ÉTIENNE DELASSUS

**Sur l'équilibre des systèmes articulés**

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 2e série*, tome 1, nº 2 (1899), p. 221-237

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1899_2_1_2_221_0>

SUR

# L'ÉQUILIBRE DES SYSTÈMES ARTICULÉS,

PAR M. ÉTIENNE DELASSUS,

Chargé de Cours à l'Université de Toulouse.

## I. — Généralisation d'un théorème de M. Maurice Lévy.

Dans son Mémoire *Sur la recherche des tensions dans les systèmes de barres élastiques et sur les systèmes qui, à volume égal de matière, offrent la plus grande résistance possible* (1), M. Maurice Lévy a donné le remarquable théorème suivant (2) :

*Lorsqu'un système contenant k lignes surabondantes est tel qu'il puisse d'une manière et, par suite, d'une infinité de manières, être édifié en système d'égale résistance, relativement à des forces données agissant sur lui, il existe toujours un système, sans lignes surabondantes, susceptible de résister aux mêmes forces et tel que la somme des produits des volumes des barres par leurs coefficients d'élasticité respectifs est la même dans ce système et dans le système donné.*

Ce théorème ne s'applique qu'aux systèmes à lignes surabondantes qui sont d'égale résistance, systèmes très particuliers, et, en outre, est relatif à une fonction des sections qui est bien déterminée pour chaque système, mais varie avec les coefficients d'élasticité. Enfin, il suppose qu'on néglige, au point de vue des tensions qu'ils produisent, les poids des barres, c'est-à-dire le poids propre, lequel est généralement prépondérant dans les grandes constructions qui sont précisément celles pour lesquelles l'application du théorème présente un véritable intérêt.

Ainsi ce théorème ne sera relatif au poids total du système que si toutes les barres ont même coefficient d'élasticité et résistent également bien à l'allongement et à la compression, il ne sera relatif au prix total du métal employé que si

(1) Maurice Lévy, *La Statique graphique et ses applications aux constructions*, 2e éd., t. IV.

(2) Maurice Lévy, *Statique graphique*, 2e éd., t. IV, p. 261.

les barres résistant également à l'allongement et à la compression, les prix au kilogramme des différents métaux employés dans le système sont proportionnels aux quotients de leurs coefficients d'élasticité par leurs densités.

Je me propose de démontrer le théorème suivant qui ne subira aucune des restrictions que je viens d'énumérer.

Théorème. — *Soit* $\varphi(s_1, s_2, \ldots)$ *une fonction linéaire et homogène des variables s qui est assujettie à l'unique condition d'avoir tous les coefficients positifs.*

*Étant donné un système articulé* $\Sigma$ *à lignes surabondantes résistant à son propre poids et à des forces données* F, *il est toujours possible de trouver un système* $\Sigma'$ *strictement indéformable, ayant les mêmes nœuds que* $\Sigma$, *résistant aussi à son propre poids et aux forces* F *et tel que la fonction* $\varphi$ *formée avec les sections des barres ait pour le système* $\Sigma'$ *une valeur au plus égale (en général inférieure) à sa valeur pour le système* $\Sigma$.

*Si le système* $\Sigma$ *est d'égale résistance, on peut trouver un système* $\Sigma'$ *satisfaisant aux conditions précédentes et qui soit aussi d'égale résistance.*

Pour démontrer ce théorème dans toute sa généralité, nous supposerons que *le système* $\Sigma$ *n'est pas plan* et qu'en outre il est soumis à des *liaisons surabondantes,* c'est-à-dire telles que les réactions ne soient pas déterminables par la Statique. Ces liaisons seront simplement constituées par le fait que, parmi les $n$ nœuds du système, il y en aura $p$ qui seront fixes, $q$ qui seront assujettis à se déplacer sur des courbes fixes et $r$ assujettis à se déplacer sur des surfaces fixes. Ces liaisons introduiront un nombre d'inconnues égal à

$$3p + 2q + r = 6 + k',$$

nous les appellerons les inconnues $\rho$; leur nombre est au moins égal à 6. Ceci posé, les équations d'équilibre se divisent en trois catégories.

*Équations I.* — L'existence de $k$ barres surabondantes fournit $k$ relations linéaires et homogènes entre les allongements. Si l'on pose d'une façon générale

$$\frac{t_i}{s_i} = \beta_i, \tag{1}$$

on aura ainsi $k$ relations linéaires et homogènes entre les $\beta_i$.

*Équations II.* — La forme du système est déterminée par les longueurs des barres et sa position par six paramètres, le déplacement d'un nœud aura pour composantes trois fonctions linéaires et homogènes des allongements des barres et des accroissements de ces six paramètres. En exprimant qu'il y a des nœuds fixes, ou assujettis à se déplacer sur des couches ou des surfaces, on obtiendra

$$3p + 2q + r$$

équations linéaires entre lesquelles il faudra éliminer les accroissements des six paramètres de position, de sorte que, finalement, on obtiendra ainsi

$$3p + 2q + r - 6 = k'$$

équations linéaires entre les $\beta_i$. Ces équations ne sont pas forcément homogènes.

*Équations III*. — Écrivons que chaque nœud est en équilibre sous l'action des tensions qui y aboutissent et des forces extérieures qui y sont appliquées, en y comprenant les forces de liaisons et les moitiés des poids des barres qui y aboutissent, car nous supposons le poids de chaque barre décomposé en deux poids égaux appliqués à chacune de ses extrémités.

