Annales de la faculté des sciences de Toulouse

E. Vessiot

Sur la recherche des équations finies d'un groupe continu fini de transformations, et sur les équations de Lie

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 1re série, tome 10, nº 2 (1896), p. C1-C26

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1896_1_10_2_C1_0>

SUR LA

RECHERCHE DES ÉQUATIONS FINIES

D'UN GROUPE CONTINU FINI DE TRANSFORMATIONS,

ET SUR LES ÉQUATIONS DE LIE,

PAR M. E. VESSIOT,

Chargé de Cours à la Faculté des Sciences de Toulouse.

INTRODUCTION.

Ce Travail est destiné à compléter, sur certains points, celui que nous avons publié précédemment *sur les systèmes d'équations différentielles du premier ordre qui ont des systèmes fondamentaux d'intégrales* (1), ou, ce qui revient au même, sur les équations aux dérivées partielles que nous proposions de nommer *équations de Lie*. Ce sont les équations de la forme

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_{k=1}^{r}\theta_k(t)\mathrm{X}_k f=0, \tag{1}$$

où les r transformations infinitésimales indépendantes

$$\mathrm{X}_k f=\sum_{i=1}^{n}\xi_{ki}(x_1\ldots x_n)\frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k=1,2,\ldots,r) \tag{2}$$

définissent un groupe. Nous avons donné, dans ce Mémoire, une théorie complète de l'intégration de ces *équations de Lie,* mais avec l'hypothèse que l'on connaisse les équations finies du groupe (2), sous une forme quelconque. L'un des résultats en était que, sous cette hypothèse, l'intégration de telles équations peut toujours se ramener à celle d'équations

(1) *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. VIII.

différentielles ordinaires linéaires; et, ce qui augmente l'importance de ce résultat, c'est que, comme nous le montrions alors, le *problème normal*, auquel M. Lie ramène toutes les questions d'intégration où intervient la théorie des groupes continus finis, peut se réduire lui-même à l'intégration d'une *équation de Lie* (1), pour laquelle on connaît les équations finies du groupe correspondant (2) [1].

Nous reprenons aujourd'hui le problème préliminaire, réservé alors, de la *détermination des équations finies d'un groupe continu fini de transformations dont on connaît les transformations infinitésimales* (2); et nous donnons, pour le résoudre, plusieurs méthodes, toutes fondées sur la théorie de l'intégration des systèmes complets exposée par M. Lie au t. XXV des *Mathematische Annalen*. La dernière (§ IV) ne suppose connues, en outre, que les propositions les plus élémentaires de la théorie des groupes; elle est, de plus, comme nous l'indiquons rapidement pour terminer, susceptible de s'étendre à l'intégration d'une *équation de Lie* (1), dans le cas le plus général. Nous avons cru intéressant néanmoins d'exposer les autres, parce qu'elles sont plus naturelles et qu'elles fournissent incidemment, de la manière la plus simple, tous les résultats donnés par M. Lie sur la recherche des groupes transitifs de structure donnée : il est également digne de remarque que les notions de groupe asystatique, de groupes simplement transitifs réciproques, et même de groupe adjoint s'y introduisent nécessairement et d'elles-mêmes.

Les résultats particuliers donnés par M. Lie sur le problème que nous traitons se présentent ici naturellement et sont obtenus par une voie uniforme. Nous établissons, de plus, ce fait général que, pour les groupes transitifs (§ II), la recherche de leurs équations finies dépend encore uniquement d'éliminations, de quadratures et de l'intégration d'équations différentielles linéaires ordinaires. Notre méthode, combinée avec celle du Mémoire que nous rappelions en commençant, permettra, du reste, d'examiner (théoriquement du moins) les simplifications qui pourraient se présenter pour certains groupes particuliers, parmi tous les groupes qui leur sont semblables.

---

[1] Dans l'application des théories d'intégration de M. Lie, on peut avoir à déterminer d'abord les transformations infinitésimales du groupe intervenant dans la question; mais ces transformations infinitésimales sont données par leurs équations de définition, qui s'intègrent elles-mêmes par des équations linéaires différentielles ordinaires.

