

P. DUHEM

Recherches sur l'hydrodynamique

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 2^e série, tome 3, n° 4 (1901), p. 379-431

[<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1901_2_3_4_379_0>](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1901_2_3_4_379_0)

© Université Paul Sabatier, 1901, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

RECHERCHES SUR L'HYDRODYNAMIQUE,

PAR M. P. DUHEM.

DEUXIÈME PARTIE.

SUR LA PROPAGATION DES ONDES.

INTRODUCTION.

Dans une première Partie de ces Recherches ⁽¹⁾, nous avons examiné les fondements sur lesquels repose la mise en équations du problème hydrodynamique. La question qui se pose maintenant est la suivante : *Les intégrales des équations de l'Hydrodynamique sont-elles continues et analytiques dans tout l'espace? Si, le long de certaines surfaces, elles cessent d'être continues ou d'être analytiques, quelles sont les propriétés de ces surfaces?* C'est à l'examen de ces questions qu'est consacré le présent écrit.

CHAPITRE I.

DES ONDES DE CHOC.

§ 1. — CONSIDÉRATIONS CINÉMATIQUES.

Imaginons qu'à l'instant t , on puisse tracer dans le fluide une surface S jouissant des propriétés suivantes :

Soit M un point de la surface; soient 1 et 2 les deux côtés d'une aire entourant le point M , tracée sur la surface S , et assez petite pour être simplement connexe;

⁽¹⁾ *Recherches sur l'Hydrodynamique*; I^{re} Partie : *Sur les principes fondamentaux de l'Hydrodynamique* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 2^e série, t. III, p. 315; 1901).

soient M_1 un point infiniment voisin du point M et situé du côté 1, et M_2 un point infiniment voisin du point M et situé du côté 2.

Lorsque le point M_1 tend vers le point M , la densité ρ et les composantes u , v , w de la vitesse en ce point tendent uniformément vers des limites ρ_1 , u_1 , v_1 , w_1 ; lorsque le point M_2 tend vers le point M , la densité ρ et les composantes u , v , w de la vitesse en ce point tendent uniformément vers des limites ρ_2 , u_2 , v_2 , w_2 respectivement différentes de ρ_1 , u_1 , v_1 , w_1 .

Nous supposons, d'ailleurs, que les quantités ρ_1 , u_1 , v_1 , w_1 , ρ_2 , u_2 , v_2 , w_2 varient d'une manière continue lorsque le point M se déplace sur la surface S .

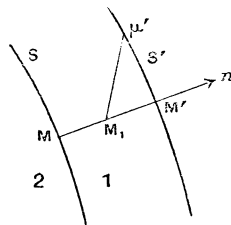
Il peut arriver qu'une telle surface S existe non pas seulement à l'instant isolé t , mais à tous les instants d'un certain laps de temps; dans ce cas, en général, la surface S ne demeurera pas fixe dans l'espace; elle se déformera et se déplacera d'une manière continue; occupant la position S à l'instant t , elle occupera la position voisine S' à l'instant $(t + dt)$.

Par le point M menons, à la surface S , une demi-normale dirigée du côté 1; ce sera dorénavant la *direction positive de la normale* à la surface S ; nous la désignerons par n , et par α , β , γ nous désignerons les cosinus des angles qu'elle fait avec les axes de coordonnées Ox , Oy , Oz .

Une normale, menée en M à la surface S , rencontre la surface S' en un point M' , voisin du point M . Nous désignerons par \mathfrak{N} une grandeur dont la valeur absolue sera $\frac{MM'}{dt}$, qui sera affectée du signe $+$ si la direction MM' coïncide avec la direction n , et du signe $-$ dans le cas contraire. Cette grandeur \mathfrak{N} sera, au point M , la *vitesse de déplacement de la surface* S . En général, elle variera d'une manière continue d'un point à l'autre de la surface S .

Prenons un point matériel μ qui se trouve, à l'instant t , en un point M_1 (*fig. 1*),

Fig. 1.



voisin de la surface S et situé du côté 1 de cette surface. Peut-il se faire qu'à une époque voisine de t et postérieure à t , il se trouve du côté 2 par rapport à la position actuelle de la surface S ?

Supposons qu'il en soit ainsi. Admettons que le point μ se trouve du côté 1 de la surface mobile jusqu'à l'instant $(t + dt)$ et du côté 2 à partir de cet instant; à l'instant $(t + dt)$, il se trouve précisément en μ' , sur la surface S' .

Menons la normale à la surface S qui, issue du point M , passe au point M_1 . La direction MM_1 coïncide, d'après les hypothèses faites, avec la direction positive n de cette normale.

Projetons la ligne brisée $MM_1\mu'$ sur la direction n et exprimons que la projection doit être, en grandeur et en signe, égale à $\mathfrak{R} dt$.

Si δ_1 est la longueur MM_1 , la projection du segment MM_1 sur la direction n est précisément δ_1 .

Entre les instants t et $(t + dt)$, le point matériel considéré est demeuré du côté 1 de la surface; les composantes de sa vitesse ont différé infiniment peu de u_1, v_1, w_1 ; aux infiniment petits d'ordre supérieur près, les composantes du segment $M_1\mu'$ ont pour composantes $u_1 dt, v_1 dt, w_1 dt$ et sa projection sur la direction n est $(u_1\alpha + v_1\beta + w_1\gamma) dt$; on a donc

$$(1) \quad \mathfrak{R} dt = \delta_1 + (u_1\alpha + v_1\beta + w_1\gamma) dt$$

ou bien

$$(2) \quad \delta_1 = \varphi_1 dt,$$

avec

$$(3) \quad \varphi_1 = \mathfrak{R} - (u_1\alpha + v_1\beta + w_1\gamma).$$

L'instant $(t + dt)$ étant postérieur à t , dt est positif; δ_1 étant positif par définition, la condition (2) exige que l'on ait

$$(4) \quad \varphi_1 > 0.$$

Ainsi, pour qu'un point matériel μ qui se trouvait du côté 1 de la surface S à l'instant t puisse être atteint par la surface S' à un instant postérieur $(t + dt)$, il faut et il suffit que la quantité φ_1 soit positive; l'instant où il est atteint est déterminé par l'égalité (2).

Lorsqu'il en est ainsi, on dit que le mouvement 2 (ρ_2, u_2, v_2, w_2) se propage dans le mouvement 1 (ρ_1, u_1, v_1, w_1) avec la vitesse φ_1 .

Nous pouvons traiter de même la question suivante :

A l'instant t , un point matériel μ_2 se trouve du côté 2 de la surface S et à une distance normale δ_2 de cette surface; peut-il se faire qu'à l'instant $(t + dt)$ il soit atteint par la surface mobile S' , et qu'il se trouve ensuite du côté 1 de cette surface?

Nous obtenons le résultat suivant :

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que la quantité

$$(3 \text{ bis}) \quad \varphi_2 = -\mathfrak{R} + u_2\alpha + v_2\beta + w_2\gamma$$

soit positive :

$$(4 \text{ bis}) \quad \varphi_2 > 0;$$

dt est alors déterminé par l'égalité

$$(2 \text{ bis}) \quad \delta_2 = \varphi_2 dt.$$

Lorsqu'il en est ainsi, on dit que le mouvement 1 (ρ_1, u_1, v_1, w_1) se propage dans le mouvement 2 (ρ_2, u_2, v_2, w_2) avec la vitesse de propagation φ_2 .

Il est clair que les trois hypothèses suivantes épuisent toutes les suppositions possibles :

1° Les points matériels que la surface S' affecte à l'instant $(t + dt)$ étaient, à l'instant t , du côté 1 de la surface S ; par conséquent, aucun point qui était, à l'instant t , du côté 2 de la surface S ne peut être, à l'instant $(t + dt)$, du côté 1 de la surface S' ; on a donc

$$(5) \quad \varphi_1 > 0, \quad \varphi_2 \leq 0.$$

C'est le cas où le mouvement 2 se propage dans le mouvement 1.

2° Les points matériels que la surface S' affecte à l'instant $(t + dt)$ étaient, à l'instant t , du côté 2 de la surface S ; par conséquent, aucun point qui était, à l'instant t , du côté 1 de la surface S ne peut être, à l'instant $(t + dt)$, du côté 2 de la surface S' ; on a donc

$$(5 \text{ bis}) \quad \varphi_2 > 0, \quad \varphi_1 \leq 0.$$

C'est le cas où le mouvement 1 se propage dans le mouvement 2.

Dans ces deux cas on dit que la surface S est une ONDE DE CHOC.

3° Les points qui, à l'instant t , sont du côté 1 de la surface S sont aussi, à l'instant $(t + dt)$, du côté 1 de la surface S' ; les points qui, à l'instant t , sont du côté 2 de la surface S sont aussi, à l'instant $(t + dt)$, du côté 2 de la surface S' .

On dit alors que la surface S est la SURFACE DE GLISSEMENT de deux couches fluides 1 et 2 l'une sur l'autre.

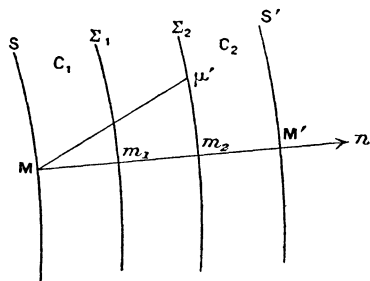
Laissons ce cas de côté, pour y revenir tout à l'heure, et étudions les ondes de choc.

Pour fixer les idées, supposons qu'il s'agisse d'une propagation du mouvement 2 dans le mouvement 1; d'ailleurs, nous pouvons toujours choisir les indices 1 et 2 de telle manière qu'il en soit ainsi. Ce seront donc les conditions (5) qui seront réalisées.

Considérons tous les points matériels qui, entre les instants t et $(t + dt)$,

seront atteints par l'onde de choc. A l'instant t , ils forment une couche comprise entre la surface S et une surface Σ_1 (fig. 2), située du côté 1 par rapport à la surface S . Les points matériels de la surface S sont ceux qui sont atteints par l'onde de choc à l'instant t ; les points matériels qui sont, à l'instant t , sur la surface Σ_1 ,

Fig. 2.



sont ceux qui seront atteints par l'onde de choc à l'instant $(t + dt)$. Si donc $\Delta_1 = \overline{Mm_1}$ est la distance normale d'un point de la surface S à la surface Σ_1 , nous aurons, selon la formule (2),

$$\Delta_1 = \varphi_1 dt.$$

Les points matériels qui, à l'instant t , se trouvaient dans la couche C_1 , d'épaisseur Δ_1 , comprise entre les surfaces S et Σ_1 , forment, à l'instant $(t + dt)$, une couche C_2 , située du côté 2 de la surface S' et comprise entre la surface S' et la surface Σ_2 , formée par les points matériels qui, à l'instant t , étaient sur la surface S .

Proposons-nous de calculer l'épaisseur Δ_2 de cette couche C_2 .

La normale menée par le point M à la surface S rencontre la surface Σ_2 en m_2 , la surface Σ' en M' ; la longueur $\overline{m_2M'}$ représente Δ_2 et, comme la surface Σ_2 est du côté 2 par rapport à la surface S' , nous sommes sûrs que la direction m_2M' est celle de la normale n .

Dès lors, projetons sur la normale n :

- 1° La distance à la surface S' du point M de la surface S ;
- 2° La distance du point M de la surface S à un point de la surface Σ_2 , infiniment voisin du point m_2 .

Retranchons la seconde projection de la première.

La différence sera assurément Δ_2 .

La première projection est, par définition, φdt .

Prenons le point matériel qui se trouve en M à l'instant t ; à l'instant $(t + dt)$, il se trouve en μ' sur la surface Σ_2 ; d'ailleurs, à partir de l'instant t , il est constamment du côté 2 de l'onde de choc; le segment $M\mu'$ a donc pour projection sur

les axes coordonnés $u_2 dt$, $v_2 dt$, $w_2 dt$ et, sur la normale n ,

$$(\alpha u_2 + \beta v_2 + \gamma w_2) dt.$$

Nous trouvons ainsi

$$\Delta_2 = [\mathfrak{K} - (\alpha u_2 + \beta v_2 + \gamma w_2)] dt$$

ou, selon l'égalité (3 bis),

$$(6 \text{ bis}) \quad \Delta_2 = -\vartheta_2 dt.$$

Si, comme nous l'avons supposé, ϑ_1 est positif, l'épaisseur Δ_1 et, par conséquent, le volume et la masse de la matière qui, à l'instant t , occupe la couche C_1 , sont de l'ordre de dt ; il faut qu'il en soit de même à l'instant $(t + dt)$, ce qui exclut l'hypothèse $\vartheta_2 = 0$.

On aurait pu démontrer de même que l'hypothèse $\vartheta_2 > 0$ exclut l'hypothèse $\vartheta_1 = 0$. Par conséquent, *une onde de choc vérifie forcément l'une ou l'autre des hypothèses suivantes :*

PREMIER CAS. — On a

$$(7) \quad \vartheta_1 > 0, \quad \vartheta_2 < 0.$$

Le mouvement 2 se propage dans le mouvement 1 avec la vitesse ϑ_1 .

DEUXIÈME CAS. — On a

$$(7 \text{ bis}) \quad \vartheta_1 < 0, \quad \vartheta_2 > 0.$$

Le mouvement 1 se propage dans le mouvement 2 avec la vitesse ϑ_2 .

UN TROISIÈME CAS est le cas de la surface de glissement. Pour que la surface S soit une surface de glissement, il faut et il suffit que les épaisseurs Δ_1 , Δ_2 des deux couches C_1 , C_2 soient égales à zéro. Les égalités (6) et (6 bis) donnent alors la proposition suivante :

Pour que la surface S soit une SURFACE DE GLISSEMENT de deux couches fluides 1 et 2 l'une sur l'autre, il faut et il suffit que l'on ait

$$(8) \quad \vartheta_1 = 0, \quad \vartheta_2 = 0.$$

Ces égalités exigent que l'on ait

$$(8 \text{ bis}) \quad \alpha(u_2 - u_1) + \beta(v_2 - v_1) + \gamma(w_2 - w_1) = 0.$$

Revenons au cas de l'onde de choc.

Prenons un point matériel (*fig. 3*) situé à l'instant t dans la couche C_1 , en un point géométrique ν , et cherchons en quel point géométrique ν' de la couche C_2 il se trouve à l'instant $(t + dt)$.

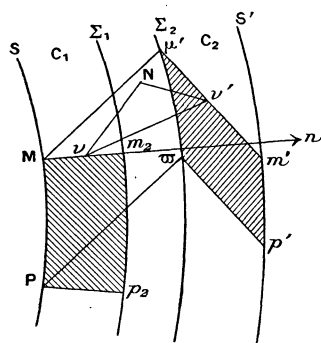
Soit δ_1 la distance normale μM , inférieure à Δ_1 , du point ν à la surface S . Le point matériel considéré est atteint par l'onde de choc à l'instant $(t + d\tau)$, $d\tau$ étant donné, selon la formule (2), par l'égalité

$$d\tau = \frac{\delta_1}{\varphi_1}.$$

Il est alors en N .

Entre les instants t et $(t + d\tau)$, le point matériel est du côté 1 de l'onde de choc.

Fig. 3.



Le segment νN a donc pour projections sur les axes de coordonnées, $u_1 d\tau$, $v_1 d\tau$, $w_1 d\tau$ ou bien

$$u_1 \frac{\delta_1}{\varphi_1}, \quad v_1 \frac{\delta_1}{\varphi_1}, \quad w_1 \frac{\delta_1}{\varphi_1}.$$

Entre les instants $d\tau$ et dt , ce même point matériel est du côté 2 de l'onde de choc. Le segment $N\nu'$ a donc pour projections sur les axes de coordonnées

$$u_2 (dt - d\tau) = u_2 dt - u_2 \frac{\delta_1}{\varphi_1},$$

$$v_2 (dt - d\tau) = v_2 dt - v_2 \frac{\delta_1}{\varphi_1},$$

$$w_2 (dt - d\tau) = w_2 dt - w_2 \frac{\delta_1}{\varphi_1}.$$

Le segment $\nu\nu'$ a donc pour projections sur les axes

$$u_2 dt + (u_1 - u_2) \frac{\delta_1}{\varphi_1},$$

$$v_2 dt + (v_1 - v_2) \frac{\delta_1}{\varphi_1},$$

$$w_2 dt + (w_1 - w_2) \frac{\delta_1}{\varphi_1}$$

et le segment $M\nu'$ a pour projections sur ces mêmes axes

$$\begin{aligned} u_2 dt + \left(\frac{u_1 - u_2}{\vartheta_1} + \alpha \right) \delta_1, \\ v_2 dt + \left(\frac{v_1 - v_2}{\vartheta_1} + \beta \right) \delta_1, \\ w_2 dt + \left(\frac{w_1 - w_2}{\vartheta_1} + \gamma \right) \delta_1. \end{aligned}$$

Or $u_2 dt$, $v_2 dt$, $w_2 dt$ sont les projections sur les axes du segment $M\mu'$. On voit donc que, pour obtenir le point ν' , on doit porter, à partir du point μ' , un segment dont les cosinus directeurs, proportionnels à

$$(9) \quad \frac{u_1 - u_2}{\vartheta_1} + \alpha, \quad \frac{v_1 - v_2}{\vartheta_1} + \beta, \quad \frac{w_1 - w_2}{\vartheta_1} + \gamma,$$

dépendent de la position du point M sur la surface S , mais point de δ_1 , et dont la longueur est proportionnelle à δ_1 .