Nous obtiendrons ainsi $3n$ équations qui seront linéaires par rapport aux tensions, aux inconnues $\rho$ et aux composantes des forces et des poids. Mais les composantes des poids étant des fonctions linéaires des sections, nous pouvons dire que ces $3n$ équations seront linéaires entre les $t_i$, les $\rho$ et les $s_i$.

En y remplaçant les $t_i$ par les $\beta_i s_i$ et éliminant les $\rho$, nous obtiendrons finalement

$$3n - (3p + 2q + r) = 3n - 6 - k'$$

équations linéaires entre les $s_i$. Ce sont les équations III.

Les $s_i$ sont au nombre de

$$3n - 6 + k.$$

Si donc nous considérons les $\beta_i$ comme des constantes vérifiant les équations I et II et satisfaisant aux inégalités

$$R'_i \leqq \beta_i < R_i, \tag{1}$$

dans lesquelles $R'_i$ et $R_i$ sont les charges de sécurité pratique relatives à la compression et l'allongement pour la matière dont est formée la barre $B_i$, les $s_i$ seront assujettis à vérifier les seules équations III dans lesquelles il figure alors

$$k + k'$$

inconnues de plus qu'il n'y a d'équations.

On pourra donc se donner arbitrairement $k + k'$ sections pourvu que les équations III donnent, pour toutes les sections, des valeurs positives.

En définitive, les équations III permettront d'exprimer les $s$ comme fonctions linéaires de $k + k'$ paramètres

$$\sigma_1, \quad \sigma_2, \quad \ldots, \quad \sigma_{k+k'}.$$

La fonction $\varphi(s_1, s_2, \ldots)$ deviendra une fonction linéaire des paramètres $\sigma$, soit

$$\psi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots).$$

Soient $\beta_i^0$, $s_i^0$, $\sigma_i^0$ les valeurs des $\beta$, $s$ et $\sigma$ pour le système proposé $\Sigma$. Par hypothèse, ce système résiste à son propre poids et aux forces données; donc les $\beta_i^0$ vérifient les équations I et II ainsi que les inégalités (1); de plus, les $s_i^0$ sont tous positifs et vérifient les égalités III.

Nous allons modifier le système en laissant fixes les valeurs des $\beta_i$.

Supposons d'abord que la fonction $\psi$ ne soit pas indépendante des $\sigma$. Prenons pour ces paramètres des fonctions linéaires d'un autre paramètre $\tau$; alors $\psi$ deviendra une fonction linéaire de $\tau$ dépendant effectivement de $\tau$, et tous les $s$ deviendront aussi les fonctions linéaires de $\tau$.

Faisons varier $\tau$ à partir de sa valeur initiale $\tau^0$ dans un sens tel que la fonction $\psi$ aille en décroissant; les $s$ vont varier et il y en aura au moins un qui ira en décroissant, sans quoi la fonction $\varphi(s_1, s_2, \ldots)$ qui a tous ses coefficients positifs irait en croissant, ce qui est absurde, puisqu'elle est constamment égale à $\psi$.

En faisant varier $t$ toujours dans le même sens, les $s$ partiront de leurs valeurs initiales positives $s_i^0$, les uns iront en croissant, les autres en décroissant, et il arrivera un moment où l'un des $s$ arrivera à la valeur o; supposons que ce soit $s_1$.

Arrêtons-nous à ce moment. Nous avons des sections

$$0, \quad s'_2, \quad s'_3, \quad \ldots$$

qui sont toutes positives. Dans le système $\Sigma$ ainsi modifié, supprimons la barre $B_1$ qui a une section nulle, nous obtiendrons un système $\Sigma_1$. Pour ce système, les valeurs des $\beta_i$ sont précisément les $\beta_i^0$ qui, par hypothèse, vérifient I, II et (1); en plus, les $s$ sont tous positifs et vérifient les égalités III, de sorte que $\Sigma_1$ a une barre de moins que $\Sigma$ et résiste à son poids propre et aux forces données. En outre, pour $\Sigma_1$, la fonction $\varphi$ est

$$\varphi(0, s'_2, s'_3, \ldots),$$

qui, par hypothèse est moindre que $\varphi(s_1^0, s_2^0, \ldots)$. On peut donc écrire

$$\varphi_{\Sigma_1} < \varphi_{\Sigma}.$$

Supposons maintenant que la fonction $\psi$ soit indépendante des paramètres $\sigma$. Reprenons le même raisonnement et faisons varier $\tau$ à partir de $\tau^0$ dans un sens que nous choisirons arbitrairement; il y aura certainement des $s$ qui iront en décroissant, sans quoi la fonction $\varphi$ irait en croissant, ce qui est absurde puisqu'elle reste égale à $\psi$ qui est une constante. En vertu du raisonnement précédent, on arrivera donc au système $\Sigma_1$ résistant à son poids et aux forces données, ayant les mêmes nœuds et les mêmes $\beta$ que le système $\Sigma$, mais avec une barre en moins, et cette fois on aura

$$\varphi_{\Sigma_1} = \varphi_{\Sigma}.$$

De toute façon, nous pouvons dire que nous arrivons sûrement au système $\Sigma_1$ ayant les mêmes nœuds que $\Sigma$, mais avec une barre en moins, résistant à son propre poids et aux forces données, ayant les mêmes valeurs pour les rapports $\beta$, c'est-à-dire tel que les barres correspondantes, dans les deux systèmes, travaillent au même taux, et, enfin, tel que

$$\varphi_{\Sigma_1} \leqq \varphi_{\Sigma}.$$

Sur $\Sigma_1$ nous pouvons reprendre le même raisonnement et continuer jusqu'au moment où $k + k'$ sera réduit à o.

