

H. LACAZE

## **Sur la connexion linéaire de quelques surfaces algébriques**

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 2<sup>e</sup> série*, tome 3, n° 2 (1901), p. 151-215

[<http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_1901\\_2\\_3\\_2\\_151\\_0>](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1901_2_3_2_151_0)

© Université Paul Sabatier, 1901, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

---

SUR

# LA CONNEXION LINÉAIRE

DE QUELQUES SURFACES ALGÈBRIQUES,

PAR M. L'ABBÉ H. LACAZE,

Agrégré de l'Université.

---

## INTRODUCTION.

Dans une Note parue aux *Comptes rendus* (4 septembre 1899), M. Arthur Berry annonçait qu'il avait déterminé toutes les surfaces du quatrième degré qui possèdent des intégrales de différentielles totales de première espèce, en employant la méthode donnée par M. Picard <sup>(1)</sup>. Cette méthode consiste à déterminer la surface  $F(x, y, z) = 0$ , de degré  $m$ , de façon que l'on puisse trouver quatre polynômes  $\theta(x, y, z)$ , d'ordre  $m - 3$ , satisfaisant, en premier lieu, aux conditions suivantes :

$$\theta_1 \frac{\partial F}{\partial x} + \theta_2 \frac{\partial F}{\partial y} + \theta_3 \frac{\partial F}{\partial z} + \theta_4 \frac{\partial F}{\partial t} = 0,$$
$$\frac{\partial \theta_1}{\partial x} + \frac{\partial \theta_2}{\partial y} + \frac{\partial \theta_3}{\partial z} + \frac{\partial \theta_4}{\partial t} = 0,$$

où  $t$  représente la variable d'homogénéité.

Au mois de janvier 1900, M. de Franchis <sup>(2)</sup> publiait un Mémoire sur les surfaces du quatrième degré dont le genre géométrique est nul, et il remarquait, à la fin de ce Mémoire, que M. Berry avait certainement omis de citer une surface du quatrième degré parmi celles qui admettent des intégrales de différentielles totales de première espèce.

J'ai voulu alors reprendre cette question à un autre point de vue et chercher l'ordre de connexion linéaire des surfaces du quatrième degré, c'est-à-dire le

---

<sup>(1)</sup> *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, t. I, Chap. V.

<sup>(2)</sup> M. DE FRANCHIS, *Le superficie irrazionali di 4° ordine di genere geometrico-superficiale nullo* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. XIV).

nombre des intégrales de différentielles totales de première et de seconde espèce attachées à ces surfaces.

Je commence par rappeler la notion de cycle linéaire d'une surface algébrique, ainsi que la méthode pour trouver le nombre de cycles linéaires distincts d'une telle surface, d'après les idées de M. Picard, telles qu'elles sont exposées dans le Tome I de sa *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, Chap. II et IV.

J'indique ensuite comment, étant donnée une surface de la forme

$$z^2 = f(x, y),$$

on peut établir certaines propositions permettant, dans un très grand nombre de cas, de déterminer très simplement l'ordre de connexion linéaire de cette surface. J'applique ces principes aux surfaces particulières pour lesquelles  $f$  est un polynôme du sixième ou du huitième degré en  $x$  et  $y$ . Je remarque aussi que les surfaces du quatrième degré admettant des cycles finis, c'est-à-dire des cycles non équivalents à zéro, sont représentables sur un cône cubique, et je détermine ces surfaces par une voie différente de celle suivie par M. de Franchis.

## CHAPITRE I.

### I. — CYCLES LINÉAIRES D'UNE SURFACE ALGÈBRE. GÉNÉRALITÉS.

#### 1. Soit une relation algébrique

$$(1) \quad F(x, y, z) = 0$$

entre trois variables complexes  $x, y, z$ , définissant  $z$  comme fonction de  $x$  et  $y$ ; en employant le langage géométrique, nous dirons que cette relation définit une *surface algébrique*  $F$ .

A cette surface  $F$  on peut faire correspondre birationnellement une surface  $\Phi$  n'ayant aucun point multiple et située dans un espace à cinq dimensions <sup>(1)</sup>. Si, par analogie avec la théorie des fonctions d'une variable complexe, on représente sur une sphère chaque coordonnée complexe de l'espace à cinq dimensions, la

---

<sup>(1)</sup> E. PICARD, *Comptes rendus*, p. 532-538; 15 mars 1897. — *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, t. I, p. 82.

surface  $\Phi$  définira une variété fermée à quatre dimensions réelles, située tout entière à distance finie et ne se coupant pas elle-même.

Revenant à la relation (1), nous pouvons, dans l'espace à quatre dimensions, qui est le champ des variables  $x$  et  $y$ , considérer une courbe fermée  $C$  telle que, en partant d'un point  $(x_0, y_0)$  de cette courbe avec une valeur initiale  $z_0$ , on revienne au point de départ avec la même valeur de  $z$ . La courbe  $C$  sera une *variété* ou *continuum* à une dimension réelle; nous supposons que cette courbe ne passe par aucun point critique de la variable  $z$  regardée comme fonction de  $x$  et  $y$ . Une courbe telle que  $C$  est un *cycle linéaire* de la surface  $F$ .

A chaque cycle linéaire  $C$  de  $F$  correspondent des courbes fermées sur  $F$  et sur  $\Phi$ . Deux cycles linéaires sont considérés comme *équivalents* si l'on peut passer de l'un à l'autre par une déformation continue. Un cycle sera dit *nul* <sup>(1)</sup> si l'on peut le déformer d'une manière continue, de façon que la courbe fermée correspondante tracée sur  $\Phi$  se réduise à un point.

On démontre qu'un cycle infiniment petit autour d'un point simple de la surface  $F$  est un cycle nul.

2. A chacun des cycles distincts de  $F$  correspondra dans  $\Phi$ , comme nous l'avons déjà dit, une courbe fermée et, par ces courbes fermées, on ne pourra pas faire passer un espace à deux dimensions dont elles limitent une partie, car, s'il en était ainsi, ces courbes fermées et, par suite, les cycles se ramèneraient à un nombre moindre, c'est-à-dire qu'ils ne seraient pas distincts. On aura ainsi un certain nombre de courbes fermées dans  $\Phi$  et ne formant pas frontière sur  $\Phi$ ; mais, si on leur adjoint une courbe fermée quelconque  $\gamma$ , dans le domaine  $\Phi$ , elles formeront avec  $\gamma$  frontière complète sur  $\Phi$ .

Le nombre des cycles distincts de la surface  $F$  sera donc égal à  $p_1 - 1$ ,  $p_1$  étant le nombre qui exprime l'ordre de connexion linéaire de la variété  $\Phi$ , et la question des cycles distincts d'une surface peut se ramener ainsi à une question de géométrie de situation.

Toutefois, il conviendra de se placer à un autre point de vue pour la recherche effective du nombre  $p_1 - 1$  relatif à la surface  $F$ . Étant donné un cycle linéaire  $C$  tracé sur la surface  $F$ , déformons ce cycle d'une façon continue de manière que, dans ses positions successives, il satisfasse aux mêmes conditions que  $C$ ; nous obtiendrons ainsi un cycle  $C_1$ . Si les axes ont une disposition quelconque, tous les cycles linéaires de la surface pourront être amenés <sup>(2)</sup>, par une déformation continue de ce genre, à être contenus dans un continuum

$$y = \text{const.};$$

<sup>(1)</sup> E. PICARD, *Théorie des fonctions algébriques*, t. I, p. 92.

<sup>(2)</sup> E. PICARD, *Théorie des fonctions algébriques*, t. I, p. 86.

en d'autres termes, les cycles de la surface F seront des cycles pour la courbe

$$F(x, \bar{y}, z) = 0,$$

le symbole  $\bar{y}$  indiquant que  $y$  doit être regardé comme un paramètre. Mais tous les cycles de la courbe précédente ne seront pas, en général, distincts si on les considère sur la surface F. Nous allons voir comment, en faisant varier  $\bar{y}$ , on pourra déjà s'assurer que plusieurs de ces cycles sont équivalents.

3. Soit la courbe

$$z^2 = x(x-1)(x-y),$$

où  $y$  désigne un paramètre, et soit une intégrale I n'ayant pas de points singuliers logarithmiques, attachée à cette courbe; par exemple,

$$I = \int \frac{dx}{z}.$$

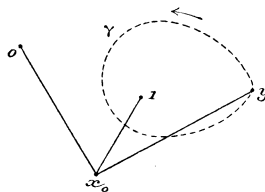
Pour une valeur donnée de  $y$ , on pourra définir ainsi les périodes  $\omega_1, \omega_2$  de cette intégrale I. Marquons les points 0, 1,  $y$  et un autre point quelconque  $x_0$ . Nous désignerons par  $u_1, u_2, u_3$  les valeurs de I correspondant respectivement aux lacets  $(x_0, 0), (x_0, 1), (x_0, y)$ , la détermination initiale de  $z$  au point  $x_0$  étant toujours supposée la même. Nous poserons

$$\omega_1 = u_1 - u_2,$$

$$\omega_2 = u_1 - u_3;$$

$\omega_1, \omega_2$  sont des fonctions de  $y$  qui ne changent pas si l'on fait décrire à  $y$  un contour fermé n'enveloppant aucun des points 0, 1. Soit alors un contour  $\gamma$  coupant le lacet  $(x_0, 1)$  et supposons que  $y$  décrive  $\gamma$  dans le sens de la flèche (*fig. 1*).

Fig. 1.

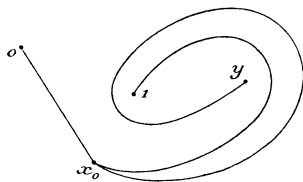


Lorsque le point  $y$  arrivera près du lacet  $(x_0, 1)$ , on déformera ce lacet de telle sorte que le point  $y$  ne le rencontre pas. On obtiendra ainsi, lorsque  $y$  sera revenu au point de départ, une figure dans laquelle les lacets  $(x_0, 1), (x_0, y)$  (*fig. 2*) ne seront plus les lacets primitifs. Les quantités désignées plus haut par  $u_1, u_2, u_3$

seront remplacées par les quantités

$$u_1, \quad u_2 + 2(u_3 - u_2), \quad u_3 + 2(u_3 - u_2),$$

Fig. 2.



ce qui revient à dire qu'au lieu des périodes  $\omega_1, \omega_2$ , nous aurons maintenant d'autres périodes  $\Omega_1, \Omega_2$ ,

$$\Omega_1 = -\omega_1 + 2\omega_2,$$

$$\Omega_2 = -2\omega_1 + 3\omega_2,$$

qui sont des combinaisons linéaires, à coefficients entiers, des périodes primitives.

De même, soit la courbe déjà considérée

$$(1) \quad F(x, \bar{y}, z) = 0$$

et considérons une intégrale de première ou de seconde espèce relative à cette courbe

$$(2) \quad I = \int R(x, y, z) dx,$$

où  $R(x, y, z)$  désigne une fonction rationnelle de  $x$  et  $z$ , et aussi du paramètre  $y$ .

La courbe (1) étant de genre  $p$ , l'intégrale  $I$  admettra, pour une valeur donnée de  $y$ ,  $2p$  périodes

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \dots, \quad \omega_{2p}.$$

Après une circulation de  $y$ , ces périodes  $\omega$  se changeront en d'autres  $\Omega$  qui seront des combinaisons linéaires, à coefficients entiers, des périodes primitives; nous aurons

$$(S) \quad \Omega_i = m_1^i \omega_1 + m_2^i \omega_2 + \dots + m_{2p}^i \omega_{2p} \quad (i = 1, 2, \dots, 2p).$$

Les équations (S) expriment un fait géométrique : elles indiquent, si  $C_1, C_2, \dots, C_p$  désignent les cycles correspondant aux périodes  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p$ , que le cycle  $C_1$ , par exemple, par une déformation continue accompagnant la variation de  $y$ , a été transformé en une somme de  $m_1^1$  fois le cycle  $C_1$  plus  $m_2^1$  fois le cycle  $C_2$  plus, etc., plus  $m_{2p}^1$  fois le cycle  $C_{2p}$ .

4. Les substitutions (S) forment un groupe  $G$ . Une intégrale abélienne quel-

conque, de première ou de seconde espèce, attachée à la courbe (1) donnera lieu à ce même groupe G.

M. Fuchs <sup>(1)</sup> a montré que les périodes d'une intégrale abélienne, de première ou de seconde espèce, relative à une courbe telle que (1), satisfont à une équation linéaire (E) dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de  $y$ . Les diverses équations (E), qu'on peut ainsi former, correspondant aux diverses intégrales de première et de seconde espèce de la courbe (1), ont même groupe de substitutions, et ce groupe est le groupe G.

Soit

$$(E) \quad \alpha_{2p} \frac{d^{2p} \omega}{dy^{2p}} + \alpha_{2p-1} \frac{d^{2p-1} \omega}{dy^{2p-1}} + \dots + \alpha_0 \omega = 0$$

l'équation que vérifient les périodes de l'intégrale (2) déjà considérée. Si l'on veut obtenir cette équation, on considérera l'intégrale J suivante,

$$J = \alpha_{2p} \frac{d^{2p} I}{dy^{2p}} + \alpha_{2p-1} \frac{d^{2p-1} I}{dy^{2p-1}} + \dots + \alpha_0 I,$$

et l'on remarquera que les périodes de cette intégrale sont toutes nulles, en vertu de l'équation E. Par conséquent, J sera une fonction rationnelle de  $x$  et de  $z$ , et, par suite, de  $y$ . Posons alors

$$\begin{aligned} u_1 &= \int \varphi_1 dx, & u_2 &= \int \varphi_2 dx, & \dots, & & u_p &= \int \varphi_p dx, \\ v_1 &= \int \psi_1 dx, & v_2 &= \int \psi_2 dx, & \dots, & & v_p &= \int \psi_p dx, \end{aligned}$$

les intégrales  $u$  étant les intégrales de première espèce de la courbe (1), et les intégrales  $v$  désignant  $p$  intégrales de seconde espèce formant avec les intégrales  $u$  un système fondamental.

Pour exprimer que l'intégrale J se réduit à une fonction de  $x$  et  $z$ , on écrira, d'après un théorème dû à Weierstrass :

- 1° Que la somme des résidus du produit  $J\varphi_i(x, \bar{y}, z)$  est nulle;
- 2° Que la somme des résidus du produit  $J\psi_i(x, \bar{y}, z)$  est nulle

$$(i = 1, 2, \dots, 2p).$$

On obtiendra ainsi  $2p$  relations linéaires et homogènes entre les  $2p + 1$  coefficients  $\alpha$ .

---

(1) FUCHS, *Journal de Crelle*, t. 71 et 73.

§. Soit une variété  $V_n$ , à  $n$  dimensions, située dans l'espace général à  $m$  dimensions ( $m \geq n$ ), où l'on désigne les coordonnées d'un point par  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ .

Dans l'espace général à  $m$  dimensions, on peut considérer une intégrale simple

$$(3) \quad \int \sum_{i=1}^{i=n} X_i dx_i,$$

où les  $X$  sont des fonctions des quantités réelles  $x_1, x_2, \dots, x_m$  restant uniformes et continues quand le point  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$  se déplace dans  $V_n$ ; on suppose que les conditions d'intégrabilité sont remplies quand on regarde  $x_{n+1}, \dots, x_m$  comme fonctions de  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . On a ainsi une intégrale de différentielle totale dans  $V_n$ .

L'intégrale (3) étant une intégrale arbitrairement choisie sous les conditions indiquées, l'ordre de connexion linéaire de  $V_n$  est égal au nombre, augmenté d'une unité, des périodes distinctes de cette intégrale.

Cela étant, envisageons le continuum à quatre dimensions réelles représenté par l'équation

$$F(x, y, z) = 0.$$

Sur cette variété, à chaque valeur de  $y$  correspondent, comme il a été dit,  $2p$  cycles  $C_1, C_2, \dots, C_{2p}$ , et chacun d'eux, par une circulation convenable de  $y$ , se ramène à une somme de multiples des différents cycles  $C_1, C_2, \dots, C_{2p}$ . L'ensemble de ces cycles et du transformé de l'un d'eux forme donc frontière complète. Par suite, si l'on considère une intégrale de différentielle totale de la nature de l'intégrale (3), et si l'on désigne par

$$P_1, P_2, \dots, P_{2p}$$

ses périodes relativement aux cycles  $C_1, C_2, \dots, C_{2p}$ , la période correspondant au cycle transformé de  $C_i$  sera encore  $P_i$ , et de même pour les autres. On aura donc

$$(\pi) \quad P_i = m_1^i P_1 + m_2^i P_2 + \dots + m_{2p}^i P_{2p} \quad (i = 1, 2, \dots, 2p),$$

et à chaque substitution du groupe  $G$  correspondront  $2p$  équations de cette forme.

Les équations  $(\pi)$  correspondant à toutes les substitutions du groupe  $G$  n'admettront, en général, que la solution

$$P_1 = 0, \quad P_2 = 0, \quad \dots, \quad P_{2p} = 0,$$

c'est-à-dire que tous les cycles de la surface se réduiront à zéro.

S'il arrive qu'on puisse satisfaire à toutes les équations  $(\pi)$  autrement qu'en



annulant toutes les quantités  $P$ , supposons alors que, de l'ensemble des équations  $(\pi)$ , on puisse tirer  $2p - r$  des quantités  $P$  en fonction des  $r$  autres restant arbitraires, il est clair que le nombre des cycles distincts de la surface sera au plus égal à  $r$ .

On a ainsi effectué une première réduction des cycles linéaires de la surface  $F$ . Cette réduction sera suffisante dans les cas particuliers de surfaces que nous allons bientôt considérer. Nous indiquerons néanmoins comment on pourra, dans le cas général, achever de déterminer le nombre des cycles distincts d'une surface.

6. Les considérations précédentes, basées sur l'étude d'une intégrale abélienne dont les périodes sont fonctions de  $\gamma$ , ne permettent pas d'affirmer que le nombre  $r$  soit égal à  $p_1 - 1$ , parce qu'on n'a envisagé que des déformations particulières de cycles correspondant à la déformation de la surface de Riemann,

$$F(x, \bar{y}, z) = 0.$$

Le nombre  $r$  doit donc être envisagé seulement comme un maximum du nombre  $p_1 - 1$  des cycles linéaires distincts de la surface.

Soient alors  $2p$  intégrales abéliennes distinctes n'ayant pas de points critiques logarithmiques, relatives à la courbe  $F(x, \bar{y}, z) = 0$ . Désignons-les par

$$I_i = \int \varphi_i(x, y, z) dx \quad (i = 1, 2, \dots, 2p).$$

Les périodes de ces intégrales ont le même groupe de substitutions.