Pour les groupes intransitifs, on est, *en général*, obligé (§ III) de mettre à part le problème préliminaire de la détermination de leurs invariants. L'étude complète de ce problème nécessiterait une théorie approfondie de l'intégration des systèmes complets, dans le cas le plus général : c'est une question difficile, sur laquelle nous espérons pouvoir revenir dans une autre occasion. Si l'on suppose ces invariants déterminés, on n'est pas dans un cas essentiellement distinct de celui des groupes transitifs. Nous donnons, néanmoins, une méthode directe et générale pour traiter ce cas, et qui peut révéler certaines simplifications importantes.

Nous avons enfin jugé utile, pour faciliter la lecture de notre travail, de rappeler, dans un premier paragraphe, les résultats de la théorie des groupes qui nous servent plus particulièrement, et qui se trouvent, souvent disséminés, dans le grand Ouvrage de MM. Lie et Engel (¹).

I. — Les groupes paramétriques canoniques.

1. Le fait qu'un système d'équations

$$x'_i = f_i(x_1 \ldots x_n | a_1 \ldots a_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

définit un groupe continu fini de transformations des x en x', aux paramètres a, se traduit par les identités (écrites sous forme abrégée)

$$f_i(f(x|a)|b) = f_i(x|c) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{2}$$

où les nouvelles valeurs c des paramètres sont données par des équations

$$c_k = \varphi_k(a_1 \ldots a_r | b_1 \ldots b_r) \qquad (k = 1, 2, \ldots, r), \tag{3}$$

que nous appelons, comme il paraît naturel, les *équations paramétriques du groupe* (1). On sait que ces équations définissent elles-mêmes deux nouveaux groupes qui se trouvent ainsi associés au groupe (1). Le premier s'obtient en considérant les équations (3) comme représentant une transformation des variables a en les variables c, les b étant des paramètres : nous l'appelons le *premier groupe paramétrique du groupe* (1). Si, de même, on considère, dans les équations (3), les b comme des variables,

---

(¹) Les principaux résultats de notre Travail ont été annoncés dans une Note insérée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (14 janvier 1895).

les c comme des variables transformées, les a comme des paramètres, on obtient le *second groupe paramétrique* (¹) *du groupe* (1). Ces deux groupes sont *holoédriquement isomorphes* au groupe (1), et chaque transformation de l'un est *échangeable* avec chaque transformation de l'autre; en d'autres termes, ce sont *deux groupes simplement transitifs réciproques*.

Les transformations infinitésimales de ces deux groupes s'obtiennent comme il suit. Les seconds membres des équations (1) satisfont à des équations aux dérivées partielles de la forme

$$\frac{\partial f_i}{\partial a_k} = \sum_{j=1}^{r} \psi_{jk}(a)\,\xi_{ji}(f) \tag{4}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n; \quad k = 1, 2, \ldots, r),$$

que l'on peut écrire aussi

$$\xi_{ji}(f) = \sum_{k=1}^{r} \alpha_{jk}(a)\,\frac{\partial f_i}{\partial a_k} \tag{4'}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n; \quad j = 1, 2, \ldots, r).$$

Le groupe (1) est alors engendré par les transformations infinitésimales

$$\mathrm{X}_j f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ji}(x)\,\frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (j = 1, 2, \ldots, r); \tag{5}$$

et le premier groupe paramétrique par les transformations infinitésimales

$$\mathrm{A}_j f = \sum_{k=1}^{r} \alpha_{jk}(a)\,\frac{\partial f}{\partial a_k} \qquad (j = 1, 2, \ldots, r). \tag{6}$$

On arrive de même au second groupe paramétrique en partant des équations (1) résolues par rapport aux x :

$$x_i = \mathrm{F}_i(x'_1 \ldots x'_n | a_1 \ldots a_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{7}$$