Si l'on s'arrête au bout de $k$ opérations, on arrivera à un système $\Sigma'$ satisfaisant aux conditions de l'énoncé du théorème et qui sera strictement indéformable, mais soumis à des liaisons surabondantes.

Si, au contraire, on ne s'arrête qu'au bout de $k + k'$ opérations, on arrivera à un système qui sera strictement indéformable en vertu des liaisons auxquelles il est soumis.

Le théorème général est donc démontré. Quant à ce qui est relatif aux systèmes d'égale résistance, cela résulte immédiatement de ce que les $\beta$ sont les mêmes pour le système initial et le système final; si le système initial est d'égale résistance, tous les $\beta$ sont égaux, le système final ayant tous ses $\beta$ égaux entre eux est aussi d'égale résistance.

La fonction $\varphi$ est une fonction linéaire et homogène qui est absolument quelconque, sauf que tous ses coefficients sont positifs.

Soient $a_i$, $d_i$, $p_i$ la longueur de la barre $B_i$, et la densité et le prix du kilogramme de la matière dont elle est formée.

Si l'on veut diminuer le poids total en supprimant des barres surabondantes, on prendra pour $\varphi$ la fonction

$$\Sigma a_i d_i s_i$$

qui remplit bien les conditions voulues.

Si c'est le prix total que l'on veut diminuer, on prendra pour $\varphi$ la fonction

$$\Sigma a_i d_i p_i s_i.$$

Le cas étudié par M. Maurice Levy est celui où la fonction $\psi$ est indépendante des paramètres $\sigma$ et conserve cette propriété chaque fois qu'on passe d'un système au suivant. Les seules fonctions $\varphi$ possédant cette propriété ne peuvent évidemment être que des combinaisons linéaires des premiers membres des équations III et, par conséquent, doivent dépendre des $\beta_i$. Effectivement, si on modifie la démonstration de M. Maurice Lévy, sans en changer l'idée fondamentale, de façon à l'appliquer aux systèmes qui ne sont plus d'égale résistance, on est conduit à la fonction

$$\Sigma a_i \mathrm{E}_i \beta_i \mathrm{S}_i.$$

Nous pouvons maintenant énoncer en toute rigueur le résultat suivant, que le théorème de M. Maurice Lévy démontrait dans un cas particulier et rendait très probable dans le cas général :

*De quelque façon que l'on construise un système articulé à lignes surabondantes, il existe toujours un système sans lignes surabondantes, ayant les mêmes nœuds, soumis aux mêmes liaisons, résistant à son propre poids et aux forces extérieures données et qui soit au moins aussi économique que le premier.*

Le genre de démonstration que j'ai adopté ici permet bien facilement de généraliser encore les résultats précédents.

Soit un système $\Sigma$ possédant K lignes surabondantes, c'est-à-dire pour lequel la statique donne K équations de moins qu'il n'y a d'inconnues.

Considérons alors H fonctions linéaires et homogènes des $s$,

$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \ldots, \quad \varphi_{\mathrm{H}}$$

et faisons les hypothèses suivantes :

1° On a

$$\mathrm{H} \leqq \mathrm{K};$$

2° Il existe une combinaison linéaire et à coefficients positifs des fonctions $\varphi$,

$$\psi = \Sigma \lambda_i \varphi_i, \qquad \lambda_i > 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mathrm{H}),$$

qui est une fonction linéaire et à coefficients positifs des S,

$$\psi = \Sigma \mathrm{A}_i \mathrm{S}_i, \qquad \mathrm{A}_i > 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Cette condition sera, par exemple, réalisée forcément si, parmi les fonctions $\varphi$, il y en a une qui ait tous ses coefficients positifs. Supposons que ce soit $\varphi_1$, on aura la fonction $\psi$ en prenant

$$\lambda_1 = +1, \qquad \lambda_2 = \lambda_3 = \ldots = 0;$$

3° Les fonctions $\varphi$ sont linéairement indépendantes.

Reprenons notre raisonnement ; les $\varphi$ seront des fonctions indépendantes des K sections, qui restent arbitraires d'après les équations III. On pourra donc considérer les $s$ et les $\varphi$ comme des fonctions linéaires de H paramètres $\sigma$. Comme les $\varphi$ sont des fonctions indépendantes, on pourra déterminer les quantités $\mu_i$ telles qu'en posant

$$\sigma_i = \mu_i t,$$

les fonctions $\varphi$ aillent toutes en décroissant avec $t$ ; il en sera alors de même de $\psi$, et comme $\psi$ est une fonction linéaire et à coefficients positifs des $s$, il faudra nécessairement qu'un au moins des $s$ soit une fonction linéaire de $t$ décroissant avec $t$.

On voit alors, sans qu'il soit nécessaire d'insister, comment la démonstration se continuera, et l'on arrivera à ce résultat, qu'on peut toujours, en diminuant simultanément toutes les fonctions $\varphi$, arriver à réduire le nombre des lignes surabondantes à la valeur H — 1.

