b}+\frac{D(y,z)}{D(a,b)}\frac{\partial \Pi}{\partial c}-\rho\,\mathfrak{D}\left(X_i+X_e-\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right)=0,\\
&\frac{D(z,x)}{D(b,c)}\frac{\partial \Pi}{\partial a}+\frac{D(z,x)}{D(c,a)}\frac{\partial \Pi}{\partial b}+\frac{D(z,x)}{D(a,b)}\frac{\partial \Pi}{\partial c}-\rho\,\mathfrak{D}\left(Y_i+Y_e-\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)=0,\\
&\frac{D(x,y)}{D(b,c)}\frac{\partial \Pi}{\partial a}+\frac{D(x,y)}{D(c,a)}\frac{\partial \Pi}{\partial b}+\frac{D(x,y)}{D(a,b)}\frac{\partial \Pi}{\partial c}-\rho\,\mathfrak{D}\left(Z_i+Z_e-\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\right)=0.
\end{aligned}\right.\tag{257}$$

Les deux autres se démontrent d'une manière analogue.

Supposons qu'une surface s, mobile avec t et tracée dans l'espace des a, b, c, soit onde du second ordre pour x, y, z et, partant, du premier ordre pour $\frac{\partial x}{\partial t}$, $\frac{\partial y}{\partial t}$, $\frac{\partial z}{\partial t}$. A cette surface s correspondra, dans l'espace des x, y, z, une surface S, mobile avec t et qui sera onde du premier ordre pour u, v, w [selon les égalités (254)]. Dès lors, d'après ce que nous avons vu au Chapitre I, § 11, la surface S sera onde au moins du premier ordre pour ρ et Π, et, visiblement, il en sera de même pour la surface s.

Nous pourrons donc, d'après ce qui a été dit au Chapitre II, trouver, en chaque point de la surface s, un vecteur f, g, h et deux grandeurs $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{R}$, tels que l'on ait

$$(258)\quad \left\{\begin{array}{llll} \dfrac{\partial^2(x_2-x_1)}{\partial a\,\partial t}=\lambda f, & \dfrac{\partial^2(x_2-x_1)}{\partial b\,\partial t}=\mu f, & \dfrac{\partial^2(x_2-x_1)}{\partial c\,\partial t}=\nu f, & \dfrac{\partial^2(x_2-x_1)}{\partial t^2}+nf=0, \\ \dfrac{\partial^2(y_2-y_1)}{\partial a\,\partial t}=\lambda g, & \dfrac{\partial^2(y_2-y_1)}{\partial b\,\partial t}=\mu g, & \dfrac{\partial^2(y_2-y_1)}{\partial c\,\partial t}=\nu g, & \dfrac{\partial^2(y_2-y_1)}{\partial t^2}+ng=0, \\ \dfrac{\partial^2(z_2-z_1)}{\partial a\,\partial t}=\lambda h, & \dfrac{\partial^2(z_2-z_2)}{\partial b\,\partial t}=\mu h, & \dfrac{\partial^2(z_2-z_1)}{\partial c\,\partial t}=\nu h, & \dfrac{\partial^2(z_2-z_1)}{\partial t^2}+nh=0; \end{array}\right.$$

$$(259)\quad \frac{\partial(\rho_2-\rho_1)}{\partial a}=\lambda\mathfrak{R},\quad \frac{\partial(\rho_2-\rho_1)}{\partial b}=\mu\mathfrak{R},\quad \frac{\partial(\rho_2-\rho_1)}{\partial c}=\nu\mathfrak{R},\quad \frac{\partial(\rho_2-\rho_1)}{\partial t}+n\mathfrak{R}=0,$$

$$(260)\quad \frac{\partial(\Pi_2-\Pi_1)}{\partial a}=\lambda\mathfrak{P},\quad \frac{\partial(\Pi_2-\Pi_1)}{\partial b}=\mu\mathfrak{P},\quad \frac{\partial(\Pi_2-\Pi_1)}{\partial c}=\nu\mathfrak{P},\quad \frac{\partial(\Pi_2-\Pi_1)}{\partial t}+n\mathfrak{P}=0.$$