Il en résulte que tous les points matériels situés, à l'instant t , sur la ligne Mm_2 , normale à S et issue du point M , se trouvent, à l'instant $(t + dt)$, sur la ligne droite $\mu'm'$, oblique à Σ_2 et issue du point μ' .

Considérons un petit cylindre droit Mm_2Pp_2 dont la base $MP = dS$ est un élément de la surface S . Le fluide qui, à l'instant t , remplissait ce cylindre droit, se trouve, à l'instant $(t + dt)$, dans un petit cylindre oblique $\mu'm'\varpi'p'$. La base de ce petit cylindre s'obtient en donnant à chaque point de l'élément MP une translation de composantes $u_2 dt$, $v_2 dt$, $w_2 dt$; sa génératrice, que limitent les deux surfaces Σ_2 et S' , a des cosinus directeurs proportionnels aux quantités (9).

On a visiblement

$$MP = \mu'\varpi' = dS,$$

en sorte que le cylindre droit et le cylindre oblique ont même base. Mais la hauteur du premier est Δ_1 et la hauteur du second est Δ_2 , en sorte que le volume du premier est au volume du second dans le rapport de Δ_1 à Δ_2 . La même masse fluide qui, à l'instant t , remplit le premier avec la densité ρ_1 , remplit le second, à l'instant $(t + dt)$, avec la densité ρ_2 ; on a donc

$$\rho_1 \Delta_1 = \rho_2 \Delta_2$$

ou bien, en vertu des égalités (6) et (6 bis),

$$(10) \quad \rho_1 \vartheta_1 + \rho_2 \vartheta_2 = 0.$$

Cette relation, dans la question actuellement traitée, joue le rôle d'équation de

continuité. Elle a été donnée par Riemann ⁽¹⁾ pour le cas simple où l'onde de choc est plane et où la vitesse du fluide est toujours normale à cette onde; elle a été généralisée par M. E. Jouguet ⁽²⁾.

§ 2. — EXTENSION DES PRINCIPES DE L'HYDRODYNAMIQUE AU CAS OU LES VITESSES OFFRENT DES DISCONTINUITÉS.

L'étude du mouvement d'un système quelconque repose sur le principe suivant ⁽³⁾ :

Lorsqu'un système est en mouvement, on a, à chaque instant t , et pour toutes les modifications virtuelles et isothermiques que l'on peut imposer au système à partir de l'état qu'il traverse à cet instant,

$$(11) \quad d\mathfrak{E}_e + d\mathfrak{E}_j + d\mathfrak{E}_v - \partial_T \mathfrak{F} = 0.$$

\mathfrak{F} est le potentiel interne du système,

$d\mathfrak{E}_e$ est le travail virtuel des actions extérieures,

$d\mathfrak{E}_j$ est le travail virtuel des forces d'inertie,

$d\mathfrak{E}_v$ est le travail virtuel des actions de viscosité.

Le travail virtuel des actions d'inertie a pour valeur

$$(12) \quad d\mathfrak{E}_j = - \int (\gamma_x \delta x + \gamma_y \delta y + \gamma_z \delta z) dm,$$

$\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ étant les composantes de l'accélération de la masse élémentaire dm ,
 $\delta x, \delta y, \delta z$ les composantes du déplacement virtuel de la même masse,
 et l'intégration s'étendant à toutes les masses élémentaires du système.

Évidemment, pour que ce principe ait un sens, il faut qu'à chaque instant t du mouvement, chacune des masses élémentaires qui composent le système ait une accélération finie et déterminée.

C'est ce qui n'aura pas lieu si, à l'instant t , certaines masses élémentaires dm passent brusquement d'une vitesse u_1, v_1, w_1 à une autre vitesse u_2, v_2, w_2 ; dans ce cas, la masse élémentaire dm a, à l'instant t , une accélération infinie. Ce cas est précisément celui qui se présente si, à l'instant t , le fluide est le siège d'une onde de choc. Le principe énoncé en l'égalité (11) perd donc tout sens si le fluide est, à l'instant t , le siège d'une onde de choc.

⁽¹⁾ B. RIEMANN, *Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite* (Abhandlungen der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Bd VIII, 1860. — *Riemann's Werke*, p. 145).

⁽²⁾ E. JOUGUET, *Comptes rendus*, t. CXXXII, p. 673; 18 mars 1901.

⁽³⁾ Première Partie, égalité (2).

Le principe exprimé par l'égalité (11) peut se mettre sous une forme un peu différente; cette forme est rigoureusement équivalente à la précédente toutes les fois qu'à l'instant t chaque masse élémentaire a une accélération finie et déterminée; mais elle a sur la précédente l'avantage de garder un sens dans le cas où le fluide est le siège d'une onde de choc; nous ferons alors l'hypothèse que cette proposition, qui garde un sens, continue d'exprimer un principe exact.

Soient u, v, w les composantes de la vitesse de la masse élémentaire dm , à l'instant t , et u', v', w' les composantes de la vitesse de la même masse élémentaire, à l'instant $(t + dt)$. Si, à l'instant t , la masse élémentaire dm admet une accélération finie et déterminée dont $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ sont les composantes, on peut écrire

$$\gamma_x = \frac{u' - u}{dt}, \quad \gamma_y = \frac{v' - v}{dt}, \quad \gamma_z = \frac{w' - w}{dt}.$$

S'il en est de même pour toutes les masses élémentaires du système, l'égalité (12) devient

$$d\tilde{\mathcal{E}}_j = - \frac{1}{dt} \int [(u' - u) \partial x + (v' - v) \partial y + (w' - w) \partial z] dm$$

et l'égalité (11) s'écrit

$$(13) \quad (d\tilde{\mathcal{E}}_e + d\tilde{\mathcal{E}}_v - \partial_T \tilde{\mathcal{F}}) dt - \int [(u' - u) \partial x + (v' - v) \partial y + (w' - w) \partial z] dm = 0.$$

Cette proposition garde un sens même s'il existe des masses élémentaires dm pour lesquelles, entre les instants t et $(t + dt)$, les trois composantes de la vitesse éprouvent des variations $(u' - u), (v' - v), (w' - w)$, qui sont finies, pourvu que l'intégrale $\int dm$, étendue à ces masses, soit de l'ordre de dt . Nous ferons l'hypothèse que, dans ce cas, cette proposition continue d'exprimer un principe exact.

Il est bien entendu, d'ailleurs, que l'on continue d'avoir, dans toute la masse fluide,

$$\partial x = \varepsilon f(x, y, z), \quad \partial y = \varepsilon g(x, y, z), \quad \partial z = \varepsilon h(x, y, z),$$

ε étant une quantité infiniment petite indépendante de x, y, z et f, g, h étant trois fonctions régulières dans toute la masse fluide.

La formule

$$\partial \rho = - \rho \left(\frac{\partial \partial x}{\partial x} + \frac{\partial \partial y}{\partial y} + \frac{\partial \partial z}{\partial z} \right)$$

nous montre alors que

$$\partial \rho = \varepsilon r(x, y, z),$$

r étant une fonction finie dans toute la masse fluide.

Partageons le fluide étudié en deux parties que nous désignerons par les indices a et b ; tous les points matériels qui, entre les instants t et $(t + dt)$, cessent d'avoir une accélération finie et déterminée seront supposés *intérieurs* à la partie a ; par conséquent, entre les instants t et $(t + dt)$, il existera une accélération finie et déterminée en tous les points de la masse b et de la surface Σ qui la sépare de la masse a .

Nous avons, en conservant les notations de la première Partie [égalités (67)],

$$\partial_{\mathbf{T}} \mathcal{F} = \partial_{\mathbf{T}} \int \zeta(\rho, \mathbf{T}) dm - \int (\mathbf{X}_i \partial x + \mathbf{Y}_i \partial y + \mathbf{Z}_i \partial z + \mathbf{A}_i \partial \rho) dm,$$

les deux intégrations s'étendant à la masse fluide tout entière.

Mais, d'une part,

$$\int \zeta(\rho, \mathbf{T}) dm = \int_a \zeta(\rho, \mathbf{T}) dm + \int_b \zeta(\rho, \mathbf{T}) dm.$$

D'autre part, en vertu de sa définition [I^{re} Partie, équations (67)], la quantité \mathbf{X}_i peut s'écrire

$$\mathbf{X}_i = \mathbf{X}_{ia} + \mathbf{X}_{ib},$$

\mathbf{X}_{ia} étant la partie de \mathbf{X}_i qui provient des actions exercées, au point considéré, par les diverses parties de la masse a et \mathbf{X}_{ib} étant la partie de \mathbf{X}_i qui provient des actions exercées, au même point, par les diverses parties de la masse b . Les quantités $\mathbf{Y}_i, \mathbf{Z}_i, \mathbf{A}_i$ se décomposent d'une manière analogue. On a donc

$$\begin{aligned} & \int (\mathbf{X}_i \partial x + \mathbf{Y}_i \partial y + \mathbf{Z}_i \partial z + \mathbf{A}_i \partial \rho) dm \\ &= \int_a (\mathbf{X}_{ia} \partial x + \mathbf{Y}_{ia} \partial y + \mathbf{Z}_{ia} \partial z + \mathbf{A}_{ia} \partial \rho) dm \\ &+ \int_a (\mathbf{X}_{ib} \partial x + \mathbf{Y}_{ib} \partial y + \mathbf{Z}_{ib} \partial z + \mathbf{A}_{ib} \partial \rho) dm \\ &+ \dots\dots\dots, \end{aligned}$$

+... désignant deux termes analogues aux termes déjà écrits, mais où les intégrales s'étendraient à la masse b .

Soient \mathcal{F}_a le potentiel interne de la masse a et \mathcal{F}_b le potentiel interne de la masse b . Nous aurons visiblement

$$\begin{aligned} \partial_{\mathbf{T}} \mathcal{F}_a &= \partial_{\mathbf{T}} \int_a \zeta(\rho, \mathbf{T}) dm - \int_a (\mathbf{X}_{ia} \partial x + \mathbf{Y}_{ia} \partial y + \mathbf{Z}_{ia} \partial z + \mathbf{A}_{ia} \partial \rho) dm, \\ \partial_{\mathbf{T}} \mathcal{F}_b &= \partial_{\mathbf{T}} \int_b \zeta(\rho, \mathbf{T}) dm - \int_b (\mathbf{X}_{ib} \partial x + \mathbf{Y}_{ib} \partial y + \mathbf{Z}_{ib} \partial z + \mathbf{A}_{ib} \partial \rho) dm. \end{aligned}$$

Toutes ces égalités nous permettent d'écrire

$$(14) \quad \begin{aligned} \partial_{\mathbf{r}} \mathcal{F} = & \partial_{\mathbf{r}} \mathcal{F}_a - \int_a (\mathbf{X}_{ib} \delta x + \mathbf{Y}_{ib} \delta y + \mathbf{Z}_{ib} \delta z + \mathbf{A}_{ib} \delta \rho) dm \\ & + \partial_{\mathbf{r}} \mathcal{F}_b - \int_b (\mathbf{X}_{ia} \delta x + \mathbf{Y}_{ia} \delta y + \mathbf{Z}_{ia} \delta z + \mathbf{A}_{ia} \delta \rho) dm. \end{aligned}$$

Pour simplifier le calcul du travail virtuel $d\mathcal{E}_e$ des actions extérieures, nous supposons que la masse a n'a aucun point commun avec la partie, soumise à des déformations virtuelles, de la surface S qui limite le fluide; nous aurons alors

$$(15) \quad \begin{aligned} d\mathcal{E}_e = & \int_a (\mathbf{X}_e \delta x + \mathbf{Y}_e \delta y + \mathbf{Z}_e \delta z + \mathbf{A}_e \delta \rho) dm \\ & + \int_b (\mathbf{X}_e \delta x + \mathbf{Y}_e \delta y + \mathbf{Z}_e \delta z + \mathbf{A}_e \delta \rho) dm \\ & + \int (\mathbf{P}_x \delta x + \mathbf{P}_y \delta y + \mathbf{P}_z \delta z) dS. \end{aligned}$$

Si nous supposons, comme nous le ferons dorénavant, les deux masses a et b soudées l'une à l'autre, le travail virtuel $d\mathcal{E}_v$ des actions de viscosité sera la somme des travaux virtuels des viscosités intrinsèques des deux parties a et b :

$$(16) \quad d\mathcal{E}_v = d\mathcal{E}_{va} + d\mathcal{E}_{vb}.$$

Enfin, comme l'accélération est finie et déterminée en tous les points de la masse b , il est clair que l'on peut écrire

$$(17) \quad \begin{aligned} d\mathcal{E}_j = & - \frac{1}{dt} \int_a [(u' - u) \delta x + (v' - v) \delta y + (w' - w) \delta z] dm \\ & - \int_b (\gamma_x \delta x + \gamma_y \delta y + \gamma_z \delta z) dm. \end{aligned}$$

En vertu des égalités (14), (15), (16), (17), l'égalité (13) peut s'écrire

$$(18) \quad \mathbf{A} + \mathbf{B} = 0,$$

avec

$$(19) \quad \begin{aligned} \mathbf{A} = dt \{ & d\mathcal{E}_{va} - \partial_{\mathbf{r}} \mathcal{F}_a \\ & + \int_a [(\mathbf{X}_e + \mathbf{X}_{ib}) \delta x + (\mathbf{Y}_e + \mathbf{Y}_{ib}) \delta y + (\mathbf{Z}_e + \mathbf{Z}_{ib}) \delta z + (\mathbf{A}_e + \mathbf{A}_{ib}) \delta \rho] dm \} \\ & - \int_a [(u' - u) \delta x + (v' - v) \delta y + (w' - w) \delta z] dm \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 (20) \quad \frac{B}{dt} = & d\mathfrak{E}_{vb} - \partial_T \mathfrak{F}_e - \int_b (\gamma_x \partial x + \gamma_y \partial y + \gamma_z \partial z) dm \\
 & + \int_b [(\mathbf{X}_e + \mathbf{X}_{ia}) \partial x + (\mathbf{Y}_e + \mathbf{Y}_{ia}) \partial y + (\mathbf{Z}_e + \mathbf{Z}_{ia}) \partial z + (\mathbf{A}_e + \mathbf{A}_{ia}) \partial \rho] dm \\
 & + \int (\mathbf{P}_x \partial x + \mathbf{P}_y \partial y + \mathbf{P}_z \partial z) dS.
 \end{aligned}$$

Nous allons maintenant donner de B une autre expression.

Nous pouvons, en premier lieu, donner au système une modification virtuelle qui laisse immobiles et invariables tous les éléments de la masse a ; A est alors identiquement nul, et l'égalité (18) se réduit à

$$B = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{B}{dt} = 0.$$

Si l'on se reporte alors à l'égalité (20) et si l'on observe qu'au sein de la masse b les composantes u , v , w de la vitesse varient d'une manière continue d'un point à l'autre et d'un instant à l'autre, on reconnaît que la question à traiter est semblable de tout point à la mise en équations du problème fondamental de l'Hydrodynamique. Il est inutile de reprendre en détail la solution de ce problème; nous pouvons indiquer d'emblée les résultats suivants, analogues à ceux que nous avons obtenus en la première Partie [égalités (74), (75), (76)] :

1° On a, en tout point de la masse b ,

$$(21) \quad \begin{cases} \frac{\partial \Pi}{\partial x} - \rho(\mathbf{X}_{ib} + \mathbf{X}_{ia} + \mathbf{X}_e - \gamma_x) - q_x = 0, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial y} - \rho(\mathbf{Y}_{ib} + \mathbf{Y}_{ia} + \mathbf{Y}_e - \gamma_y) - q_y = 0, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial z} - \rho(\mathbf{Z}_{ib} + \mathbf{Z}_{ia} + \mathbf{Z}_e - \gamma_z) - q_z = 0, \end{cases}$$

$$(22) \quad \Pi + \rho^2(\mathbf{A}_{ib} + \mathbf{A}_{ia} + \mathbf{A}_e) - \rho^2 \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} = 0.$$

2° On a, en tout point de la surface S, où n_i est la normale vers l'intérieur de la masse b ,

$$(23) \quad \begin{cases} \Pi \cos(n_i, x) = \mathbf{P}_x + p_x, \\ \Pi \cos(n_i, y) = \mathbf{P}_y + p_y, \\ \Pi \cos(n_i, z) = \mathbf{P}_z + p_z. \end{cases}$$

Dans ces égalités, Π est une fonction régulière de x, y, z ; les quantités p_x, p_y, p_z

sont données par les égalités (48) de la première Partie, savoir

$$(24) \quad \begin{cases} p_x = -[\nu_x \cos(n_i, x) + \tau_z \cos(n_i, y) + \tau_y \cos(n_i, z)], \\ p_y = -[\tau_z \cos(n_i, x) + \nu_y \cos(n_i, y) + \tau_x \cos(n_i, z)], \\ p_z = -[\tau_y \cos(n_i, x) + \tau_x \cos(n_i, y) + \nu_z \cos(n_i, z)], \end{cases}$$

tandis que les quantités q_x, q_y, q_z sont données par les égalités (49) de la première Partie, savoir

$$(25) \quad \begin{cases} q_x = -\left(\frac{\partial \nu_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_z}{\partial y} + \frac{\partial \tau_y}{\partial z}\right), \\ q_y = -\left(\frac{\partial \tau_z}{\partial x} + \frac{\partial \nu_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_x}{\partial z}\right), \\ q_z = -\left(\frac{\partial \tau_y}{\partial x} + \frac{\partial \tau_x}{\partial y} + \frac{\partial \nu_z}{\partial z}\right). \end{cases}$$