On a alors des identités

$$\xi_{ji}(\mathrm{F}) = \sum_{k=1}^{r} \beta_{jk}(a)\,\frac{\partial \mathrm{F}_i}{\partial a_k} \tag{8}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n; \quad j = 1, 2, \ldots, r),$$

(¹) Nous avons employé précédemment l'expression de *groupes des paramètres* (*premier et second*), *Parametergruppen* de M. LIE.

et le second groupe paramétrique est engendré par les transformations infinitésimales

$$\text{(9)} \qquad B_j f = \sum_{k=1}^{r} \beta_{jk}(a) \frac{\partial f}{\partial a_k} \qquad (j = 1, 2, \ldots, r).$$

On a enfin, simultanément, des identités

$$\text{(10)} \qquad (X_i X_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} X_s, \qquad (A_i A_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} A_s, \qquad (B_i B_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} B_s,$$

$$\text{(11)} \qquad (A_i B_k) = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, r),$$

où les c_{iks} sont des constantes qui définissent la *structure* du groupe (1).

Inversement, si l'on connaît, en même temps que les transformations infinitésimales (5) du groupe (1), celles de l'un de ses deux groupes paramétriques, on remonte aux *équations finies* (1), en intégrant un système complet. En effet, les fonctions F_i, où l'on suppose les lettres x mises à la place des x', sont les intégrales du système complet

$$\text{(12)} \qquad X_j f + A_j f = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, r),$$

qui se réduisent respectivement à x_i, quand on donne aux a les valeurs qui correspondent à la transformation identique, valeurs qu'on peut se donner arbitrairement, car cela revient à augmenter, dans les équations (1), les paramètres a de quantités constantes. Et les fonctions f_i se déterminent, d'une manière toute semblable, au moyen du système complet

$$\text{(13)} \qquad X_j f + B_j f = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, r).$$

Les équations paramétriques (3) s'obtiendraient d'une manière analogue, en vertu de cette remarque que chacun des deux groupes paramétriques est à lui-même son premier groupe paramétrique, et admet l'autre comme son second groupe paramétrique.

2. Un même groupe de transformations peut être représenté par une infinité de systèmes différents d'équations, tels que le système (1). On les déduit tous de l'un d'entre eux, le système (1) par exemple, en y effectuant, sur les paramètres a, tous les changements possibles de variables. A chacun de ces modes de représentation du groupe G considéré correspond un

couple de groupes paramétriques, respectivement *semblables* aux groupes (6) et (9); mais le groupe G est toujours défini par les mêmes transformations infinitésimales (5).

On sait qu'inversement, si l'on connaît ces transformations infinitésimales (5), ainsi que les transformations infinitésimales (6) d'un groupe simplement transitif, de la même structure c_{iks} que le groupe (5), les équations qu'on en déduit, en opérant comme il a été dit à la fin du paragraphe précédent, constituent l'un des systèmes d'équations finies du groupe (5); et le groupe (6) est alors précisément le premier groupe paramétrique du proposé.

Parmi tous ces modes de représentation du groupe (5), il en est un particulièrement important, fourni par les *équations canoniques* de ce groupe. On y est conduit en cherchant tous les groupes à un paramètre qui y sont contenus : ils s'obtiennent en intégrant le système d'équations différentielles ordinaires

$$(14)\qquad \frac{dx'_i}{dt} = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \xi_{ji}(x') \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où les λ sont des constantes arbitraires, avec les conditions initiales $x'_i = x_i$ pour $t = 0$. Les intégrales ne dépendent de t et des λ que par les combinaisons $\lambda_1 t, \ldots, \lambda_r t$, de sorte qu'il suffit d'y remplacer $\lambda_j t$ par e_j, pour obtenir un système d'équations finies du groupe, les e y étant les paramètres. Ce sont précisément les *équations canoniques du groupe*, que l'on peut écrire, sous forme de séries,

$$(15)\qquad x'_i = x_i + \tfrac{1}{1}\mathrm{X}x_i + \tfrac{1}{1.2}\mathrm{XX}x_i + \tfrac{1}{1.2.3}\mathrm{XXX}x_i + \ldots \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

avec

$$\mathrm{X}f = \sum_{j=1}^{r} e_j \mathrm{X}_j f.$$

Ces équations canoniques ont cette propriété remarquable qu'il suffit d'y faire varier les paramètres proportionnellement pour obtenir un sous-groupe quelconque, à un paramètre, du groupe considéré. Les deux groupes paramétriques correspondants sont dits les *groupes paramétriques canoniques du groupe* (5).