La surface s étant onde du second ordre pour x, y, z, les dérivées partielles du premier ordre de ces quantités varient d'une manière continue en traversant cette surface, et il en est de même de $\mathfrak{D}$ et de tous ses mineurs. Dès lors, les égalités (253), (258) et (259), jointes aux égalités (245), montrent que l'on a, en tout point de la surface s,

$$(261)\qquad \mathfrak{D}\mathfrak{R}\,n-\rho(\mathrm{L}f+\mathrm{M}g+\mathrm{N}h)=0.$$

D'après ce que nous avons vu en la première Partie, Chapitre I, § 4, X_e, Y_e, Z_e, X_i, Y_i, Z_i varient d'une manière continue lorsqu'on traverse la surface S et, partant, la surface s. Dès lors, les égalités (257), (258) et (260), jointes aux égalités (245), montrent que l'on a, en tout point de la surface s, les trois égalités

$$(262)\qquad \left\{\begin{array}{l} \mathfrak{P}\mathrm{L}-\rho\mathfrak{D}nf=0, \\ \mathfrak{P}\mathrm{M}-\rho\mathfrak{D}ng=0, \\ \mathfrak{P}\mathrm{N}-\rho\mathfrak{D}nh=0. \end{array}\right.$$

De ces égalités (262) on tire sans peine les deux égalités

$$(263)\qquad \mathfrak{P}(\mathrm{L}f+\mathrm{M}g+\mathrm{N}h)-\rho\mathfrak{D}\,n(f^2+g^2+h^2)=0,$$

$$(264)\qquad \mathfrak{P}(\mathrm{L}^2+\mathrm{M}^2+\mathrm{N}^2)-\rho\mathfrak{D}\,n(\mathrm{L}f+\mathrm{M}g+\mathrm{N}h)=0.$$

Ici, distinguons deux cas :

PREMIER CAS. — *L'onde est d'ordre supérieur à* 1 *par rapport à la densité* ρ :

$$\mathfrak{R} = 0. \tag{265}$$

L'égalité (261) donne alors

$$\mathrm{L}f + \mathrm{M}g + \mathrm{N}h = 0. \tag{266}$$

Interprétons ce résultat.

En multipliant les deux membres de l'égalité (266) par λ et tenant compte des égalités (258), (254) et (244), nous trouvons la première des égalités

$$\alpha \frac{\partial(u_2 - u_1)}{\partial a} + \beta \frac{\partial(v_2 - v_1)}{\partial a} + \gamma \frac{\partial(w_2 - w_1)}{\partial a} = 0,$$

$$\alpha \frac{\partial(u_2 - u_1)}{\partial b} + \beta \frac{\partial(v_2 - v_1)}{\partial b} + \gamma \frac{\partial(w_2 - w_1)}{\partial b} = 0,$$

$$\alpha \frac{\partial(u_2 - u_1)}{\partial c} + \beta \frac{\partial(v_2 - v_1)}{\partial c} + \gamma \frac{\partial(w_2 - w_1)}{\partial c} = 0.$$

Les deux autres se démontrent d'une manière analogue. Multiplions respectivement ces égalités par $\frac{\partial a}{\partial x}, \frac{\partial b}{\partial x}, \frac{\partial c}{\partial x}$ et ajoutons-les membre à membre; nous trouvons l'égalité

$$\alpha \frac{\partial(u_2 - u_1)}{\partial x} + \beta \frac{\partial(v_2 - v_1)}{\partial x} + \gamma \frac{\partial(w_2 - w_1)}{\partial x} = 0$$

qui, si l'on se reporte aux égalités (211), devient la première des égalités

$$(\alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0)\alpha = 0,$$

$$(\alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0)\beta = 0,$$

$$(\alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0)\gamma = 0.$$

Les deux autres se démontrent d'une manière analogue. Ces égalités montrent que l'on a, en tout point de la surface S,

$$\alpha l_0 + \beta m_0 + \gamma n_0 = 0. \tag{220}$$

L'égalité (266), vérifiée en tout point de la surface s, exprime donc que *la surface* S *est une onde* TRANSVERSALE.