On peut chercher à déterminer des fonctions rationnelles de  $\gamma$ ,

$$a_1, \quad a_2, \quad \dots, \quad a_{2p},$$

de telle sorte que les périodes de l'intégrale

$$a_1 I_1 + a_2 I_2 + \dots + a_{2p} I_{2p}$$

ne dépendent pas de  $\gamma$ . Soient

$$\omega_1^h, \quad \omega_2^h, \quad \dots, \quad \omega_{2p}^h$$

les  $2p$  périodes de  $I_h$ . Nous aurons à écrire les  $2p$  équations

$$a_1 \omega_k^1 + a_2 \omega_k^2 + \dots + a_{2p} \omega_k^{2p} = P_k \quad (k = 1, 2, \dots, 2p),$$

les  $P$  étant des constantes. En particulier, si ces constantes satisfont à l'ensemble des équations  $(\pi)$ , les équations précédentes détermineront pour les  $a$  des fonc-

tions rationnelles de  $y$ . En effet, en vertu des équations  $(\pi)$ , quand  $y$  a décrit un chemin fermé quelconque, le système d'équations en  $a$  est identique au précédent.

Si nous posons

$$R_1 = a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2 + \dots + a_{2p} \varphi_{2p},$$

$R_1$  sera une fonction rationnelle en  $x, y, z$ , et les périodes de l'intégrale

$$\int R_1 dx$$

ne dépendront pas de  $y$ . Il s'ensuit que l'expression

$$\int_{(x_0, z_1)}^{(x, z)} \frac{\partial R_1}{\partial y} dx = \frac{\partial}{\partial y} \int_{(x_0, z_1)}^{(x, z)} R_1 dx$$

sera une fonction rationnelle de  $x, y, z$  et de  $z_1$ ,  $z_1$  étant une racine de l'équation en  $z$ ,

$$F(x_0, y, z) = 0,$$

et, par conséquent, si l'on pose

$$S_1 = \frac{1}{m} \left[ \int_{(x_0, z_1)}^{(x, z)} \frac{\partial R_1}{\partial y} dx + \int_{(x_0, z_2)}^{(x, z)} \frac{\partial R_1}{\partial y} dx + \dots + \int_{(x_0, z_m)}^{(x, z)} \frac{\partial R_1}{\partial y} dx \right],$$

$z_1, z_2, \dots, z_m$  étant les  $m$  racines de  $F(x_0, y, z) = 0$ ,  $S_1$  sera une fonction rationnelle de  $x, y, z$  et l'intégrale  $J_1$ ,

$$J_1 = \int R_1 dx + S_1 dy,$$

sera une intégrale de différentielle totale pour la surface  $F$ .

Pour déterminer pratiquement les fonctions  $a$  de  $y$  et, par suite,  $R_1(x, y, z)$ , on pourra appliquer le théorème de Weierstrass déjà cité à l'intégrale  $S_1$ . On obtiendra ainsi  $2p$  équations linéaires et homogènes entre  $a_1, a_2, \dots, a_{2p}, \frac{da_1}{dy}, \frac{da_2}{dy}, \dots, \frac{da_{2p}}{dy}$ , les coefficients de ces équations étant des polynômes en  $y$ ; on en tirera  $a_2, \dots, a_{2p}$  en fonction de  $a_1$  et de ses dérivées, et  $a_1$  satisfera à une équation linéaire  $(\mathcal{C})$  d'ordre au plus égal à  $2p$  dont les coefficients seront des polynômes en  $y$ .

7. L'intégrale  $J_1$  qui vient d'être obtenue admet  $r$  périodes arbitraires données à l'avance sur la surface  $F$ . Si  $F$  est une surface n'ayant que des singularités ordi-

naires, c'est-à-dire une courbe double avec des points triples, ces singularités étant les plus générales de leur nature, M. Picard a alors démontré que, parmi les  $r$  périodes arbitraires de  $J_1$ , il n'y en a aucune provenant d'une courbe logarithmique.

Il s'ensuit que, dans ce cas, le nombre  $r$  représentera le nombre des cycles linéaires distincts. On aura

$$p_1 - 1 = r.$$

De plus, en supposant toujours que  $F$  n'admet que des singularités ordinaires, l'intégrale  $J_1$  est une intégrale de différentielle totale de première ou de seconde espèce, et l'on est encore conduit à ce théorème, que le nombre des cycles distincts d'une surface est égal au nombre des intégrales de différentielles totales de première et de seconde espèce attachées à la surface.

Si la surface  $F$  est quelconque, il pourra arriver que les  $r$  périodes arbitraires de l'intégrale  $J_1$  ne soient pas toutes des périodes cycliques, certaines d'entre elles provenant de singularités logarithmiques. On aura alors

$$p_1 - 1 < r.$$

Si l'on veut trouver le nombre des cycles distincts de la surface, on pourra la transformer birationnellement en une surface  $F_1$  n'ayant que des singularités ordinaires, et le nombre  $r_1 + 1$  relatif à cette surface  $F_1$  exprimera l'ordre de connexion linéaire de  $F$ .

8. Il existe des surfaces pour lesquelles il est possible de trouver immédiatement le nombre  $p_1 - 1$ , en formant directement les intégrales de différentielles totales de première et de seconde espèce attachées à la surface. Nous donnerons deux exemples simples :

Soit la surface

$$z = \sqrt{\varphi(x)} + \sqrt{\psi(y)},$$

$\varphi$  étant un polynome en  $x$  et  $\psi$  un polynome en  $y$ . Nous pourrions prendre, pour les coordonnées d'un point de cette surface, les expressions

$$\begin{aligned} x &= \alpha, \\ y &= \alpha', \\ z &= \beta + \beta', \end{aligned}$$

$\beta$  et  $\beta'$  satisfaisant de plus aux relations

$$(4) \quad \beta^2 = \varphi(\alpha),$$

$$(5) \quad \beta'^2 = \psi(\alpha').$$

Inversement, on aura

$$\begin{aligned}\alpha &= x, \\ \alpha' &= y, \\ {}_2\beta &= z + \frac{\varphi(x) - \psi(y)}{z}, \\ {}_2\beta' &= z - \frac{\varphi(x) - \psi(y)}{z};\end{aligned}$$

et, par conséquent, il y a correspondance univoque entre un point de la surface considérée et un système de deux points pris, l'un sur la courbe (4), l'autre sur la courbe (5). Si  $p$  et  $p'$  désignent les genres respectifs de ces deux courbes, on voit qu'on pourra former  $p + p'$  intégrales de différentielles totales de première espèce, et  $p + p'$  intégrales de différentielles totales de seconde espèce, de telle sorte que toute autre intégrale de première ou de seconde espèce attachée à la surface soit une combinaison linéaire de celles-là. On pourra donc écrire

$$p_1 - 1 = 2p + 2p'.$$

Soit encore la surface dont les coordonnées ont pour expression

$$x = \alpha\alpha', \quad y = \frac{\alpha + \alpha'}{2}, \quad z = \beta + \beta',$$

$\beta$  et  $\beta'$  étant donnés par les équations

$$\begin{aligned}\beta^2 &= \alpha(1 - \alpha)(1 - k^2\alpha) = \varphi(\alpha), \\ \beta'^2 &= \alpha'(1 - \alpha')(1 - k^2\alpha') = \varphi(\alpha'),\end{aligned}$$

$\alpha, \alpha'$  seront racines de l'équation en  $u$ ,

$$u^2 - 2yu + x = 0;$$

d'où il viendra

$$\begin{aligned}\alpha &= y + \sqrt{y^2 - x}, \\ \alpha' &= y - \sqrt{y^2 - x}, \\ {}_2\beta &= z + \frac{\varphi(\alpha) - \varphi(\alpha')}{z}, \\ {}_2\beta' &= z + \frac{\varphi(\alpha') - \varphi(\alpha)}{z};\end{aligned}$$

il existera une correspondance univoque, cette fois, entre un point de la surface donnée et un système de deux points pris sur une seule courbe. Considérons, relativement à cette courbe, l'intégrale suivante, qui reste toujours finie,

$$(6) \quad K_1 = \int \frac{d\alpha}{\beta} + \int \frac{d\alpha'}{\beta'}.$$

Si, dans cette intégrale, on remplace  $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$  par leurs expressions en fonction de  $x, y, z$ , il viendra

$$K_1 = \int P dx + Q dy,$$

$P$  et  $Q$  étant rationnels en  $x, y, z$ .

Réciproquement, toute intégrale de différentielle totale de première espèce appartenant à la surface sera de la forme (6), après qu'on y aura remplacé  $x, y, z$  par leurs expressions en fonction de  $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ .

De la même manière, on pourra former une intégrale de seconde espèce  $K_2$ , telle que toute intégrale de première ou de seconde espèce attachée à la surface s'exprime linéairement en fonction de  $K_1$  et de  $K_2$ . L'ordre de connexion linéaire de la surface sera donc égal à trois.

## II. — SUR LA RÉDUCTION DES CYCLES LINÉAIRES DES SURFACES $z^2 = f(x, y)$ .

1. Les surfaces que nous allons considérer seront de la forme

$$(1) \quad z^2 = f(x, y),$$

$f(x, y)$  désignant un polynôme en  $x, y$ . Ce cas est le plus simple : tous les cycles de la surface pouvant être amenés dans un continuum  $y = \text{const.}$  correspondront alors à des contours tracés dans ce continuum et enveloppant deux racines seulement de l'équation en  $x$

$$f(x, y) = 0,$$

où  $y$  a la valeur constante considérée.

Nous allons présenter quelques remarques simples permettant, dans bien des cas, sinon toujours, de résoudre le problème de la connexion linéaire pour une surface de la forme (1).

2. M. Picard a démontré que si  $f(x, y)$  est le polynôme en  $x, y$ , le plus général de son degré, l'ordre de connexion linéaire de la surface (1) correspondante est égal à un. Tous les cycles linéaires de la surface se réduisent à des cycles nuls.

On sera conduit à la même conclusion dans bien d'autres cas. Faisons voir, tout d'abord, que si  $f$  est un polynôme irréductible en  $x, y$ , la surface (1) n'aura pas de cycles *finis*.

On peut toujours supposer qu'il existe, au moins, une valeur de  $y$ , soit  $y = b$ , pour laquelle l'équation

$$f(x, b) = 0$$

aura une racine double  $\alpha$ , cette racine étant double seulement. Cela étant, don-

nons à  $y$  une valeur arbitraire  $y_0$ , l'équation  $f(x, y_0) = 0$  aura  $m$  racines

$$x_1, x_2, \dots, x_m$$

et, en général, la demi-somme de deux de ces racines ne sera pas égale à la demi-somme de deux quelconques des  $m - 2$  autres racines.

Prenons alors un couple de ces racines, le couple  $(x_\alpha, x_\beta)$ , par exemple. Nous allons pouvoir faire décrire à  $y$  un chemin tel que,  $y$  allant de  $y_0$  à  $b$  par ce chemin, les deux racines  $x_\alpha, x_\beta$  deviennent, pour  $y = b$ , égales à  $a$ .

Pour s'en assurer, il suffira de prendre l'équation aux demi-sommes  $u$  des racines de l'équation en  $x$

$$f(x, y) = 0;$$

ce sera une certaine équation

$$F(u, y) = 0.$$

La courbe entre  $u$  et  $y$ ,  $F(u, y) = 0$ , sera, en général, une courbe irréductible comme  $f$ ; car on peut supposer que la courbe  $f$  occupe une position quelconque par rapport aux axes, et alors  $F$  est une courbe diamétrale de  $f$  correspondant à une direction arbitraire.

Soit, pour  $y = y_0$ , la racine simple

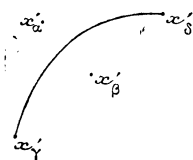
$$u_0 = \frac{x_\alpha + x_\beta}{2}.$$

Pour  $y = b$ , l'équation  $F = 0$  aura certaines racines doubles; mais la racine qui nous intéresse,  $u = a$ , sera, en général, une racine simple.

On sait alors qu'il est possible de trouver un chemin  $l$ , allant de  $y_0$  en  $b$ , conduisant de la racine  $u_0$  à la racine  $a$ ; ce chemin permettra alors de passer du couple  $(x_\alpha, x_\beta)$  au couple  $(a, a)$ , comme nous voulions le montrer.

Cela étant, si  $y$ , partant de  $y_0$  et suivant le chemin  $l$ , s'arrête en un point  $b'$

Fig. 3.



très voisin du point  $b$ , les racines  $x_\alpha, x_\beta$  deviendront deux racines  $x'_\alpha, x'_\beta$  de

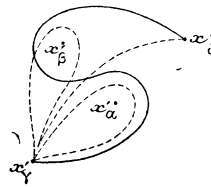
$$f(x, b') = 0$$

et ces deux racines différeront infiniment peu de  $a$ . Décrivons un contour infiniment petit  $C'$  autour de  $x'_\alpha, x'_\beta$ . Il est facile de voir que  $C'$  sera un cycle nul

relativement à la surface considérée. S'il existe, en effet, une intégrale de différentielle totale de première ou de seconde espèce attachée à cette surface, nous considérerons un chemin d'intégration (*fig. 3*) passant entre  $x'_\alpha$ ,  $x'_\beta$  et joignant deux autres racines quelconques  $x'_\gamma$ ,  $x'_\delta$  de  $f(x, b') = 0$ .

Ce dernier correspondra à la moitié d'une période de l'intégrale considérée. Si nous faisons décrire à  $\gamma$ , à partir du point  $b'$ , une petite courbe fermée entourant le point  $b$ , et si nous déformons en même temps le chemin d'intégration indiqué, de manière qu'il ne rencontre aucun point critique, nous obtiendrons, lorsque  $\gamma$

Fig. 4.



sera revenu en  $b'$ , la disposition marquée par la *fig. 4*, où l'on voit qu'il y a eu permutation entre  $x'_\alpha$  et  $x'_\beta$ .

Le chemin primitif  $(x'_\gamma, x'_\delta)$  s'est ainsi transformé en ce même chemin, augmenté d'un cycle infiniment petit entourant  $x'_\alpha$  et  $x'_\beta$ , et que nous pouvons supposer coïncider avec  $C'$ . Comme les périodes d'une intégrale de différentielle totale de première ou de seconde espèce ne doivent pas dépendre de  $\gamma$ , il s'ensuit bien que le cycle  $C'$  sera équivalent à zéro.

Faisons maintenant revenir  $\gamma$  de la valeur  $b'$  à la valeur  $\gamma_0$  par le chemin  $l$ ; le cycle  $C'$  deviendra, après cette variation, un certain cycle  $C$  entourant  $x_\alpha$ ,  $x_\beta$ , et le cycle  $C$  sera nul.

Nous voyons, ainsi, qu'on pourra, dans le continuum  $\gamma = \gamma_0$ , tracer un cycle  $C_1$  entourant  $x_1$  et  $x_2$ , puis un cycle  $C_2$  entourant  $x_2$  et  $x_3$ , etc.; enfin, un dernier cycle  $C_{m-1}$  entourant  $x_{m-1}$  et  $x_m$ , tous ces cycles étant équivalents à zéro. D'ailleurs, un cycle quelconque décrit dans le continuum  $\gamma = \gamma_0$  se ramènera à une somme de multiples des cycles  $C_1, C_2, \dots, C_{m-1}$ , et l'on voit bien alors que tous les cycles de la surface se réduiront à zéro.

3. La démonstration précédente n'est pas indépendante de toute hypothèse sur  $f$ ; elle suppose, par exemple, qu'une certaine équation  $F(u, \gamma) = 0$  est irréductible. Nous allons donc reprendre la question pour la traiter d'une façon tout à fait générale.

A cet effet, soit, d'abord, une surface ayant pour équation

$$z^2 = \sigma_1 \sigma_2,$$

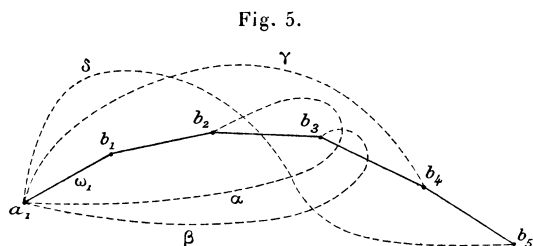
une expression telle que  $\sigma_\alpha$  devant désigner désormais un polynôme irréductible en  $x, y$  de degré  $\alpha$ . Pour une valeur donnée  $y_0$  de  $y$ , l'équation en  $x$ ,  $\sigma_1 = 0$ , admettra une racine  $a_1$ ; l'équation  $\sigma_5 = 0$  donnera cinq autres racines

$$b_1, \quad b_2, \quad \dots, \quad b_5.$$

Joignons par un trait continu les points  $a_1, b_1, b_2, \dots, b_5$  (*fig. 5*). Nous représenterons par la notation

$$(b_2, b_3),$$

par exemple, le cycle entourant les racines  $b_2, b_3$  et qui correspond au double de la valeur d'une intégrale de différentielle totale quelconque de première ou de



seconde espèce attachée à la surface, prise de  $b_2$  à  $b_3$ , suivant le chemin marqué par le trait continu  $b_2, b_3$ , ce dernier étant supposé parcouru sur l'un des deux feuillets de la surface de Riemann  $z^2 = f(x, \bar{y})$ . Nous poserons encore

$$\omega_1 = (a_1, b_1).$$

Un cycle quelconque de la surface se réduira à une combinaison linéaire à coefficients entiers des cycles fondamentaux

$$\omega_1, \quad (b_1, b_2), \quad (b_2, b_3), \quad (b_3, b_4), \quad (b_4, b_5).$$

Cela étant, nous savons qu'on peut faire parcourir successivement à  $y$  plusieurs chemins partant de  $y_0$  et y revenant, de telle sorte que le premier de ces chemins échange les racines  $b_1$  et  $b_2$ , le second les racines  $b_2$ , et  $b_3$  et ainsi de suite jusqu'au dernier qui échangera  $b_4$  et  $b_5$ .

Pendant cette variation de  $y$ , le cycle  $\omega_1$  se transformera en un certain cycle  $\alpha$  entourant les racines  $a_1$  et  $b_2$ ; puis ce cycle  $\alpha$  se transformera en un autre  $\beta$  correspondant aux racines  $a_1$  et  $b_3$ ; on ira ainsi jusqu'à un cycle  $\delta$  formé avec les racines  $a_1$  et  $b_5$ .

Écrivons que la valeur d'une intégrale quelconque de différentielle totale de première ou de seconde espèce attachée à la surface ne change pas quand on passe



du cycle  $\omega_1$  au cycle  $\alpha$ . Il viendra une relation de la forme

$$\omega_1 = h\omega_1 + k(b_1, b_2) + 2U,$$

où  $h$  et  $k$  sont des entiers impairs,  $U$  désignant une somme de multiples des cycles fondamentaux autres que  $\omega_1$  et  $(b_1, b_2)$ . De même, l'intégrale considérée conservera la même valeur quand on passera du cycle  $\alpha$  au cycle  $\beta$ , etc., et, enfin, du cycle  $\gamma$  au cycle  $\delta$ . Finalement, nous aurons quatre équations de la forme

$$(2) \quad \begin{cases} (b_1, b_2) + 2U_1 = 0, \\ (b_2, b_3) + 2U_2 = 0, \\ (b_3, b_4) + 2U_3 = 0, \\ (b_4, b_5) + 2U_4 = 0, \end{cases}$$

où les expressions  $U_1, U_2, \dots, U_4$  désignent des sommes de multiples des cycles fondamentaux. Des équations précédentes on déduit qu'il existera, entre un cycle fondamental quelconque et le cycle  $\omega_1$ , une relation linéaire et homogène à coefficients entiers. On aura, par exemple,

$$m(b_1, b_2) + n\omega_1 = 0,$$

$m$  et  $n$  étant des entiers. Il s'ensuit que la surface considérée admettra, au plus, un cycle fini.