L'intégration du système (14) est, du reste, équivalente, avec un changement de notations, à celle de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{j=1}^{r} \lambda_j X_j f = 0. \tag{16}$$

Remarquons enfin que, comme les transformations infinitésimales (5) peuvent être remplacées par r combinaisons linéaires à coefficients constants des $X_k f$ (linéairement indépendantes), il y a une infinité de systèmes d'équations canoniques pour un groupe, se déduisant les unes des autres par des transformations linéaires et homogènes opérées sur les paramètres; de même pour les couples de groupes paramétriques canoniques.

3. Les transformations infinitésimales des deux groupes paramétriques canoniques du groupe (5) peuvent être considérées comme connues, dès qu'on connaît les constantes c_{iks} qui définissent la structure de ce groupe. Le calcul n'exige que la résolution d'une équation algébrique [1] : voici comment on peut le diriger, pour le premier groupe paramétrique, par exemple :

Tout revient à la détermination des fonctions ψ_{jk}, qui figurent dans les équations (4). Or, si l'on prend comme inconnues les fonctions de t

$$\Psi_{jk}(t) = t\psi_{jk}(\lambda_1 t, \lambda_2 t, \ldots, \lambda_r t),$$

on trouve qu'elles sont déterminées par les équations linéaires à coefficients constants

$$\frac{d\Psi_{jk}}{dt} = \varepsilon_{jk} + \sum_{h=1}^{r} \sum_{s=1}^{r} \lambda_h c_{shj} \Psi_{sk}, \qquad e_{jk} = \begin{cases} 1 \text{ pour } j = k, \\ 0 \text{ pour } j \neq k \end{cases}$$

avec les conditions initiales $\Psi_{jk} = 0$, pour $t = 0$. Ce qui établit le résultat annoncé. Quant au second groupe paramétrique, il se déduit du premier en changeant, dans les expressions de ses transformations infinitésimales, $e_1, e_2, \ldots, e_r$ respectivement en $-e_1, -e_2, \ldots, -e_r$; cela tient à ce que, sous la forme canonique (15), deux transformations inverses du groupe correspondent à des valeurs des paramètres canoniques $e_1, \ldots, e_r$ égales et de signes contraires.

---

(1) Ce résultat est dû à M. Lie, le mode de calcul indiqué à M. Engel (*voir*, par exemple, S. Lie et Engel, *Theorie der Transf.-gruppen*, t. III, p. 792 et suiv.).

Des formules précédentes, on déduit encore que les transformations infinitésimales $A_1f, \ldots, A_rf$ du premier groupe paramétrique canonique satisfont à l'identité

$$\sum_{j=1}^{r} e_j A_j f = \sum_{j=1}^{r} e_j \frac{\partial f}{\partial e_j}.$$

Cette identité permet de rattacher l'un à l'autre les deux modes de calcul des équations finies du groupe (5), précédemment donnés. Si l'on applique, en effet, au système (12) la méthode de M. Mayer, en supposant que le groupe $A_1f, \ldots, A_rf$ est le premier groupe paramétrique canonique, on devra poser $e_1 = \lambda_1 t, \ldots, e_r = \lambda_r t$ et, en vertu de l'identité précédente, on aura

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{j=1}^{x} \lambda_j \frac{\partial f}{\partial e_j} = \sum_{j=1}^{x} \lambda_j A_j f,$$

de sorte que l'intégration du système complet (12) se ramènera précisément à celle de la seule équation (16).