Ces résultats acquis, donnons au système une modification virtuelle quelconque. Multiplions respectivement les égalités (21) par $\delta x d\omega, \delta y d\omega, \delta z d\omega$; ajoutons membre à membre les résultats et intégrons pour la masse b tout entière; si nous tenons compte des égalités (24), (25) et de l'égalité

$$\delta \rho = -\rho \left(\frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z} \right),$$

des intégrations très faciles transforment l'égalité obtenue en la suivante :

$$(26) \quad \begin{aligned} & \int_b [(\mathbf{X}_{ia} + \mathbf{X}_{ib} + \mathbf{X}_e - \gamma_x) \delta x + (\mathbf{Y}_{ia} + \mathbf{Y}_{ib} + \mathbf{Y}_e - \gamma_y) \delta y \\ & \quad + (\mathbf{Z}_{ia} + \mathbf{Z}_{ib} + \mathbf{Z}_e - \gamma_z) \delta z] dm \\ & - \int_b \frac{\Pi}{\rho^2} \delta \rho dm \\ & + \int_b \left[\nu_x \frac{\partial \delta x}{\partial x} + \nu_y \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \nu_z \frac{\partial \delta z}{\partial z} + \tau_x \left(\frac{\partial \delta y}{\partial z} + \frac{\partial \delta z}{\partial y} \right) \right. \\ & \quad \left. + \tau_y \left(\frac{\partial \delta z}{\partial x} + \frac{\partial \delta x}{\partial z} \right) + \tau_z \left(\frac{\partial \delta x}{\partial y} + \frac{\partial \delta y}{\partial x} \right) \right] d\omega \\ & + \int_s \left\{ [\Pi \cos(n_i, x) - p_x] \delta x + [\Pi \cos(n_i, y) - p_y] \delta y \right. \\ & \quad \left. + [\Pi \cos(n_i, z) - p_z] \delta z \right\} dS \\ & - \int_\Sigma \left\{ [(\Pi + \nu_x) \cos(n_a, x) + \tau_z \cos(n_a, y) + \tau_y \cos(n_a, z)] \delta x \right. \\ & \quad + [\tau_z \cos(n_a, x) + (\Pi + \nu_y) \cos(n_a, y) + \tau_x \cos(n_a, z)] \delta y \\ & \quad \left. + [\tau_y \cos(n_a, x) + \tau_x \cos(n_a, y) + (\Pi + \nu_z) \cos(n_a, z)] \delta z \right\} d\Sigma = 0, \end{aligned}$$

n_a étant la normale menée, en un point de la surface Σ , vers l'intérieur de la masse a .

Tenons compte des égalités (22) et (23); observons que l'on a

$$\begin{aligned}\delta_T \bar{\mathcal{F}}_b &= \int_b \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} \delta \rho \, dm - \int_b (X_{ib} \delta x + Y_{ib} \delta y + Z_{ib} \delta z + A_{ib} \delta \rho) \, dm, \\ d \bar{\mathcal{E}}_{vb} &= \int_b \left[v_x \frac{\partial \delta x}{\partial x} + v_y \frac{\partial \delta y}{\partial y} + v_z \frac{\partial \delta z}{\partial z} \right. \\ &\quad \left. + \tau_x \left(\frac{\partial \delta z}{\partial y} + \frac{\partial \delta y}{\partial z} \right) + \tau_y \left(\frac{\partial \delta x}{\partial z} + \frac{\partial \delta z}{\partial x} \right) + \tau_z \left(\frac{\partial \delta y}{\partial x} + \frac{\partial \delta x}{\partial y} \right) \right] d\omega,\end{aligned}$$

et les égalités (20) et (26) nous donneront

$$\begin{aligned}\frac{B}{dt} = \int_{\Sigma} \{ & [(\Pi + v_x) \cos(n_a, x) + \tau_z \cos(n_a, y) + \tau_y \cos(n_a, z)] \delta x \\ & + [\tau_z \cos(n_a, x) + (\Pi + v_y) \cos(n_a, y) + \tau_x \cos(n_a, z)] \delta y \\ & + [\tau_y \cos(n_a, x) + \tau_x \cos(n_a, y) + (\Pi + v_z) \cos(n_a, z)] \delta z \} d\Sigma.\end{aligned}$$

Cette égalité, jointe à l'égalité (19), transforme l'égalité (18) en

$$\begin{aligned}(27) \quad & \int_a [(u' - u) \delta x + (v' - v) \delta y + (w' - w) \delta z] \, dm - dt \, d\bar{\mathcal{E}}_{va} + dt \, \delta_T \bar{\mathcal{F}}_a \\ & - dt \int_a [(X_e + X_{ib}) \delta x + (Y_e + Y_{ib}) \delta y + (Z_e + Z_{ib}) \delta z + (A_e + A_{ib}) \delta \rho] \, dm \\ & - dt \int_{\Sigma} \{ [(\Pi + v_x) \cos(n_a, x) + \tau_z \cos(n_a, y) + \tau_y \cos(n_a, z)] \delta x \\ & \quad + [\tau_z \cos(n_a, x) + (\Pi + v_y) \cos(n_a, y) + \tau_x \cos(n_a, z)] \delta y \\ & \quad + [\tau_y \cos(n_a, x) + \tau_x \cos(n_a, y) + (\Pi + v_z) \cos(n_a, z)] \delta z \} d\Sigma = 0.\end{aligned}$$

C'est l'égalité dont nous allons faire usage.

§ 3. — APPLICATION DE L'ÉGALITÉ PRÉCÉDENTE A UNE ONDE DE CHOC.

Considérons un fluide qui est le siège d'une onde de choc.

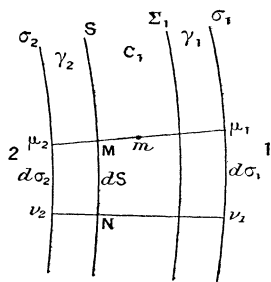
A l'instant t , cette onde est en S (fig. 4); les points matériels qu'elle doit atteindre entre les instants t et $(t + dt)$ sont, à l'instant t , compris entre la surface S et une surface Σ_1 , déjà considérée au § 1; ils forment une couche C_1 , d'épaisseur $\varpi_1 dt$.

Au voisinage de la surface Σ_1 et du côté 1 par rapport à cette surface, menons une surface σ_1 dont la distance à la surface Σ_1 ait pour valeur $\varepsilon_1 dt$, ε_1 étant une quantité finie, qui varie d'une manière continue le long de la surface Σ_1 ; entre les

deux surfaces Σ_1 , σ_1 se trouvent, à l'instant t , des points matériels qui forment une couche γ_1 .

Au voisinage de la surface S et du côté 2 par rapport à cette surface, menons une surface σ_2 dont la distance à la surface S ait pour valeur $\varepsilon_2 dt$, ε_2 étant une

Fig. 4.



quantité finie, qui varie d'une manière continue le long de la surface S ; entre les deux surfaces σ_2 , S , se trouvent, à l'instant t , des points matériels qui forment une couche γ_2 .

Les points matériels qui, à l'instant t , se trouvent au sein des couches γ_1 , C_1 , γ_2 vont composer la masse α , à laquelle nous allons appliquer l'égalité (27). La surface désignée dans cette égalité par Σ se composera ici des deux surfaces σ_1 , σ_2 .

Il est clair que, dans cette égalité (27), nous pouvons supprimer tout terme qui est un infiniment petit d'ordre supérieur à $dt \delta x$ ou à $dt \delta y$ ou à $dt \delta z$.

Évaluons d'abord le terme

$$\int_a [(u' - u) \delta x + (v' - v) \delta y + (w' - w) \delta z] dm.$$

Pour toute masse dm prise soit dans la couche γ_1 , soit dans la couche γ_2 , les différences $(u' - u)$, $(v' - v)$, $(w' - w)$ sont des infiniment petits de l'ordre de dt ; la masse totale de ces deux couches étant elle-même un infiniment petit de l'ordre de dt , la considération des masses dm qui leur appartiennent fournit seulement au terme considéré un contingent de l'ordre de $dt^2 \delta x$ ou de $dt^2 \delta y$ ou de $dt^2 \delta z$; on peut donc faire abstraction de ces masses.

Il n'en est pas de même des masses qui forment la couche C_1 .

Prenons un point m au sein de cette couche et projetons-le orthogonalement en M sur la surface S . Au point m , les différences $(u' - u)$, $(v' - v)$, $(w' - w)$ ont respectivement pour terme principal $(u_2 - u_1)$, $(v_2 - v_1)$, $(w_2 - w_1)$, ces dernières différences se rapportant au point M ; les quantités δx , δy , δz ont respectivement pour terme principal les valeurs de δx , δy , δz au point M ; enfin, si la masse dm , dont m est un point à l'instant t , occupe à cet instant un volume $d\omega$, sa densité à ce même instant diffère infiniment peu de la valeur de ρ_1 au point M .

La quantité à calculer a donc pour terme principal

$$\int_{C_1} \rho_1 [(u_2 - u_1) \delta x + (v_2 - v_1) \delta y + (w_2 - w_1) \delta z] d\omega,$$

la quantité sous le signe \int ayant la valeur qu'elle prend au point M , projection orthogonale sur la surface S d'un point m du volume élémentaire $d\omega$.

Dès lors, on voit sans peine que l'on peut écrire, en négligeant les termes de l'ordre de $dt^2 \delta x$, $dt^2 \delta y$, $dt^2 \delta z$,

$$\begin{aligned} (28) \quad & \int_a [(u' - u) \delta x + (v' - v) \delta y + (w' - w) \delta z] dm \\ &= dt \int_S [(u_2 - u_1) \delta x + (v_2 - v_1) \delta y + (w_2 - w_1) \delta z] \rho_1 \varphi_1 dS. \end{aligned}$$

On a

$$dt \partial_T \tilde{F}_a = dt \int_a \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial \rho} \delta \rho dm.$$

Si l'on observe que la masse a , formée des couches γ_1 , C_1 , γ_2 , est de l'ordre de dt , on voit sans peine que le second membre est de l'ordre de dt^2 , ce qui permet d'écrire

$$(29) \quad dt \partial_T \tilde{F}_a = 0.$$

Une raison semblable permet d'écrire

$$(30) \quad dt \int_a [(X_c + X_{ib}) \delta x + (Y_c + Y_{ib}) \delta y + (Z_c + Z_{ib}) \delta z + (\Lambda_c + \Lambda_{ib}) \delta \rho] dm = 0.$$

Proposons-nous enfin de calculer le terme

$$\begin{aligned} (31) \quad J = dt \int_{\Sigma} \{ & [(\Pi + v_x) \cos(n_a, x) + \tau_z \cos(n_a, y) + \tau_y \cos(n_a, z)] \delta x \\ & + [\tau_z \cos(n_a, x) + (\Pi + v_y) \cos(n_a, y) + \tau_x \cos(n_a, z)] \delta y \\ & + [\tau_y \cos(n_a, x) + \tau_x \cos(n_a, y) + (\Pi + v_z) \cos(n_a, z)] \delta z \} d\Sigma. \end{aligned}$$

La surface Σ se composant ici des deux surfaces σ_1 , σ_2 , on peut écrire

$$(32) \quad J = J_1 + J_2,$$

J_1 , J_2 étant des termes, analogues à J , qui se rapportent respectivement aux surfaces σ_1 , σ_2 .

Lorsqu'un point tend vers le point M de la surface S en demeurant du côté 1 de

cette surface, les quantités

$$\mathbf{H}, \quad \nu_x, \quad \nu_y, \quad \nu_z, \quad \tau_x, \quad \tau_y, \quad \tau_z$$

ont pour limites respectives

$$\mathbf{H}_1, \quad \nu_{x1}, \quad \nu_{y1}, \quad \nu_{z1}, \quad \tau_{x1}, \quad \tau_{y1}, \quad \tau_{z1}.$$

Lorsqu'un point tend vers le point M en demeurant du côté 2 de la surface S, les mêmes quantités ont pour limites respectives

$$\mathbf{H}_2, \quad \nu_{x2}, \quad \nu_{y2}, \quad \nu_{z2}, \quad \tau_{x2}, \quad \tau_{y2}, \quad \tau_{z2}.$$

Considérons un élément $\mu_i \nu_i = d\sigma_i$ de la surface σ_i .

L'aire de cet élément a pour terme principal l'aire de l'élément $MN = dS$, projection orthogonale du premier sur la surface S.

Les quantités $\delta x, \delta y, \delta z$ relatives au point μ_i sont respectivement égales, aux infiniment petits d'ordre supérieur près, aux quantités $\delta x, \delta y, \delta z$ relatives au point M. Les termes principaux des quantités

$$\mathbf{H}, \quad \nu_x, \quad \nu_y, \quad \nu_z, \quad \tau_x, \quad \tau_y, \quad \tau_z$$

relatives au point μ_i sont respectivement égaux aux quantités

$$(33) \quad \mathbf{H}_1, \quad \nu_{x1}, \quad \nu_{y1}, \quad \nu_{z1}, \quad \tau_{x1}, \quad \tau_{y1}, \quad \tau_{z1}$$

relatives au point M.

Enfin, la direction n_a de la normale à la surface σ_i issue du point μ_i et dirigée vers l'intérieur de la masse α diffère infiniment peu de la direction $\mu_i M$. Suivant les notations posées au § 1, la direction $M\mu_i$ a pour cosinus directeurs α, β, γ . On a donc, en négligeant les infiniment petits,

$$(34) \quad \cos(n_a, x) = -\alpha, \quad \cos(n_a, y) = -\beta, \quad \cos(n_a, z) = -\gamma.$$

Si donc nous posons

$$(35) \quad \begin{cases} \mathfrak{P}_{x1} = (\mathbf{H}_1 + \nu_{x1})\alpha + \tau_{z1}\beta + \tau_{y1}\gamma, \\ \mathfrak{P}_{y1} = \tau_{z1}\alpha + (\mathbf{H}_1 + \nu_{y1})\beta + \tau_{x1}\gamma, \\ \mathfrak{P}_{z1} = \tau_{y1}\alpha + \tau_{x1}\beta + (\mathbf{H}_1 + \nu_{z1})\gamma, \end{cases}$$

nous pourrons écrire

$$(36) \quad \mathbf{J}_1 = -dt \int_S (\mathfrak{P}_{x1} \delta x + \mathfrak{P}_{y1} \delta y + \mathfrak{P}_{z1} \delta z) dS.$$

Le calcul de \mathbf{J}_2 sera conduit d'une manière analogue; seulement, dans ce calcul,

les quantités (33) devront être remplacées par les quantités

$$(33 \text{ bis}) \quad \Pi_2, \quad \nu_{x2}, \quad \nu_{y2}, \quad \nu_{z2}, \quad \tau_{x2}, \quad \tau_{y2}, \quad \tau_{z2}.$$

En outre, la normale n_a à la surface σ_2 , issue du point μ_2 et dirigée vers l'intérieur de la masse α , différera infiniment peu de la direction $\mu_2 M$; les égalités (34) devront être remplacées par les égalités

$$(34 \text{ bis}) \quad \cos(n_a, x) = \alpha, \quad \cos(n_a, y) = \beta, \quad \cos(n_a, z) = \gamma.$$

Si donc nous posons

$$(35 \text{ bis}) \quad \begin{cases} \mathcal{P}_{x2} = (\Pi_2 + \nu_{x2})\alpha + \tau_{z2}\beta + \tau_{y2}\gamma, \\ \mathcal{P}_{y2} = \tau_{z2}\alpha + (\Pi_2 + \nu_{y2})\beta + \tau_{x2}\gamma, \\ \mathcal{P}_{z2} = \tau_{y2}\alpha + \tau_{x2}\beta + (\Pi_2 + \nu_{z2})\gamma, \end{cases}$$

nous aurons

$$(36 \text{ bis}) \quad J_2 = dt \int_S (\mathcal{P}_{x2} \delta x + \mathcal{P}_{y2} \delta y + \mathcal{P}_{z2} \delta z) dS.$$

En vertu des égalités (28), (29), (30), (31), (32), (36), (36 bis), et après suppression du facteur commun dt , l'égalité (27) devient

$$(37) \quad \int_S \left\{ \begin{aligned} & [(u_2 - u_1) \rho_1 \varpi_1 - \mathcal{P}_{x2} + \mathcal{P}_{x1}] \delta x \\ & + [(v_2 - v_1) \rho_1 \varpi_1 - \mathcal{P}_{y2} + \mathcal{P}_{y1}] \delta y \\ & + [(\omega_2 - \omega_1) \rho_1 \varpi_1 - \mathcal{P}_{z2} + \mathcal{P}_{z1}] \delta z \end{aligned} \right\} dS - d\mathcal{E}_{\nu a} = 0.$$

Notre effort va porter maintenant sur l'évaluation du terme $d\mathcal{E}_{\nu a}$.