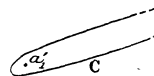
Supposons alors que la droite

$$\sigma_1 = 0$$

passe à l'origine, qui est aussi un point simple pour la courbe  $\sigma_3 = 0$ , la tangente en ce point à  $\sigma_3$  et la droite  $\sigma_1$  étant d'ailleurs différentes et aucune d'elles ne coïncidant avec l'un des axes.

Pour  $y$  voisin de zéro, nous aurons à considérer deux racines  $x$  infiniment petites : l'une,  $a'_1$ , provenant de  $\sigma_1 = 0$ ; l'autre,  $b'_1$ , donnée par  $\sigma_3 = 0$ . Soit un cycle  $C$  (fig. 6), entourant une des deux racines infiniment petites,  $a'_1$ , par exemple, et une racine de l'équation  $\sigma_3 = 0$  différente de  $b'_1$ .

Fig. 6.

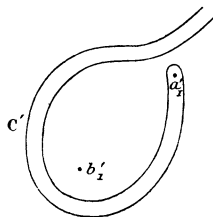


$b'_1$

Si nous faisons décrire à  $y$ , dans son plan, une courbe fermée très petite enfermant l'origine, chacun des points  $a'_1, b'_1$  décrira également dans le plan des  $x$  un contour très petit comprenant l'origine à son intérieur. Si, en même temps, on

suit la déformation du cycle  $C$ , on voit que,  $\gamma$  étant revenu au point de départ, ce cycle se sera transformé (*fig. 7*) en un autre  $C'$ , qui est équivalent au cycle

Fig. 7.



primitif  $C$ , augmenté de deux fois un cycle  $C_1$  entourant le point  $a'_1, b'_1$ . D'après la remarque, déjà faite plusieurs fois, que les périodes d'une intégrale de différentielle totale de première ou de seconde espèce ne dépendent pas de  $\gamma$ , le cycle  $C_1$  sera un cycle nul sur la surface considérée.

Nous sommes ainsi assurés que, dans le continuum  $\gamma = \gamma_0$ , nous pourrions tracer un cycle autour de la racine  $a_1$  et d'une racine de  $\sigma_5 = 0$ , que nous pouvons supposer être  $b_1$ , ce cycle étant équivalent à zéro. Aux équations (2) vient alors s'en ajouter une nouvelle de la forme

$$(3) \quad \omega_1 + 2 U_5 = 0,$$

$U_5$  désignant toujours une somme de multiples des cycles fondamentaux. Les équations (2) et (3) ne peuvent être satisfaites que par la solution

$$\omega_1 = (a_1, b_2) = (a_1, b_3) = \dots = (a_1, b_5) = 0,$$

et, par conséquent, tous les cycles de notre surface se réduiront à zéro.

Il en sera évidemment de même si l'on considère une surface ayant pour équation

$$(4) \quad z^2 = \sigma_1 \sigma_{2n-1},$$

en supposant, toutefois, que la droite  $\sigma_1 = 0$  rencontre la courbe  $\sigma_{2n-1} = 0$  en un point simple, la tangente en ce point à  $\sigma_{2n-1}$  n'étant pas la droite  $\sigma_1$ . On peut, d'ailleurs, admettre que cette condition est toujours vérifiée. En effet, on pourra d'abord ramener la surface (4) à la forme

$$z^2 = x \varphi(x, \gamma),$$

$\varphi$  étant irréductible et de degré impair. Posons alors

$$x = \frac{1}{X}, \quad \gamma = \frac{Y}{X}, \quad z = \frac{Z}{X^n},$$

il viendra une surface

$$Z^2 = \psi(X, Y),$$

$\psi$  étant irréductible. Transportons l'origine en un point simple de la courbe  $\psi = 0$  et soit alors

$$\psi(X, Y) = aX + bY + \dots \quad (ab \neq 0),$$

aucune asymptote de la courbe n'étant parallèle aux axes. La transformation

$$X = \xi, \quad Y = \xi\eta$$

nous conduira à la surface

$$Z^2 = \xi[a + b\eta + \xi(\dots)],$$

la droite  $\xi = 0$  coupant la courbe transformée de  $\psi$  en un point simple

$$\xi = 0, \quad \eta = -\frac{a}{b},$$

la tangente en ce point à cette courbe et la droite  $\xi = 0$  étant différentes.

Il n'y a plus, maintenant, aucune difficulté à voir que pour une surface

$$z^2 = f(x, y),$$

$f$  étant irréductible, l'ordre de connexion linéaire est égal à un, puisque cette surface, par l'une des transformations précédentes, pourra être mise sous la forme

$$z^2 = \sigma_1 \sigma_{2n-1}.$$

4. Soient les deux courbes

$$\sigma_m = 0, \quad \sigma_n = 0,$$

l'une de degré  $m$  et l'autre de degré  $n$ ,  $m$  et  $n$  étant supérieurs à un. Supposons que ces deux courbes se coupent en un point  $R$  qui est simple sur chacune d'elles, les tangentes en ce point aux deux courbes étant distinctes. La surface

$$(5) \quad z^2 = \sigma_m \sigma_n$$

n'admettra, dans ce cas, aucun cycle linéaire fini. Plaçons, en effet, l'origine en un point simple de  $\sigma_m$  et menons les axes de telle sorte que le point  $R$  soit en dehors d'eux et que l'on ait

$$\sigma_m = ax + by + \dots \quad (ab \neq 0),$$

aucune asymptote de  $\sigma_m$  et de  $\sigma_n$  n'étant d'ailleurs parallèle à  $Ox$  ou à  $Oy$ .

La transformation

$$x = X, \quad y = XY$$

nous donnera alors une surface

$$(6) \quad z^2 = \sigma_1 \sigma_{2m-1} \sigma_{2n};$$

la courbe

$$\sigma_{2m-1} = 0$$

coupera la droite  $\sigma_1 = 0$  en un point  $P_1$  et la courbe  $\sigma_{2n} = 0$  en un point  $R_1$ , transformé du point  $R$ . Les points  $P_1$  et  $R_1$  sont simples sur les courbes qui y passent et les tangentes en ces points sont, de plus, distinctes.

En raisonnant exactement comme au numéro précédent, on verra que tous les cycles de la surface (6) et, par conséquent aussi, ceux de la surface (5) se réduisent à zéro.

On arrivera à la même conclusion si l'on suppose que les courbes  $\sigma_m$  et  $\sigma_n$ , au lieu de se couper au point  $R$ , de coordonnées  $(a, b)$ , sont tangentes en ce point.

Pour  $y = b$ , une racine de  $\sigma_m = 0$  et une racine de  $\sigma_n = 0$  deviendront égales à  $a$ . Les développements de ces racines, aux environs du point  $R$ , seront de la forme

$$\begin{aligned} x &= a + c_1(y - b) + \dots + c_\alpha(y - b)^\alpha + c_\beta(y - b)^\beta + \dots, \\ x &= a + c_1(y - b) + \dots + c_\alpha(y - b)^\alpha + c'_\beta(y - b)^\beta + \dots, \end{aligned}$$

les coefficients des puissances de  $y - b$  inférieures à la puissance  $\beta$  étant respectivement égaux dans les deux développements;  $c_\beta$  et  $c'_\beta$  sont différents, et l'on peut supposer qu'aucun de ces deux coefficients n'est nul.

Posons

$$\begin{aligned} x - a - c_1(y - b) - \dots - c_\alpha(y - b)^\alpha &= (X - a)(Y - b)^{\beta-1}, \\ y &= Y. \end{aligned}$$

Les courbes  $\sigma_m, \sigma_n$  se transforment en d'autres courbes  $\sigma'_m, \sigma'_n$ , qui passeront au point  $(a, b)$ , avec des tangentes distinctes. Les développements des racines correspondantes, devenant égales à  $a$ , pour  $y = b$ , seront

$$\begin{aligned} X &= a + c_\beta(Y - b) + \dots, \\ X &= a + c'_\beta(Y - b) + \dots \end{aligned} \quad (c_\beta \neq c'_\beta),$$

et l'on sera ainsi ramené au cas précédemment étudié, de deux courbes se coupant en un point simple  $R$  et n'admettant pas la même tangente en ce point.

§. Étant données les deux courbes

$$\sigma_m = 0, \quad \sigma_n = 0$$

qui se coupent en un point simple sur chacune d'elles, nous venons de voir que la surface

$$(5) \quad z^2 = \sigma_m \sigma_n$$

ne possède aucun cycle fini. Nous pouvons signaler quelques autres cas très simples où il en sera encore ainsi.

Supposons que les courbes  $\sigma_m$  et  $\sigma_n$ , ayant toutes les deux à l'origine un point multiple d'ordre pair, ou toutes les deux un point multiple d'ordre impair, admettent en ce point une tangente commune simple pour chacune d'elles, que nous prendrons pour axe des  $y$ . L'équation (5) pourra, dès lors, s'écrire

$$z^2 = [x \varphi_m(x, y) + \varphi_{m+2}(x, y) + \dots] [x \psi_n(x, y) + \psi_{n+2}(x, y) + \dots],$$

et, si l'on fait la transformation,

$$x = XY, \quad y = Y, \quad z = ZY^{\frac{m+n}{2}},$$

il viendra la surface

$$z^2 = \sigma'_m \sigma'_n,$$

l'origine étant maintenant un point simple pour les courbes

$$\sigma'_m = 0, \quad \sigma'_n = 0$$

transformées des courbes  $\sigma_m$  et  $\sigma_n$ .

Soit encore le cas où  $\sigma_m$  admet un point multiple d'ordre impair à l'origine, ce point étant pour la courbe  $\sigma_n$  un point d'ordre de multiplicité quelconque. Nous supposerons, de plus, que, parmi les tangentes de  $\sigma_n$  à l'origine, il y en a au moins une qui est simple et qui ne coïncide pas avec les tangentes à  $\sigma_m$  en ce point.

Par exemple, l'origine sera pour  $\sigma_m$  un point triple, et pour  $\sigma_n$  un point multiple d'ordre quatre. Pour  $y$  voisin de zéro, trois racines de  $\sigma_m$

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3$$

et quatre racines de  $\sigma_n$

$$b_1, \quad b_2, \quad b_3, \quad b_4$$

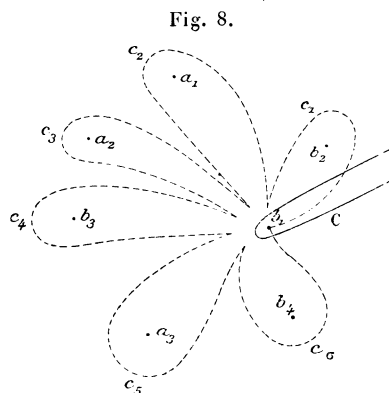
seront infiniment petites. Désignons par  $b_1$  la racine de  $\sigma_n$  qui correspond à la tangente simple, à l'origine, de cette courbe, tangente distincte des tangentes à  $\sigma_m$  au même point, et dont nous avons supposé l'existence.

• Considérons alors, dans le continuum  $y = \text{const.}$ , un cycle entourant la racine  $b_1$  et une racine quelconque de  $\sigma_m$  ou de  $\sigma_n$ , qui ne soit pas infiniment petite. Ce cycle C se déformera, si nous faisons décrire à  $y$  une petite courbe fermée autour de l'origine, et, lorsque  $y$  sera revenu au point de départ, le cycle C se sera transformé en un cycle C', qui est équivalent au cycle primitif C, augmenté

de deux fois la somme de certains cycles  $c_1, c_2, \dots, c_6$  (*fig. 8*). Nous pouvons donc écrire

$$c_1 + c_2 + \dots + c_6 = 0.$$

Dans le continuum  $\gamma = \text{const.}$  considéré, on peut tracer  $m + n - 1$  cycles fondamentaux, et l'on peut prendre, pour l'un de ces cycles, le cycle  $c_2$ . Si nous



posons  $c_2 = \omega_1$ , le nombre des racines infiniment petites  $\alpha$  étant impair, il s'ensuit que la relation précédente prendra la forme

$$\omega_1 + 2U = 0,$$

$U$  désignant une somme de multiples des cycles fondamentaux. Cela est suffisant, après ce qui a été dit jusqu'ici, pour pouvoir conclure que tous les cycles de la surface se réduisent à des cycles nuls.

Nous pouvons remarquer, enfin, que le cas où les courbes

$$\sigma_m = 0, \quad \sigma_n = 0$$

sont l'une et l'autre de degré impair se ramène aisément au précédent.

Il suffit de supposer, ce qui est évidemment possible au moyen d'une transformation homographique, que la courbe  $\sigma_n$  rencontre la droite de l'infini en un point simple  $\alpha$ , n'appartenant pas à  $\sigma_m$ , la tangente en ce point à  $\sigma_n$  étant distincte de la droite de l'infini.

L'origine étant quelconque et les axes ayant une direction aussi quelconque, on fera la transformation

$$x = \frac{1}{X}, \quad y = \frac{1}{Y},$$

et l'on obtiendra ainsi une surface

$$z^2 = \sigma_{2m} \sigma_{2n},$$

l'origine étant pour les courbes  $\sigma_{2m}$  et  $\sigma_{2n}$  respectivement un point d'ordre de multiplicité  $m$  et  $n$ . D'ailleurs, la tangente à l'origine à  $\sigma_{2n}$ , qui correspond au point  $\alpha$ , sera simple et distincte des tangentes au même point à la courbe  $\sigma_{2m}$ .

On sera donc toujours assuré de la réductibilité à zéro de tous les cycles d'une surface

$$z^2 = \sigma_m \sigma_n,$$

$m$  et  $n$  étant impairs, quand bien même on ne saurait rien sur la nature des intersections des courbes  $\sigma_m$  et  $\sigma_n$ .

Observons encore que deux courbes

$$\sigma_m = 0, \quad \sigma_n = 0,$$

les nombres  $m$  et  $n$  n'étant pas tous les deux impairs, peuvent être transformées birationnellement en deux courbes de degré pair  $\sigma_{2m}$ ,  $\sigma_{2n}$  d'une infinité de manières. Si ces dernières courbes se rencontrent en un point  $O$  qui est pour l'une et pour l'autre un point d'un ordre de multiplicité impair, on fera une inversion

$$x = \frac{1}{X}, \quad y = \frac{1}{Y},$$

après avoir transporté l'origine en ce point  $O$ , et l'on sera ainsi conduit à deux courbes  $\sigma'_m$ ,  $\sigma'_n$ , toutes deux de degré impair, et, par conséquent, la surface

$$z^2 = \sigma_m \sigma_n$$

n'aura, dans ce cas, aucun cycle fini.

## 6. Passons maintenant à la considération d'une surface générale

$$(7) \quad z^2 = \sigma_m \sigma_n \sigma_r \sigma_s \dots$$

Si les deux courbes  $\sigma_m = 0$ ,  $\sigma_n = 0$  se coupent en un point simple sur chacune d'elles, ou si elles présentent en un de leurs points communs une des particularités dont nous avons parlé, le nombre des cycles distincts de la surface (7) sera réduit d'une unité. Si  $p$  est le nombre des polynômes irréductibles du second membre de (7), le nombre des cycles distincts non nuls de la surface sera, au plus, égal à  $p - 2$ . On peut dire qu'il existe une liaison, un passage du polynôme  $\sigma_m$  au polynôme  $\sigma_n$ , de telle manière qu'au point de vue qui nous occupe, l'ensemble  $\sigma_m \sigma_n$  peut être considéré comme un seul polynôme irréductible.

S'il existe de même une liaison de cette nature entre  $\sigma_n$  et  $\sigma_r$  ou, ce qui revient au même, entre  $\sigma_m$  et  $\sigma_r$ , etc., et ainsi de suite jusqu'au dernier des polynômes du second membre de (7), on peut être assuré que la surface (7) n'admet pas de cycles finis.

En d'autres termes, pour  $y = y_0$ , considérons les racines des polynomes

$$\sigma_m = 0, \quad \sigma_n = 0, \quad \sigma_r = , \quad \dots,$$

tous les cycles de la surface (7) seront des cycles nuls, si l'on peut former un cycle équivalent à zéro avec une racine de  $\sigma_m$  et une racine de  $\sigma_n$ , ... et ainsi de suite.

Soit, comme application, la surface du quatrième degré à seize nœuds, ou surface de Kummer.

Cayley a mis l'équation de cette surface sous la forme (1)

$$\begin{aligned} \sqrt{\alpha x_1 \left( \gamma' \gamma'' x_2 - \beta' \beta'' x_3 - \frac{x_4}{\alpha} \right)} + \sqrt{\beta x_2 \left( \alpha' \alpha'' x_3 - \gamma' \gamma'' x_1 - \frac{x_4}{\beta} \right)} \\ + \sqrt{\gamma x_3 \left( \beta' \beta'' x_1 - \alpha' \alpha'' x_2 - \frac{x_4}{\gamma} \right)} = 0, \end{aligned}$$

les constantes  $\alpha, \alpha', \dots, \gamma', \gamma''$  étant liées par les relations

$$\alpha + \beta + \gamma = 0, \quad \alpha' + \beta' + \gamma' = 0, \quad \alpha'' + \beta'' + \gamma'' = 0.$$

Le cône circonscrit à la surface et ayant pour sommet  $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$  se compose de six plans qui coupent le plan  $x_4 = 0$  suivant les droites suivantes

$$\begin{aligned} x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \\ \sigma_1 = \frac{x_1}{\alpha} + \frac{x_2}{\beta} + \frac{x_3}{\gamma} = 0, \quad \sigma'_1 = \frac{x_1}{\alpha'} + \frac{x_2}{\beta'} + \frac{x_3}{\gamma'} = 0, \quad \sigma''_1 = \frac{x_1}{\alpha''} + \frac{x_2}{\beta''} + \frac{x_3}{\gamma''} = 0; \end{aligned}$$

la surface considérée sera donc représentable sur la surface

$$z^2 = x_1 x_2 x_3 \sigma_1 \sigma'_1 \sigma''_1;$$

d'ailleurs, les six droites

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad \dots, \quad \sigma''_1 = 0,$$

sont tangentes à une même conique enveloppe de la droite

$$\frac{x_1}{u} + \frac{x_2}{v} + \frac{x_3}{w} = 0,$$

$u, v, w$  satisfaisant à la relation

$$u + v + w = 0;$$

(1) *Journal de Crelle*, t. 73.



tous les cycles linéaires tracés sur une surface de Kummer se réduiront donc à zéro, en vertu de la remarque faite au sujet de la surface (7).

7. Supposons que, dans le second membre de l'équation (7), le nombre des polynômes irréductibles  $\sigma$  soit égal à trois. On aura la surface

$$(8) \quad z^2 = \sigma_m \sigma_n \sigma_r;$$

nous allons considérer le cas où les courbes

$$\sigma_m = 0, \quad \sigma_n = 0, \quad \sigma_r = 0$$

se coupent au même point O, ce point étant simple pour chacune des trois courbes et les tangentes en ce point étant toutes distinctes.