4. Si le groupe considéré (5) ne contient pas de transformation infinitésimale distinguée, on peut même obtenir sans intégration les équations canoniques finies des deux groupes paramétriques canoniques. Dans ce cas, elles sont, en effet, les mêmes pour ce groupe et pour son *groupe adjoint* [1], qui lui est alors holoédriquement isomorphe. Or, les transformations infinitésimales de ce groupe adjoint sont, comme l'on sait,

$$E_j f = \sum_{k=1}^{r} \sum_{s=1}^{r} c_{kjs} e_k \frac{\partial f}{\partial e_s} \qquad (j = 1, 2, \ldots, r),$$

et la détermination de ses équations canoniques finies (d'où l'on déduira immédiatement ses équations paramétriques) dépend de l'intégration d'un système d'équations linéaires à coefficients constants.

Mais, si le groupe considéré contient une ou plusieurs transformations infinitésimales distinguées, la détermination des équations finies de ses groupes paramétriques canoniques nécessite certaines quadratures. C'est ce qui résultera, du reste, des développements qui suivent.

---

[1] Pour ce qui concerne le groupe adjoint, son origine et ses propriétés, nous sommes obligé, afin de ne pas allonger outre mesure ces préliminaires, de renvoyer à l'Ouvrage de M. Lie (*Theorie der Transf.-gruppen*, t. I, Chap. XVI et t. III, Chap. XXVIII).

II. — Détermination des équations finies d'un groupe transitif.

5. *On suppose connues les transformations infinitésimales d'un groupe*

$$(1)\qquad X_k f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k = 1, 2, \ldots, r);$$

et l'on se propose de trouver, sous une forme quelconque, les équations finies de ce groupe.

En vertu de ce qui précède, on peut considérer comme connues les transformations infinitésimales de ses deux groupes paramétriques canoniques, ou, si l'on veut (par un changement de variables arbitraire), plus généralement celles de deux groupes simplement transitifs réciproques, isomorphes au groupe (1). Soient

$$(2)\qquad A_k f = \sum_{h=1}^{r} \alpha_{kh}(a_1 \ldots a_r)\frac{\partial f}{\partial a_h} \qquad (k = 1, 2, \ldots, r),$$

$$(3)\qquad B_k f = \sum_{h=1}^{r} \beta_{kh}(a_1 \ldots a_r)\frac{\partial f}{\partial a_h} \qquad (k = 1, 2, \ldots, r)$$

ces deux groupes, et l'on peut supposer que l'on a les identités

$$(X_j X_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{jks} X_s, \qquad (A_j A_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{jks} A_s, \qquad (B_j B_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{jks} B_s,$$
$$(A_j B_k) = 0 \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, r).$$

Tout revient dès lors à intégrer le système complet

$$(4)\qquad X_k f + A_k f = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, r),$$

connaissant les transformations infinitésimales (3) qui laissent ce système complet invariant.

Si l'on connaît en effet n intégrales indépendantes de ce système complet :

$$\Phi_i(x_1 \ldots x_n \,|\, a_1 \ldots a_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

les équations finies cherchées s'obtiendront en résolvant le système

$$\Phi_i(x'_1 \ldots x'_n \,|\, a_1 \ldots a_r) = \Phi_i(x_1 \ldots x_n \,|\, a_1^0 \ldots a_r^0) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Nous sommes donc naturellement conduits à appliquer ici la théorie de l'intégration des systèmes complets admettant des transformations infinitésimales connues, due à M. Lie, avec les perfectionnements que nous y avons apportés.