§ 4. — DE LA VISCOSITÉ EN UNE ONDE DE CHOC.

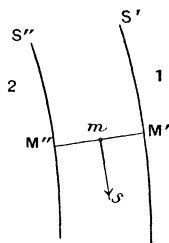
Les principes posés, en la première Partie de ces Recherches, touchant l'étude de la viscosité, ne sont plus applicables ici; ils supposent essentiellement que les quantités u , v , ω varient d'une manière continue d'un point à l'autre de la masse fluide; il n'en est plus ainsi dans le cas qui nous occupe en ce moment. Il nous faut donc, pour évaluer le terme $d\mathcal{E}_{\nu a}$, introduire des hypothèses nouvelles touchant les actions de viscosité.

Pour introduire ces hypothèses d'une façon à la fois logique et naturelle, nous allons considérer le cas où la vitesse (u , v , ω) subit une variation brusque au travers d'une certaine surface comme la limite du cas où la vitesse varie très rapidement à l'intérieur d'une couche très mince. Ce dernier cas peut être traité par les principes qui ont été posés en la première Partie de ces Recherches.

Remplaçons donc la surface S par deux surfaces très voisines S' , S'' (*fig. 5*), la surface S'' étant du côté 2 par rapport à la surface S' .

Prenons un point M'' sur la surface S'' et projetons-le orthogonalement en M' sur la surface S' ; nous désignerons par α , β , γ les cosinus directeurs de la direc-

Fig. 5.



tion $M''M'$ et par h la longueur $M''M'$. Si m est un point de la ligne $M''M'$, nous désignerons par l la longueur $M''m$; lorsque m se déplacera de M'' à M' , l variera de 0 à h .

Nous désignerons par u_1 , v_1 , w_1 les composantes de la vitesse au point M' et par u_2 , v_2 , w_2 les composantes de la vitesse au point M'' . Si, laissant invariables ces quantités, nous faisons tendre h vers 0, de telle sorte que la surface S'' tende à s'appliquer sur la surface S' , la disposition étudiée aura pour limite celle que nous avons examinée aux paragraphes précédents.

Il est clair que, dans ces conditions, les quantités

$$\frac{\partial u}{\partial l}, \quad \frac{\partial v}{\partial l}, \quad \frac{\partial w}{\partial l},$$

calculées au point m , seront, en général, des quantités infiniment grandes de l'ordre de $\frac{1}{h}$. *Nous supposons que, le long de la ligne $M''M'$, chacune des trois quantités u , v , w , a un sens unique de variation*; dans ces conditions, les quantités

$$\frac{\partial u}{\partial l}, \quad \frac{\partial v}{\partial l}, \quad \frac{\partial w}{\partial l}$$

auront, en tout point de la ligne $M''M'$, respectivement le même signe que

$$u_1 - u_2, \quad v_1 - v_2, \quad w_1 - w_2.$$

Soit s une direction quelconque menée par le point m , normalement à $M'M''$; *il nous est loisible de supposer que les quantités*

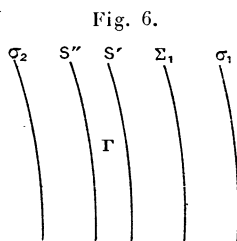
$$\frac{\partial u}{\partial s}, \quad \frac{\partial v}{\partial s}, \quad \frac{\partial w}{\partial s}$$

ne croissent pas au delà de toute limite lorsque h tend vers 0.

Dès lors, si nous écrivons seulement les termes qui sont, en général, infinis comme $\frac{1}{h}$, nous aurons

$$(38) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha \frac{\partial u}{\partial l}, & \frac{\partial u}{\partial y} = \beta \frac{\partial u}{\partial l}, & \frac{\partial u}{\partial z} = \gamma \frac{\partial u}{\partial l}, \\ \frac{\partial v}{\partial x} = \alpha \frac{\partial v}{\partial l}, & \frac{\partial v}{\partial y} = \beta \frac{\partial v}{\partial l}, & \frac{\partial v}{\partial z} = \gamma \frac{\partial v}{\partial l}, \\ \frac{\partial w}{\partial x} = \alpha \frac{\partial w}{\partial l}, & \frac{\partial w}{\partial y} = \beta \frac{\partial w}{\partial l}, & \frac{\partial w}{\partial z} = \gamma \frac{\partial w}{\partial l}. \end{cases}$$

Considérons tous les éléments matériels qui, à un instant quelconque compris entre t et $(t + dt)$, feront partie de la couche où les vitesses varient très rapidement d'un point à l'autre. A l'instant t , ils sont tous compris entre la surface S'' et la surface Σ_1 (*fig. 6*). Du côté 1 de la surface Σ_1 , traçons la surface σ_1 à une dis-



tance $\varepsilon_1 dt$ de la première; du côté 2 de la surface S'' , traçons-la sur la surface σ_2 à une distance $\varepsilon_2 dt$ de cette surface S'' . Appelons a la masse comprise entre σ_1 et σ_2 et calculons $d\bar{c}_{va}$ ou plutôt la limite vers laquelle tend cette quantité lorsque h tend vers 0. Notre objet étant d'expliciter l'égalité (37), nous ne garderons dans ce calcul que les termes finis.

Nous pouvons faire usage ici des principes touchant la viscosité posés en la première Partie de ces Recherches; nous aurons donc [I^{re} Partie, égalité (46)]

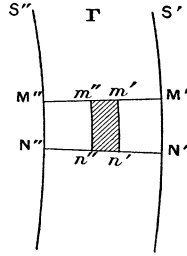
$$(39) \quad d\bar{c}_{va} = \int_a \left[\nu_x \frac{\partial \delta x}{\partial x} + \nu_y \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \nu_z \frac{\partial \delta z}{\partial z} + \tau_x \left(\frac{\partial \delta y}{\partial z} + \frac{\partial \delta z}{\partial y} \right) + \tau_y \left(\frac{\partial \delta z}{\partial x} + \frac{\partial \delta x}{\partial z} \right) + \tau_z \left(\frac{\partial \delta x}{\partial y} + \frac{\partial \delta y}{\partial x} \right) \right] d\omega.$$

Soit Γ la couche comprise entre les surfaces S' et S'' . Pour tout élément de volume $d\omega$ n'appartenant pas à la couche Γ , $\nu_x, \nu_y, \nu_z, \tau_x, \tau_y, \tau_z$ ont, à l'instant t , des valeurs qui demeurent finies lorsque h tend vers 0; d'autre part, le volume total occupé par ces éléments tend vers 0 lorsque h et dt tendent vers 0; nous pouvons donc négliger l'apport de ces éléments et raisonner comme si, dans l'égalité (39), l'intégrale s'étendait à la seule couche Γ .

Soit $M'N' = dS'$ (*fig. 7*) un élément de la surface S' . Par le contour de cet élément, menons des normales $M'M''$, $N'N''$, ... à la surface S' ; nous découpons dans la couche Γ un petit volume $M'N'M''N''$.

Sur la normale $M'M''$ prenons deux points infiniment voisins m'' , m' , et soit dl

Fig. 7.



la distance $m''m'$. Par les points m'' , m' menons des surfaces $m''n''$, $m'n'$, parallèles à la surface S' ; dans le petit volume considéré, elles découpent un élément

$$d\omega = m'n' m''n''.$$

En négligeant une quantité dont le rapport à $d\omega$ s'annule en même temps que h , on peut écrire

$$d\omega = dl dS'.$$

Les valeurs de

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \partial x}{\partial x}, \quad \frac{\partial \partial y}{\partial y}, \quad \frac{\partial \partial z}{\partial z}, \\ & \frac{\partial \partial z}{\partial y} + \frac{\partial \partial y}{\partial z}, \quad \frac{\partial \partial x}{\partial z} + \frac{\partial \partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial \partial y}{\partial x} + \frac{\partial \partial x}{\partial y}, \end{aligned}$$

en un point de l'élément $d\omega$, ont respectivement pour terme principal, lorsque h tend vers 0, les valeurs des mêmes quantités au point M' .

Si donc on pose

$$(40) \quad \begin{cases} N_x = \int_0^h \nu_x dl, & N_y = \int_0^h \nu_y dl, & N_z = \int_0^h \nu_z dl, \\ T_x = \int_0^h \tau_x dl, & T_y = \int_0^h \tau_y dl, & T_z = \int_0^h \tau_z dl, \end{cases}$$

formules qui déterminent les six quantités N_x , N_y , N_z , T_x , T_y , T_z en chaque point M' de la surface S' ; si l'on observe en outre que, lorsque h tend vers 0, la surface S' tend à devenir la surface S , et le point M' à devenir un point M de la

surface S, on peut donner à la quantité $d\mathfrak{E}_{va}$ cette forme limite

$$(41) \quad d\mathfrak{E}_{va} = \int_S \left[N_x \frac{\partial \delta x}{\partial x} + N_y \frac{\partial \delta y}{\partial y} + N_z \frac{\partial \delta z}{\partial z} \right. \\ \left. + T_x \left(\frac{\partial \delta y}{\partial z} + \frac{\partial \delta z}{\partial y} \right) + T_y \left(\frac{\partial \delta z}{\partial x} + \frac{\partial \delta x}{\partial z} \right) + T_z \left(\frac{\partial \delta x}{\partial y} + \frac{\partial \delta y}{\partial x} \right) \right] dS.$$

Dans cette formule (41), les quantités $N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_z$ sont remplacées par leurs valeurs limites pour $h = 0$.

A l'égard de ces valeurs limites, on peut faire des suppositions diverses, dont voici la première :

HYPOTHÈSE A. — Les quantités

$$v_x, \quad v_y, \quad v_z, \quad \tau_x, \quad \tau_y, \quad \tau_z$$

ne croissent pas au delà de toute limite, lorsque les quantités

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

croissent au delà de toute limite.

Cette hypothèse, jointe aux égalités (40), montre que $N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_z$ tendent vers 0 lorsque k tend vers 0, en sorte que l'égalité (41) devient simplement

$$(42) \quad d\mathfrak{E}_{va} = 0.$$

Cette hypothèse est assurément vérifiée si l'on suppose le fluide absolument dépourvu de viscosité; hors ce cas, elle est peu vraisemblable, et la suivante paraît plus naturelle :

HYPOTHÈSE B. — Les égalités [I^{re} Partie, égalités (51) et (52)]

$$(43) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_x = -\lambda(\rho, T) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - 2\mu(\rho, T) \frac{\partial u}{\partial x}, \\ v_y = -\lambda(\rho, T) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - 2\mu(\rho, T) \frac{\partial v}{\partial y}, \\ v_z = -\lambda(\rho, T) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - 2\mu(\rho, T) \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \tau_x = -\mu(\rho, T) \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \\ \tau_y = -\mu(\rho, T) \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), \\ \tau_z = -\mu(\rho, T) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \end{array} \right.$$

dont l'exactitude est admise lorsque les dérivées partielles de u , v , w , ne surpassent pas certaines limites, demeurent vraies lorsque ces dérivées croissent au delà de toute limite.

Posons

$$(44) \quad \left\{ \begin{array}{ll} (u_1 - u_2) L_x = \int_0^h \lambda(\rho, T) \frac{\partial u}{\partial l} dl, & (u_1 - u_2) M_x = \int_0^h \mu(\rho, T) \frac{\partial u}{\partial l} dl, \\ (v_1 - v_2) L_y = \int_0^h \lambda(\rho, T) \frac{\partial v}{\partial l} dl, & (v_1 - v_2) M_y = \int_0^h \mu(\rho, T) \frac{\partial v}{\partial l} dl, \\ (w_1 - w_2) L_z = \int_0^h \lambda(\rho, T) \frac{\partial w}{\partial l} dl, & (w_1 - w_2) M_z = \int_0^h \mu(\rho, T) \frac{\partial w}{\partial l} dl. \end{array} \right.$$

Les quantités $L_x, L_y, L_z, M_x, M_y, M_z$ tendront vers des limites finies lorsque h tendra vers 0; ces limites dépendront, d'ailleurs, de la manière dont u, v, w varient avec l .

Nous savons que $\frac{\partial u}{\partial l}$ a le signe de $(u_1 - u_2)$; d'autre part, nous avons [I^{re} Partie, condition (62 bis)]

$$\mu(\rho, T) > 0.$$

L'égalité

$$(u_1 - u_2) M_x = \int_0^h \mu(\rho, T) \frac{\partial u}{\partial l} dl$$

nous donne donc la première des conditions

$$(45) \quad M_x > 0, \quad M_y > 0, \quad M_z > 0.$$

Les deux autres se démontrent d'une manière analogue.

Les égalités (44) nous donnent

$$(u_1 - u_2) (L_x + 2 M_x) = \int_0^h [\lambda(\rho, T) + 2 \mu(\rho, T)] \frac{\partial u}{\partial l} dl.$$

Mais nous avons [I^{re} Partie, condition (65)]

$$\lambda(\rho, T) + 2 \mu(\rho, T) > 0.$$

Nous obtenons donc la première des conditions

$$(46) \quad \left\{ \begin{array}{l} L_x + 2 M_x > 0, \\ L_y + 2 M_y > 0, \\ L_z + 2 M_z > 0. \end{array} \right.$$

Les deux autres se démontrent d'une manière analogue.

Les égalités (38), (40) et (42) nous donnent les valeurs limites suivantes pour $N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_z$:

$$(47) \quad \begin{cases} N_x = (L_x + 2M_x)(u_2 - u_1)\alpha + L_y(v_2 - v_1)\beta + L_z(w_2 - w_1)\gamma, \\ N_y = (L_y + 2M_y)(v_2 - v_1)\beta + L_z(w_2 - w_1)\gamma + L_x(u_2 - u_1)\alpha, \\ N_z = (L_z + 2M_z)(w_2 - w_1)\gamma + L_x(u_2 - u_1)\alpha + L_y(v_2 - v_1)\beta; \\ T_x = M_y(v_2 - v_1)\gamma + M_z(w_2 - w_1)\beta, \\ T_y = M_z(w_2 - w_1)\alpha + M_x(u_2 - u_1)\gamma, \\ T_z = M_x(u_2 - u_1)\beta + M_y(v_2 - v_1)\alpha. \end{cases}$$

Il suffit de reporter ces valeurs dans l'égalité (41) pour obtenir l'expression de $d\tau_{va}$ qui correspond à l'hypothèse B.

§ 5. — CAS OU UN FLUIDE VISQUEUX NE PEUT PROPAGER UNE ONDE DE CHOC.

C'est de l'hypothèse B que nous allons, tout d'abord, suivre les conséquences; nous allons montrer que, dans cette hypothèse, aucune onde de choc ne peut se propager au sein d'un fluide visqueux.

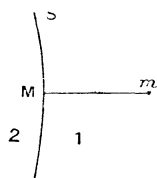
Sur la surface S, faisons choix d'un système de coordonnées curvilignes orthogonales, θ et θ' ; l'élément linéaire ds , tracé sur cette surface, sera donné par l'égalité

$$(48) \quad ds^2 = [\Theta(\theta, \theta')]^2 d\theta^2 + [\Theta'(\theta, \theta')]^2 d\theta'^2.$$

La tangente à la ligne θ ($\theta' = \text{const.}$), menée dans le sens où θ est croissant, fait avec Ox, Oy, Oz des angles dont les cosinus sont λ, μ, ν . La tangente à la ligne θ' ($\theta = \text{const.}$), menée dans le sens où θ' est croissant, fait avec Ox, Oy, Oz des angles dont les cosinus sont λ', μ', ν' .

Un point m , infiniment voisin de la surface S (fig. 8), peut être marqué par

Fig. 8.



ses coordonnées x, y, z ; mais il peut aussi être marqué par les coordonnées θ, θ' de sa projection orthogonale M sur la surface S et par la longueur n de la projetante Mm , comptée positivement lorsque la direction Mm va du côté 2 au côté 1.