Si nous plaçons l'origine au point O, nous voyons que, pour une valeur voisine de zéro, les polynômes en  $x$ ,  $\sigma_m$ ,  $\sigma_n$ ,  $\sigma_r$  admettront chacun une racine infiniment petite. Soient

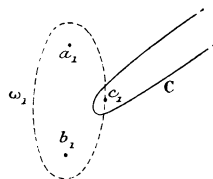
$$a_1, \quad b_1, \quad c_1$$

les trois racines infiniment petites et envisageons un cycle C formé autour de la racine  $c_1$  et d'une autre racine des polynômes  $\sigma_m$ ,  $\sigma_n$ ,  $\sigma_r$  différente de  $a_1$ ,  $b_1$ . Ce cycle C, quand  $\gamma$  aura tourné autour de l'origine dans son plan, se reproduira lui-même, augmenté de deux fois un cycle  $\omega_1$  entourant les racines  $a_1$  et  $b_1$  (fig. 9). Nous pouvons donc écrire

$$\omega_1 = 0.$$

De même, si l'on désigne par  $\omega_2$  un cycle comprenant à son intérieur les ra-

Fig. 9.



cines  $b_1$  et  $c_1$ , ce cycle étant obtenu d'une façon analogue à celle qui a donné  $\omega_1$ , nous aurons une condition nouvelle s'exprimant par l'équation

$$\omega_2 = 0$$

et, par conséquent, la surface (8) n'aura pas de cycles finis. C'est ce qu'on peut voir encore de la manière suivante.

La surface (8) est de la forme

$$z^2 = (x + ay + \dots)(x + by + \dots)(x + cy + \dots);$$

les termes non écrits dans chaque parenthèse étant de degré supérieur au premier et les quantités  $a, b, c$  étant toutes différentes. La transformation

$$x = XY, \quad y = Y, \quad z = ZY^2$$

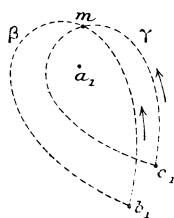
nous donnera alors la surface

$$Z^2 = Y[X + a + Y(\dots)][X + b + Y(\dots)][X + c + Y(\dots)].$$

Les courbes transformées de  $\sigma_m, \sigma_n, \sigma_r$  coupent la droite  $Y = 0$  en des points simples sur ces courbes et tous distincts. Ce sont les points ayant respectivement pour abscisses  $-a, -b, -c$ . Il suffit alors d'appliquer la remarque du numéro précédent.

Soit le cas particulier où les deux courbes  $\sigma_n, \sigma_r$  viendraient à être tangentes à l'origine. Un cycle  $C$  entourant la racine  $c_1$  et une autre racine non infiniment petite se sera accru, après une révolution de  $y$  autour de l'origine, de deux fois un cycle  $\omega_1$  entourant  $a_1$  et  $b_1$  ou de deux fois un cycle  $\omega_3$  correspondant aux racines  $a_1$  et  $c_1$ . Ce dernier cas se présentera si, les points  $b_1$  et  $c_1$  décrivant respectivement les courbes  $\beta$  et  $\gamma$  marquées sur la *fig. 10*, par suite de la variation

Fig. 10.



de  $y$ , il arrive que le point  $b_1$  passe au point  $m$  avant que le point  $c_1$  y soit arrivé. On sera toujours assuré que l'une au moins des deux équations suivantes

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_3 = 0$$

est vérifiée, et comme la condition

$$\omega_2 = 0$$

subsiste évidemment, il s'ensuit que, dans le cas actuel, la connexion linéaire de la surface (8) sera encore d'ordre un.

Si les courbes  $\sigma_m, \sigma_n, \sigma_r$  sont tangentes au même point  $O$ , qui est toujours supposé simple sur ces courbes, il pourra encore arriver que tous les cycles de la

surface (8) soient réductibles à zéro. Supposons, par exemple, que  $\sigma_m$  et  $\sigma_n$  soient de degré impair,  $\sigma_r$  étant de degré pair, et admettons, de plus, qu'aux environs de l'origine O les racines infiniment petites  $a_1, b_1, c_1$  déjà considérées aient des développements de la forme

$$\begin{aligned} x &= a_1 y^3 + \dots && \text{pour } \sigma_m, \\ x &= b_1 y^2 + \dots && \sigma_n, \\ x &= c_1 y^3 + \dots && \sigma_r \\ &&& (a_1 b_1 c_1 \neq 0); \end{aligned}$$

posons alors

$$x = XY^2, \quad y = Y, \quad z = ZY^3,$$

nous serons conduits à la surface

$$Z^2 = [X - a_1 Y + Y(\dots)][X - b_1 + Y(\dots)][X - c_1 Y + Y(\dots)]$$

qui peut s'écrire encore

$$Z^2 = \sigma'_m \sigma'_n \sigma'_r.$$

Les courbes  $\sigma'_m, \sigma'_n$  seront de degré impair; comme nous l'avons vu, cela diminuera le nombre des cycles effectifs de la surface d'une unité. Enfin, les courbes  $\sigma'_m$  et  $\sigma'_r$  se coupant en un point simple pour chacune d'elles à l'origine, il s'ensuit que tous les cycles de la surface seront équivalents à zéro.

Au contraire, si les développements des racines  $a_1, b_1, c_1$  sont de la forme

$$\begin{aligned} x &= a_1 y^2 + \dots, \\ x &= b_1 y^2 + \dots, \\ x &= c_1 y^2 + \dots \\ &&& (a_1 b_1 c_1 \neq 0), \end{aligned}$$

la surface (8) pourra admettre des cycles non réductibles à des cycles nuls. Dans ce cas, un cycle C entourant la racine  $c_1$  et une autre racine non infiniment petite, s'accroît, par une révolution de  $y$ , de quatre cycles formés autour de  $a_1$  et  $b_1$ , et dont la somme est nulle. Cela ne donne plus, comme précédemment, une condition ayant pour effet de réduire le nombre des cycles de la surface.

Ainsi, la surface

$$z^2 = (x - a_1 y^2)(x - b_1 y^2)(x - c_1 y^2)$$

admet deux cycles finis; elle est, en effet, représentable sur un cylindre cubique.

8. Nous terminerons ces quelques remarques en revenant un instant à la sur-

face (5)

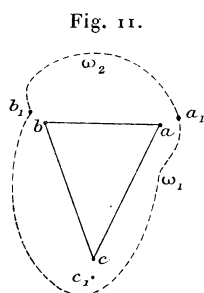
$$(5) \quad z^2 = \sigma_m \sigma_n.$$

Si la courbe  $\sigma_m$  admet un point double à tangentes distinctes à l'origine, et la courbe  $\sigma_n$  un point simple, nous savons que sur la surface (5) tous les cycles linéaires se réduisent à des cycles nuls. Nous voulons faire voir qu'il en sera encore ainsi dans le cas où l'origine serait un point de rebroussement pour  $\sigma_m$ ; nous supposons que l'origine est un point simple sur  $\sigma_n$  et, de plus, que  $\sigma_n$  n'est pas tangente à  $\sigma_m$  en ce point.

L'équation en  $x$ ,  $\sigma_m = 0$ , admettra, pour  $y$  voisin de zéro, deux racines infiniment petites  $a_1$ ,  $b_1$ . Désignons par  $c_1$  la racine infiniment petite de  $\sigma_n = 0$ . Le résultat à établir est évident si les deux racines  $a_1$ ,  $b_1$  n'appartiennent pas à un même système circulaire. Admettons donc que  $a_1$  et  $b_1$  se permutent quand l'argument de  $y$  augmente de  $2\pi$ .

Considérons alors deux cycles  $C$  et  $C_1$ , entourant, le premier, la racine  $b_1$  et une racine non infiniment petite; le second, la racine  $c_1$  et une racine aussi non infiniment petite.

Après une circulation de  $y$  autour de l'origine,  $C$  se sera accru de deux fois un cycle  $\omega_1$  correspondant aux racines  $a_1$  et  $b_1$ ;  $C_1$ , en même temps, se sera reproduit, augmenté de deux fois un cycle  $\omega_2$ , correspondant aux mêmes racines  $a_1$  et  $b_1$ , mais différent de  $\omega_1$  (*fig. 11*).



D'ailleurs, le cycle formé des chemins marqués par un trait continu (*fig. 11*),  $(bc)$ ,  $(ca)$ ,  $(ab)$  <sup>(1)</sup>, cycle qu'on suppose ne contenir aucune racine à son intérieur, est évidemment un cycle nul. On aura donc

$$(bc) + (ca) + (ab) = 0.$$

De plus, les conditions

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0,$$

(1) Les points  $a$ ,  $b$ ,  $c$  sont supposés infiniment voisins respectivement des points  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_1$ .

que nous pouvons écrire, équivalent aux équations suivantes :

$$\begin{aligned}(bc) - (ca) &= 0, \\ (ab) &= 0\end{aligned}$$

et, par conséquent, il viendra

$$(ab) = (bc) = (ca) = 0.$$

En particulier, la condition

$$(bc) = 0$$

exprime qu'on peut former un cycle équivalent à zéro, avec une racine de  $\sigma_m = 0$  et une racine de  $\sigma_n = 0$ . Notre proposition est ainsi démontrée : les cycles de la surface (5), dans le cas qui vient d'être considéré, sont tous des cycles nuls.

On pouvait encore procéder de la façon suivante. L'équation de la surface (5) peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned}z^2 &= [(ax + by)^2 + \dots] [a'x + b'y + \dots] = \sigma_m \sigma_n \\ (ab' - ba' &\neq 0).\end{aligned}$$

On suppose que les axes des  $x$  et des  $y$  rencontrent les courbes  $\sigma_m$  et  $\sigma_n$ , en dehors de l'origine, en  $m + n - 3$  points simples et tous distincts et que les tangentes à l'origine aux deux courbes ne coïncident pas avec les axes.

Effectuons alors la transformation

$$x = X, \quad y = \frac{X}{Y};$$

nous serons amenés à considérer la surface

$$z^2 = x[(ay + b)^2 y^m + x(\dots)] [(a'y + b')y^n + x(\dots)] = x \sigma'_m \sigma'_n.$$

La droite  $x = 0$  rencontre la courbe  $\sigma'_n = 0$  en un point simple

$$x = 0, \quad y = -\frac{b'}{a'},$$

ce point n'étant pas sur  $\sigma'_m = 0$ : Avec la racine  $x = 0$  et une racine de  $\sigma'_n = 0$ , on pourra donc former un cycle nul.

Si le point  $\left(x = 0, y = -\frac{b'}{a'}\right)$  est un point simple sur  $\sigma'_m$  ou un point double à tangentes distinctes, la proposition est démontrée. Si, au contraire, ce point est, sur  $\sigma'_m$ , un point double à tangentes confondues, on transportera l'origine en ce point, on effectuera sur  $x, y$  la transformation homographique la plus géné-

rale, et l'on recommencera la transformation

$$x = X, \quad y = \frac{X}{Y};$$

on sait <sup>(1)</sup> qu'après un nombre fini d'opérations on arrivera à résoudre la singularité du point double considéré.

9. On verra aisément que les surfaces représentées par l'équation

$$z^2 = f_4(x, y),$$

où  $f_4(x, y)$  désigne un polynôme du quatrième degré en  $x$  et  $y$ , n'ont pas de cycles linéaires finis, à l'exception, toutefois, du cas où  $f_4(x, y) = 0$  se décompose en quatre droites concourantes.

Disons encore que, pour une surface ayant pour équation

$$z^2 = f(x, y),$$

on peut, sans diminuer la généralité, se borner à considérer le cas où  $f$  est de degré pair. Si, en effet,  $f$  est d'ordre impair, on pourra, si l'on veut, effectuer la transformation

$$x = \frac{1}{X}, \quad y = \frac{Y}{X}, \quad z = \frac{Z}{X^{m+1}},$$

$2m + 1$  désignant le degré de  $f$ . On sera conduit alors à une surface

$$Z^2 = X f_1(X, Y) = F(X, Y),$$

$F$  étant d'ordre pair.

10. On peut citer des surfaces dont l'équation n'est pas de la forme

$$z^2 = f(x, y),$$

et pour lesquelles, cependant, tous les cycles, après avoir été amenés dans un continuum  $y = \text{const.}$ , se réduiront à des contours entourant seulement deux racines d'une certaine équation en  $x$

$$R(x, y) = 0,$$

où  $y$  a la valeur constante considérée.

---

<sup>(1)</sup> E. PICARD, *Traité d'Analyse*, t. II, Chap. XIII.

Soit, par exemple, la surface

$$(7) \quad Az^3 + 3Bz^2 + 3Cz + D = 0,$$

A désignant une constante et B, C, D des polynomes en  $x$  et  $y$ .

Posons

$$R(x, y) = (AD - BC)^2 - 4(AC - B^2)(BD - C^2),$$

$$U = (AD - BC)A - 2B(AC - B^2),$$

$$P = \frac{1}{2}(U - A\sqrt{R}),$$

$$Q = \frac{1}{2}(U + A\sqrt{R}).$$

$z$  sera alors donné par la formule

$$Az = -B - \varepsilon \sqrt[3]{P} - \varepsilon^2 \sqrt[3]{Q},$$

$\varepsilon$  étant une racine cubique quelconque de l'unité. D'ailleurs, les deux radicaux qui entrent dans cette expression sont liés par la relation

$$\sqrt[3]{P} \sqrt[3]{Q} = -(AC - B^2).$$

Supposons que U et R, qui sont des polynomes en  $x$  et  $y$ , n'admettent pas de facteur commun. Il suffit de considérer les cycles de la surface situés dans l'espace  $y = y_0$ . On pourra, d'ailleurs, choisir la valeur  $y_0$ , de telle sorte que les deux équations

$$P = 0, \quad Q = 0,$$

ne puissent être satisfaites pour une même valeur de  $x$ . Tout cycle de la surface correspondra alors à une courbe enveloppant deux racines de l'équation

$$R(x, y_0) = 0.$$

Plusieurs des remarques précédemment faites seront applicables dans le cas actuel. En particulier, si la courbe

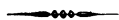
$$R(x, y) = 0$$

est irréductible, la surface (7) n'aura pas de cycles finis.

Soit encore une surface de la forme

$$(8) \quad z = \sqrt{f(x, y)} + \sqrt{g(x, y)},$$

$f$  et  $g$  étant des polynomes en  $x$  et  $y$ . Si ces polynomes sont irréductibles, sur la surface (8), tous les cycles linéaires se réduiront aussi à zéro.



## CHAPITRE II.

### I. — CONNEXION LINÉAIRE DES SURFACES $z^2 = f_6(x, y)$ .

Nous allons considérer, au point de vue de la connexion linéaire, les surfaces du sixième degré de la forme

$$z^2 = f_6(x, y).$$

Si l'on veut qu'une telle surface puisse admettre des cycles finis, il faudra supposer que la courbe

$$f_6(x, y) = 0$$

se décompose en deux ou plusieurs courbes. Différents cas pourront se présenter.

1.  $f_6$  se décompose en une quartique et deux droites, ou une quartique et deux coniques. — Étant donnée une surface ayant pour équation

$$z^2 = \sigma_m \sigma_n \sigma_r \dots,$$

la notation

$$(\sigma_m, \sigma_n) = 0,$$

voudra signifier que, pour  $y = y_0$ , les polynômes en  $x$ ,  $\sigma_m$  et  $\sigma_n$  admettant un certain nombre de racines, on peut, avec une racine de  $\sigma_m = 0$  et une racine de  $\sigma_n = 0$ , former un cycle équivalent à zéro sur la surface donnée.

Cela étant, soit la surface

$$(1) \quad z^2 = \sigma_4 \sigma_1 \sigma'_1;$$

deux des polynômes du second membre étant de degré impair, il s'ensuit (Chap. I, n° 5) que la surface admettra, au plus, un cycle fini.

Si les droites  $\sigma_1$ ,  $\sigma'_1$  se coupent en un point simple de  $\sigma_4$ , on aura évidemment

$$(\sigma_4, \sigma_1) = 0,$$

et la surface (1) n'admettra aucun cycle fini.

Si les droites  $\sigma_1$ ,  $\sigma'_1$  se coupent en un point double de  $\sigma_4$ , la surface (1) sera unicursale <sup>(1)</sup>.

<sup>(1)</sup> M. Nøther a démontré que si une surface F est telle qu'une famille de surfaces dépendant linéairement d'un paramètre  $\alpha$  la coupent chacune suivant une courbe unicursale, cette surface F est unicursale. [*Ueber Flächen welche Schaaren rationaler Curven besitzen* (*Math. Annalen*, Bd 3).] M. Picard a repris cette question à un autre point de vue. (*Archiv der Mathematik und Physik*, 1901.)



Supposons donc que  $\sigma_1, \sigma'_1$  ne se coupent pas sur  $\sigma_4$  et que la quartique ayant un point de rebroussement en un point O,  $\sigma_1$  soit la tangente de rebroussement. Nous pourrions rejeter  $\sigma'_1$  à l'infini et prendre pour équation de la surface

$$z^2 = x(x^2 + \dots) = x\sigma_4,$$

les termes non écrits dans la parenthèse étant de degré supérieur au second. Si dans  $\sigma_4$  existe le terme en  $y^3$ , la transformation

$$x = XY, \quad y = Y,$$

nous conduira à une surface

$$z^2 = xy(y + \dots)$$

qui n'admet pas de cycles finis (Chap. I, n° 7). Si le terme en  $y^3$  n'existe pas dans  $\sigma_4$ , on remarquera que la quartique ne saurait admettre plus d'un point de rebroussement de cette nature. On voit ainsi que la surface (1) n'aura jamais de cycles finis.

Si, au lieu de l'équation (1), on a l'équation (1)',

$$(1)' \quad z^2 = \sigma_4 \sigma_2,$$

le seul cas à considérer sera celui où,  $\sigma_4$  ayant un point de rebroussement, la conique  $\sigma_2$  serait tangente à la quartique en ce point.

Si le rebroussement est de première espèce, on raisonnera comme plus haut, lorsqu'on supposait que la droite  $\sigma_1$  était tangente à  $\sigma_4$  en un point de rebroussement du même genre.

Si le rebroussement est de seconde espèce, nous pourrions, après une transformation homographique, poser,

$$\begin{aligned} \sigma_4 &= x^4 + x(\alpha x^2 + \beta xy) + \alpha' x^2 + \beta' xy + \gamma' y^2 + mx + ny + l, \\ \sigma_2 &= x^2 - y; \end{aligned}$$

le point de rebroussement a été rejeté à l'infini sur la droite  $x = 0$ , la droite de l'infini étant devenue la tangente de rebroussement.

Dès lors, il suffit d'effectuer la transformation

$$x = X, \quad y - x^2 = Y,$$

pour être conduit à une surface déjà considérée,

$$z^2 = \sigma_4 \sigma_1.$$

Tous les cycles d'une surface telle que (1)' seront donc équivalents à zéro. Soit,

comme application, la surface des centres de la quadrique

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

Si l'on prend la polaire réciproque de cette surface (1), par rapport à la sphère,

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

on obtient la surface du quatrième degré suivante,

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) (a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 - 1)$$

et, si l'on pose

$$x = XZ, \quad y = YZ, \quad z = Z,$$

à la surface précédente on pourra faire correspondre birationnellement la surface

$$z^2 = \left[ (a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2) \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) - (x^2 + y^2 + 1)^2 \right] \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right)$$

qui est bien de la forme

$$z^2 = \sigma_4 \sigma_2$$

et, par conséquent, l'ordre de connexion linéaire de la surface des centres considérée sera égal à un.