Moyennant l'égalité (266), l'égalité (264) devient

$$\mathfrak{P} = 0. \tag{267}$$

L'onde considérée est d'ordre supérieur au premier par rapport à la pression Π.

$\rho\,\mathcal{D}$, qui est la densité du fluide à l'instant t_0, ne peut être nul ; les égalités (263) et (266) donnent donc

$$n = 0. \tag{268}$$

La surface s est immobile dans l'espace des a, b, c; donc, dans son mouvement, la surface S *sépare toujours l'une de l'autre les deux mêmes masses fluides.*

D'ailleurs, en vertu de l'égalité (250) et des égalités (254), l'égalité (268) donne

$$\mathfrak{N} - \alpha u + \beta v + \gamma w = 0. \tag{222}$$

On voit sans peine, par les égalités (261), (263) et (264), que chacune des égalités (265), (266), (267) et (268) entraîne les trois autres; *chacun des quatre caractères que nous venons d'énumérer entraîne les trois autres.*

On retrouve ainsi tout ce que nous avons démontré, au § 2, au sujet des ondes transversales.

Second cas. — *L'onde est effectivement du premier ordre par rapport à la densité* ρ.

On n'a pas

$$\mathfrak{R} = 0. \tag{265}$$

Dès lors, on ne peut avoir l'égalité (267), en sorte que *l'onde est effectivement du premier ordre par rapport à la pression* Π.

On ne peut avoir non plus l'égalité (268), et, comme $\rho\,\mathcal{D}$ est essentiellement positif, les égalités (262) donnent

$$\frac{f}{\mathbf{L}} = \frac{g}{n} = \frac{h}{\mathbf{N}}. \tag{269}$$

Interprétons ces relations.

Multiplions les trois numérateurs par

$$\lambda \frac{\partial a}{\partial x} + \mu \frac{\partial b}{\partial x} + \nu \frac{\partial c}{\partial x}$$

et tenons compte des égalités (244); les relations (269) deviendront

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\alpha}\left(\lambda f\frac{\partial a}{\partial x}+\mu f\frac{\partial b}{\partial x}+\nu f\frac{\partial c}{\partial x}\right)\\
&=\frac{1}{\beta}\left(\lambda g\frac{\partial a}{\partial x}+\mu g\frac{\partial b}{\partial x}+\nu g\frac{\partial c}{\partial x}\right)\\
&=\frac{1}{\gamma}\left(\lambda h\frac{\partial a}{\partial x}+\mu h\frac{\partial b}{\partial x}+\nu h\frac{\partial c}{\partial x}\right).
\end{aligned}$$

En vertu des égalités (258) et (254), ces égalités donnent

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial(u_2-u_1)}{\partial x}=\frac{1}{\beta}\frac{\partial(v_2-v_1)}{\partial x}=\frac{1}{\gamma}\frac{\partial(w_2-w_1)}{\partial x}.$$

Celles-ci, en vertu des égalités (211), donnent la première ligne du groupe suivant

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha l_0}{\alpha}&=\frac{\alpha m_0}{\beta}=\frac{\alpha n_0}{\gamma},\\
\frac{\beta l_0}{\alpha}&=\frac{\beta m_0}{\beta}=\frac{\beta n_0}{\gamma},\\
\frac{\gamma l_0}{\alpha}&=\frac{\gamma m_0}{\beta}=\frac{\gamma n_0}{\gamma}.
\end{aligned}$$

Les deux autres lignes s'obtiennent d'une manière analogue. Ce groupe d'égalités équivaut aux égalités

$$\frac{l_0}{\alpha}=\frac{m_0}{\beta}=\frac{n_0}{\gamma}. \tag{223}$$

Les égalités (269), vérifiées en tout point de la surface s, expriment donc que *la surface* S *est une onde* LONGITUDINALE.