On voit, avec la même facilité, que si l'on a H fonctions linéaires et homogènes indépendantes parmi lesquelles il y en a $h$,

$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \ldots, \quad \varphi_h,$$

qu'on veut faire décroître et $h'$,

$$\varphi'_1, \quad \varphi'_2, \quad \ldots, \quad \varphi'_h$$

qu'on veut faire croître, et s'il existe, pour les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_h$, une fonction $\psi$ définie comme précédemment, on pourra réduire le nombre des barres surabondantes à la valeur H — 1, de façon à faire décroître les fonctions $\varphi$ et croître les fonctions $\varphi'$.

## II. — Sur les conditions d'existence des systèmes articulés.

Dans ce qui va suivre, nous nous plaçons à un point de vue exclusivement théorique, et, quelles que soient les longueurs des barres que nous aurons à considérer, nous négligerons leur flexion.

Considérons un système articulé placé dans des conditions quelconques et ayant à résister à son propre poids et à des forces données appliquées en ses nœuds. Les équations I, II, III du Chapitre précédent peuvent être considérées, quand on se donne les $s$, comme les équations linéaires donnant les tensions, de sorte que chacune d'elles sera une fonction linéaire des $s$,

(1) $$t_i = \Theta_i(s_1, s_2, \ldots, s_m) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Pour que le système résiste, il faut que les $s$ vérifient les $3m$ inégalités,

$$(2)\qquad \begin{cases} -R'_i \leqq \dfrac{\Theta_i(s_1, s_2, \ldots, s_m)}{s_i} \leqq R_i, \\ s_i \geqq 0, \end{cases}$$

les R et R′ étant les coefficients de sécurité pratique relatifs à l'allongement et à la compression.

Quand on se donne la forme géométrique du système ainsi que les liaisons et les forces extérieures, les coefficients des fonctions $\Theta$ sont déterminés; il ne reste plus qu'à déterminer les $s$ vérifiant les inégalités (2).

Si ces inégalités sont compatibles, nous dirons que le système est *possible*, sinon qu'il est *impossible*.

Sauf dans quelques cas très particuliers et extrêmement simples, la résolution des inégalités (2) est absolument impraticable.

Je me propose de chercher s'il n'existe pas une région définie par les points d'appui du système, et telle que tous les nœuds doivent être compris dans cette région pour que le système soit possible.

Nous supposerons que le système est soumis à son poids propre et que les forces, variables ou non, qui agissent sur les nœuds ont toujours leurs composantes verticales dirigées vers le bas.

Ceci posé, supposons que, dans notre système $\Sigma$, on isole un système $\Sigma'$, composé d'un seul nœud autre qu'un point d'appui ou composé de plusieurs nœuds dont aucun n'est un point d'appui, tous ces nœuds étant reliés par des barres consécutives que nous désignerons par $B'$, la lettre $B''$ désignant les barres de $\Sigma$ autres que les barres $B'$.

Le système $\Sigma'$, considéré comme solide, est en équilibre sous l'action des forces extérieures qui agissent sur lui. Ces forces sont :

1° Les tensions $t''$ des barres $B''$ qui aboutissent à des nœuds de $\Sigma'$;

2° Les demi-poids de ces barres $B''$;

3° Les poids entiers des barres $B'$;

4° Les forces extérieures de $\Sigma$ qui sont appliquées en des nœuds de $\Sigma'$ et qui, par hypothèse, sont telles que la somme Z de leurs projections sur la verticale dirigée vers le bas soit positive.

Désignons par la lettre $\omega''$ les angles que font des tensions $t''$ avec la verticale.

En écrivant que la somme des projections sur la verticale des forces qui agissent sur $\Sigma$ est nulle, nous aurons

$$\sum t'' \cos\omega'' + \sum \frac{a'' s'' d''}{2} + \sum a' s' d' + Z = 0,$$

en désignant par $a$ et $d$ les longueurs et poids spécifiques des barres. Soit $\mu$ le nombre des barres B″ qui aboutissent à Σ′. Si l'on pose

$$t''_i = -\frac{H_i}{\cos\omega''_i}\left(\sum\frac{a''s''d''}{2} + \sum a's'd' + Z\right) \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mu),$$

on aura

$$H_1 + H_2 + \ldots + H_\mu = 1,$$

d'où résulte immédiatement qu'il y aura au moins une des quantités H dont la valeur absolue sera supérieure à $\frac{1}{\mu}$. Supposons que ce soit $H_i$. La formule

$$\frac{t''_i}{s''_i} = \frac{-H_i}{\cos\omega''_i}\left(\frac{a''_i d''_i}{2} + \frac{\sum\frac{a''s''d''}{2} + \sum a's'd' + Z}{s''_i}\right)$$

montre alors, puisque tous les termes du crochet sont positifs, que

$$(3) \qquad \left|\frac{t''_i}{s''_i}\right| > \frac{a''_i d''_i}{2\mu}.$$

Soit $\rho$ la plus grande valeur des rapports $\frac{R}{d}$ et $\frac{R'}{d'}$ pour les différentes matières dont se composent les barres du système Σ.