**2.**  $f_6$  se décompose en une cubique, une conique et une droite, ou en une cubique et trois droites. — La surface

$$(2) \quad z^2 = \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1$$

aura, au plus, un cycle fini, et l'on voit aisément que si la droite  $\sigma_1$  coupe la conique  $\sigma_2$  en deux points distincts, tous les cycles se réduiront à des cycles nuls.

Il en sera encore ainsi dans le cas où la droite  $\sigma_1$  serait tangente à  $\sigma_2$ . Le seul cas où cela n'apparaisse pas immédiatement est celui où l'on supposerait que  $\sigma_3$  et  $\sigma_2$  sont tangentes à  $\sigma_1$  au même point. Si l'on rejette  $\sigma_1$  à l'infini, on pourra, dans cette hypothèse, écrire

$$\begin{aligned} \sigma_3 &= x_2(x + \alpha y) + \varphi_2(x, y) + \dots, \\ \sigma_2 &= x^2 - y; \end{aligned}$$

---

(1) SALMON, *Traité de Géométrie analytique à trois dimensions* (I<sup>re</sup> Partie).

mais alors la transformation

$$x = X, \quad y - x^2 = Y,$$

nous amènera à considérer une surface ayant pour équation

$$z^2 = \sigma_m \sigma_1,$$

$\sigma_m$  désignant une courbe du troisième ou du quatrième degré.

Si l'on suppose que la conique  $\sigma_2$  se décompose en deux droites, nous aurons alors la surface

$$(2)' \quad z^2 = \sigma_3 \sigma_1 \sigma'_1 \sigma''_1.$$

Nous aurons d'abord la relation (Chap. I, n° 5),

$$(\sigma_3, \sigma_1) + (\sigma'_1, \sigma''_1) = 0,$$

et, par conséquent, la surface  $(2)'$  admettra au plus deux cycles finis. Il est facile de voir que ces deux cycles eux-mêmes se réduiront à zéro. En effet, supposons que les trois droites  $\sigma$  forment un triangle.

Si la cubique  $\sigma_3$  a un point double en un sommet du triangle, la surface sera unicursale.

Si un sommet du triangle, celui, par exemple, qui se trouve au point de rencontre de  $\sigma_1$  et  $\sigma'_1$ , est un point simple pour  $\sigma_3$ , il viendra, dans ce cas,

$$(\sigma_3, \sigma_1) = 0, \quad (\sigma_1, \sigma'_1) = 0.$$

Si aucun sommet du triangle, formé par les droites  $\sigma$ , ne se trouve sur la cubique, on pourra évidemment écrire

$$(\sigma_1, \sigma'_1) = 0, \quad (\sigma'_1, \sigma''_1) = 0,$$

et l'équation toujours vérifiée

$$(\sigma_3, \sigma_1) + (\sigma'_1, \sigma''_1) = 0,$$

donnera ensuite

$$(\sigma_3, \sigma_1) = 0.$$

Enfin, si les droites  $\sigma$  sont concourantes,  $\sigma_3$  ne passera pas en leur point de concours, sinon la surface serait unicursale. D'où il suit encore

$$(\sigma_1, \sigma'_1) = 0, \quad (\sigma'_1, \sigma''_1) = 0,$$

et aussi

$$(\sigma_3, \sigma_1) = 0.$$

3.  $f_6$  se décompose en trois coniques. — La surface

$$(3) \quad z^2 = \sigma_2 \sigma'_2 \sigma''_2$$

admettra au plus deux cycles finis.

Supposons, par exemple, que les coniques  $\sigma_2, \sigma'_2$  soient tangentes en un point  $m$  et se coupent en deux autres points  $n, p$ . Si la conique  $\sigma''_2$  passe en l'un des points  $n, p$ , il en résultera

$$(\sigma_2, \sigma'_2) = 0, \quad (\sigma'_2, \sigma''_2) = 0.$$

D'ailleurs ces conditions seront encore vérifiées si la conique  $\sigma''_2$  ne passe ni en  $n$ , ni en  $p$ , car alors  $\sigma''_2$  rencontrera l'une au moins des coniques  $\sigma_2, \sigma'_2$  en un point distinct de  $m$ .

On verra aisément, sans qu'il soit nécessaire d'entrer dans plus de détails, que si les trois coniques  $\sigma$  ne sont pas tangentes deux à deux en deux mêmes points, ou surosculatrices deux à deux en un même point, la surface (3) n'admettra pas de cycles finis.

Si les coniques  $\sigma$  sont tangentes deux à deux en deux mêmes points, l'équation (3) pourra s'écrire

$$z^2 = (xy + a)(xy + b)(xy + c), \\ a \neq b, \quad b \neq c, \quad abc \neq 0,$$

et si nous posons

$$xy = X, \quad y = Y,$$

la surface transformée sera le cylindre cubique

$$z^2 = (x + a)(x + b)(x + c)$$

et, par suite, la surface considérée possédera deux cycles finis.

Si les coniques  $\sigma$  sont surosculatrices deux à deux en un même point, la surface (3) pourra, dans ce cas, être ramenée à la forme

$$z^2 = (y^2 + x + a)(y^2 + x + b)(y^2 + x + c)$$

et la transformation

$$y^2 + x = X, \quad y = Y,$$

nous conduira encore à un cylindre cubique.

Si la conique  $\sigma''_2$  vient à se décomposer en deux droites, on aura à considérer la surface

$$(3)' \quad z^2 = \sigma_2 \sigma'_2 \sigma_1 \sigma'_1.$$

Nous pouvons écrire (Chap. I, n° 5)

$$(\sigma_1, \sigma'_1) = 0,$$

c'est-à-dire que la surface  $(3)'$ , comme la surface  $(3)$ , ne saurait admettre plus de deux cycles finis distincts. Si l'on considère l'ensemble des deux droites  $\sigma$  comme représentant une conique, la discussion sera la même que pour la surface  $(3)$ . On ne pourra avoir de cycles finis que lorsque les coniques  $\sigma_2, \sigma'_2$  et la conique formée par l'ensemble des deux droites  $\sigma$  seront tangentes deux à deux en deux mêmes points, ou surosculatrices deux à deux en un même point. Le premier cas, seul, pourra se présenter : c'est le cas où  $\sigma_2$  et  $\sigma'_2$  étant bitangentes, les droites  $\sigma_1, \sigma'_1$  sont les tangentes communes à ces deux coniques. La surface  $(3)'$  devient alors, après une transformation homographique convenable,

$$z^2 = xy(xy + a)(xj + b), \\ a \neq b, \quad ab \neq 0,$$

il existera deux cycles finis sur cette surface.

4.  $f_6$  se décompose en une conique et quatre droites. — Considérons une surface de la forme

$$(4) \quad z^2 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma'_1 \sigma''_1 \sigma'''_1.$$

Si les droites  $\sigma$  forment un quadrilatère et si la conique  $\sigma_2$  ne passe par aucun sommet du quadrilatère, on aura évidemment

$$(\sigma_1, \sigma'_1) = 0, \quad (\sigma'_1, \sigma''_1) = 0, \quad (\sigma''_1, \sigma'''_1) = 0,$$

et aussi

$$(\sigma_2, \sigma_1) = 0,$$

puisque la conique  $\sigma_2$  rencontrera la droite  $\sigma_1$  en des points qui donnent lieu à cette relation.

Si la conique  $\sigma_2$  passe en l'un des points d'intersection des droites  $\sigma$ , les équations précédentes subsisteront encore. Le cas où trois des quatre droites  $\sigma$  seraient concourantes ne présente, non plus, aucune difficulté.

##### 5. Les cycles de la surface

$$z^2 = f_6(x, y),$$

où  $f_6 = 0$  représente six droites, sont tous réductibles à zéro, à moins que les six droites ne soient concourantes. La surface, dans ce cas, est représentable sur un cylindre du sixième degré.

EN RÉSUMÉ, les surfaces

$$z^2 = f_6(x, y),$$

qui admettent des cycles finis sont celles pour lesquelles  $f_6$  se décompose :

*Soit, en trois coniques tangentes deux à deux, en deux mêmes points, l'une de ces coniques pouvant se décomposer en deux droites;*

*Soit, en trois coniques surosculatrices deux à deux, en un même point; Soit, en six droites concourantes.*

En d'autres termes, parmi les surfaces considérées, celles dont l'ordre de connexion linéaire n'est pas égal à un sont représentables sur des surfaces coniques.

## II. — APPLICATION AUX SURFACES DU QUATRIÈME DEGRÉ.

1. Étant donnée une surface du quatrième degré non rationnelle, ni cylindrique, ni conique

$$F(x, y, z) = 0,$$

si cette surface n'admet aucune singularité, son ordre de connexion linéaire sera égal à un. Nous pouvons donc supposer, pour la question qui nous occupe, que  $F$  a, au moins, un point double. S'il existait un point triple sur  $F$ , la surface serait unicursale.

Soit donc une surface du quatrième degré ayant, au moins, un point double que nous supposons à l'infini sur  $Oz$ . L'équation d'une telle surface sera de la forme

$$(1) \quad z^2 \varphi_2(x, y) + 2z \varphi_3(x, y) + \varphi_4(x, y) = 0.$$

L'équation du cylindre circonscrit à cette surface, parallèlement à  $Oz$ , s'obtiendra en annulant le polynôme  $f(x, y)$  défini par la formule

$$f(x, y) = \varphi_3^2 - \varphi_2 \varphi_4.$$

La courbe  $f = 0$ , qui est du sixième degré, est la courbe de passage (*Uebergangs Curve*) de la surface (1). Cette surface (1) correspond birationnellement à la surface

$$(2) \quad z^2 = f(x, y).$$

2. Le polynôme  $f$  pourra être divisible par le carré d'une expression linéaire  $u$  en  $x, y$

$$f = u^2 \psi(x, y),$$

$\psi(x, y)$  étant du quatrième degré. Si l'on veut, alors, que la surface (1) admette des cycles finis, il faudra que  $\psi(x, y) = 0$  se décompose en *quatre droites concourantes*.

Si  $f$  ne contient aucun facteur linéaire carré, la surface (1) admettra des cycles finis, lorsque la courbe  $f = 0$  se décomposera :

*Soit, en trois coniques tangentes deux à deux, en deux mêmes points, l'une de ces coniques pouvant se décomposer en deux droites;*

*Soit, en trois coniques suroscultrices deux à deux en un même point.*

Si  $f = 0$  se décomposait en six droites concourantes, la surface (1) correspondante serait un cylindre ou un cône.

3. Considérons, d'abord, le cas où l'on aurait

$$(3) \quad f(x, y) = \varphi_3^2 - \varphi_2 \varphi_4 = u^2 \sigma_1 \sigma_1' \sigma_1'' \sigma_1''',$$

les équations

$$\sigma_1 = 0, \quad \dots, \quad \sigma_1''' = 0$$

représentant quatre droites concourantes.

Supposons, en premier lieu, que  $\varphi_3$  ne soit pas divisible par  $u$ . Si  $u = 0$  est l'équation d'une droite ne passant pas au point de concours des droites  $\sigma$ , nous pourrions, après une transformation homographique convenable, ramener l'identité (3) à la suivante

$$(4) \quad \varphi_3^2 - \varphi_2 \varphi_4 = x^2 (y + a)(y + b)(y + c)(y + d),$$

$\varphi_2 = 0$  sera une conique tangente à chacune des droites  $\sigma$ . Cette conique sera donc formée de deux droites passant au point à l'infini sur  $Ox$ , ou d'une droite double. Cette droite double devra, d'ailleurs, passer au point de concours des droites  $\sigma$ ; car, autrement, les points d'intersection de cette droite avec les droites  $\sigma$  seraient des points doubles pour la courbe  $f(x, y) = 0$ , ce qui ne saurait être.

Mettons l'identité (4) sous la forme

$$(5) \quad \frac{\varphi_3^2 - x^2 (y + a)(y + b)(y + c)(y + d)}{\varphi_2} = \varphi_4$$

et supposons que l'on ait

$$\varphi_2 = (y + \alpha)(y + \beta),$$

$\alpha$  et  $\beta$  désignant deux quantités quelconques, mais différentes. Le numérateur du premier membre de (5) est une expression en  $x$ , telle que tous les coefficients des différentes puissances de  $x$ , dans cette expression, devront être divisibles par  $\varphi_2$ . On en déduit que  $\varphi_3$  sera du premier degré en  $x$ ,

$$\varphi_3 = Ax + B.$$

La cubique  $\varphi_3 = 0$  aura un point double à l'infini sur  $Ox$ , et il en sera de même

pour  $\varphi_4$ , c'est-à-dire qu'on aura

$$\varphi_4 = A'x^2 + 2B'x + C', \quad (11)$$

$A', B', C'$  étant des polynomes en  $y$ .

On arrivera au même résultat si l'on suppose que  $\varphi_2$  a pour expression

$$\varphi_2 = (y + a)^2,$$

$a$  n'étant égal à aucune des quantités  $a, b, c, d$ . Il ne pourra, en effet, arriver que l'on ait pour  $\varphi_2$ , par exemple,

$$\varphi_2 = (y + a)^2,$$

car, alors, le premier membre de (4) serait divisible par  $(y + a)^2$ , et le second membre, par  $(y + a)$  seulement.

Si l'on pose  $\varphi_2 = C$ , l'identité (4) deviendra

$$(Ax + B)^2 - C(A'x^2 + 2B'x + C') = x^2(y + a)(y + b)(y + c)(y + d),$$

avec les conditions

$$(6) \quad B^2 - CC' \equiv 0, \quad AB - CB' \equiv 0,$$

et la surface du quatrième degré correspondante sera

$$(7) \quad Cz^2 + 2z(Ax + B) + A'x^2 + 2B'x + C' = 0;$$

cette équation peut s'écrire, en vertu de la première des relations (6),

$$C\left(z + \frac{B}{C}\right)^2 + x(2Az + A'x + 2B') = 0;$$

cette surface serait unicursale, comme on le voit, en posant

$$z + \frac{B}{C} = xZ,$$

elle ne saurait donc être représentable sur le cylindre

$$z^2 = (y + a)(y + b)(y + c)(y + d),$$

et, par conséquent, si la droite  $u = 0$  ne passe pas au point de concours des droites  $\sigma$ , on ne peut satisfaire à l'identité (3), en supposant que  $\varphi_3$  n'est pas divisible par  $u$ .

Soit, maintenant, le cas où l'équation  $u = 0$  représente une droite passant par le point de concours des droites  $\sigma$ ;  $f(x, y)$  pourra, alors, se mettre sous la



forme

$$(8) \quad f(x, y) = \varphi_3^2 - \varphi_2 \varphi_4 = y^2 (y + a)(y + b)(y + c)(y + d).$$

Admettons que  $\varphi_3$  ne soit pas divisible par  $y$ .

Le polynôme en  $y$ ,  $\varphi_2$ , aura pour expression

$$\varphi_2 = (y + \alpha)(y + \beta),$$

ou

$$\varphi_2 = (y + \gamma)^2,$$

$\alpha$  et  $\beta$  étant des quantités quelconques, mais différentes;  $\gamma$  peut aussi prendre toutes les valeurs, sauf les valeurs  $a, b, c, d$ .

Le polynôme  $\varphi_3$  ne contiendra  $x$  qu'au premier degré

$$\varphi_3 = Ax + B,$$

et, par suite,  $\varphi_4$  contiendra  $x$ , au second degré seulement,

$$\varphi_4 = A'x^2 + 2B'x + C',$$

$\varphi_2$  devant diviser l'expression

$$\varphi_3^2 - y^2 (y + a)(y + b)(y + c)(y + d),$$

il s'ensuit que le polynôme  $A$ , en  $y$ , du second degré, sera divisible par  $\varphi_2$ ; si l'on pose  $\varphi_2 = C$ , il viendra donc

$$A = \lambda C,$$

$\lambda$  étant une constante.

L'identité (8) entraîne, d'ailleurs, les conditions suivantes :

$$A^2 - CA' = 0, \quad AB - CB' = 0,$$

d'où l'on tire

$$A' = \lambda^2 C, \quad B' = \lambda B,$$

et, dès lors, la surface

$$Cz^2 + 2z(Ax + B) + A'x^2 + 2B'x + C' = 0$$

sera un cylindre, car l'équation précédente peut s'écrire

$$C(z + \lambda x)^2 + 2B(z + \lambda x) + C' = 0.$$

Ainsi, étant donnée une surface dont l'équation est de la forme

$$z^2 \varphi_2(x, y) + 2z \varphi_3(x, y) + \varphi_4(x, y) = 0,$$

si cette surface du quatrième degré n'est pas rationnelle; si elle n'est ni cylin-

drique, ni conique, et si, de plus, elle est représentable sur le cylindre

$$z^2 = u^2 (y + a)(y + b)(y + c)(y + d),$$

$u$  étant une expression linéaire en  $x$  et  $y$ , on sera assuré que le polynome  $\varphi_3$  est divisible par  $u$ . On pourra donc écrire

$$\varphi_3(x, y) = u \psi_2(x, y).$$

Si l'on revient à l'identité (3), on voit que le produit  $\varphi_2 \varphi_4$  sera divisible par  $u^2$ . Il n'est pas admissible que  $\varphi_2$  et  $\varphi_4$  soient, simultanément, divisibles par  $u$ ; car, alors, la surface du quatrième degré se décomposerait.

4. Soit d'abord

$$\varphi_4 = u^2 \chi_2(x, y);$$

nous aurons à considérer l'identité

$$\psi_2^2 - \varphi_2 \chi_2 = (y + a)(y + b)(y + c)(y + d) = \varpi(y),$$

on voit facilement que les équations

$$\varphi_2 = 0, \quad \chi_2 = 0$$

devront représenter des droites passant par le point à l'infini sur  $Ox$ ;  $\varphi_2$  et  $\chi_2$  seront ainsi des polynomes, du second degré, en  $y$ . Il en sera de même pour  $\psi_2$ , et nous aurons, alors, à considérer la surface

$$z^2 \varphi_2(y) + 2zx \psi_2(y) + u^2 \chi_2(y) = 0.$$

Si  $u$  ne dépend que de  $y$ , cette surface sera un cylindre. Sinon, on pourra poser

$$u = x,$$

et il viendra alors la surface du quatrième degré à deux droites doubles non courantes

$$(I) \quad z^2 \varphi_2(y) + 2zx \psi_2(y) + x^2 \chi_2(y) = 0.$$

Soit, en second lieu,

$$\varphi_2 = u^2,$$

l'identité

$$\psi_2^2 - \varphi_4 = \varpi(y)$$

pourra être satisfaite de deux manières différentes, suivant que l'on prendra pour  $\psi_2$  une fonction de  $x$  et  $y$ , ou une fonction de  $y$  seulement. Dans ce dernier cas,

$\varphi_4$  ne dépendra, non plus, que de  $y$ , et nous obtiendrons la surface

$$z^2 u^2 + 2 z u \psi_2(y) + \varphi_4(y) = 0,$$

$u$  devra contenir  $x$ , et l'on pourra poser encore  $u = x$ . La surface qu'on aura ainsi,

$$(II) \quad z^2 x^2 + 2 z x \psi_2(y) + \varphi_4(y) = 0,$$

peut être considérée comme étant la transformée homographique d'une surface de révolution.