Si nous supposons d'abord que le groupe (1) est simplement transitif, c'est-à-dire que $n=r$, et que le déterminant des ξ_{ki} n'est pas identiquement nul, nous nous trouvons en présence de ce que M. Lie appelle le *problème normal* de sa théorie, et qui peut s'énoncer ainsi :

On donne un système complet à $\nu = \mu + \rho$ variables et μ équations

$$\mathrm{L}_j f = \sum_{i=1}^{\nu} \lambda_{ji}(y_1 \ldots y_\nu)\frac{\partial f}{\partial y_i} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, \mu) \tag{5}$$

et un groupe de ρ transformations infinitésimales indépendantes

$$\mathrm{Y}_l f = \sum_{i=1}^{\nu} \eta_{li}(y_1 \ldots y_\nu)\frac{\partial f}{\partial y_i} \qquad (l = 1, 2, \ldots, \rho), \tag{6}$$

satisfaisant aux identités $(\mathrm{L}_j, \mathrm{Y}_l) = 0$ pour toutes les valeurs des indices; on suppose de plus que le déterminant des coefficients des L_j et Y_l n'est pas nul : intégrer ce système complet.

Ce problème se ramène soit à l'intégration d'une seule équation de Lie, soit à l'intégration successive d'une suite d'équations de Lie simples; ou encore, si l'on préfère, à l'intégration d'équations linéaires auxiliaires et à des quadratures ([1]).

Ces résultats trouvent ici leur application immédiate : si nous voulons par exemple effectuer la réduction à des systèmes linéaires, nous introduirons le groupe linéaire adjoint au groupe (3), soit

$$\mathrm{E}_j f = \sum_{k=1}^{r}\sum_{s=1}^{r} c_{kjs} e_k \frac{\partial f}{\partial e_s} \qquad (j = 1, 2, \ldots, r),$$

et écrirons les équations

$$\mathrm{X}_k f + \mathrm{A}_k f = 0, \qquad \mathrm{B}_h f + \mathrm{E}_h f = 0 \qquad (k, h = 1, 2, \ldots, r).$$

([1]) Ces résultats sont contenus, explicitement ou implicitement, dans notre Mémoire : *Sur les systèmes d'équations différentielles*, etc. (*Ann. de la Fac. de Toulouse*, t. VIII), ou s'établissent par des raisonnements analogues à ceux qui y sont employés.

Elles forment un système complet; pour l'intégrer, on posera $x_i = \xi_i t$, $a_k = \alpha_k t$, et l'on sera ramené à une équation de Lie, linéaire, de la forme

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{k=1}^{r} \theta_k(t) \mathrm{E}_k f = 0.$$

L'intégration de cette équation résoudra complètement le problème, si le groupe (1) n'a pas de transformations infinitésimales distinguées. Sinon, il faudra en outre effectuer autant de quadratures indépendantes qu'il y a de ces transformations distinguées dans le groupe (1).

6. Passons maintenant au cas où le groupe (1) est un groupe transitif quelconque.

Nous pouvons résoudre n des équations (4) par rapport aux $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, par exemple les n premières, et porter dans les autres. Le système (4) prend ainsi la forme

$$\text{(7)} \qquad \mathrm{M}_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n} \mu_{ij}(x) \mathrm{A}_j f = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\text{(8)} \qquad \mathcal{A}_h f = \mathrm{A}_{n+h} f + \sum_{j=1}^{n} \nu_{hj}(x) \mathrm{A}_j f = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, s;\ r = n + s);$$

et, comme cette transformation du système revient à faire des combinaisons linéaires dont les coefficients sont fonctions des x seuls, on a les identités

$$\text{(9)} \qquad (\mathrm{M}_i, \mathrm{B}_k) = 0, \qquad (\mathcal{A}_h, \mathrm{B}_k) = 0.$$

Et puisque les équations (7), (8) forment toujours un système complet, on a

$$\text{(10)} \qquad (\mathcal{A}_h, \mathcal{A}_l) = \text{combinaison linéaire des } \mathcal{A};$$

d'autre part, par un calcul direct, on voit que ces mêmes crochets sont des combinaisons linéaires de $\mathrm{A}_1 \ldots \mathrm{A}_n$, $\mathcal{A}_1 \ldots \mathcal{A}_s$, dont les coefficients ne dépendent que des x. Mais comme il n'y a pas de relation linéaire et homogène entre ces dernières transformations infinitésimales, on en conclut que les x figurent seuls dans les coefficients des seconds membres des relations (10), c'est-à-dire qu'on peut les écrire

$$(\mathcal{A}_h, \mathcal{A}_l) = \sum_{m=1}^{s} \varkappa_{hlm}(x)\mathcal{A}_m \qquad (h, l = 1, 2, \ldots, s), \tag{11}$$

c'est-à-dire que, pour chaque système de valeurs des x, les transformations (8) définissent un groupe.