Supposons que toutes les barres B″ qui aboutissent au système Σ′ aient des longueurs supérieures à $2\mu\rho$. Pour chacune de ces barres on aura

$$\frac{a''d''}{2\mu} > \rho\, d''$$

et, par suite,

$$\frac{a''d''}{2\mu} > R''_i,$$

$R''_i$ étant le plus grand des deux coefficients de sécurité pratique de la barre. Il y a certainement une des barres B″ pour laquelle on a l'inégalité (3); pour cette barre, on aura

$$\left|\frac{t''_i}{s''_i}\right| > R''_i.$$

Cette barre ne pourra donc pas supporter sa tension, et le système sera impossible. Ainsi,

*Si toutes les barres de Σ qui aboutissent à Σ′ ont des longueurs supérieures à $2\mu\rho$, le système Σ est impossible.*

Cette propriété permet facilement de trouver des limites d'étendue de certains systèmes. Prenons, par exemple, une ferme Polonceau à une seule bielle. Soient D l'intervalle à franchir et $l$ la longueur des arbalétriers. Au sommet de la ferme aboutissent quatre barres dont les longueurs sont $\frac{l}{2}$ ou supérieures à $\frac{l}{2}$. Si donc on prend ce point pour $\Sigma'$, on voit que, si

$$\frac{l}{2} > 2 \times 4\rho,$$

le système sera impossible. Comme $D < 2l$, on voit que, si

$$D > 32\rho,$$

la ferme ne pourra exister quelles que soient les sections des barres.

On serait arrivé à la même limite en prenant pour $\Sigma'$ le tirant horizontal de la ferme.

La ferme à trois bielles conduirait de même à la limite $64\rho$.

Nous pouvons également en tirer une autre conclusion immédiate :

Soit un système $\Sigma$, et considérons un nœud, autre qu'un point d'appui auquel aboutissent $\mu$ barres dont la plus petite longueur est $a$. Prenons ce point comme système $\Sigma'$, et agrandissons homothétiquement $\Sigma$ en respectant la nature de ses liaisons; $\lambda$ étant le rapport d'agrandissement, le système transformé aura un sommet où aboutiront $\mu$ barres dont la plus petite longueur sera $\lambda a$; donc, si

$$\lambda a > 2\mu\rho$$

ou

$$\lambda > \frac{2\mu\rho}{a},$$

le système sera impossible. Nous obtenons ainsi le résultat :

*Si l'on agrandit homothétiquement un système articulé en respectant la nature de ses liaisons, il arrive certainement un moment à partir duquel le système devient impossible.*

Les limites que nous trouvons ainsi dépendent non seulement du nombre des nœuds, mais aussi de la façon dont on les joint. Nous allons maintenant, en partant des résultats précédents, trouver des limites qui, naturellement, seront moins resserrées, mais qui auront l'avantage de ne dépendre que du nombre des nœuds et de prendre une forme géométrique extrêmement simple.

Soit $m$ le nombre des nœuds du système ; supposons que de chacun de ceux qui sont des points d'appui on dérive une sphère avec le rayon $2m^2\rho$, et que le système possède des nœuds qui soient extérieurs à toutes ces sphères, c'est-à-dire des nœuds dont la distance à l'un quelconque des points d'appui soit supérieure à $2m^2\rho$.

Soit M un tel nœud, adjoignons-lui toutes les barres qui y aboutissent et ont une longueur inférieure ou égale à $2m\rho$. Opérons sur l'extrémité de chacune de ces barres, comme nous l'avons fait sur M, et continuons cette opération tant que nous pourrons.

Comme chaque fois nous prenons de nouvelles barres du système $\Sigma$ et que celles-ci sont en nombre limité, l'opération s'arrêtera forcément, et, à ce moment, nous aurons constitué un système $\Sigma'$ composé du nœud M tout seul ou de plusieurs nœuds réunis par des barres consécutives. Toutes les barres de $\Sigma$ qui aboutissent à $\Sigma'$ ont des longueurs supérieures à $2m\rho$, sans quoi elles auraient été prises en formant $\Sigma'$. Enfin aucun nœud de $\Sigma'$ n'est un point d'appui de $\Sigma$; car, s'il en était ainsi, on irait du point M à un point d'appui en suivant des barres dont les longueurs seraient toutes inférieures ou égales à $2m\rho$ et dont le nombre serait évidemment moindre que $m$, c'est-à-dire en suivant un chemin dont la longueur serait inférieure à $2m^2\rho$, ce qui est absurde d'après l'hypothèse faite sur la position du point M par rapport aux sphères. Le système $\Sigma'$ étant dans les conditions d'application du théorème précédemment démontré et $\mu$ étant évidemment inférieur à $m$, on a, pour toutes les barres qui y aboutissent,

$$a > 2\mu\rho;$$

d'où l'on conclut que le système $\Sigma$ est impossible.

Les sphères que nous sommes ainsi amenés à considérer ont un rayon $2m^2\rho$ qui est d'autant plus grand que le nombre des barres est plus considérable. Pour un système d'un nombre déterminé de nœuds, il sera d'autant plus grand qu'il y aura plus de barres surabondantes.

Mais une conséquence implicite du théorème de M. Maurice Lévy est que, si, pour une position donnée des nœuds, un système à barres surabondantes est possible, il y a un système ayant les mêmes nœuds, sans lignes surabondantes et qui est possible, de sorte que, si les nœuds sont placés de façon qu'aucun système sans lignes surabondantes ne soit possible, on sera sûr que tout système à lignes surabondantes et ayant les mêmes nœuds sera impossible.

Nous pouvons donc, sans nous préoccuper de savoir si le système a ou n'a pas de lignes surabondantes, réduire $m$ à la valeur qu'il doit avoir pour que le système soit strictement indéformable, en vertu des liaisons, c'est-à-dire, en reprenant les notations du premier Chapitre, prendre, dans tous les cas,

$$m = 3n - (3p + 2q + r).$$

Donc :

*Un système non plan ayant n nœuds dont p sont fixes, q se déplacent sur des courbes, et r sur des surfaces, ayant ou non des lignes surabondantes, est certainement impossible s'il a des nœuds extérieurs à toutes les sphères* *ayant pour centres les points d'appui et ayant comme rayon commun*

$$2[3n-(3p+2q+r)]^2\rho.$$

*Si le système est plan, les sphères sont remplacées par des cercles ayant comme rayon commun*

$$2[2n-(2p+q)]^2\rho.$$

De ce qui précède résulte que, lorsqu'on donne le nombre des nœuds et les points d'appui, l'étendue d'un système possible est limitée.