Supposons positives les deux fonctions $\Theta(\theta, \theta')$, $\Theta'(\theta, \theta')$. Nous aurons

$$(49) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\lambda}{\Theta}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\mu}{\Theta}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\nu}{\Theta}, \\ \frac{\partial \theta'}{\partial x} = \frac{\lambda'}{\Theta'}, \quad \frac{\partial \theta'}{\partial y} = \frac{\mu'}{\Theta'}, \quad \frac{\partial \theta'}{\partial z} = \frac{\nu'}{\Theta'}, \\ \frac{\partial n}{\partial x} = \alpha, \quad \frac{\partial n}{\partial y} = \beta, \quad \frac{\partial n}{\partial z} = \gamma. \end{array} \right.$$

Soit f une grandeur qui a, au point m , une valeur déterminée. On peut l'exprimer soit en fonction de x, y, z , soit en fonction de θ, θ', n , et l'on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \theta'} \frac{\partial \theta'}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial x}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \theta'} \frac{\partial \theta'}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial y}, \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \theta'} \frac{\partial \theta'}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial z} \end{aligned}$$

ou bien, selon les égalités (49),

$$(50) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\lambda}{\Theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\lambda'}{\Theta'} \frac{\partial f}{\partial \theta'} + \alpha \frac{\partial f}{\partial n}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\mu}{\Theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\mu'}{\Theta'} \frac{\partial f}{\partial \theta'} + \beta \frac{\partial f}{\partial n}, \\ \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\nu}{\Theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\nu'}{\Theta'} \frac{\partial f}{\partial \theta'} + \gamma \frac{\partial f}{\partial n}. \end{array} \right.$$

On peut, dans ces formules (50), remplacer f par δx , par δy ou par δz , et transformer ainsi l'expression (41) de $d\mathfrak{E}_{va}$. Si nous posons

$$(51) \quad \left\{ \begin{array}{l} J_x = N_x \alpha + T_z \beta + T_y \gamma, \\ J_y = T_z \alpha + N_y \beta + T_x \gamma, \\ J_z = T_y \alpha + T_x \beta + N_z \gamma; \\ K_x = \frac{1}{\Theta} (N_x \lambda + T_z \mu + T_y \nu), \\ K_y = \frac{1}{\Theta} (T_z \lambda + N_y \mu + T_x \nu), \\ K_z = \frac{1}{\Theta} (T_y \lambda + T_x \mu + N_z \nu); \\ K'_x = \frac{1}{\Theta'} (N_x \lambda' + T_z \mu' + T_y \nu'), \\ K'_y = \frac{1}{\Theta'} (T_z \lambda' + N_y \mu' + T_x \nu'), \\ K'_z = \frac{1}{\Theta'} (T_y \lambda' + T_x \mu' + N_z \nu'), \end{array} \right.$$

l'égalité (41) deviendra

$$d\mathcal{C}_{va} = \int_S \left(J_x \frac{\partial \delta x}{\partial n} + J_y \frac{\partial \delta y}{\partial n} + J_z \frac{\partial \delta z}{\partial n} \right. \\ \left. + K_x \frac{\partial \delta x}{\partial \theta} + K_y \frac{\partial \delta y}{\partial \theta} + K_z \frac{\partial \delta z}{\partial \theta} \right. \\ \left. + K'_x \frac{\partial \delta x}{\partial \theta'} + K'_y \frac{\partial \delta y}{\partial \theta'} + K'_z \frac{\partial \delta z}{\partial \theta'} \right) dS$$

et l'égalité (37) prendra la forme

$$(52) \quad \int_S \left\{ [(u_2 - u_1) \rho_1 \varphi_1 - \mathcal{P}_{x2} + \mathcal{P}_{x1}] \delta x \right. \\ + [(v_2 - v_1) \rho_1 \varphi_1 - \mathcal{P}_{y2} + \mathcal{P}_{y1}] \delta y \\ + [(w_2 - w_1) \rho_1 \varphi_1 - \mathcal{P}_{z2} + \mathcal{P}_{z1}] \delta z \\ - J_x \frac{\partial \delta x}{\partial n} - J_y \frac{\partial \delta y}{\partial n} - J_z \frac{\partial \delta z}{\partial n} \\ - K_x \frac{\partial \delta x}{\partial \theta} - K_y \frac{\partial \delta y}{\partial \theta} - K_z \frac{\partial \delta z}{\partial \theta} \\ \left. - K'_x \frac{\partial \delta x}{\partial \theta'} - K'_y \frac{\partial \delta y}{\partial \theta'} - K'_z \frac{\partial \delta z}{\partial \theta'} \right\} dS = 0.$$

Cette égalité doit avoir lieu quelles que soient, dans tout le fluide, les quantités $\delta x, \delta y, \delta z$.

Or on peut prendre, en tout point de la surface S,

$$\begin{aligned} \delta x = 0, \quad \text{partant} \quad \frac{\partial \delta x}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial \delta x}{\partial \theta'} = 0, \\ \delta y = 0, \quad \text{partant} \quad \frac{\partial \delta y}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial \delta y}{\partial \theta'} = 0, \\ \delta z = 0, \quad \text{partant} \quad \frac{\partial \delta z}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial \delta z}{\partial \theta'} = 0. \end{aligned}$$

Les quantités $\frac{\partial \delta x}{\partial n}, \frac{\partial \delta y}{\partial n}, \frac{\partial \delta z}{\partial n}$ demeurent néanmoins arbitraires. L'égalité (52) devant toujours avoir lieu, on voit que l'on doit avoir, quels que soient $\frac{\partial \delta x}{\partial n}, \frac{\partial \delta y}{\partial n}, \frac{\partial \delta z}{\partial n}$,

$$\int_S \left(J_x \frac{\partial \delta x}{\partial n} + J_y \frac{\partial \delta y}{\partial n} + J_z \frac{\partial \delta z}{\partial n} \right) dS = 0.$$

Il revient au même de dire que l'on a, en tout point de la surface S,

$$(53) \quad J_x = 0, \quad J_y = 0, \quad J_z = 0.$$

Si l'on tient compte des égalités (47) et (51), ces égalités (53) deviennent

$$(54) \quad \left\{ \begin{array}{l} (u_2 - u_1) [(L_x + 2M_x)\alpha^2 + M_x(\beta^2 + \gamma^2)] \\ + (v_2 - v_1)(L_y + M_y)\alpha\beta + (w_2 - w_1)(L_z + M_z)\alpha\gamma = 0, \\ (v_2 - v_1) [(L_y + 2M_y)\beta^2 + M_y(\gamma^2 + \alpha^2)] \\ + (w_2 - w_1)(L_z + M_z)\beta\gamma + (u_2 - u_1)(L_x + M_x)\beta\alpha = 0, \\ (w_2 - w_1) [(L_z + 2M_z)\gamma^2 + M_z(\alpha^2 + \beta^2)] \\ + (u_2 - u_1)(L_x + M_x)\gamma\alpha + (v_2 - v_1)(L_y + M_y)\gamma\beta = 0. \end{array} \right.$$

Pour interpréter ces égalités (54), prenons un point quelconque M de la surface S . Prenons pour axe des z la direction n relative à ce point. Nous aurons alors, en ce point,

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 1$$

et, en ce même point, les égalités (54) deviendront

$$\begin{aligned} M_x (u_2 - u_1) &= 0, \\ M_y (v_2 - v_1) &= 0, \\ (L_z + 2M_z)(w_2 - w_1) &= 0, \end{aligned}$$

ou bien, selon les inégalités (45) et (46),

$$(55) \quad u_2 - u_1 = 0, \quad v_2 - v_1 = 0, \quad w_2 - w_1 = 0.$$

Les égalités (3) et (3 bis) donnent alors

$$\varphi_1 + \varphi_2 = 0,$$

et l'égalité (10) devient

$$(56) \quad \rho_2 - \rho_1 = 0.$$

Ni la densité, ni les composantes de la vitesse ne subissent de discontinuité au travers de la surface S .

Nous arrivons donc au théorème suivant :

Si l'on regarde comme générales les expressions des actions de viscosité reçues dans le cas où les dérivées partielles des composantes de la vitesse ne surpassent pas certaines limites, aucune onde de choc ne peut se propager dans un fluide visqueux.

§ 6. — CAS OU UNE ONDE DE CHOC PEUT SE PROPAGER DANS UN FLUIDE.

Suivons maintenant les conséquences de l'hypothèse A.

En vertu de l'égalité (42), l'égalité (37) devient

$$\int_S \left\{ \begin{aligned} & [(u_2 - u_1)\rho_1\vartheta_1 - \mathfrak{P}_{x2} + \mathfrak{P}_{x1}] \delta x \\ & + [(v_2 - v_1)\rho_1\vartheta_1 - \mathfrak{P}_{y2} + \mathfrak{P}_{y1}] \delta y \\ & + [(w_2 - w_1)\rho_1\vartheta_1 - \mathfrak{P}_{z2} + \mathfrak{P}_{z1}] \delta z \end{aligned} \right\} dS = 0.$$

Pour qu'elle ait lieu, quels que soient δx , δy , δz , il faut et il suffit que l'on ait, en tout point de la surface S,

$$(57) \quad \begin{cases} \rho_1\vartheta_1(u_2 - u_1) = \mathfrak{P}_{x2} - \mathfrak{P}_{x1}, \\ \rho_1\vartheta_1(v_2 - v_1) = \mathfrak{P}_{y2} - \mathfrak{P}_{y1}, \\ \rho_1\vartheta_1(w_2 - w_1) = \mathfrak{P}_{z2} - \mathfrak{P}_{z1}. \end{cases}$$

Supposons, en particulier, que le fluide ne soit pas visqueux. Alors, selon les égalités (35), nous aurons

$$(58) \quad \mathfrak{P}_{x1} = \Pi_1\alpha, \quad \mathfrak{P}_{y1} = \Pi_1\beta, \quad \mathfrak{P}_{z1} = \Pi_1\gamma,$$

tandis que, selon les égalités (35 bis), nous aurons

$$(58 \text{ bis}) \quad \mathfrak{P}_{x2} = \Pi_2\alpha, \quad \mathfrak{P}_{y2} = \Pi_2\beta, \quad \mathfrak{P}_{z2} = \Pi_2\gamma.$$

Les égalités (57) deviendront alors

$$(59) \quad \begin{cases} \rho_1\vartheta_1(u_2 - u_1) = (\Pi_2 - \Pi_1)\alpha, \\ \rho_1\vartheta_1(v_2 - v_1) = (\Pi_2 - \Pi_1)\beta, \\ \rho_1\vartheta_1(w_2 - w_1) = (\Pi_2 - \Pi_1)\gamma. \end{cases}$$

Dans le cas où le fluide n'est pas visqueux, la vitesse u_2 , v_2 , w_2 s'obtient en composant, avec la vitesse u_1 , v_1 , w_1 , une vitesse normale à la surface S.

Multiplions respectivement les égalités (57) par α , β , γ et ajoutons-les membre à membre, en observant que, selon les égalités (3) et (3 bis),

$$(u_2 - u_1)\alpha + (v_2 - v_1)\beta + (w_2 - w_1)\gamma = \vartheta_2 + \vartheta_1,$$

tandis que, selon l'égalité

$$(10) \quad \rho_1\vartheta_1 + \rho_2\vartheta_2 = 0,$$

on a

$$\vartheta_2 + \vartheta_1 = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} \vartheta_1 = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1} \vartheta_2.$$

Nous trouvons

$$\begin{aligned} (60) \quad & \frac{\rho_1}{\rho_2} (\rho_2 - \rho_1) \vartheta_1^2 \\ &= \frac{\rho_2}{\rho_1} (\rho_2 - \rho_1) \vartheta_2^2 = (\mathcal{P}_{x_2} - \mathcal{P}_{x_1}) \alpha + (\mathcal{P}_{y_2} - \mathcal{P}_{y_1}) \beta + (\mathcal{P}_{z_2} - \mathcal{P}_{z_1}) \gamma. \end{aligned}$$

Dans le cas où le fluide n'est pas visqueux, on peut écrire les égalités (58) et (58 *bis*) et l'égalité précédente devient

$$(61) \quad \frac{\rho_1}{\rho_2} (\rho_2 - \rho_1) \vartheta_1^2 = \frac{\rho_2}{\rho_1} (\rho_2 - \rho_1) \vartheta_2^2 = \Pi_2 - \Pi_1.$$

Cette relation a été donnée par Riemann ⁽¹⁾ dans le cas où la propagation de l'onde et le mouvement du fluide se font partout dans une même direction; elle a été généralisée par M. Jouguet ⁽²⁾.

§ 7. — LA RELATION SUPPLÉMENTAIRE. CAS DES FLUIDES BONS CONDUCTEURS.

Il ne paraît pas impossible, au premier abord, que la surface S, qui est surface de discontinuité pour la densité, la pression et les composantes de la vitesse, soit également une surface de discontinuité pour la température. Lorsqu'on s'approche d'un point M de la surface S en demeurant du côté 1 de la surface, la température tendrait vers une certaine limite T₁; lorsqu'on s'approche du même point en demeurant du côté 2 de la surface, la température tendrait vers une autre limite T₂.

Pour examiner cette question, nous allons reprendre la considération de la couche de passage Γ , comme au § 4. Cette considération permettra de faire usage des principes établis dans la première Partie de ces recherches (Chap. I, § 6).

A l'intérieur de la couche Γ , la quantité $\frac{\partial T}{\partial t}$ doit être, en général, une quantité très grande de l'ordre de $\frac{1}{h}$, tandis que nous supposerons, comme il nous est loisible de le faire, que toutes les quantités telles que $\frac{\partial T}{\partial s}$ demeurent finies lorsque h tend vers 0.

⁽¹⁾ RIEMANN, *Abhandlungen der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, Bd VIII; 1860. — *Riemann's Werke*, p. 145.

⁽²⁾ E. JOUGUET, *Comptes rendus*, t. CXXXII, p. 673; 18 mars 1901.

En dehors de la couche Γ , les quantités $\frac{\partial T}{\partial x}$, $\frac{\partial T}{\partial y}$, $\frac{\partial T}{\partial z}$ demeurent finies lorsque h tend vers 0.

La quantité de chaleur dégagée, en une modification réelle ou virtuelle, par un élément quelconque du fluide, est donnée par les égalités (83) et (84) de la première Partie de ces Recherches. On en conclut sans peine la proposition suivante :

Dans le temps dt , une partie quelconque du fluide dégage une quantité de chaleur dQ donnée par la formule

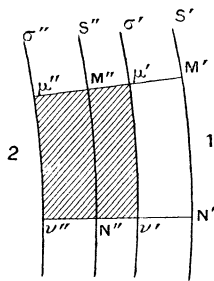
$$(62) \quad E dQ = dt \int T \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho \partial T} \frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial T^2} \frac{dT}{dt} \right) dm \\ - dt \int \left[v_x \frac{\partial u}{\partial x} + v_y \frac{\partial v}{\partial y} + v_z \frac{\partial w}{\partial z} \right. \\ \left. + \tau_x \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \tau_y \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \tau_z \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] d\omega,$$

les deux intégrations s'étendant à la partie du fluide que l'on considère.

Nous allons appliquer cette égalité (62) à une masse fluide déterminée de la manière suivante :

Entre les deux surfaces S' , S'' (*fig. 9*), partant dans la couche Γ , traçons une

Fig. 9.



surface σ' parallèle à S' ; du côté 2 par rapport à la surface S'' , et, partant, en dehors de la couche Γ , menons une autre surface σ'' , parallèle à S' ; supposons que la distance de la surface σ'' à la surface S' soit une longueur du même ordre que h .

Sur la surface S' , prenons une aire finie $M'N' = S'$; par les divers points du contour de cette aire, menons des normales à la surface S' ; sur les surfaces σ' , S'' , σ'' , ces normales découpent respectivement des aires $\mu'\nu'$, $M''N''$, $\mu''\nu''$.

C'est à la masse fluide que renferme, à l'instant t , le volume $\mu'\nu'\mu''\nu''$ que nous allons appliquer la formule (62).

Cette formule va nous donner pour dQ une quantité infiniment petite de l'ordre de dt .

En premier lieu, en effet, la masse à laquelle s'étend la première intégrale, le volume auquel s'étend la seconde sont infiniment petits de l'ordre de dt .

En second lieu, en la première intégrale, la quantité sous le signe \int est finie en tout point de la masse $M''N''\mu''\nu''$; en tout point de la masse $\mu'\nu'M''N''$ elle est, par les quantités $\frac{d\rho}{dt}$, $\frac{dT}{dt}$, très grande de l'ordre de $\frac{1}{h}$.

Enfin, en la seconde intégrale, la quantité sous le signe \int a une valeur finie en tout point du volume $M''N''\mu''\nu''$; en tout point du volume $\mu'\nu'M''N''$ les quantités $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z, \tau_x, \tau_y, \tau_z$ demeurent finies lorsque h tend vers 0; cela résulte de l'hypothèse A dont, en ce moment, nous suivons les conséquences; mais les quantités $\frac{\partial u}{\partial x}, \dots$ sont, en général, infiniment grandes de l'ordre de $\frac{1}{h}$; et il en est de même de la quantité sous le signe \int .

On voit donc que dQ est le produit de dt par une quantité qui ne croît pas au delà de toute limite lorsque h tend vers 0.

D'autre part, désignons par Ω la surface qui entoure le volume $\mu'\nu'\mu''\nu''$, par $d\Omega$ un élément de cette surface, par N la normale à l'élément $d\Omega$ vers l'extérieur de cette surface fermée, par K le coefficient de conductibilité en un point de l'élément $d\Omega$. Nous aurons

$$(63) \quad dQ = - dt \int_{\Omega} K \frac{\partial T}{\partial N} d\Omega.$$

$\frac{\partial T}{\partial N}$ a une valeur finie en tout point de la surface $\mu''\nu''$, qui est en entier à l'extérieur de la couche Γ .

Donc, au second membre de l'égalité (63), la partie $\mu''\nu''$ de la surface Ω fournit, si K n'est pas nul, un contingent qui est de l'ordre de dt .

$\frac{\partial T}{\partial N}$ a encore une valeur finie en tous les points de la surface latérale $\mu'\mu''\nu'\nu''$; cela va de soi pour les parties de cette surface qui sont en dehors de la couche Γ ; cela est encore vrai pour les parties de cette surface qui sont à l'intérieur de la couche Γ , car alors $\frac{\partial T}{\partial N}$ est une des quantités $\frac{\partial T}{\partial s}$ dont nous avons admis qu'elles demeurent finies lorsque h tend vers 0. La considération de la partie latérale $\mu'\mu''\nu'\nu''$ de la surface Ω fournit donc au second membre de l'égalité (63) un terme de l'ordre de $h dt$, infiniment petit par rapport au précédent.