Si, maintenant, on suppose que  $\psi_2$  est fonction de  $x$  et  $y$ ,  $\varphi_4$  sera alors donné par la formule

$$\varphi_4 = \psi_2^2(x, y) - \varpi(y),$$

ce qui nous conduira à la surface

$$z^2 u^2 + 2 z u \psi_2(x, y) + \psi_2^2(x, y) - \varpi(y) = 0.$$

Si la droite  $u = 0$  passe par le point de concours des droites  $\varpi(y) = 0$ , on pourra prendre pour la droite de l'infini cette droite  $u$ . La surface, correspondant à ce cas, aura pour équation

$$(III) \quad z^2 + 2 z \psi_2(x, y) + \psi_2^2(x, y) - \varpi(y) = 0.$$

Au contraire, si l'on peut poser  $u = x$ , il viendra

$$z^2 x^2 + 2 z x \psi_2(x, y) + \psi_2^2(x, y) - \varpi(y) = 0;$$

cette surface est une transformée homographique d'une surface de révolution du quatrième degré. On peut, en effet, écrire ainsi son équation

$$[zx + \psi_2(x, y)]^2 - \varpi(y) = 0.$$

Soit alors

$$\psi_2(x, y) = ax^2 + by + \dots$$

et effectuons la transformation

$$x = X + iZ,$$

$$z + ax = X - iZ,$$

il viendra la surface

$$[Z^2 + X^2 - 2\alpha X - 2\beta Z + \gamma]^2 - \varpi(y) = 0,$$

$\alpha$  et  $\beta$  étant des expressions du premier degré en  $y$ . La nouvelle transformation homographique

$$Z = z + \beta,$$

$$X = x + \alpha$$

nous donnera la surface de révolution

$$(z^2 + x^2 + \delta)^2 - \varpi(y) = 0,$$

$\delta$  étant un polynome du second degré en  $y$ .

5. Nous devons maintenant considérer le cas où l'expression  $f(x, y)$  ne serait divisible par aucun facteur linéaire carré.

Et, d'abord, supposons que  $f(x, y)$  se décompose en trois coniques tangentes deux à deux en deux mêmes points. Nous aurons à satisfaire à l'identité

$$(9) \quad f(x, y) = \varphi_3^2 - \varphi_2\varphi_1 = A(x - ay^2)(x - by^2)(x - cy^2) = \sigma_2\sigma_2'\sigma_2''.$$

On voit que la conique

$$\varphi_2 = 0$$

devra être bitangente ou surosculatrice à chacune des coniques  $\sigma$ . On pourra donc écrire

$$\varphi_2 = x - ay^2 + \lambda P^2 = x - by^2 + \mu Q^2 = x - cy^2 + \nu R^2.$$

Si l'une des quantités  $\lambda, \mu, \nu$  est infinie, la conique  $\varphi_2$  se réduira à une droite double. Il viendra

$$\varphi_2 = (\alpha x + \beta y + \gamma)^2.$$

Si la droite

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

ne coïncide pas avec la corde des contacts des coniques  $\sigma$ , ou avec l'une de leurs tangentes communes, cette droite rencontrera l'ensemble des coniques  $\sigma$ , au moins en quatre points, par lesquels devra passer la cubique  $\varphi_3 = 0$  : ce qui est impossible,  $\varphi_3$  ne pouvant être divisible par  $\alpha x + \beta y + \gamma$ .

Si aucune des quantités  $\lambda, \mu, \nu$  n'est infinie, alors les identités

$$(a - b)y^2 + \mu Q^2 = \lambda P^2, \quad (a - c)y^2 + \nu R^2 = \lambda P^2$$

montrent que les droites

$$P = 0, \quad Q = 0, \quad R = 0$$

devront coïncider avec la corde des contacts des coniques  $\sigma$

$$y = 0.$$

Il s'ensuit que l'on aura

$$\varphi_2 = x^2,$$

ou

$$\varphi_2 = y^2,$$

ou

$$\varphi_2 = x - \alpha y^2.$$

Soit

$$\varphi_2 = x - \alpha y^2;$$

si, dans l'identité (9), on suppose que  $x$  devienne égal à  $\alpha y^2$ , il viendra

$$\varphi_3^2 = -Aabcy^6,$$

ce qui suppose que  $\varphi_3$  est de la forme

$$\varphi_3 = (x - \beta y^2)y,$$

de telle sorte que  $\varphi_4$  sera déterminé par l'identité suivante :

$$(x - \beta y^2)^2 y^2 - (x - \alpha y^2) \varphi_4 = (x - \alpha y^2)(x - \beta y^2)(x - c y^2),$$

ou, si l'on rejette à l'infini la droite  $y = 0$ , par l'identité

$$(xt - \beta)^2 - (xt - \alpha) \varphi_4 = (xt - \alpha)(xt - \beta)(xt - c),$$

ce qui donnera

$$\varphi_4 = m(xt)^2 + n(xt) + p;$$

la surface du quatrième degré correspondant à ces expressions de  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$ ,  $\varphi_4$  sera donc

$$z^2(xt - \alpha) + 2z(xt - \beta) + m(xt)^2 + n(xt) + p = 0;$$

on obtiendra ainsi une transformée homographique d'une surface de révolution.

Il en sera de même, si l'on suppose que  $\alpha$  devienne nul, ou égal à l'une des quantités  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .

L'hypothèse

$$\varphi_2 = y^2$$

n'est pas admissible, car si, dans l'identité (9), on fait  $y$  égal à zéro, il viendrait

$$\varphi_3^2 = Ax^3.$$

Reste donc le cas où l'on aurait

$$\varphi_2 = x^2,$$

la conique  $\varphi_2$  étant alors une tangente commune aux coniques  $\sigma$ , comptée deux fois.

Si l'on échange entre elles la droite de l'infini et la droite  $y = 0$ , l'identité (9) deviendra

$$(10) \quad \varphi_3^2 - \varphi_2 \varphi_4 = A(xy - a)(xy - b)(xy - c),$$

ou encore

$$(11) \quad \varphi_3^2 - \varphi_2 \varphi_4 = A(xy)^3 + B(xy)^2 + C(xy) + D,$$

l'équation

$$A\mu^3 + B\mu^2 + C\mu + D = 0$$

ayant ses racines toutes distinctes.

Le polynome  $\varphi_2$  étant égal à  $x^2$ , on voit que les deux termes

$$Cxy, \quad D,$$

devront provenir de  $\varphi_3$ . Le second membre de (11) peut s'écrire

$$\left( \frac{C}{2\sqrt{D}} xy + \sqrt{D} \right)^2 - \frac{C^2}{4D} x^2 y^2 + Ax^3 y^3 + Bx^2 y^2,$$

ou bien

$$\left( \frac{C}{2\sqrt{D}} xy + \sqrt{D} \right)^2 - x^2 \left[ \frac{C^2}{4D} y^2 - Axy^3 - By^2 \right],$$

et, si nous posons

$$\begin{aligned} \sqrt{D} &= v, & \frac{C}{2\sqrt{D}} &= m, \\ m^2 - B &= 4n, & A &= -4u, \end{aligned}$$

l'identité (11) deviendra

$$\varphi_3^2 - \varphi_2 \varphi_4 = (mxy + v)^2 - 4x^2(ny^2 + uxy^3).$$

On pourra alors déterminer les fonctions  $\varphi$  par les équations suivantes :

$$\varphi_3 = mxy + v, \quad \varphi_2 = x^2, \quad \varphi_4 = ny^2 + uxy^3,$$

ce qui donnera la surface

$$(IV) \quad z^2 x^2 + z(mxy + v) + ny^2 + uxy^3 = 0.$$

*Remarque.* — On a identiquement

$$\begin{aligned} & [mxy + v + 2x^2(\alpha x + \beta y + \gamma)]^2 \\ & - 4x^2[ny^2 + uxy^3 + x^2(\alpha x + \beta y + \gamma)^2 + (\alpha x + \beta y + \gamma)(mxy + v)] \\ & = (mxy + v)^2 - 4x^2[ny^2 + uxy^3], \end{aligned}$$

mais on remarquera que la surface

$$\begin{aligned} & z^2 x^2 + z[mxy + v + 2x^2(\alpha x + \beta y + \gamma)] \\ & + ny^2 + uxy^3 + x^2(\alpha x + \beta y + \gamma)^2 + (\alpha x + \beta y + \gamma)(mxy + v) = 0, \end{aligned}$$

est une transformée homographique de la surface (IV). Il suffit, pour le voir, de poser

$$z = Z + \alpha x + \beta y + \gamma.$$

6. Nous avons enfin à chercher les surfaces du quatrième degré, pour lesquelles la *courbe de passage* se décompose en trois coniques surosculatrices deux à deux en un même point. Il faudra alors satisfaire à l'identité

$$(12) \quad \varphi_3^2 - \varphi_3 \varphi_4 = (ax + y^2 + \mu_1)(ax + y^2 + \mu_2)(ax + y^2 + \mu_3) = \sigma_2 \sigma_2' \sigma_2''.$$

La conique  $\varphi_2 = 0$  sera une conique véritable surosculatrice à chacune des coniques  $\sigma$ ; ou bien  $\varphi_2 = 0$  représentera la droite de l'infini comptée deux fois. On aura donc

$$\varphi_2 = ax + y^2 + \alpha,$$

ou

$$\varphi_2 = \text{const.}$$

Dans le premier cas,  $\varphi_3$  et  $\varphi_4$  auront pour expressions

$$\varphi_3 = ax + y^2 + \beta, \quad \varphi_4 = (ax + y^2)^2 + m(ax + y^2) + n,$$

et la surface du quatrième degré correspondante aura pour équation

$$z^2(ax + y^2 + \alpha) + 2z(ax + y^2 + \beta) + (ax + y^2)^2 + m(ax + y^2) + n = 0,$$

ce qui peut s'écrire sous la forme

$$(ax + y^2 + hz^2 + kz + l)^2 - g_4(z) = 0;$$

on trouve ainsi une transformée homographique de la surface (III).

Supposons, maintenant, que l'on ait

$$\varphi_2 = \text{const.}$$

Si l'on fait la transformation qui consiste à changer  $x$  en  $x + h$ , les équations des coniques  $\sigma$  deviendront

$$ax + y^2 + \mu_1 + ah = 0, \quad ax + y^2 + \mu_2 + ah = 0, \quad ax + y^2 + \mu_3 + ah = 0,$$

ou, en posant

$$\begin{aligned} \mu + ah &= m, \\ ax + y^2 + m_1 &= 0, \quad ax + y^2 + m_2 = 0, \quad ax + y^2 + m_3 = 0; \end{aligned}$$

on peut supposer que l'on a choisi  $h$  de façon à avoir

$$m_1 + m_2 + m_3 = 0,$$

et, dans ce cas, l'identité (12) pourra s'écrire

$$(13) \quad \varphi_3^2 - \varphi_2 \varphi_4 = (ax + y^2)^3 + p(ax + y^2) + r.$$

Le second membre de cette identité deviendra, si l'on introduit la variable d'homogénéité  $t$ ,

$$(axt + y^2)^3 + p(axt + y^2)t^4 + rt^6,$$

c'est-à-dire, en développant,

$$(14) \quad a^3x^3t^3 + y^6 + 3axty^4 + 3a^2x^2t^2y^2 + paxt^5 + py^2t^4 + rt^6;$$

$\varphi_2$  étant égal à  $t^2$ , on voit que les termes

$$y^6, \quad 3axty^4$$

devront provenir de  $\varphi_3$ . Multiplions l'expression (14) par 4, ajoutons et retranchons la quantité

$$9a^2x^2t^2y^2;$$

(14) sera alors de la forme

$$[2y^3 + 3axyt]^2 + 4t^2[a^3x^3t + \frac{3}{4}a^2x^2y^2 + paxt^3 + py^2t^2 + rt^4],$$

et l'on pourra prendre, pour les fonctions  $\varphi$ ,

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= t^2, & \varphi_3 &= 2y^3 + 3axyt, \\ \varphi_4 &= -a^3x^3t - \frac{3}{4}a^2x^2y^2 - paxt^3 - py^2t^2 - rt^4, \end{aligned}$$

et, en faisant  $t = 0$ , il viendra la surface du quatrième degré

$$(V) \quad z^2 + z(2y^3 + 3axy) - a^3x^3 - \frac{3}{4}a^2x^2y^2 - pax - py^2 - r = 0.$$

*Remarque.* — On pourrait encore prendre pour  $\varphi_3$

$$\varphi_3 = 2y^3 + 3axyt + 2t^2(\alpha x + \beta y + \gamma t),$$

ce qui donnerait une nouvelle expression pour  $\varphi_4$ ; mais les surfaces auxquelles on arriverait ainsi seraient des transformées homographiques des surfaces (V).

7. Dans son Mémoire déjà cité, sur les surfaces du quatrième degré dont le genre géométrique  $p_g$  est nul, M. de Franchis a obtenu, par une autre voie, les surfaces (I), (II), (III), (IV), (V), et il en a fait ensuite l'étude géométrique.

Nous pouvons remarquer, au sujet de ces surfaces, qu'elles sont toutes représentables sur un cône cubique; de plus, ce sont les seules surfaces du quatrième degré admettant des intégrales de différentielles totales de première espèce, et il



s'ensuit qu'une surface du quatrième degré ne peut avoir deux intégrales de différentielles totales de première espèce qui ne soient pas fonction l'une de l'autre <sup>(1)</sup>.

Si l'on désigne par  $\pi$  le genre d'une section plane d'une surface conique et par  $p_n$  le genre numérique de cette surface, on a

$$p_n = -\pi,$$

et, par conséquent, pour les surfaces considérées, on pourra écrire les relations suivantes :

$$p_1 - 1 = 2, \quad p_g = 0, \quad p_n = -1.$$



### CHAPITRE III.

#### CONNEXION LINÉAIRE DES SURFACES $z^2 = f_8(x, y)$ .

Étant donnée une surface du huitième degré de la forme

$$z^2 = f_8(x, y),$$

l'ordre de connexion linéaire d'une telle surface sera égal à un, si la courbe

$$f_8(x, y) = 0$$

est irréductible. Nous allons examiner les différents cas de décomposition de cette courbe.

1.  $f_8$  se décompose en deux courbes du quatrième degré. — Soit la surface

$$(1) \quad z^2 = \sigma_4 \sigma'_4,$$

et supposons que l'origine O soit un point de rebroussement pour la quartique  $\sigma_4 = 0$  et un point simple pour la quartique  $\sigma'_4 = 0$ , la courbe  $\sigma'_4$  étant, de plus, tangente en ce point à  $\sigma_4$ .

Si l'origine est un point de rebroussement de première espèce sur  $\sigma_4$ , nous aurons la surface

$$z^2 = (x^2 + \dots + y^3 + \dots)(x + hy^2 + \dots),$$

---

<sup>(1)</sup> E. PICARD, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, t. I, p. 131.

et la transformation

$$(U) \quad x = XY, \quad y = Y$$

nous conduira à une autre surface

$$z^2 = Y(Y + \dots)(X + hY + \dots),$$

qui n'admet pas de cycles finis.

Si l'origine est un point de rebroussement de seconde espèce, l'équation (1) pourra s'écrire

$$z^2 = (x^2 + \dots + 2\beta xy^2 + \dots + y^4)(x + hy^2 + \dots).$$

Soit d'abord,

$$h^2 - 2h\beta + 1 = 0;$$

on effectuera alors la transformation

$$(V) \quad x = XY^2, \quad y = Y,$$

et nous obtiendrons la surface

$$z^2 = (\sigma_4)(\sigma'_4),$$

en désignant par le symbole  $(\sigma_4)$  la courbe transformée de  $\sigma_4$ ;  $(\sigma_4) = 0$  rencontrera, en général, la droite  $y = 0$  en deux points simples  $m, n$ , ce dernier point étant aussi un point simple de  $(\sigma'_4)$ . Il pourra encore arriver que  $m$  vienne à coïncider avec  $n$  et alors la droite  $y = 0$  deviendra tangente à  $(\sigma_4)$  en  $n$  ou bien  $(\sigma_4)$  admettra un point double en  $n$ . Si ce point double est un point de rebroussement pour  $(\sigma_4)$ , nous allons voir que ce sera un point de rebroussement de première espèce.

En effet, l'équation développée de  $\sigma_4$  peut s'écrire

$$\sigma_4 = x^2 + 2\alpha x^2y + 2\beta xy^2 + ax^4 + bx^3y + cx^2y^2 + dxy^3 + y^4 = 0,$$

si l'on fait disparaître le terme en  $x^3$  par un choix convenable de l'axe des  $x$ .

La transformation (V) nous fera passer à la courbe  $(\sigma_4)$

$$(\sigma_4) = x^2 + 2\alpha x^2y + 2\beta x + ax^4y^4 + bx^3y^3 + cx^2y^2 + dxy + 1 = 0.$$

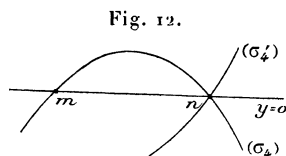
Si l'expression

$$x^2 + 2\beta x + 1$$

n'est pas un carré parfait,  $(\sigma_4)$  rencontrera la droite  $y = 0$  en deux points simples  $m$  et  $n$  (fig. 12). Dans le cas contraire, nous pouvons prendre  $\beta = -1$  et, si nous transportons l'origine au point  $(x = 1, y = 0)$ , il viendra

$$(\sigma_4) = (2\alpha + d)y + x^2 + (4\alpha + d)xy + cy^2 + 2\alpha x^2y + by^3 + 2cxy^2 + \dots = 0.$$

Si  $2\alpha + d \neq 0$ , le point  $m$  est venu coïncider avec  $n$ , et la droite  $y = 0$  est tangente à  $(\sigma_1)$  en  $n$ . Si  $2\alpha + d = 0$ , le point  $n$  est un point double sur  $(\sigma_1)$ . Le



point double sera à tangentes confondues si l'expression

$$x^2 + 2\alpha xy + cy^2$$

est un carré parfait; alors  $c = \alpha^2$  et  $(\sigma_1)$  devient

$$(\sigma^1) = (x + \alpha y)^2 + 2\alpha x^2 y + by^3 + 2\alpha^2 xy^2 + \dots = 0.$$

Coupons cette courbe par la droite

$$x + \alpha y = 0;$$

pour cela, remplaçons  $x$  par  $-\alpha y$  dans l'équation de  $(\sigma_1)$ , on obtiendra

$$by^3 + \dots = 0,$$

les termes non écrits étant de degré supérieur à trois. Si la tangente de rebroussement en  $n$  rencontre  $(\sigma_1)$  en quatre points confondus en  $n$ , on devra avoir

$$b = 0,$$

mais alors la courbe  $\sigma_1$  aurait pour équation

$$(x - y^2 + \alpha xy)^2 + ax^4 = 0,$$

et, par conséquent, ne serait pas indécomposable. Il s'ensuit que si le point  $n$  considéré est un point de rebroussement sur  $(\sigma_1)$ , ce ne peut être qu'un point de rebroussement de première espèce.