Ces propriétés font également voir les raisons mécaniques pour lesquelles il est nécessaire, lorsqu'on veut augmenter l'étendue d'un Ouvrage, d'augmenter le nombre des points d'appui en introduisant des points intermédiaires et aussi d'augmenter le nombre des barres, ainsi que celui des nœuds sans introduire de barres surabondantes.

Elles font aussi comprendre géométriquement pourquoi l'agrandissement homothétique arrive à rendre le système impossible. En effet, les distances d'un nœud quelconque aux différents points d'appui sont proportionnelles au rapport d'agrandissement $\lambda$. Les rayons des sphères en sont indépendants, de sorte qu'en faisant croître $\lambda$, il arrivera un moment où le nœud considéré viendra à l'extérieur de toutes les sphères, et, $\lambda$ continuant à croître, il restera toujours à leur extérieur, de sorte que le système deviendra et restera impossible.

## III. — Sur la méthode des figures réciproques pour la détermination des tensions.

Je me propose de résoudre la question suivante :

*Déterminer tous les systèmes plans strictement indéformables tels que, quelles que soient les forces en équilibre appliquées en ses nœuds, on puisse déterminer de proche en proche toutes ses tensions en construisant uniquement des polygones de forces et sans jamais construire deux fois le même segment.*

Comme le polygone des forces ne permet de décomposer une force que suivant deux directions, il faut d'abord, pour pouvoir obtenir toutes les tensions de proche en proche, rien qu'en traçant des polygones de forces, que les nœuds puissent se mettre dans un ordre

$$S_1,\quad S_2,\quad \ldots,\quad S_{n-1},\quad S_n,$$

tel que chaque nœud ne soit lié aux suivants que par deux barres.

A chaque nœud $S_i$ correspond un polygone de forces que je désigne par $P_i$ et dont un côté $f_i$ est équipollent à la force $F_i$ appliquée à $S_i$, les autres $b$ étant parallèles aux barres B qui aboutissent en ce nœud.

Pour qu'un système possède la propriété indiquée, il faut que les polygones $P_i$ puissent se placer, de telle façon que deux polygones qui correspondent à deux sommets liés par une barre aient en commun le côté parallèle à cette barre.

Considérons un polygone quelconque $P_{\alpha_1}$ et parcourons-le dans son sens à partir de l'origine de $f_{\alpha_1}$; à la suite de $f_{\alpha_1}$, nous parcourons un côté $b$, qui sera commun à un autre polygone $P_{\alpha_2}$ et qui, considéré comme appartenant à $P_{\alpha_2}$ aura pour extrémité l'extrémité A de $f_{\alpha_1}$. Considérons l'autre côté de $P_{\alpha_2}$ issu de A et ayant A pour origine, si ce n'est pas $f_{\alpha_2}$ ce sera un côté $b$ de $P_{\alpha_2}$ et, par suite, aussi un côté $b$ d'un autre polygone $P_{\alpha_3}$. Continuons ainsi en tournant toujours autour de A, nous arriverons fatalement à trouver un nouveau côté $f$; sinon, comme le nombre des côtés $b$ est limité, on retomberait sur un de ceux qui ont été trouvés. Si alors on ne retombait pas sur un des polygones déjà trouvés, le côté considéré serait commun à trois polygones, ce qui est impossible d'après les hypothèses. On ne peut également pas retomber sur un des polygones considérés, car un polygone déterminé n'est adjacent suivant un côté déterminé qu'à un seul polygone. Si donc on revenait en sens inverse, on devrait retrouver $P_{\alpha_1}$, mais on retrouverait en réalité, en sens inverse, les polygones qui forment le cycle; donc, $P_{\alpha_1}$ serait un de ces polygones et, par conséquent, n'aurait pas de côté $f$ aboutissant en A.

Nous arriverons donc à un côté $f_{\beta_1}$ ayant pour origine A et extrémité B. Nous raisonnerons sur $f_{\beta_1}$ comme sur $f_{\alpha_1}$ et nous pourrons continuer ainsi tant que l'extrémité du dernier segment $f$ ne coïncidera pas avec l'origine du premier. Comme leur nombre est limité, cela arrivera nécessairement. Comme, d'autre part, la disposition cherchée des polygones P doit exister, quelles que soient les forces F, assujetties uniquement à être en équilibre, c'est-à-dire que les segments $f$ équipollents aux F sont assujettis uniquement à former un polygone fermé, nous arriverons à en conclure que les côtés $f$ des polygones P constituent le polygone des forces F.

Pour aller plus loin, nous allons considérer un polygone fermé, formé par les barres et tel que deux sommets qui ne sont pas consécutifs sur le périmètre ne soient jamais réunis par une barre.

Remarquons que, le système étant donné géométriquement, on peut se donner arbitrairement les grandeurs de toutes les tensions, les forces F seront déterminées par la condition de faire équilibre en chaque sommet à toutes les tensions qui y aboutissent.