Nous voyons donc que, dQ devant être une quantité de l'ordre de dt , l'inté-

grale

$$\int_{\mu'v'} \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{N}} d\Omega$$

devrait demeurer finie lorsque h tend vers 0.

Or, si \mathbf{K} n'est pas nul, il n'en peut être ainsi, en général, car, le long de la surface $\mu'v'$, on a

$$\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{N}} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t},$$

en sorte que $\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{N}}$ est une quantité infiniment grande de l'ordre de $\frac{1}{h}$.

Nous sommes amenés ainsi à la proposition suivante :

Si le coefficient de conductibilité d'un fluide n'est pas nul, une onde de choc ne peut, au sein de ce fluide, être une surface de discontinuité pour la température.

On a donc, en tout point de la surface \mathbf{S} et à tout instant,

$$(64) \quad \mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_2.$$

Appliquons les résultats que nous venons d'obtenir à l'exemple que définissent les conditions suivantes :

- 1° Le fluide est bon conducteur et dépourvu de viscosité;
- 2° Les actions tant intérieures qu'extérieures sont *newtoniennes* ⁽¹⁾, c'est-à-dire que l'on a

$$(65) \quad \mathbf{A}_e = 0, \quad \mathbf{A}_{ia} = 0, \quad \mathbf{A}_{ib} = 0.$$

Supposons que l'on se donne en un point \mathbf{M} , censé appartenant à une onde de choc :

- 1° Les éléments du mouvement 1, c'est-à-dire les quantités

$$u_1, \quad v_1, \quad w_1, \quad \rho_1, \quad \Pi_1, \quad \mathbf{T}_1,$$

les trois dernières liées par la relation

$$(66) \quad \Pi_1 - \rho_1^2 \frac{\partial \zeta(\rho_1, \mathbf{T}_1)}{\partial \rho_1} = 0,$$

qui résulte des relations (22) et (65);

(1) Pour l'origine de ce mot, voir *Le potentiel thermodynamique et la pression hydrostatique* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3^e série, t. X, p. 216; 1893).

2° La direction (α, β, γ) de la normale à l'onde de choc et la valeur \mathfrak{U} de la vitesse de propagation de cette onde.

Nous allons voir qu'au point M on peut déterminer tous les éléments du mouvement 2, c'est-à-dire les quantités

$$u_2, \quad v_2, \quad w_2, \quad \rho_2, \quad \Pi_2, \quad T_2,$$

les trois dernières étant liées par la relation

$$(66 \text{ bis}) \quad \Pi_2 - \rho_2^2 \frac{\partial \zeta(\rho_2, T_2)}{\partial \rho_2} = 0.$$

L'égalité

$$(64) \quad T_2 = T_1$$

nous fait d'abord connaître T_2 et transforme l'égalité (66 bis) en

$$(66 \text{ ter}) \quad \Pi_2 - \rho_2^2 \frac{\partial \zeta(\rho_2, T_1)}{\partial \rho_2} = 0.$$

L'égalité

$$(3) \quad \mathfrak{V}_1 = \mathfrak{U} - (\alpha u_1 + \beta v_1 + \gamma w_1)$$

détermine \mathfrak{V}_1 .

L'égalité

$$(61) \quad \frac{\rho_2(\Pi_2 - \Pi_1)}{\rho_2 - \rho_1} = \rho_1 \mathfrak{V}_1^2,$$

que l'égalité (66 ter) transforme en

$$(67) \quad \frac{\rho_2^3 \frac{\partial \zeta(\rho_2, T_1)}{\partial \rho_2} - \rho_2 \Pi_1}{\rho_2 - \rho_1} = \rho_1 \mathfrak{V}_1^2,$$

fait alors connaître ρ_2 ; l'égalité (66 ter) détermine ensuite Π_2 .

Enfin, les égalités

$$(59) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_2 = u_1 + \frac{\Pi_2 - \Pi_1}{\rho_1 \mathfrak{V}_1} \alpha, \\ v_2 = v_1 + \frac{\Pi_2 - \Pi_1}{\rho_1 \mathfrak{V}_1} \beta, \\ w_2 = w_1 + \frac{\Pi_2 - \Pi_1}{\rho_1 \mathfrak{V}_1} \gamma \end{array} \right.$$

déterminent u_2, v_2, w_2 et achèvent la solution du problème.

§ 8. — LA RELATION SUPPLÉMENTAIRE. CAS DES FLUIDES MAUVAIS CONDUCTEURS.

Nous allons maintenant supposer le fluide dénué de conductibilité, cas auquel la quantité de chaleur dégagée dans le temps dt par une partie quelconque du fluide est égale à 0.

Pour établir la relation supplémentaire qu'il convient, dans ce cas, d'écrire en tout point d'une onde de choc, nous allons, tout d'abord, mettre sous une forme particulière l'expression de la quantité de chaleur que dégage, dans le temps dt , une partie du fluide au sein de laquelle les éléments du mouvement ne présentent aucune discontinuité.

Appelons b cette partie, a le reste du fluide, Ω la surface qui limite la partie b , n_i la normale à la surface Ω vers l'intérieur de la partie b .

La quantité de chaleur dQ sera donnée par l'égalité (62), où les intégrations s'étendent à la partie b du fluide. En faisant usage des notations que définissent les égalités (24) et (25), cette égalité peut s'écrire

$$(68) \quad \begin{aligned} E dQ = & -dt \int_b T \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho \partial T} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial T^2} \frac{dT}{dt} \right) dm \\ & -dt \int_b (q_x u + q_y v + q_z w) d\omega \\ & -dt \int_{\Omega} (p_x u + p_y v + p_z w) d\Omega. \end{aligned}$$

Mais les égalités (21) donnent

$$(69) \quad \begin{aligned} & -\int_b (q_x u + q_y v + q_z w) d\omega \\ & = -\int_b (\gamma_x u + \gamma_y v + \gamma_z w) dm \\ & \quad + \int_b [(X_{ib} + X_{ia} + X_e) u + (Y_{ib} + Y_{ia} + Y_e) v + (Z_{ib} + Z_{ia} + Z_e) w] dm \\ & \quad - \int_b \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x} u + \frac{\partial \Pi}{\partial y} v + \frac{\partial \Pi}{\partial z} w \right) d\omega. \end{aligned}$$

D'ailleurs

$$(70) \quad \begin{aligned} -\int_b (\gamma_x u + \gamma_y v + \gamma_z w) dm & = -\int_b \left(u \frac{du}{dt} + v \frac{dv}{dt} + w \frac{dw}{dt} \right) dm \\ & = -\frac{d}{dt} \int_b \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} dm \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 (71) \quad & - \int_b \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x} u + \frac{\partial \Pi}{\partial y} v + \frac{\partial \Pi}{\partial z} w \right) d\omega \\
 & = \int_b \Pi \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) d\omega \\
 & \quad + \int_{\Omega} \Pi [u \cos(n_i, x) + v \cos(n_i, y) + w \cos(n_i, z)] d\Omega.
 \end{aligned}$$

L'égalité bien connue

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right),$$

jointe à l'égalité (22), donne

$$(72) \quad \int_b \Pi \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) d\omega = \int \left(\Lambda_{ib} + \Lambda_{ia} + \Lambda_e - \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} \right) \frac{d\rho}{dt} dm.$$

Si l'on définit les quantités P_x , P_y , P_z par les égalités (23), les égalités (68), (69), (70), (71) et (72) donnent

$$\begin{aligned}
 (73) \quad E dQ &= dt \int_{\Omega} (P_x u + P_y v + P_z w) d\Omega \\
 &\quad - dt \frac{d}{dt} \int_b \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} dm \\
 &\quad + dt \int_b \left[\left(T \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho \partial T} - \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} \right) \frac{d\rho}{dt} + T \frac{\partial^2 \zeta}{\partial T^2} \frac{dT}{dt} \right] dm \\
 &\quad + dt \int_b \left(X_e u + Y_e v + Z_e w + \Lambda_e \frac{d\rho}{dt} \right) dm \\
 &\quad + dt \int_b \left(X_{ia} u + Y_{ia} v + Z_{ia} w + \Lambda_{ia} \frac{d\rho}{dt} \right) dm \\
 &\quad + dt \int_b \left(X_{ib} u + Y_{ib} v + Z_{ib} w + \Lambda_{ib} \frac{d\rho}{dt} \right) dm.
 \end{aligned}$$

D'autre part, si l'on pose

$$(74) \quad E \eta(\rho, T) = \zeta(\rho, T) - T \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial T},$$

on aura

$$(75) \quad \int_b \left[\left(T \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \rho \partial T} - \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} \right) \frac{d\rho}{dt} + T \frac{\partial^2 \zeta}{\partial T^2} \frac{dT}{dt} \right] dm = -E \frac{d}{dt} \int_b \eta(\rho, T) dm.$$

Enfin, on sait que l'on a

$$(76) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_b \left(X_e u + Y_e v + Z_e w + A_e \frac{d\rho}{dt} \right) dm &= - \frac{d}{dt} \int_b V_e dm, \\ \int_b \left(X_{ia} u + Y_{ia} v + Z_{ia} w + A_{ia} \frac{d\rho}{dt} \right) dm &= - \frac{d}{dt} \int_b V_{ia} dm, \\ \int_b \left(X_{ib} u + Y_{ib} v + Z_{ib} w + A_{ib} \frac{d\rho}{dt} \right) dm &= - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_b V_{ib} dm. \end{aligned} \right.$$

Les égalités (73), (74), (75), (76) donnent alors

$$(77) \quad E dQ = dt \int_{\Omega} (P_x u + P_y v + P_z w) d\Omega \\ - dt \int_b \left[E \eta(\rho, T) + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + V_e + V_{ia} + \frac{1}{2} V_{ib} \right] dm.$$

Cette égalité peut encore se mettre sous une forme un peu différente.

Si f est, à l'instant t , la valeur d'une certaine grandeur en un point de la masse élémentaire dm , nous désignerons par f' la valeur, à l'instant $(t + dt)$, de la même grandeur en un point de la même masse. L'égalité (77) pourra alors s'écrire

$$(78) \quad E dQ = dt \int_{\Omega} (P_x u + P_y v + P_z w) d\Omega \\ + \int_b \left[E \eta(\rho, T) + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + V_e + V_{ia} + \frac{1}{2} V_{ib} \right. \\ \left. - E \eta(\rho', T') - \frac{u'^2 + v'^2 + w'^2}{2} - V'_e - V'_{ia} - \frac{1}{2} V'_{ib} \right] dm.$$

Cette expression est établie dans l'hypothèse où, au voisinage du temps t , les divers éléments du mouvement varient d'une manière continue pour chacune des masses dm qui composent la partie b .

Nous allons maintenant supposer que cette expression demeure exacte pour le cas où, à l'instant t , la partie b est le siège d'une onde de choc S qui peut rencontrer la surface Ω . D'ailleurs, on peut, si l'on veut, considérer cette proposition non comme une hypothèse, mais comme la *définition* de la quantité de chaleur dégagée, dans le temps dt , par une telle partie du fluide.

Toutefois, pour qu'une semblable définition soit admissible, il faut que le sens des termes qui figurent au second membre de l'égalité (78) soit précis; il ne saurait à cet égard y avoir de doute pour le second; mais il n'en est pas de même du premier, car les quantités P_x, P_y, P_z n'ont aucun sens aux divers points de l'intersection des surfaces S et Ω . Nous conviendrons que ce terme doit être cal-

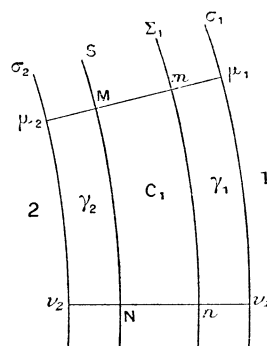
culé comme si les quantités P_x, P_y, P_z prenaient aux divers points de cette ligne des valeurs finies, valeurs qu'il est, dès lors, inutile de connaître.

C'est, d'ailleurs, à cette convention que nous serions conduits si, comme nous l'avons fait à diverses reprises, nous regardions l'onde de choc comme la limite d'une couche de passage d'épaisseur très petite h au sein de laquelle les éléments du mouvement varient d'une manière continue, mais très rapide; si l'on admet en outre l'hypothèse A, ce qui est nécessaire pour qu'une onde de choc puisse se propager, on sait que les valeurs de P_x, P_y, P_z à l'intérieur de la couche ne croissent pas au delà de toute limite lorsque l'épaisseur h de cette couche tend vers 0.

Ces préliminaires posés, l'hypothèse, ou mieux la définition qu'exprime l'égalité (78) va être appliquée à une masse b déterminée de la manière suivante :

Reprenons les surfaces $S, \Sigma_1, \sigma_1, \sigma_2$, qui ont été définies au § 3. Sur la surface S prenons (fig. 10) une aire $MN = A$; par les divers points du contour de cette

Fig. 10.



aire, élevons des normales à la surface S ; sur les surfaces $\Sigma_1, \sigma_1, \sigma_2$, elles découpent des aires qui sont respectivement $mn, \mu_1\nu_1, \mu_2\nu_2$. La surface $\mu_2\mu_1\nu_1\nu_2$ sera, ici, la surface Ω ; la masse fluide qu'elle contient à l'instant t sera la masse b , composée de trois parties : la partie γ_1 , comprise entre les surfaces σ_1, Σ_1 ; la partie C_1 , comprise entre les surfaces Σ_1, S ; la partie γ_2 , comprise entre les surfaces S, σ_2 .

Dans le calcul du second membre de l'égalité (78), nous négligerons les infiniment petits d'ordre supérieur à dt .

La surface Ω se compose de l'aire $\mu_1\nu_1$, de l'aire $\mu_2\nu_2$, enfin de l'aire latérale $\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2$; cette dernière est de l'ordre de dt et comme P_x, P_y, P_z y ont, en tout point, une valeur finie, elle fournit à l'intégrale

$$\int_{\Omega} (P_x u + P_y v + P_z w) d\Omega$$

un contingent de l'ordre de dt et à $E dQ$ un contingent négligeable de l'ordre de dt^2 . Il nous suffit donc de considérer les deux parties de cette intégrale qui se rapportent respectivement à l'aire $\mu_1 \nu_1$ et à l'aire $\mu_2 \nu_2$.

En l'aire $\mu_1 \nu_1$, nous avons, aux quantités près de l'ordre de dt ,

$$\cos(n_i, x) = -\alpha, \quad \cos(n_i, y) = -\beta, \quad (\cos n_i, z) = -\gamma.$$

Si l'on tient compte des égalités (23), (24) et (35), on voit que l'on a, en termes finis,

$$P_x = -\mathcal{Q}_{x1}, \quad P_y = -\mathcal{Q}_{y1}, \quad P_z = -\mathcal{Q}_{z1}$$

et qu'en s'en tenant aux termes finis le contingent apporté à notre intégrale par l'aire $\mu_1 \nu_1$ est

$$-\int_A (\mathcal{Q}_{x1} u_1 + \mathcal{Q}_{y1} v_1 + \mathcal{Q}_{z1} w_1) dS.$$

En l'aire $\mu_2 \nu_2$ on a, en négligeant les infiniment petits de l'ordre de dt ,

$$\cos(n_i, x) = \alpha, \quad \cos(n_i, y) = \beta, \quad \cos(n_i, z) = \gamma.$$

Les égalités (23), (24) et (35 bis) donnent, en n'écrivant que les termes finis,

$$P_x = \mathcal{Q}_{x2}, \quad P_y = \mathcal{Q}_{y2}, \quad P_z = \mathcal{Q}_{z2}$$

et l'aire $\mu_2 \nu_2$ fournit à notre intégrale le contingent suivant :

$$\int_A (\mathcal{Q}_{x2} u_2 + \mathcal{Q}_{y2} v_2 + \mathcal{Q}_{z2} w_2) dS.$$

On a donc, en se bornant aux termes de l'ordre de dt ,

$$\begin{aligned} (79) \quad & dt \int_{\Omega} (P_x u + P_y v + P_z w) d\Omega \\ & = dt \int_A (\mathcal{Q}_{x2} u_2 + \mathcal{Q}_{y2} v_2 + \mathcal{Q}_{z2} w_2 - \mathcal{Q}_{x1} u_1 - \mathcal{Q}_{y1} v_1 - \mathcal{Q}_{z1} w_1) dS. \end{aligned}$$

La masse b se compose des trois parties que nous avons désignées par γ_1, γ_2, C_1 .

Les masses élémentaires qui forment la partie γ_1 sont du côté 1 de l'onde de choc aussi bien à l'instant $(t + dt)$ qu'à l'instant t ; pour ces masses, la différence qui, dans l'égalité (78), figure sous le signe \int_b est assurément de l'ordre de dt , et comme la masse γ_1 tout entière est, elle aussi, de l'ordre de dt , cette masse fournit à l'intégrale \int_b un contingent de l'ordre de dt^2 , partant négligeable; il en est

de même de la masse γ_2 , en sorte que nous pouvons supposer notre intégrale étendue non à la masse b , mais à la masse C_1 .