Nous pouvons maintenant, des équations (8), tirer les valeurs de s dérivées, par exemple $\frac{\partial f}{\partial a_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial a_s}$. Portons ces valeurs dans les B_k, en écrivant, pour plus de netteté, $b_1 \ldots b_n$ à la place de $a_{s+1} \ldots a_r$: on obtient les nouvelles transformations (où la lettre a désigne le système des variables $a_1 \ldots a_s$)

$$\mathcal{B}_k f = \mathrm{B}_k f + \sum_{h=1}^{s} \theta_{kh}(x \mid a \mid b)\mathcal{A}_h f = \sum_{l=1}^{n} \overline{\beta_{kl}}(x \mid a \mid b)\frac{\partial f}{\partial b_l}. \tag{12}$$

Calculant les crochets de Jacobi, il vient

$$(\mathcal{B}_h, \mathcal{B}_k) = \sum_{l=1}^{r} c_{hkl}\mathcal{B}_l + \text{comb. lin. des } \mathcal{A};$$

or, le résultat ne doit contenir aucune des dérivées $\frac{\partial f}{\partial a_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial a_s}$, et il n'existe pas de combinaison linéaire des $\mathcal{A}$ qui n'en contienne aucune. On a donc simplement

$$(\mathcal{B}_h, \mathcal{B}_k) = \sum_{l=1}^{r} c_{hkl}\mathcal{B}_l \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, r). \tag{13}$$

Les transformations (12), si l'on y considère les x et les a comme des constantes, définissent donc un groupe, isomorphe au groupe (1). Mais il y a plus, ce groupe est *semblable* au groupe (1). Faisons-y en effet le changement de variables

$$z_i = \mathrm{F}_i(x_1, \ldots, x_n \mid a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où les F_i sont les mêmes fonctions que dans les équations (7) du § I. Ces fonctions étant intégrales des équations (4), et, par suite, des équations (8), il vient

$$\mathcal{B}_k z_i = \mathrm{B}_k z_i = \xi_{ki}(z_1, \ldots, z_n),$$

en tenant compte des relations fondamentales [(8), § I]. Le groupe (12) devient donc le groupe (1), où l'on a mis les z à la place des x.

Remarquons en passant que la remarque essentielle qui précède fournit une *méthode pour déterminer, sans intégrations, les divers types de groupes transitifs d'une structure donnée*. Il suffira, en effet, de prendre pour le groupe des $\mathcal{A}_h$ les divers types de sous-groupes du premier groupe paramétrique, et d'en déduire les divers groupes (12) correspondants, au moyen du second groupe paramétrique. (Les x ne jouent, en effet, dans le calcul précédent, aucun rôle, et peuvent être remplacés par des constantes quelconques) [1].

7. Revenons à notre problème qui est actuellement le suivant [les équations (8) étant résolues comme il a été dit, et les valeurs de $\frac{\partial f}{\partial a_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial a_s}$ portées aussi dans les équations (7)] : *Intégrer le système complet*

$$(14)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_i} + \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \omega_{ij}(x \mid a \mid b)\dfrac{\partial f}{\partial b_j} = 0 & (i = 1, 2, \ldots, n), \\ \dfrac{\partial f}{\partial a_h} + \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \varpi_{hj}(x \mid a \mid b)\dfrac{\partial f}{\partial b_j} = 0 & (h = 1, 2, \ldots, s), \end{cases}$$

connaissant le groupe de transformations infinitésimales (12) *que ce système admet.*