Considérons alors les tensions et forces qui agissent sur notre polygone. Soient $\mathfrak{X}'_1, \mathfrak{X}'_2, \ldots, \mathfrak{X}'_n$ les projections sur un axe des tensions qui agissent sur les côtés; $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \ldots$ les projections des autres et $X_1, X_2, \ldots, X_n$ celles des forces F. Nous remarquons que, d'après l'hypothèse faite sur le polygone, les quantités $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, ... sont distinctes.

Les sommets du polygone étant en équilibre, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}'_1 - \mathcal{X}'_n \quad &+ \Sigma\mathcal{X}^{(1)} + X_1 = 0,\\
\mathcal{X}'_2 - \mathcal{X}'_1 \quad &+ \Sigma\mathcal{X}^{(2)} + X_2 = 0,\\
\ldots\ldots&\ldots\ldots,\\
\mathcal{X}'_n - \mathcal{X}'_{n-1} &+ \Sigma\mathcal{X}^{(n)} + X_n = 0,
\end{aligned}$$

l'indice supérieur des $\mathcal{X}$ indiquant le sommet auquel sont appliquées les tensions.

De là on tire évidemment

$$\Sigma\mathcal{X} + \Sigma X = 0,$$

relation évidente *a priori*. Supposons que les tensions et les forces F qui agissent sur le polygone puissent se décomposer en plusieurs systèmes partiels en équilibre, et cela quelles que soient les conditions dans lesquelles se trouve le système. On aurait une relation

$$\Sigma\lambda X + \Sigma\mu\mathcal{X} = 0,$$

les $\lambda$ et $\mu$ étant égaux à 0 ou 1 à condition de ne pas être tous égaux à 0 ou tous égaux à 1.

Cette relation prendrait la forme

$$\begin{aligned}
&\lambda_1(\mathcal{X}'_1 - \mathcal{X}'_n) + \lambda_2(\mathcal{X}'_2 - \mathcal{X}'_1) + \ldots + \lambda_n(\mathcal{X}'_n - \mathcal{X}'_{n-1})\\
&+ \lambda_1\Sigma\mathcal{X}^{(1)} \qquad + \lambda_2\Sigma\mathcal{X}^{(2)} \qquad + \ldots + \lambda_n\Sigma\mathcal{X}^{(n)} - \Sigma\mu\mathcal{X} = 0,
\end{aligned}$$

et elle devrait être vérifiée quelles que fussent les valeurs des $\mathcal{X}$ et $\mathcal{X}'$ qui peuvent être, d'après une remarque faite, considérées comme des variables indépendantes.

Les variables $\mathcal{X}'$ montrent que l'on devrait avoir

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = +1,$$

la relation se réduirait à

$$\Sigma\mathcal{X} - \Sigma\mu\mathcal{X} = 0,$$

et devant être une identité par rapport aux $\mathcal{X}$ elle montrerait que l'on a

$$\mu_1 = \mu_2 = \ldots = +1,$$

Donc tous les $\lambda$ et $\mu$ seraient égaux à $+1$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Donc il est démontré que les forces et tensions extérieures agissant sur les sommets du polygone ne peuvent pas, d'une façon générale, se grouper en systèmes partiels en équilibre.

Faisons le tour d'un polygone Q tel que celui que nous venons de considérer, nous parcourons les sommets dans un certain ordre; considérons les polygones P correspondants. Ils ont évidemment les propriétés suivantes : ces polygones forment un cycle fermé, chacun d'eux a un côté $b$ commun avec le précédent et un côté $b$ commun avec le suivant; en outre, deux polygones quelconques du cycle, qui ne sont pas consécutifs dans ce cycle, n'ont aucun côté $b$ commun.

Soient $P_1, P_2, \ldots, P_k$ les polygones du cycle; $b_1, b_2, \ldots, b_k$ les côtés $b$ qui leur sont communs. Désignons par $A_1, A_2, \ldots, A_k, B_1, B_2, \ldots, B_k$ les origines et extrémités des côtés $b$ en considérant $b_1$ comme appartenant à $P_1$, $b_2$ à $P_2$, ....

Les côtés $b$ que nous considérons représentent les tensions $\mathfrak{X}'$ du calcul précédent, les autres côtés représentent les tensions $\mathfrak{X}$ et les forces X. Les deux polygones $A_1 A_2 \ldots A_k$, $B_1 B_2 \ldots B_k$ sont les polygones des forces $\mathfrak{X}$ et X décomposées en deux groupes; comme ils sont fermés tous deux, nous sommes en contradiction avec ce que nous venons de démontrer à moins que l'un des groupes contienne toutes les forces $\mathfrak{X}$ et X et l'autre rien.

Pour cela, il faut et il suffit que tous les points A soient confondus ou que tous les points B le soient. On peut l'exprimer géométriquement comme il suit :

*Lorsque des barres du système forment un polygone* Q *tel que deux sommets non consécutifs de ce polygone ne soient jamais reliés par une barre, les polygones* P *relatifs à ces sommets rayonnent autour d'un sommet commun en se réunissant par les côtés* $b$ *qui sont parallèles aux côtés* B *du polygone* Q.

De là on déduit immédiatement que, dans le système, il n'est jamais possible de trouver trois polygones Q ayant un côté commun B.

Soit, en effet, $b$ la ligne homologue de B dans le diagramme. Chacun des polygones Q donnerait une série de polygones P rayonnant autour d'une extrémité de $b$, et cela est absurde puisque $b$ n'a que deux extrémités et que la série de polygones P rayonnant autour d'une extrémité de $b$ et commençant par ce côté, est déterminée d'une façon unique.