Selon les hypothèses faites sur les fonctions V , chacune de ces fonctions est infiniment petite lorsqu'elle provient d'un volume infiniment petit, et cela même lorsque le point auquel elle se rapporte appartient à ce volume. Les deux fonctions V_{ib} , V'_{ib} tendent donc vers 0 avec dt . Partant, la quantité

$$\frac{1}{2} \int_{C_1} (V_{ib} - V'_{ib}) dm$$

est infiniment petite par rapport à dt , et il est loisible de l'ajouter à l'intégrale que nous voulons évaluer. Si donc nous posons

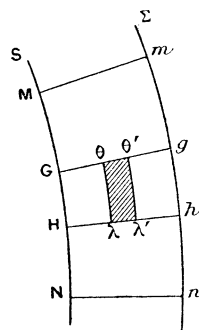
$$(80) \quad \begin{cases} V = V_e + V_{ia} + V_{ib}, \\ V' = V'_e + V'_{ia} + V'_{ib}, \end{cases}$$

l'intégrale à évaluer pourra s'écrire

$$(81) \quad \int_{C_1} \left[E \eta(\rho, T) + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + V - E \eta(\rho', T') - \frac{u'^2 + v'^2 + w'^2}{2} - V' \right] dm.$$

Prenons sur l'aire A (*fig. 11*) un élément $GH = dS$. Par le contour de cet élément, élevons à la surface S des normales qui découpent sur la surface Σ_1 l'élé-

Fig. 11.



ment gh . Dans le volume $GHgh$ découpons un élément $\theta\lambda\theta'\lambda'$ par deux surfaces $\theta\lambda$, $\theta'\lambda'$, parallèles à la surface S , et menées à des distances $G\theta = l$, $G\theta' = l + dl$ de cette surface. Prenons pour masse dm la masse qui, à l'instant t , remplit le volume $\theta\lambda\theta'\lambda'$. A l'instant t , cette masse est du côté 1 de la surface S ; sa densité diffère infiniment peu de la densité limite ρ_1 relative au point G , et la valeur principale de dm est

$$dm = \rho_1 dS dl.$$

A l'instant t , cette masse étant du côté 1 de l'onde de choc, on a, aux infiniment petits près,

$$E \eta(\rho, T) + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + V = E \eta(\rho_1, T_1) + \frac{u_1^2 + v_1^2 + w_1^2}{2} + V_1,$$

les termes du second membre se rapportant au point G et à l'instant t .

A l'instant $(t + dt)$, la même masse est du côté 2 de l'onde de choc; on peut donc écrire de même

$$E \eta(\rho', T') + \frac{u'^2 + v'^2 + w'^2}{2} + V' = E \eta(\rho_2, T_2) + \frac{u_2^2 + v_2^2 + w_2^2}{2} + V_2,$$

les termes du second membre se rapportant encore au point G et à l'instant t .

Notre masse dm fournit donc à l'intégrale (81) le terme

$$\rho_1 \left[E \eta(\rho_1, T_1) + \frac{u_1^2 + v_1^2 + w_1^2}{2} + V_1 - E \eta(\rho_2, T_2) - \frac{u_2^2 + v_2^2 + w_2^2}{2} - V_2 \right] dS dt.$$

Pour avoir le contingent que le volume GHgh apporte à l'intégrale (81), il suffit d'intégrer l'expression précédente par rapport à l , depuis $l=0$ jusqu'à $l=Gg=\varphi_1 dt$, ce qui donne

$$\rho_1 \varphi_1 \left[E \eta(\rho_1, T_1) + \frac{u_1^2 + v_1^2 + w_1^2}{2} + V_1 - E \eta(\rho_2, T_2) - \frac{u_2^2 + v_2^2 + w_2^2}{2} - V_2 \right] dS dt.$$

L'intégrale (81) devient

$$dt \int_A \rho_1 \varphi_1 \left[E \eta(\rho_1, T_1) + \frac{u_1^2 + v_1^2 + w_1^2}{2} + V_1 - E \eta(\rho_2, T_2) - \frac{u_2^2 + v_2^2 + w_2^2}{2} - V_2 \right] dS.$$

Ce résultat, joint à l'égalité (79), donne la forme suivante à l'égalité (78)

$$(82) \quad E dQ = dt \int_A \left\{ \rho_1 \varphi_1 \left[E \eta(\rho_1, T_1) + \frac{u_1^2 + v_1^2 + w_1^2}{2} + V_1 \right] - \mathcal{Q}_{x1} u_1 - \mathcal{Q}_{y1} v_1 - \mathcal{Q}_{z1} w_1 \right. \\ \left. - \rho_1 \varphi_1 \left[E \eta(\rho_2, T_2) + \frac{u_2^2 + v_2^2 + w_2^2}{2} + V_2 \right] + \mathcal{Q}_{x2} u_2 + \mathcal{Q}_{y2} v_2 + \mathcal{Q}_{z2} w_2 \right\} dS.$$

Si le milieu est mauvais conducteur, cette quantité doit être égale à 0, quelle que soit l'aire A choisie sur la surface S; pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que l'on ait, en tout point de la surface S,

$$(83) \quad \rho_1 \varphi_1 \left[E \eta(\rho_1, T_1) + \frac{u_1^2 + v_1^2 + w_1^2}{2} + V_1 \right] - \mathcal{Q}_{x1} u_1 - \mathcal{Q}_{y1} v_1 - \mathcal{Q}_{z1} w_1 \\ = \rho_1 \varphi_1 \left[E \eta(\rho_2, T_2) + \frac{u_2^2 + v_2^2 + w_2^2}{2} + V_2 \right] - \mathcal{Q}_{x2} u_2 - \mathcal{Q}_{y2} v_2 - \mathcal{Q}_{z2} w_2.$$

Telle est la condition supplémentaire qui remplace, dans le cas des fluides mauvais conducteurs de la chaleur, la relation (64) relative aux fluides bons conducteurs.

On peut, en la combinant avec les relations déjà trouvées, lui donner une autre forme.

Les égalités

$$(57) \quad \begin{cases} \rho_1 \vartheta_1(u_2 - u_1) = \mathfrak{P}_{x2} - \mathfrak{P}_{x1}, \\ \rho_1 \vartheta_1(v_2 - v_1) = \mathfrak{P}_{y2} - \mathfrak{P}_{y1}, \\ \rho_1 \vartheta_1(w_2 - w_1) = \mathfrak{P}_{z2} - \mathfrak{P}_{z1}, \end{cases}$$

respectivement multipliées par $\frac{u_2 + u_1}{2}$, $\frac{v_2 + v_1}{2}$, $\frac{w_2 + w_1}{2}$ et ajoutées membre à membre, donnent

$$\begin{aligned} \rho_1 \vartheta_1 \left(\frac{u_2^2 + v_2^2 + w_2^2}{2} - \frac{u_1^2 + v_1^2 + w_1^2}{2} \right) \\ = \frac{\mathfrak{P}_{x2} - \mathfrak{P}_{x1}}{2} (u_2 + u_1) + \frac{\mathfrak{P}_{y2} - \mathfrak{P}_{y1}}{2} (v_2 + v_1) + \frac{\mathfrak{P}_{z2} - \mathfrak{P}_{z1}}{2} (w_2 + w_1). \end{aligned}$$

L'égalité (83) devient alors

$$\begin{aligned} \rho_1 \vartheta_1 [\mathbf{E} \eta(\rho_2, \mathbf{T}_2) + \mathbf{V}_2 - \mathbf{E} \eta(\rho_1, \mathbf{T}_1) - \mathbf{V}_1] \\ = \frac{\mathfrak{P}_{x2} + \mathfrak{P}_{x1}}{2} (u_2 - u_1) + \frac{\mathfrak{P}_{y2} + \mathfrak{P}_{y1}}{2} (v_2 - v_1) + \frac{\mathfrak{P}_{z2} + \mathfrak{P}_{z1}}{2} (w_2 - w_1) \end{aligned}$$

ou bien, en vertu des égalités (57),

$$\rho_1^2 \vartheta_1^2 [\mathbf{E} \eta(\rho_2, \mathbf{T}_2) + \mathbf{V}_2 - \mathbf{E} \eta(\rho_1, \mathbf{T}_1) - \mathbf{V}_1] = \frac{\mathfrak{P}_{x2}^2 + \mathfrak{P}_{y2}^2 + \mathfrak{P}_{z2}^2 - \mathfrak{P}_{x1}^2 - \mathfrak{P}_{y1}^2 - \mathfrak{P}_{z1}^2}{2}.$$

Si l'on remplace ϑ_1^2 par la valeur, tirée de l'égalité (60),

$$\vartheta_1^2 = \frac{\rho_2}{\rho_1(\rho_2 - \rho_1)} [(\mathfrak{P}_{x2} - \mathfrak{P}_{x1})\alpha + (\mathfrak{P}_{y2} - \mathfrak{P}_{y1})\beta + (\mathfrak{P}_{z2} - \mathfrak{P}_{z1})\gamma],$$

l'égalité précédente devient

$$(84) \quad \begin{aligned} \frac{2\rho_1\rho_2}{\rho_2 - \rho_1} [\mathbf{E} \eta(\rho_2, \mathbf{T}_2) + \mathbf{V}_2 - \mathbf{E} \eta(\rho_1, \mathbf{T}_1) - \mathbf{V}_1] \\ = \frac{\mathfrak{P}_{x2}^2 + \mathfrak{P}_{y2}^2 + \mathfrak{P}_{z2}^2 - \mathfrak{P}_{x1}^2 - \mathfrak{P}_{y1}^2 - \mathfrak{P}_{z1}^2}{(\mathfrak{P}_{x2} - \mathfrak{P}_{x1})\alpha + (\mathfrak{P}_{y2} - \mathfrak{P}_{y1})\beta + (\mathfrak{P}_{z2} - \mathfrak{P}_{z1})\gamma}. \end{aligned}$$

C'est la forme que nous voulions obtenir.

Si le fluide est dénué de viscosité, les égalités (35) et (35 bis) transforment

l'égalité (84) en

$$(85) \quad \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_2 - \rho_1} [E\eta(\rho_2, T_2) + V_2 - E\eta(\rho_1, T_1) - V_1] = \frac{\Pi_1 + \Pi_2}{2}.$$

Si, en outre, les actions auxquelles les éléments fluides sont soumis sont *newtoniennes*, la discontinuité de densité qui se produit le long de la surface S n'entraînera aucune discontinuité pour la fonction V; on aura

$$V_1 = V_2$$

et l'égalité (85) deviendra

$$(86) \quad \frac{E\rho_1\rho_2}{\rho_2 - \rho_1} [\eta(\rho_2, T_2) - \eta(\rho_1, T_1)] = \frac{\Pi_1 + \Pi_2}{2}.$$

Cette formule avait été établie par Hugoniot ⁽¹⁾ dans l'hypothèse où l'onde de choc était plane; elle a été généralisée par M. E. Jouguet ⁽²⁾.

Bornons-nous à ce cas d'un fluide dénué de viscosité et soumis à des actions newtoniennes. Supposons qu'au point M, où une onde de choc est censée passer à l'instant t , on connaisse :

1° Les éléments du mouvement 1, savoir les quantités

$$u_1, \quad v_1, \quad w_1, \quad \rho_1, \quad \Pi_1, \quad T_1,$$

les trois dernières étant liées par la relation

$$(66) \quad \Pi_1 - \rho_1^2 \frac{\partial \zeta(\rho_1, T_1)}{\partial \rho_1} = 0;$$

2° Les cosinus directeurs α , β , γ de la normale à l'onde de choc et la vitesse \mathfrak{V} de propagation de cette onde.

Montrons qu'au point M, les éléments du mouvement 2 sont déterminés.

L'égalité

$$(3) \quad \varphi_1 = \mathfrak{V} - (\alpha u_1 + \beta v_1 + \gamma w_1)$$

détermine φ_1 .

⁽¹⁾ HUGONOT, *Mémoire sur la propagation du mouvement dans les corps et spécialement dans les gaz parfaits*. II^e Partie, Chap. V : *Sur les discontinuités qui se manifestent dans la propagation du mouvement*. III. *Cas où la relation entre la pression et la densité dépend des transformations subies par le corps* (*Journal de l'École Polytechnique*, LVIII^e Cahier, p. 80; 1889). — Voir aussi VIEILLE, *Étude sur le rôle des discontinuités dans les phénomènes de propagation* (*Mémorial des Poudres et Salpêtres*, t. X, p. 177).

⁽²⁾ E. JOUGUET, *Comptes rendus*, t. CXXXII, p. 673; 18 mars 1901.

Les égalités

$$(66 \text{ bis}) \quad \Pi_2 - \rho_2^2 \frac{\partial \zeta(\rho_2, T_2)}{\partial \rho_2} = 0,$$

$$(61) \quad \frac{\rho_2(\Pi_2 - \Pi_1)}{\rho_2 - \rho_1} = \rho_1 \vartheta_1^2$$

et l'égalité (86) déterminent ρ_2 , Π_2 , T_2 ; alors les égalités (59) déterminent u_2 , v_2 , w_2 .

§ 9. — DES SURFACES LE LONG DESQUELLES DEUX MASSES FLUIDES GLISSENT L'UNE SUR L'AUTRE.

Les considérations qui ont été développées dans les paragraphes précédents touchant les ondes de choc impliquent, comme cas particulier, l'étude des surfaces le long desquelles deux masses fluides glissent l'une sur l'autre.

Pour déduire des propositions précédentes celles qui sont relatives à ce cas, il est nécessaire et suffisant d'introduire, dans les égalités obtenues, les conditions

$$\vartheta_1 = 0, \quad \vartheta_2 = 0.$$

Dès lors, les résultats obtenus au § 5 nous permettent d'énoncer la proposition suivante :

En un fluide visqueux où l'on regarde les relations (43) comme entièrement générales (HYPOTHÈSE B), il ne peut subsister aucune surface le long de laquelle deux couches liquides glissent l'une sur l'autre.

Il faut toutefois excepter le cas où l'on aurait

$$u_2 = u_1 = 0, \quad v_2 = v_1 = 0, \quad w_2 = w_1 = 0,$$

c'est-à-dire le cas où les deux couches inégalement denses et peut-être, si le fluide est mauvais conducteur, inégalement chaudes, au lieu de GLISSER l'une sur l'autre, ADHÈRENT l'une à l'autre.

Dans ce cas, les égalités (47), qui découlent de l'hypothèse B, transportées dans l'égalité (41), nous donnent l'égalité

$$(42) \quad d\mathfrak{E}_{va} = 0,$$

tout comme si nous avions suivi l'hypothèse A.

Ce cas sera traité ultérieurement d'une manière spéciale (voir § 11).

Si nous suivons l'HYPOTHÈSE A, nous aurons à faire usage des résultats énoncés au § 6 et aux paragraphes suivants.

Les égalités (57), où nous devons faire $\varphi_1 = 0$, nous donneront

$$(87) \quad \mathcal{P}_{x2} = \mathcal{P}_{x1}, \quad \mathcal{P}_{y2} = \mathcal{P}_{y1}, \quad \mathcal{P}_{z2} = \mathcal{P}_{z1}.$$

La pression dont

$$(88) \quad \begin{cases} \mathcal{P}_x = (\Pi + \nu_x) \alpha + \tau_z \beta + \tau_y \gamma, \\ \mathcal{P}_y = \tau_z \alpha + (\Pi + \nu_y) \beta + \tau_x \gamma, \\ \mathcal{P}_z = \tau_y \alpha + \tau_x \beta + (\Pi + \nu_z) \gamma \end{cases}$$

sont les composantes, varie d'une manière continue lorsqu'on traverse la surface le long de laquelle deux masses fluides glissent l'une sur l'autre.

L'égalité (60) devient alors une identité.

Les considérations développées au § 7 gardent leur valeur, en sorte que, *si le fluide est bon conducteur, la température varie d'une manière continue lorsqu'on traverse une surface de glissement.*

Si le fluide est mauvais conducteur, on devra encore écrire la relation (83), mais en y faisant $\varphi_1 = 0$. Cette relation, où ne figurent plus T_1 , T_2 , ne nous enseigne rien touchant ces quantités, en sorte qu'*en un fluide mauvais conducteur la température peut éprouver une discontinuité quelconque lorsqu'on traverse une surface de glissement.*

Mais l'égalité (83) devient, en tenant compte des égalités (88),

$$(89) \quad \mathcal{P}_x(u_2 - u_1) + \mathcal{P}_y(v_2 - v_1) + \mathcal{P}_z(w_2 - w_1) = 0.$$

En un fluide mauvais conducteur, la pression dont \mathcal{P}_x , \mathcal{P}_y , \mathcal{P}_z sont les composantes est normale, en chaque point d'une surface de glissement, à la vitesse relative

$$(90) \quad \mathbf{U} = u_2 - u_1, \quad \mathbf{V} = v_2 - v_1, \quad \mathbf{W} = w_2 - w_1$$

des deux masses fluides qui glissent l'une sur l'autre.

Considérons, en particulier, les fluides non visqueux pour lesquels l'hypothèse A est sûrement exacte.

Pour ces fluides, les égalités (87) se réduisent à

$$(91) \quad \Pi_2 = \Pi_1.$$

Si deux masses d'un fluide non visqueux glissent l'une sur l'autre, la pression ne subit aucune variation brusque lorsque l'on traverse la surface de glissement.