Supposons, en second lieu, que l'on ait

$$h^2 - 2\beta h + 1 \neq 0,$$

inégalité qui sera certainement vérifiée si  $h = 0$ , c'est-à-dire si l'origine est un point d'inflexion pour  $\sigma'_1$ . Dans le cas actuel, quatre seulement des points d'intersection de  $\sigma_1$  et  $\sigma'_1$  seront confondus au point O. Les deux quartiques se rencontreront donc, au moins, en un autre point  $O_1$ . Si ce point est un point double pour les deux courbes, on transportera l'origine en  $O_1$ , on rejettera à l'infini la tangente

de rebroussement en  $O$ , et l'on prendra pour axe des  $x$  la droite  $OO_1$ ; après quoi on effectuera la transformation

$$(W) \quad x = \frac{X}{Y^2}, \quad y = \frac{1}{Y},$$

qui donnera une surface du sixième degré déjà étudiée

$$z^2 = f_6(x, y).$$

Si le point  $O_1$  est double sur  $\sigma_4$  seulement, ce ne sera pas pour cette courbe un point de rebroussement de seconde espèce.

Enfin, si le point  $O_1$  est un point de rebroussement de seconde espèce sur  $\sigma'_4$  et un point simple sur  $\sigma_4$  et que, de plus, les deux courbes se rencontrent, en ce point, en quatre points seulement confondus avec  $O_1$ , les deux quartiques devront alors se couper en un troisième point  $O_2$ ; d'ailleurs, ce point  $O_2$  ne pourra être un point de rebroussement de seconde espèce, ni pour  $\sigma_4$ , ni pour  $\sigma'_4$ .

Nous voyons ainsi que, si les courbes  $\sigma_4, \sigma'_4$  se coupent en un point  $O$  qui est un point double pour l'une de ces courbes et un point simple pour l'autre, la surface (1) correspondante n'aura pas de cycles finis.

Il en sera de même si, en un point  $O$ , les deux quartiques  $\sigma_4, \sigma'_4$  admettent, l'une un point double à tangentes confondues, l'autre un point double avec deux branches distinctes, l'une de ces branches étant, au point  $O$ , tangente à  $\sigma_4$ . Dès lors, on pourra poser

$$\begin{aligned} \sigma_4 &= x^2 + \dots, \\ \sigma'_4 &= x(x + y) + \dots, \end{aligned}$$

les termes non écrits étant de degré supérieur au second.

Pour voir que, dans cette hypothèse, tous les cycles de la surface (1) se réduiront à des cycles nuls, on effectuera une transformation (U) si le terme en  $y^3$  entre dans  $\sigma_4$  ou si ce terme ne se trouve ni dans  $\sigma_4$ , ni dans  $\sigma'_4$ ; on fera une transformation (V) si le terme en  $y^3$  existe dans  $\sigma'_4$  et non dans  $\sigma_4$ .

Nous examinerons encore le cas où  $\sigma_4$  et  $\sigma'_4$  auraient un point de rebroussement en un point  $O$ , les deux tangentes de rebroussement en ce point étant confondues.

Si le point  $O$  est un point de rebroussement de première espèce pour les deux quartiques, ou pour l'une d'elles seulement, on aura recours à une transformation (U).

Si le point  $O$  est un point de rebroussement de seconde espèce pour  $\sigma_4$  et  $\sigma'_4$ , on rejettera à l'infini la tangente commune de rebroussement en  $O$ ; on prendra pour origine l'un des points de contact  $O_1$  de  $\sigma_4$  avec une tangente à cette courbe menée du point  $O$ . L'axe des  $x$  étant la droite  $OO_1$ , les équations des deux quar-

tiques seront alors

$$\sigma_4 = hy^4 + y^2(ax + by) + x^2 + mxy + ny^2 + y = 0,$$

$$\sigma'_4 = h'y^4 + y^2(a'x + b'y) + x^2 + m'xy + n'y^2 + \alpha'x + \beta'y + \gamma' = 0.$$

Effectuons sur ces deux courbes une transformation (W), il viendra deux autres courbes  $(\sigma_4)$ ,  $(\sigma'_4)$

$$(\sigma_4) = y^3 + x^2 + mxy + ny^2 + ax + by + h = 0,$$

$$(\sigma'_4) = \gamma'y^4 + (\alpha'x + \beta'y)y^2 + x^2 + m'xy + n'y^2 + \alpha'x + \beta'y + h' = 0,$$

et l'on sera ramené à considérer la surface

$$(1') \quad z^2 = (\sigma_4)(\sigma'_4).$$

Il est aisé de voir que, parmi les points d'intersection des courbes  $(\sigma_4)$  et  $(\sigma'_4)$ , il y en aura quatre seulement confondus au point à l'infini sur  $Ox$ . Les deux courbes  $(\sigma_4)$ ,  $(\sigma'_4)$  se couperont donc, au moins, en un autre point  $O_2$  qui devra être un point double sur l'une de ces courbes si l'on veut que la surface (1) puisse admettre des cycles qui ne soient pas tous nuls. D'ailleurs, si l'on place l'origine au point  $O_2$ , l'axe  $O_2x$  étant la droite  $OO_2$ , et qu'on transforme la surface (1') par les formules (W), on obtiendra une surface du sixième degré

$$z^2 = f_6(x, y).$$

Il pourrait arriver que, du point  $O$ , on ne pût mener à  $\sigma_4$  et  $\sigma'_4$  aucune tangente distincte de la tangente de rebroussement. Soit, alors,

$$\sigma_4 = hy^4 + y^2(ax + by) + x^2 + mxy + ny^2 + \alpha x + \beta y;$$

on aura, par hypothèse,

$$(ay^2 + my + \alpha)^2 - 4(hy^4 + by^3 + ny^2 + \beta y) = \text{const.},$$

et il s'ensuit que l'équation de  $\sigma_4$  pourra s'écrire

$$\sigma_4 = (\sqrt{h}y^2 + x + \sqrt{n}y)^2 + \alpha x + \beta y = 0;$$

de même, pour  $\sigma'_4$ , on aura

$$\sigma'_4 = (\sqrt{h'}y^2 + x + \sqrt{n'}y)^2 + \alpha'x + \beta'y + \gamma' = 0,$$

et, si l'on pose

$$\sqrt{h}y^2 + x + \sqrt{n}y = X, \quad y = Y,$$

à la surface (1) correspondra birationnellement une surface

$$z^2 = f_6(x, y).$$

Les remarques qui viennent d'être faites sur la surface (1) nous permettent d'affirmer qu'une telle surface ne possède aucun cycle fini.

2.  $f_8$  se décompose en une courbe du sixième degré et deux droites. — Nous allons considérer la surface

$$(2) \quad z^2 = \sigma_6 \sigma_1 \sigma'_1$$

et examiner, d'abord, le cas où les droites  $\sigma_1$ ,  $\sigma'_1$  ne se coupent pas sur la courbe  $\sigma_6 = 0$ .

Supposons que la droite  $\sigma_1$  soit tangente à  $\sigma_6$  en un point O, qui est pour cette courbe un point de rebroussement de seconde espèce. Si la droite  $\sigma_1$  rencontre  $\sigma_6$  en quatre points ou en cinq points confondus avec le point O,  $\sigma_1$  devra encore couper  $\sigma_6$  en un point simple, ou en un point double auquel elle ne sera pas tangente à la courbe  $\sigma_6$ ; et, par conséquent, la surface n'admettra pas de cycles finis.

Mais il pourra arriver que la droite  $\sigma_1$  soit tangente à  $\sigma_6$  en un point de rebroussement O, et ne rencontre cette courbe qu'au point O, et que, de même, la droite  $\sigma'_1$  soit tangente à  $\sigma_6$  en un autre point de rebroussement O', et ne rencontre la courbe qu'en ce point. Rejetons  $\sigma'_1$  à l'infini et prenons OO' pour axe des  $x$  et  $\sigma_1$  pour axe des  $y$ . L'équation (2) pourra s'écrire

$$z^2 = x \sigma_6;$$

faisons la transformation simplement rationnelle

$$x = X^2, \quad y = Y;$$

il viendra une surface

$$z^2 = f_n(X, Y),$$

$f_n$  désignant un polynôme en X, Y qui sera irréductible, si toutefois l'équation de la courbe  $\sigma_6$  ne peut pas être mise sous la forme

$$[\varphi(x, y)]^2 - x[\psi(x, y)]^2 = 0;$$

mais alors, nous aurons

$$\varphi(x, y) = y^3 + \dots,$$

les termes non écrits étant de degré inférieur au troisième. D'ailleurs,  $\psi(x, y)$  devra être du premier degré en  $x$ . Il s'ensuit que la transformation  $x = X^2$  nous fera, dans ce cas, passer de la surface (2) à une surface déjà rencontrée

$$z^2 = \sigma_4 \sigma'_4.$$

On raisonnera exactement de la même façon dans l'hypothèse où les droites  $\sigma_1$ ,  $\sigma'_1$  se coupent en un point double de  $\sigma_6$  et sont, de plus, tangentes : la première en un point O, la seconde en un point O' de  $\sigma_6$ , ces deux points O et O' étant sur la courbe  $\sigma_6$  des points de rebroussement de seconde espèce.

Supposons encore que  $\sigma_1$ ,  $\sigma'_1$  se coupent en un point triple O de  $\sigma_6$ . Si l'une des droites  $\sigma$  n'est pas tangente en O à  $\sigma_6$ , la surface (2) n'aura certainement pas de cycles finis (Chap. I, n° 5).

Chacune des droites  $\sigma$  devant être tangente à  $\sigma_6$  au point triple considéré, l'une de ces droites sera une tangente simple pour cette courbe, nous la prendrons pour axe des  $y$ . Nous pourrions écrire ainsi l'équation (2)

$$z^2 = xy[xy(ax + by) + \dots], \quad b \neq 0$$

et, après une transformation (U), il viendra la surface

$$z^2 = xy(bx + \dots)$$

dont l'ordre de connexion linéaire est égal à un.

3.  $f_8$  se décompose en une courbe du sixième degré et une conique. — Si la courbe du sixième degré  $\sigma_6$  ne rencontre la conique  $\sigma_2$  qu'en un point  $\omega$ , nous pourrions poser

$$\sigma_2 = x - y^2, \quad \sigma_6 = (x - y^2) \varphi_4(x, y) + k$$

et il suffira d'examiner le cas où le point  $\omega$  serait un point de rebroussement de seconde espèce pour  $\sigma_6$ , la tangente de rebroussement étant la tangente à  $\sigma_2$  en ce point, et aussi le cas où  $\sigma_6$  aurait un point multiple d'ordre quatre en  $\omega$ . D'ailleurs, il n'y a pas non plus alors de difficulté, car la transformation

$$x - y^2 = X, \quad y = Y$$

nous conduira de la surface

$$(3) \quad z^2 = \sigma_6 \sigma_2$$

à une autre surface déjà étudiée.

Si les courbes  $\sigma_6$  et  $\sigma_2$  se rencontrent en deux points  $\omega$  et O, on placera l'origine au point O, on prendra pour axe des  $x$  la droite O $\omega$  et pour droite de l'infini la tangente en  $\omega$  à  $\sigma_2$ , et l'on effectuera une transformation (W).

4.  $f_8$  se décompose en une courbe du cinquième degré et trois droites. — La surface

$$(4) \quad z^2 = \sigma_3 \sigma_1 \sigma'_1 \sigma''_1$$

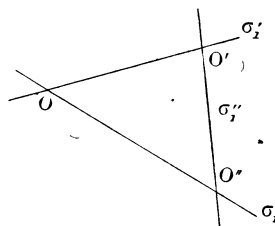
étant donnée, supposons que les droites  $\sigma$  forment un triangle, et que deux des sommets  $O'$ ,  $O''$  de ce triangle (*fig. 13*) ne se trouvent pas sur la courbe  $\sigma_5$ . Nous aurons alors

$$(\sigma_1, \sigma_1'') = 0, \quad (\sigma_1', \sigma_1'') = 0;$$

d'ailleurs, la condition suivante

$$(\sigma_5, \sigma_1) + (\sigma_1', \sigma_1'') = 0,$$

Fig. 13.



qui est toujours vérifiée, nous donnera, en outre,

$$(\sigma_5, \sigma_1) = 0.$$

Si la courbe  $\sigma_5$  admet un point simple en un sommet  $O''$  du triangle des droites  $\sigma$ , il viendra

$$(\sigma_5, \sigma_1) = 0, \quad (\sigma_1, \sigma_1'') = 0$$

et, par conséquent, aussi

$$(\sigma_1', \sigma_1'') = 0.$$

Pour que la surface (4) puisse avoir des cycles finis, il faudra donc supposer que, la courbe  $\sigma_5$  passant en deux sommets au moins,  $O'$ ,  $O''$ , du triangle considéré, ces sommets sont pour  $\sigma_5$  des points doubles ou des points multiples d'un ordre plus élevé. On rejettera, alors,  $\sigma_1''$  à l'infini, et prenant pour axes les droites  $\sigma_1$ ,  $\sigma_1'$ , on fera une inversion

$$x = \frac{1}{X}, \quad y = \frac{1}{Y}$$

et l'on sera ramené à une surface, sur laquelle tous les cycles se réduisent à des cycles nuls.

Si les droites  $\sigma$  sont concourantes et si la courbe  $\sigma_5$  ne passe pas par leur point de concours, tous les cycles de la surface se réduiront encore à zéro.

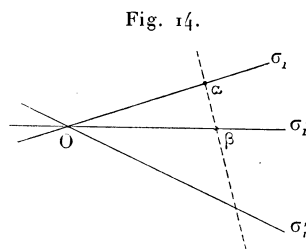
Si le point  $O$  (*fig. 14*) est un point simple sur  $\sigma_5$ , la tangente en ce point à la courbe étant distincte de  $\sigma_1$  et  $\sigma_1'$ , il s'ensuivra que  $\sigma_5$  rencontrera  $\sigma_1$ , au moins en un autre point  $\alpha$ , et  $\sigma_1'$ , au moins en un autre point  $\beta$ . Ces deux points  $\alpha$ ,  $\beta$  ne



sauraient être simples sur  $\sigma_5$ , car autrement nous pourrions écrire

$$(\sigma_5, \sigma_1) = 0, \quad (\sigma_5, \sigma'_1) = 0, \quad (\sigma'_1, \sigma''_1) = 0.$$

Admettons que  $\alpha$  soit un point double sur  $\sigma_5$ , et  $\beta$  un point simple;  $\alpha\beta$  étant la



droite de l'infini, et les axes coïncidant avec  $\sigma_1$ ,  $\sigma'_1$ , l'inversion

$$x = \frac{1}{X}, \quad y = \frac{1}{Y}$$

transforme la surface

$$z^2 = xy(x + ay)\sigma_5$$

en une surface

$$z^2 = Y(Y + aX)\sigma_6.$$

Supposons maintenant que le point O soit un point double sur la courbe  $\sigma_5$ . Si deux droites  $\sigma_1$ ,  $\sigma'_1$  ne sont pas tangentes à  $\sigma_5$  au point O, on raisonnera comme dans le cas précédent. Si, au contraire,  $\sigma_1$ ,  $\sigma'_1$  sont les tangentes au point double O de  $\sigma_5$ , l'équation de la surface (4) pourra se mettre sous la forme

$$z^2 = y(ax + by)(a'x + b'y)[(ax + by)(a'x + b'y) + \dots],$$

ce qui nous donnera, après une transformation (V), la surface

$$z^2 = y(ax + b)(a'x + b')[[(ax + b)(a'x + b) + y(\dots)]]$$

sur laquelle un cycle linéaire quelconque sera équivalent à zéro.

Enfin, si la courbe  $\sigma_5$  a un point triple en O, la surface (4) sera unicursale.

5.  $f_8$  se décompose en une quartique, une cubique et une droite. — La condition

$$(\sigma_3, \sigma_1) = 0$$

étant toujours vérifiée, tous les cycles de la surface

$$(5) \quad z^2 = \sigma_4 \sigma_3 \sigma_1$$

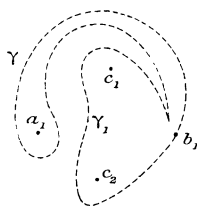
seront réductibles à un seul d'entre eux, qui, lui-même, nous allons le voir, sera réductible à zéro.

Supposons que la quartique  $\sigma_4$  coupe la droite  $\sigma_1$  en un point simple O, et ne lui soit pas tangente en ce point, si la cubique  $\sigma_3$  ne passe pas en O, ou si elle y admet un point simple, ou un point double,  $\sigma_4$  étant tangente à  $\sigma_3$  en ce point double, il est évident que la surface (5) n'aura pas de cycles finis.

Si la cubique  $\sigma_3$  ayant un point double en O,  $\sigma_4$  n'est pas tangente en ce point à  $\sigma_3$ , l'origine étant transportée en O, nous aurons, pour  $\gamma$  voisin de zéro, quatre racines infiniment petites : l'une  $a_1$  donnée par  $\sigma_1 = 0$ , l'autre  $b_1$  par  $\sigma_4 = 0$  et enfin deux autres  $c_1$  et  $c_2$  données par  $\sigma_3 = 0$ .

Si l'on considère un cycle C entourant  $b_1$  et une racine non infiniment petite,

Fig. 15.



ce cycle, après une révolution de  $\gamma$ , s'accroîtra de deux fois la somme de deux cycles  $\gamma$  et  $\gamma_1$  (fig. 15), de telle sorte que l'on pourra écrire

$$(\sigma_4, \sigma_1) = 0.$$

Considérons le cas où  $\sigma_4$  est tangente à  $\sigma_1$  en un point O, et rencontre encore cette droite en un point O', qui est double sur la quartique ;  $\sigma_3$  devra être tangente en O à  $\sigma_1$  et passer en O'.

Si les courbes  $\sigma_4$ ,  $\sigma_3$  se coupent en dehors de  $\sigma_1$  en un point O'', et que ce point soit double sur les deux courbes, on fera une inversion

$$x = \frac{1}{X}, \quad y = \frac{1}{Y},$$

OO', OO'' étant les axes et O'O'' la droite de l'infini. Si le point O'' est un point de rebroussement de seconde espèce pour  $\sigma_4$ ,  $\sigma_3$  étant tangente à la quartique en ce point, on fera une transformation (W), après avoir transporté l'origine au point O et avoir pris, pour axe des  $x$ , la droite O'O''. On sera conduit ainsi à des surfaces de la forme

$$z^2 = f_6(x, y).$$

Il reste à supposer que  $\sigma_3$  et  $\sigma_4$  ne se coupent qu'aux points O et O'. Si

la cubique  $\sigma_3$  rencontre  $\sigma_4$  en plus de deux points confondus avec le point O, l'équation (5) pourra s'écrire

$$z^2 = x[x - \alpha y^2 + \dots][x - \alpha y^2 + \dots] = x\sigma_3\sigma_4,$$

ce qui deviendra, après une transformation (V),

$$z^2 = x[x - \alpha + y(\dots)][x - \alpha + y(\dots)].$$

Si la cubique  $\sigma_3$  est tangente en  $O'$  à  $\sigma_4$ , et rencontre cette courbe en plus de six points confondus avec  $O'$ ; si, de plus, le point  $O'$  est pour la quartique un point de rebroussement de seconde espèce, on fera encore une transformation (V), sur la surface (5),

$$(V) \quad x = XY^2, \quad y = Y,$$

l'origine ayant été placée en  $O'$ , l'axe des  $x$  coïncidant avec  $\sigma_4$  et l'axe des  $y$  avec la tangente de rebroussement. Il pourra arriver que la courbe transformée ( $\sigma_4$ ) admette un point double ou un point de rebroussement de première espèce en un point  $O_1$  de  $y=0$ . Mais, alors, la courbe ( $\sigma_3$ ) qui passera en ce point y sera tangente à ( $\sigma_4$ ). L'origine étant supposée en  $O_1$ , il suffira d'effectuer une transformation (U) pour passer de la surface

$$z^2 = y(\sigma_4)(\sigma_3)$$

à une surface n'ayant aucun cycle fini.