Il en résulte aussi que tous les polygones Q du système sont des triangles. Considérons deux sommets $S_i$, $S_k$ qui ne sont pas liés par une barre.

En modifiant les tensions qui aboutissent à $S_k$, sans changer aucune des autres, nous ne touchons à aucune tension aboutissant à $S_i$ de sorte que le polygone $P_i$ reste invariable en forme et position. Allons de $S_i$ à $S_k$ par une suite de sommets tels que le dernier $S_{k-1}$ soit le premier qui soit lié à $S_k$ par une barre. Les polygones $P_{i+1}, \ldots, P_{k-2}$ sont fixes comme $P_i$; quant à $P_{k-1}$, il a deux côtés variables, son côté $f$ et son côté $b$ qui est commun avec $P_k$. En tous cas, ce côté $b$ a un de ses bouts qui est fixe. Partons de ce bout et marchons sur le polygone $P_k$ pour atteindre un de ses sommets donné à l'avance dans un sens tel que l'on ne rencontre pas de côté $f$ de $P_k$. On ne parcourra ainsi que des côtés $b$ représentant des tensions aboutissant à $S_k$. Le sommet considéré de $P_k$ est donc l'extrémité d'une ligne brisée dont l'origine est fixe, et dont les côtés ont des directions invariables, mais des grandeurs arbitraires, de sorte que ce sommet de $P_k$ ne peut être fixe.

En particulier, il est impossible qu'il y ait un sommet de $P_k$ qui reste toujours en coïncidence avec un sommet de $P_i$.

Ceci posé, supposons qu'un polygone Q ait plus de trois côtés; on pourrait trouver sur lui deux sommets $S_i$, $S_k$ non réunis par une barre et, puisque les polygones P relatifs aux sommets de Q doivent rayonner autour d'un même sommet, $P_i$ et $P_k$, en particulier, auraient toujours un sommet commun.

Il est donc démontré que tous les polygones Q sont des triangles et, en outre, comme nous l'avons vu, il n'y a jamais trois triangles ayant un côté commun.

Jusqu'à présent nous n'avons pas utilisé le fait que les tensions pouvaient se trouver de proche en proche, nous avons simplement supposé l'existence d'un diagramme réciproque, de sorte que nous pouvons dire :

*Les seuls systèmes pouvant posséder des diagrammes réciproques sont les systèmes triangulés.*

Supposons, maintenant, qu'on veuille chercher les systèmes pour lesquels on peut déterminer les tensions de proche en proche par un diagramme réciproque.

Revenons à ce que nous avons dit au début du Chapitre et considérons les sommets dans l'ordre

$$S_n, \quad S_{n-1}, \quad S_{n-2}, \quad \ldots, \quad S_2, \quad S_1.$$

$S_n$, $S_{n-1}$, $S_{n-2}$ forment un triangle que j'appelle $T_{n-2}$. $S_{n-3}$ forme, avec deux de ces trois sommets, un nouveau triangle $T_{n-3}$, ensuite $S_{n-4}$ est fourni, d'après les propriétés que nous venons de démontrer, comme sommet d'un triangle ayant pour base un côté de $T_{n-3}$ ou de $T_{n-2}$ à l'exclusion du côté commun; soit $T_{n-4}$ ce nouveau triangle.

Continuons ainsi, nous aurons les triangles

$$T_{n-2}, \quad T_{n-3}, \quad \ldots, \quad T_2, \quad T_1,$$

tels que chacun d'eux ait des côtés communs avec deux des précédents et qu'il n'y ait jamais de côté commun à trois triangles.

Considérons les triangles qui ont deux côtés libres : le sommet à l'intersection de ces deux côtés est évidemment celui d'indice le moins élevé; les deux tensions correspondantes sont déterminées immédiatement.

Supprimons tous les sommets qui se trouvent dans ces conditions, ce qui revient à considérer les tensions correspondantes comme des forces extérieures connues.

Le système devra se retrouver dans les mêmes conditions, il y aura encore au moins un triangle ayant deux côtés libres. On recommencera le même raisonnement que précédemment et l'on continuera toujours. Il est évident qu'en opérant ainsi on arrivera à épuiser le système, c'est-à-dire à un ou plusieurs triangles ayant leurs trois côtés libres.

On voit que, réciproquement, les systèmes ayant la propriété demandée se constitueront de la façon suivante :

On partira d'un ou plusieurs triangles ayant chacun leurs trois côtés libres. On leur accolera des triangles ayant deux côtés libres; au système ainsi obtenu on accolera de nouveau des triangles ayant deux côtés libres, et ainsi de suite.

On voit, d'ailleurs, que deux de ces triangles, ayant pour points de départ deux des triangles primitifs isolés, ne pourront se rejoindre, car celui des deux que j'aurais tracé en dernier n'aurait eu qu'un côté libre, de sorte que j'aurai autant de systèmes séparés que j'avais de triangles primitifs.

La conclusion est donc que *les systèmes les plus généraux pour lesquels il est possible de construire les tensions de proche en proche sont les systèmes ramifiés simplement triangulés.*

En entendant par là des systèmes dont les branches ne forment pas de contours fermés, chacune d'elles étant constituée par un système simplement triangulé ordinaire, deux branches se réunissant par un triangle qui n'a aucun côté libre.

On voit, d'ailleurs, avec la plus grande facilité, que la méthode s'applique effectivement à ces systèmes.