Dans le cas où le fluide n'est pas conducteur, la température peut éprouver une discontinuité quelconque au travers de cette surface; mais, si le fluide est bon conducteur, la température varie d'une manière continue au travers de cette surface.

Tenons-nous à ce dernier cas, et supposons en outre que le fluide soit soumis à des actions newtoniennes. Nous aurons, de part et d'autre de la surface de glissement, à écrire les égalités

$$(66) \quad \Pi_1 - \rho_1^2 \frac{\partial \zeta(\rho_1, T_1)}{\partial \rho_1} = 0,$$

$$(66 \text{ bis}) \quad \Pi_2 - \rho_2^2 \frac{\partial \zeta(\rho_2, T_2)}{\partial \rho_2} = 0.$$

Mais comme nous avons déjà, en tout point de la surface de glissement,

$$[(91) \text{ et } (64)] \quad \Pi_1 = \Pi_2, \quad T_1 = T_2,$$

les égalités (66) et (66 bis) nous donneront

$$(92) \quad \rho_1 = \rho_2.$$

En un fluide non visqueux, bon conducteur de la chaleur et soumis à des actions newtoniennes, la densité varie d'une manière continue au travers d'une surface de glissement.

En résumé, au sein d'un fluide non visqueux, le mouvement peut être discontinu le long de certaines surfaces et, dans l'étude de ces surfaces, deux cas sont à distinguer.

Le premier cas est celui des *ondes de choc*. Dans ce cas, la vitesse relative U , V , W [égalités (90)] des deux masses fluides en contact le long de la surface de discontinuité est, à chaque instant, normale à cette surface, en sorte que l'on peut dire que *la discontinuité est longitudinale*; la pression varie d'une manière discontinue au travers de l'onde; celle-ci ne sépare pas sans cesse les deux mêmes masses fluides; d'un instant à l'autre, elle se propage de certaines parties matérielles à d'autres, et la vitesse de cette propagation dépend, en vertu des égalités (3), (3 bis), (10) et (61), des deux relations équivalentes

$$(93) \quad \begin{cases} \mathfrak{T} - (\alpha u_1 + \beta v_1 + \gamma w_1) = \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\Pi_2 - \Pi_1}{\rho_2 - \rho_1}}, \\ \mathfrak{T} - (\alpha u_2 + \beta v_2 + \gamma w_2) = \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{\Pi_1 - \Pi_2}{\rho_1 - \rho_2}}. \end{cases}$$

Le second cas est celui des *surfaces de glissement*. Dans ce cas, en vertu des égalités (3), (3 bis), (8) et (90), la vitesse relative U, V, W vérifie l'égalité

$$U\alpha + V\beta + W\gamma = 0.$$

Elle est, à chaque instant, tangente à la surface de discontinuité; on peut donc dire que *la discontinuité est transversale*. La pression varie d'une manière continue au travers d'une semblable surface. Enfin, cette surface sépare sans cesse les deux mêmes masses fluides.

Ces propositions offrent de remarquables analogies avec celles que nous démontrerons plus loin touchant la propagation des ondes d'un ordre quelconque dans les fluides non visqueux (*voir* Chap. IV).

§ 10. — LES SURFACES DE DISCONTINUITÉ DANS LES FLUIDES INCOMPRESSIBLES.

Nous avons traité jusqu'ici des fluides compressibles; mais les considérations purement cinématiques du § 1 s'appliquent aussi aux fluides incompressibles. On doit seulement, dans ce cas, écrire sans cesse

$$\rho_1 = \rho_2,$$

en sorte que l'égalité (10) devient

$$\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 = 0$$

ou bien, selon les égalités (3) et (3 bis),

$$(u_2 - u_1)\alpha + (v_2 - v_1)\beta + (w_2 - w_1)\gamma = 0.$$

Cette égalité entraîne la conséquence suivante :

Les seules surfaces de discontinuité que puisse présenter un fluide incompressible sont des surfaces de glissement.

D'ailleurs, la plupart des considérations qui précèdent peuvent être répétées au sujet des fluides incompressibles, à la seule condition de remplacer la fonction $\zeta(\rho, T)$ par une simple fonction de T . On peut donc, pour les surfaces de glissement des fluides incompressibles, maintenir ce qui a été dit au paragraphe précédent.

§ 11. — DES SURFACES DE DISCONTINUITÉ LE LONG DESQUELLES DEUX MASSES
FLUIDES ADHÈRENT L'UNE A L'AUTRE.

Dans tout ce qui précède, nous avons implicitement supposé que l'on n'avait pas à la fois les trois égalités

$$u_1 = u_2, \quad v_1 = v_2, \quad w_1 = w_2;$$

en d'autres termes, nous avons supposé que la surface S était, pour les composantes de la vitesse, une surface de discontinuité. Toutefois, au début du § 9, nous avons signalé l'intérêt qu'il y aurait à examiner spécialement le cas où les égalités précédentes seraient simultanément vérifiées. C'est cet examen que nous allons maintenant entreprendre.

Les égalités

$$u_1 = u_2 = u, \quad v_1 = v_2 = v, \quad w_1 = w_2 = w,$$

jointes aux égalités (3) et (3 bis), donnent

$$(8) \quad \vartheta_1 = -\vartheta_2 = \mathfrak{T} - (\alpha u + \beta v + \gamma w)$$

et l'égalité (10) devient

$$(94) \quad (\rho_2 - \rho_1) [\mathfrak{T} - (\alpha u + \beta v + \gamma w)] = 0.$$

Comme nous l'avons remarqué au § 9, on a, dans le cas actuel,

$$(42) \quad d\mathfrak{E}_{va} = 0,$$

même si l'on suit l'hypothèse B; on peut donc, en tout état de cause, appliquer au cas actuel les théorèmes généraux établis aux §§ 6, 7, 8, 9.

Nous voyons alors que les égalités (57) nous donneront sûrement les égalités

$$(87) \quad \begin{cases} \mathcal{P}_{x1} = \mathcal{P}_{x2}, \\ \mathcal{P}_{y1} = \mathcal{P}_{y2}, \\ \mathcal{P}_{z1} = \mathcal{P}_{z2}. \end{cases}$$

En outre, *si le fluide est bon conducteur*, nous aurons

$$(64) \quad T_1 = T_2.$$

La considération de l'égalité (94) nous amène à distinguer deux cas.

PREMIER CAS. — *On n'a pas*

$$\mathfrak{T} = \alpha u + \beta v + \gamma w.$$

Dès lors, l'égalité (94) donne

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho.$$

Si le fluide est bon conducteur, on sait que l'on a $T_1 = T_2$. Considérons le cas où le fluide est mauvais conducteur; nous devons, dans ce cas, faire usage de l'égalité (83) en y remplaçant, si le fluide est incompressible, $\eta(\rho, T)$ par une simple fonction de T , $\eta(T)$. La continuité de ρ au travers de la surface S assure celle de V , en sorte que $V_1 = V_2$. Dès lors, l'égalité (83) nous donne

$$\eta(\rho, T_1) = \eta(\rho, T_2)$$

si le fluide est compressible et

$$\eta(T_1) = \eta(T_2)$$

si le fluide est incompressible.

Dans tous les cas, en vertu du *postulat de Helmholtz*, la fonction η est une fonction croissante de T . On doit donc avoir $T_1 = T_2$. Ainsi, que le fluide soit bon ou mauvais conducteur, nous avons

$$T_1 = T_2 = T.$$

Si le fluide est compressible, nous devons écrire, de part et d'autre de la surface S , l'égalité

$$(22) \quad \Pi + \rho^2(A_i + A_e) - \rho^2 \frac{\partial \zeta(\rho, T)}{\partial T} = 0.$$

La continuité de ρ au travers de la surface S assure celle de A_i et de A_e ; on voit donc que la continuité de ρ et de T assure celle de Π ; on a, dès lors,

$$\Pi_1 = \Pi_2 = \Pi.$$

Donc, en un fluide compressible quelconque, une surface au travers de laquelle les composantes de la vitesse sont continues, et dont la vitesse de déplacement n'est pas donnée par la formule

$$\mathfrak{V} = \alpha u + \beta v + \gamma w,$$

ne peut être surface de discontinuité pour aucun des éléments du mouvement.

Si le fluide est incompressible et non visqueux, les égalités (87) donnent l'égalité (91)

$$\Pi_1 = \Pi_2,$$

en sorte que la conclusion précédente demeure établie. Mais les considérations précédentes ne démontrent pas, pour les fluides incompressibles visqueux, l'im-

possibilité d'une surface au travers de laquelle u, v, w, ρ, T varieraient d'une manière continue, qui serait surface de discontinuité pour la pression Π , et dont la vitesse de déplacement ne serait pas donnée par la formule

$$\mathfrak{U} = \alpha u + \beta v + \gamma w.$$

Cette impossibilité sera démontrée plus loin (Chap. III, § 1). Anticipant sur cette démonstration, nous pouvons énoncer la proposition que voici :

En aucun fluide on ne peut observer une surface au travers de laquelle les composantes de la vitesse varieraient d'une manière continue, qui serait surface de discontinuité pour l'un au moins des autres éléments du mouvement (ρ, Π, T) et dont la vitesse de déplacement ne serait pas donnée par la formule

$$(8) \quad \mathfrak{U} = \alpha u + \beta v + \gamma w.$$

Nous sommes amenés ainsi à considérer le deuxième cas.

DEUXIÈME CAS. — On a

$$(8) \quad \mathfrak{U} = \alpha u + \beta v + \gamma w.$$

Dans ce cas la surface S sépare toujours les deux mêmes parties du fluide, qui *adhèrent* entre elles le long de cette surface.

Pour pousser plus loin l'étude de ce cas, nous aurons à distinguer entre les fluides non visqueux et les fluides visqueux.

Fluides non visqueux. — Les égalités (87) se transforment alors en

$$(91) \quad \Pi_1 = \Pi_2 = \Pi.$$

Si, en outre, le fluide est bon conducteur, on a

$$(64) \quad T_1 = T_2 = T.$$

Si le fluide considéré est un fluide incompressible, tous les éléments du mouvement varient d'une manière continue au travers de la surface S .

Si le fluide est compressible, l'égalité (22) permet d'écrire

$$\begin{aligned} \Pi_1 + \rho_1^2 (\mathbf{A}_i + \mathbf{A}_e)_1 - \rho_1^2 \frac{\partial \zeta(\rho_1, T_1)}{\partial \rho_1} &= 0, \\ \Pi_2 + \rho_2^2 (\mathbf{A}_i + \mathbf{A}_e)_2 - \rho_2^2 \frac{\partial \zeta(\rho_2, T_2)}{\partial \rho_2} &= 0 \end{aligned}$$

et, par conséquent, en vertu des égalités (91) et (64),

$$\rho_1^2 \left[(\mathbf{A}_i + \mathbf{A}_e)_1 - \frac{\partial \zeta(\rho_1, \mathbf{T})}{\partial \rho_1} \right] = \rho_2^2 \left[(\mathbf{A}_i + \mathbf{A}_e)_2 - \frac{\partial \zeta(\rho_2, \mathbf{T})}{\partial \rho_2} \right].$$

Selon des notations précédemment introduites (I^{re} Partie, Chap. I, § 4), cette égalité peut s'écrire, en remarquant que les fonctions $\mathfrak{A}_i(\mathbf{R}, x, y, z, t)$, $\mathfrak{A}_e(\mathbf{R}, x, y, z, t)$ varient d'une manière continue lorsque le point (x, y, z) traverse la surface S,

$$\begin{aligned} & \rho_1^2 \left[\mathfrak{A}_i(\rho_1, x, y, z, t) + \mathfrak{A}_e(\rho_1, x, y, z, t) - \frac{\partial \zeta(\rho_1, \mathbf{T})}{\partial \rho_1} \right] \\ &= \rho_2^2 \left[\mathfrak{A}_i(\rho_2, x, y, z, t) + \mathfrak{A}_e(\rho_2, x, y, z, t) - \frac{\partial \zeta(\rho_2, \mathbf{T})}{\partial \rho_2} \right]. \end{aligned}$$

Cette égalité est évidemment satisfaite si $\rho_2 = \rho_1$; peut-elle l'être autrement? Regardons cette égalité comme une équation en ρ_2 .

Elle admet sûrement la racine $\rho_2 = \rho_1$.

Pour qu'elle pût en admettre une autre, il faudrait qu'il existât une valeur R de ρ telle que l'on ait

$$\begin{aligned} & 2\mathbf{R} \left[\mathfrak{A}_i(\mathbf{R}, x, y, z, t) + \mathfrak{A}_e(\mathbf{R}, x, y, z, t) - \frac{\partial \zeta(\mathbf{R}, \mathbf{T})}{\partial \mathbf{R}} \right] \\ &+ \mathbf{R}^2 \left[\frac{\partial \mathfrak{A}_i(\mathbf{R}, x, y, z, t)}{\partial \mathbf{R}} + \frac{\partial \mathfrak{A}_e(\mathbf{R}, x, y, z, t)}{\partial \mathbf{R}} - \frac{\partial^2 \zeta(\mathbf{R}, \mathbf{T})}{\partial \mathbf{R}^2} \right] = 0. \end{aligned}$$

Or, au sein d'un fluide en équilibre stable, on a ⁽¹⁾

$$\begin{aligned} & 2\rho \left[\mathfrak{A}_i(\rho, x, y, z, t) + \mathfrak{A}_e(\rho, x, y, z, t) - \frac{\partial \zeta(\rho, \mathbf{T})}{\partial \rho} \right] \\ &+ \rho^2 \left[\frac{\partial \mathfrak{A}_i(\rho, x, y, z, t)}{\partial \rho} + \frac{\partial \mathfrak{A}_e(\rho, x, y, z, t)}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 \zeta(\rho, \mathbf{T})}{\partial \rho^2} \right] < 0. \end{aligned}$$

Si nous admettons que cette inégalité demeure vraie, quel que soit le mouvement du fluide étudié et quelle que soit la valeur R de la densité que nous substituons à $\rho(x, y, z, t)$, ce qui est assuré dans le cas où les actions intérieures sont newtoniennes, l'égalité précédente ne pourra pas avoir lieu; nous aurons forcément

$$\rho_2 = \rho_1$$

et nous pourrions énoncer le théorème suivant :

⁽¹⁾ Sur la stabilité d'une masse fluide dont les éléments sont soumis à leurs actions mutuelles [Journal de Mathématiques pures et appliquées, 5^e série, t. III, p. 174; condition (63); 1897].

Dans un fluide non visqueux, bon conducteur, incompressible, ou compressible mais soumis à des actions intérieures qui sont newtoniennes, si deux parties du fluide adhèrent le long d'une certaine surface, cette surface n'introduit de discontinuité dans aucun des éléments du mouvement. Il en est encore de même dans le cas où les actions intérieures ne sont pas newtoniennes, pourvu que la condition énoncée il y a un instant soit vérifiée.

Supposons maintenant que le fluide soit mauvais conducteur.

En vertu des égalités (8) et (87), l'égalité (83) devient une identité; entre les températures T_1 , T_2 peut exister une différence quelconque; si le fluide est compressible, les égalités (22) et (91) exigent que les densités ρ_1 , ρ_2 soient liées par la relation

$$\rho_1^2 \left[(A_i + A_c)_1 - \frac{\partial \zeta(\rho_1, T_1)}{\partial \rho_1} \right] = \rho_2^2 \left[(A_i + A_c)_2 - \frac{\partial \zeta(\rho_2, T_2)}{\partial \rho_2} \right].$$

Au sein d'un fluide non visqueux, mauvais conducteur, la température peut être discontinue au travers d'une certaine surface qui n'est pas, pour les composantes de la vitesse, une surface de discontinuité; si le fluide est compressible, la densité varie aussi d'une manière discontinue au travers de cette surface; mais la pression, en toute circonstance, y demeure continue.

Fluides visqueux. — Supposons d'abord le fluide bon conducteur

$$(64) \quad T_1 = T_2.$$

Si le fluide était incompressible, tous les éléments du mouvement, sauf la pression Π , seraient continus au travers de la surface S ; il résulte alors d'une démonstration qui sera donnée au Chapitre III, § 1, que la pression Π serait également continue; donc :

Au sein d'un fluide visqueux, bon conducteur et incompressible, une surface le long de laquelle adhèrent deux masses fluides ne peut être surface de discontinuité pour aucun des éléments du mouvement.

Si le fluide est compressible, la même impossibilité n'existe plus. La surface d'adhérence peut être surface de discontinuité pour la densité ρ et la pression Π .

Si le fluide est mauvais conducteur, les égalités (8) et (87) transforment l'égalité (83) en une identité; la température et la pression peuvent être discontinues le long de la surface d'adhérence; il en est de même de la densité si le fluide est compressible.

Donc, en résumé, *au sein d'un fluide visqueux, la surface d'adhérence de deux masses peut être :*

- 1° Surface de discontinuité pour la densité ρ et la pression Π , si le fluide est compressible et bon conducteur;*
- 2° Surface de discontinuité pour la pression Π et la température T , si le fluide est incompressible et mauvais conducteur;*
- 3° Surface de discontinuité pour la densité ρ , la pression Π et la température T , si le fluide est compressible et mauvais conducteur.*