Soit encore le cas où  $\sigma_4$  rencontre la droite  $\sigma_1$  en deux points O et  $O'$  qui sont doubles pour la quartique;  $\sigma_3$  devra passer en O et  $O'$ . Si l'on rejette  $\sigma_1$  à l'infini et qu'on prenne une origine quelconque, les axes passant d'ailleurs, l'un en O, l'autre en  $O'$ , on sera, après la transformation

$$x = \frac{1}{X}, \quad y = \frac{1}{Y},$$

ramené à considérer une surface de la forme

$$z^2 = \sigma_4\sigma'_4.$$

Enfin, nous supposerons que  $\sigma_4$  rencontre  $\sigma_1$  en un point triple O;  $\sigma_3$  devra passer en ce point, de telle sorte qu'on pourra écrire, en rejetant  $\sigma_1$  à l'infini,

$$\begin{aligned} \sigma_4 &= \varphi_3(y)x + \varphi_4(y), \\ \sigma_3 &= \psi_1(y)x^2 + \psi_2(y)x + \psi_3(y); \end{aligned}$$

si les courbes  $\sigma_4$  et  $\sigma_3$  ne se coupent pas à distance finie, le résultat de l'élimina-

tion de  $x$  entre les équations

$$\sigma_4 = 0, \quad \sigma_3 = 0$$

se réduira à une constante  $k$ . Il viendra ainsi

$$\psi_1(y) [\varphi_4(y)]^2 - \psi_2(y) \varphi_3(y) \varphi_4(y) + \psi_3(y) [\varphi_3(y)]^2 = k.$$

Dès lors, si l'on pose

$$\varphi_3(y)x + \varphi_4(y) = X, \quad y = Y,$$

et que l'on tienne compte de la condition précédente, on sera conduit à une surface de la forme

$$z^2 = \sigma_6 \sigma_1 \sigma'.$$

6.  $f_8$  se décompose en une cubique, deux coniques et une droite. — Soit la surface

$$(6) \quad z^2 = \sigma_3 \sigma_2 \sigma'_2 \sigma_1,$$

et examinons le cas où les coniques  $\sigma_2, \sigma'_2$  se coupent en quatre points distincts. Si la droite  $\sigma_1$  ne passe en aucun des points communs à  $\sigma_2, \sigma'_2$ , la surface (6) n'aura pas de cycles finis.

La condition

$$(\sigma_3, \sigma_1) = 0$$

sera, d'abord, toujours vérifiée. On peut écrire encore

$$(\sigma_2, \sigma'_2) = 0,$$

et, enfin, la droite  $\sigma_1$  rencontrera chacune des deux coniques  $\sigma$ , au moins en un point : cela donnera deux points  $\alpha, \beta$ . La cubique  $\sigma_3$  ne pourra avoir un point double en chacun de ces points, ni être tangente en  $\alpha$  et  $\beta$  à  $\sigma_1$ . D'où une troisième condition

$$(\sigma_2, \sigma_1) = 0 \quad \text{ou} \quad (\sigma'_2, \sigma_1) = 0.$$

Il en sera de même si la droite  $\sigma_1$  rencontre les coniques  $\sigma_2, \sigma'_2$  en un de leurs points communs  $\alpha$  et les coupe en deux autres points  $\alpha, \beta$ .

Supposons que la droite  $\sigma_1$  passant toujours au point  $\alpha$  soit tangente en ce point à  $\sigma'_2$  et coupe  $\sigma_2$  en un autre point  $\alpha$  (*fig. 6*). Si la cubique  $\sigma_3$  ne passe pas en  $\alpha$ , nous aurons

$$(\sigma_2, \sigma_1) = 0, \quad (\sigma_2, \sigma'_2) = 0$$

et aussi

$$(\sigma_3, \sigma_1) = 0.$$

D'ailleurs, si la cubique  $\sigma_3$  passe en  $\alpha$  et admet un point double en  $\alpha$ , tous les

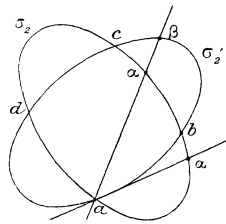
cycles se réduiront encore à zéro ; car, la droite  $\sigma_1$  n'étant pas tangente en  $\alpha$  à  $\sigma_3$ , il viendra

$$(\sigma_2, \sigma_1) = 0$$

avec les deux autres conditions

$$(\sigma_2, \sigma'_2) = 0, \quad (\sigma_3, \sigma_1) = 0.$$

Fig. 16.



On raisonnera d'une façon tout à fait analogue dans le cas où les coniques  $\sigma_2$ ,  $\sigma'_2$  ne se couperaient pas en quatre points distincts, et l'on sera toujours conduit au même résultat.

On verra également, sans aucune difficulté, que pour une surface de la forme

$$(6') \quad z^2 = \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma'_1 \sigma''_1$$

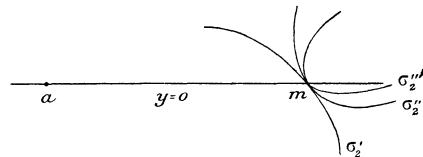
l'ordre de connexion linéaire est encore égal à un.

7.  $f_8$  se décompose en quatre coniques. — Nous allons d'abord faire une remarque au sujet d'une surface ayant pour équation

$$(7) \quad z^2 = \sigma_2 \sigma'_2 \sigma''_2 \sigma'''_2.$$

Supposons qu'en un point  $m$  (fig. 17) de la conique  $\sigma'_2$ , par exemple, les coniques  $\sigma''_2$ ,  $\sigma'''_2$  soient tangentes entre elles et tangentes à  $\sigma'_2$  ; le point  $m$  ne se trou-

Fig. 17.



vant pas sur  $\sigma_2$ . Nous prendrons pour origine un point  $a$  commun à  $\sigma_2$ ,  $\sigma'_2$  et pour axe des  $x$  la droite  $am$ , la tangente en  $m$ , à  $\sigma'_2$ , étant la droite de l'infini. Nous

effectuons une transformation (W)

$$(W) \quad x = \frac{X}{Y^2}, \quad y = \frac{1}{Y},$$

et nous obtiendrons, alors, une surface pouvant se ramener à l'une des trois formes suivantes

$$\begin{aligned} z^2 &= \sigma_3 \sigma_2 \sigma'_2 \sigma_1, \\ z^2 &= \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma'_1 \sigma''_1, \\ z^2 &= \sigma_3 \sigma_1 \sigma'_1 \sigma''_1; \end{aligned}$$

la surface (7), dans l'hypothèse qui a été faite, n'aura donc pas de cycles finis. Il s'ensuit que, si les coniques  $\sigma''_2, \sigma'''_2$  rencontrent  $\sigma_2$ , ou  $\sigma'_2$ , en dehors des points communs à ces dernières coniques, on n'aura pas à considérer le cas où les coniques  $\sigma''_2, \sigma'''_2$  seraient tangentes à  $\sigma_2$  ou à  $\sigma'_2$  en un même point  $m$ .

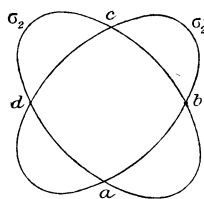
Cela étant, soit, d'abord, le cas où les coniques  $\sigma_2, \sigma'_2$  se coupent en quatre points distincts  $a, b, c, d$ .

Si les coniques  $\sigma''_2, \sigma'''_2$  rencontrent l'une des coniques  $\sigma_2, \sigma'_2$  en dehors des points  $a, b, c, d$  (fig. 18), il viendra, en vertu de la remarque précédente,

$$\begin{aligned} (\sigma''_2, \sigma_2) &= 0 \quad \text{ou} \quad (\sigma''_2, \sigma'_2) = 0, \\ (\sigma'''_2, \sigma_2) &= 0 \quad \text{ou} \quad (\sigma'''_2, \sigma'_2) = 0. \end{aligned}$$

D'ailleurs, il est bien évident que  $\sigma''_2, \sigma'''_2$  ne passeront pas, à la fois, par tous les

Fig. 18.



points  $a, b, c, d$ , et, par conséquent, une troisième condition viendra s'ajouter aux deux premières, savoir :

$$(\sigma_2, \sigma'_2) = 0,$$

tous les cycles de la surface seront réductibles à zéro.

Nous devons donc supposer que  $\sigma''_2$ , par exemple, ne rencontre pas  $\sigma_2, \sigma'_2$  en dehors des points communs à ces deux coniques. On peut tirer de là que  $\sigma''_2$  passera en deux, au moins, des points  $a, b, c, d$ ; soient  $c$  et  $d$  ces deux points.

Si les points  $c, d$  ne se trouvent pas sur  $\sigma'''_2$ , nous pourrions écrire

$$(\sigma_2, \sigma'_2) = 0, \quad (\sigma'_2, \sigma''_2) = 0.$$

La conique  $\sigma_2'''$  pourra passer en l'un des points  $a, b$ , au point  $a$ , par exemple. Si ce point  $a$  n'est pas sur  $\sigma_2''$ , on aura

$$(\sigma_2''', \sigma_2) = 0;$$

cette condition subsistera si, toutes les coniques  $\sigma$  passant au point  $a$ , l'une d'elles n'est pas tangente à l'une des trois autres, puisque la condition

$$(\sigma_2', \sigma_2'') + (\sigma_2''', \sigma_2) = 0,$$

qui est alors vérifiée, se réduit, dans le cas actuel, à

$$(\sigma_2''', \sigma_2) = 0.$$

On pourra encore écrire cette équation si, le point  $a$  étant toujours commun aux quatre coniques  $\sigma, \sigma_2$  est tangent en ce point à  $\sigma_2''$ , et  $\sigma_2'$  à  $\sigma_2'''$ , comme on le voit, en faisant une transformation (V), d'origine  $a$ .

Enfin, si la conique  $\sigma_2'''$  rencontre  $\sigma_2$  ou  $\sigma_2'$  en dehors des points  $a, b, c, d$ , l'une, au moins, des deux équations

$$(\sigma_2''', \sigma_2) = 0, \quad (\sigma_2''', \sigma_2') = 0$$

sera certainement satisfaite, et tous les cycles de la surface (7) seront encore des cycles nuls.

En raisonnant de la même façon, on verra que, les points  $c$  et  $d$  étant communs aux trois coniques  $\sigma_2, \sigma_2', \sigma_2''$ , il faudra que  $\sigma_2'''$  passe en ces deux points, si l'on veut que la surface (7) puisse admettre des cycles non tous réductibles à zéro.

Dès lors, si l'on prend pour axes les droites  $ac, ad$ , la droite de l'infini étant la droite  $cd$ , et, si l'on effectue une inversion,

$$x = \frac{1}{X}, \quad y = \frac{1}{Y},$$

on obtiendra des surfaces déjà étudiées, et l'on montrera aisément que la surface (7) n'aura des cycles finis que dans le cas où les quatre coniques  $\sigma$  passeront par les points  $a, b, c, d$ . Ces coniques appartiendront alors à un même faisceau linéaire. L'équation de la surface (7) pourra être ramenée à la forme

$$z^2 = (\varphi + \alpha\psi)(\varphi + \beta\psi)(\varphi + \gamma\psi)(\varphi + \delta\psi)$$

et sera représentable sur un cylindre du quatrième degré ou sur un cône cubique.

Supposons maintenant que les coniques  $\sigma_2, \sigma_2'$  soient bitangentes, et soient  $a, b$  les deux points de contact.

L'une des coniques  $\sigma_2''$ ,  $\sigma_2'''$ ,  $\sigma_2''$  par exemple, ne devra pas rencontrer  $\sigma_2$ ,  $\sigma_2'$  en dehors des points  $a$ ,  $b$ ;  $\sigma_2''$  sera donc tangente en  $a$ ,  $b$  aux coniques  $\sigma_2$ ,  $\sigma_2'$ .

Si la conique  $\sigma_2'''$  ne passe ni en  $a$  ni en  $b$ , il viendra

$$(\sigma_2''', \sigma_2) = 0, \quad (\sigma_2''', \sigma_2') = 0, \quad (\sigma_2''', \sigma_2'') = 0;$$

il faudra donc supposer que l'un au moins des points  $a$ ,  $b$  se trouve sur  $\sigma_2'''$ . Si cette conique passe en  $a$ , par exemple, on fera une transformation (W), d'origine  $a$ , l'axe des  $x$  étant la droite  $ab$ , et la droite de l'infini la tangente en  $b$ , à  $\sigma_2$ ,  $\sigma_2'$ .

La surface (7) admettra des cycles finis dans le cas seulement où les quatre coniques  $\sigma$  seront tangentes deux à deux en deux mêmes points.

Si les coniques  $\sigma_2$ ,  $\sigma_2'$  sont tangentes en un point, ou osculatrices, ou surosculatrices, la conclusion sera toujours la même : on pourra tracer deux cycles non équivalents à zéro sur une surface

$$s^2 = \sigma_2 \sigma_2' \sigma_2'' \sigma_2'''$$

lorsque les coniques  $\sigma$  appartiendront à un même faisceau linéaire. Dans tous les autres cas, l'ordre de connexion linéaire de la surface sera égal à un.

8.  $f_8$  se décompose en trois coniques et deux droites. — Si les coniques  $\sigma_2'$ ,  $\sigma_2''$  sont tangentes à la droite  $\sigma_1'$  en un point  $m$  non situé sur  $\sigma_2$  et distinct du point  $\omega$  de rencontre des droites  $\sigma_1$ ,  $\sigma_1'$ , on verra, comme au numéro précédent, que la surface

$$(8) \quad s^2 = \sigma_2 \sigma_2' \sigma_2'' \sigma_1 \sigma_1'$$

n'aura que des cycles nuls.

Considérons alors le cas particulier suivant :  $\sigma_2$  coupe les droites  $\sigma_1$ ,  $\sigma_1'$  en quatre points distincts.

Si le point  $\omega$  de rencontre des droites  $\sigma_1$ ,  $\sigma_1'$  se trouve sur  $\sigma_2'$  et  $\sigma_2''$ , tous les cycles de la surface (8) correspondante seront réductibles à zéro. En effet, la condition

$$(\sigma_1, \sigma_1') = 0$$

sera toujours vérifiée; ensuite, si, au point  $\omega$ ,  $\sigma_2'$  est tangente à  $\sigma_1$ , et  $\sigma_2''$  à  $\sigma_1'$ , on pourra écrire

$$(\sigma_2', \sigma_1) = 0, \quad (\sigma_2'', \sigma_1') = 0;$$

de plus, nous aurons aussi

$$(\sigma_2, \sigma_1) = 0.$$

Si maintenant, au point  $\omega$ , l'une des droites  $\sigma$  n'est tangente à aucune des



coniques  $\sigma'_2, \sigma''_2$ , il viendra l'équation

$$(\sigma'_2, \sigma''_2) + (\sigma_1, \sigma'_1) = 0,$$

qui, dans le cas actuel, se réduit à

$$(\sigma'_2, \sigma''_2) = 0,$$

on aura encore

$$(\sigma_2, \sigma_1) = 0,$$

et enfin  $\sigma'_2$  ni  $\sigma''_2$  ne devront rencontrer  $\sigma_2$  en dehors des points  $a, b, c, d$ , sans quoi il s'ensuivrait une condition de la forme

$$(\sigma_2, \sigma'_2) = 0 \quad \text{ou} \quad (\sigma_2, \sigma''_2) = 0;$$

supposons alors que  $\sigma'_2$  passe aux points  $c$  et  $d$ . Si l'un de ces deux points ne se trouve pas sur  $\sigma''_2$ , l'équation

$$(\sigma_2, \sigma'_2) = 0$$

sera satisfaite. Reste donc à considérer le cas où  $\sigma'_2, \sigma''_2$  passent en  $c$  et  $d$ ; on fera une inversion d'origine  $a$ , les axes étant  $ac$  et  $ad$ , et la droite de l'infini, la droite  $cd$ . On montrera ainsi que la surface (8) ne peut admettre aucun cycle fini.

Si aucune des coniques  $\sigma'_2, \sigma''_2$  ne passe au point  $\omega$ , on raisonnera exactement comme au numéro précédent et l'on arrivera à ce résultat, que la surface (8) considérée admettra deux cycles finis lorsque les coniques  $\sigma$  et l'ensemble des droites  $\sigma_1, \sigma'_1$ , considéré comme une conique, appartiennent à un même faisceau linéaire. Dans tous les autres cas, la surface (8) ne possède que des cycles nuls.

La conclusion sera la même si l'on suppose que l'une des droites  $\sigma$  ou toutes les deux soient tangentes à  $\sigma_2$ .

9. Nous n'envisagerons pas les autres cas de décomposition de la courbe

$$f_8(x, y) = 0;$$

ils peuvent, en effet, être traités aussi simplement que ceux déjà considérés. Nous donnerons seulement le résultat de la discussion complète, qui peut s'énoncer ainsi :

La surface

$$z^2 = \sigma_2 \sigma'_2 \sigma''_2 \sigma'''_2$$

admet deux cycles finis lorsque les coniques

$$\sigma_2 = 0, \quad \sigma'_2 = 0, \quad \sigma''_2 = 0, \quad \sigma'''_2 = 0$$

appartiennent à un même faisceau linéaire. Il en est de même si une, deux ou

trois de ces coniques venant à se décomposer en un système de deux droites distinctes, ces systèmes considérés comme des coniques font partie, avec les autres coniques véritables, d'un même faisceau linéaire.

Si les quatre coniques  $\sigma$  se décomposent chacune en deux droites distinctes, la surface correspondante

$$z^2 = \sigma_1 \sigma'_1 \sigma''_1 \dots \sigma^{vii}_1$$

admettra des cycles finis, qui seront au nombre de six, lorsque les huit droites

$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma'_1 = 0, \quad \sigma''_1 = 0, \quad \dots, \quad \sigma^{vii}_1 = 0$$

seront concourantes en un même point.

Toutes les autres surfaces du huitième degré ayant pour équation

$$z^2 = f_8(x, y)$$

ont un ordre de connexion linéaire égal à un.

En d'autres termes, les seules surfaces du huitième degré de la forme considérée, qui possèdent des cycles non tous nuls, sont représentables sur des cônes.

*Remarque.* — On déduit de ce qui précède qu'une surface du cinquième degré ayant un point triple et admettant des cycles finis sera représentable sur un cône cubique ou sur un cône du sixième degré.