Les égalités (261) et (264) donnent

$$n^2=\frac{\mathbf{L}^2+\mathbf{M}^2+\mathbf{N}^2}{\mathfrak{O}^2}\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{R}}. \tag{270}$$

Transformons cette égalité.

On a

$$\frac{\partial(\Pi_2-\Pi_1)}{\partial x}=\frac{\partial(\Pi_2-\Pi_1)}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial(\Pi_3-\Pi_1)}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x}+\frac{\partial(\Pi_2-\Pi_1)}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x}$$

ou bien, en vertu des égalités (213), (239), (245) et (260), la première des égalités

$$\alpha P_0 = \frac{L\mathfrak{P}}{\omega}, \qquad \beta P_0 = \frac{M\mathfrak{P}}{\omega}, \qquad \gamma P_0 = \frac{N\mathfrak{P}}{\omega}.$$

Les deux autres se démontrent d'une manière analogue.

On en tire, en vertu des égalités (244),

$$P_0 = \frac{\mathfrak{P}}{\omega}\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}. \tag{271}$$

Une démonstration semblable donne

$$R_0 = \frac{\mathfrak{R}}{\omega}\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}, \tag{272}$$

le radical ayant le même signe que dans l'égalité (271).

Des égalités (271) et (272) on tire

$$\frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{R}} = \frac{P_0}{R_0}. \tag{273}$$

Les égalités (250), (254), (270) et (273) donnent alors l'égalité

$$(\mathfrak{N} - \alpha u - \beta v - \gamma w)^2 = \frac{P_0}{R_0}. \tag{224}$$

Nous avons ainsi retrouvé, par la méthode de Lagrange, tous les résultats qui avaient été obtenus, au § 2, par la méthode d'Euler.

CONCLUSION DE LA SECONDE PARTIE.

En terminant la première Partie de ces recherches, nous avons insisté sur le caractère extrêmement limité et particulier des cas où le mouvement des fluides donne prise aux méthodes ordinaires de l'Hydrodynamique.

On pouvait penser que ces restrictions, qui pèsent sur la plupart des théorèmes dits *généraux* de l'Hydrodynamique, viendraient également borner l'étude de la propagation des ondes; en fait, Hugoniot et M. Hadamard [1] n'ont abordé cette étude qu'en supposant l'existence de la fonction Λ définie en la première Partie, Chapitre III, § 2; en outre, ils ont supposé que les actions étaient newtoniennes et que le fluide n'était pas visqueux.

---

[1] *Cf.* P. APPELL, *Traité de Mécanique*, t. III, p. 337.

Ces restrictions, heureusement, n'influent pas sur le problème de la propagation des ondes persistantes; ce problème peut être traité avec une généralité qui n'a d'autre limite que la généralité même des équations fondamentales de l'Hydrodynamique; on peut dire que *la solution complète que nous avons donnée de ce problème constitue* LE SEUL THÉORÈME VRAIMENT GÉNÉRAL *que l'on ait obtenu en Hydrodynamique*. En particulier, nous avons obtenu un théorème qui est exact pour tous les fluides possibles, visqueux ou non visqueux, conducteurs ou non conducteurs; seuls, les fluides qui sont à la fois visqueux, incompressibles et bons conducteurs de la chaleur en sont exclus; ce théorème est le suivant :

En tout fluide, on peut observer des ondes, d'ordre quelconque, qui séparent sans cesse les deux mêmes masses fluides et, partant, ne se propagent pas.

Parmi les phénomènes qui manifestent nettement de semblables ondes, on peut citer, outre les cas anciennement connus des tourbillons et des jets, la propagation de la chaleur par convection au sein d'une masse liquide, si bien étudiée, au point de vue expérimental, par M. Bénard [1]; les curieuses *cellules* dont ce physicien a observé la formation trouvent leur explication immédiate dans le théorème précédent.

[1] H. BÉNARD, *Journal de Physique*, 3e série, t. IX, 1900, p. 513; t. X, 1901, p. 254.