Parmi ces transformations $\mathcal{B}_h$, on en peut trouver n dont le déterminant ne soit pas nul, les n premières par exemple, et l'on a alors

$$\mathcal{B}_{n+h} = \sum_{j=1}^{n} \varphi_{hj}(x \mid a \mid b)\,\mathcal{B}_j \qquad (h = 1, 2, \ldots, s).$$

Les fonctions φ_{hj} sont, comme l'on sait, des intégrales du système (14), et il en résulte qu'il y en a autant d'indépendantes comme fonctions des x des a et des b, que comme fonctions des b seuls. Deux cas peuvent alors se présenter :

1° Parmi ces fonctions φ_{hj}, il y en a n d'indépendantes. Le problème est

[1] Cette méthode ne diffère du reste que par le mode d'exposition de celle qui a été indiquée par M. Lie (voir *Theorie der Transf.-gr.*, t. III, p. 798 et suiv.).

résolu dans ce cas sans aucune intégration. Dans ce cas le groupe (12), et par suite le groupe (1), auquel il est semblable, est *asystatique*, pour employer une expression de M. Lie. Nous retrouvons donc ce théorème de M. Lie (¹) : *Les équations finies d'un groupe asystatique s'obtiennent sans intégrations, dès qu'on en connaît les transformations infinitésimales*.

2° Passons au cas général. Parmi les fonctions φ_{hj}, il y en a seulement $n-p=q$, qui soient indépendantes. Prenons-les comme nouvelles variables $u_1, u_2, \ldots, u_q$ à la place de q des b, par exemple $b_{p+1}, \ldots, b_n$. Le système (14) se réduit à

$$(15)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_i} + \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \bar{\omega}_{ij}(x\,|\,a\,|\,u\,|\,b)\frac{\partial f}{\partial b_j} = 0 & (i=1, 2, \ldots, n), \\ \dfrac{\partial f}{\partial a_h} + \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \bar{\varpi}_{ij}(x\,|\,a\,|\,u\,|\,b)\frac{\partial f}{\partial b_j} = 0 & (h=1, 2, \ldots, s), \end{cases}$$

et les transformations (12) prennent la forme

$$(16)\qquad \mathrm{B}_k f = \mathrm{U}_k f + \mathfrak{B}'_k f \qquad (k=1, 2, \ldots, r),$$

$$\mathrm{U}_k f = \sum_{i=1}^{q} \upsilon_{ki}(u)\frac{\partial f}{\partial u_i}, \qquad \mathfrak{B}'_k f = \sum_{j=1}^{p} \beta'_{kj}(x\,|\,a\,|\,u\,|\,b)\frac{\partial f}{\partial b_j}.$$

Remarquons en passant que les transformations U_k définissent un groupe, isomorphe au groupe proposé. D'où cette conséquence qu'*un groupe transitif simple, de structure donnée, avec le nombre minimum de variables, est nécessairement asystatique*.

Reprenant les transformations (16), ou plutôt les n premières d'entre elles, nous en pouvons déduire exactement p combinaisons linéaires de la forme

$$(17)\qquad \sum_{k=1}^{n} \upsilon_k(u)\mathfrak{B}_k f,$$

qui ne contiennent aucune des dérivées $\dfrac{\partial f}{\partial u_1}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial u_q}$, et ne soient liées par aucune relation linéaire et homogène dont les coefficients soient fonctions

(¹) Voir *Theorie der Transf.-gr.*, t. I, p. 518.

des u seuls. Soient

$$C_k f = \sum_{j=1}^{p} \gamma_{kj}(x \mid a \mid u \mid b) \frac{\partial f}{\partial b_j} \qquad (k = 1, 2, \ldots, p) \tag{18}$$

ces p transformations. Le crochet de deux d'entre elles étant aussi de la forme (17), on aura des relations

$$(C_i, C_k) = \sum_{l=1}^{p} K_{i,h,l}(u) C_l \qquad (i, h = 1, 2, \ldots, p), \tag{19}$$

c'est-à-dire qu'en considérant les x, les a et les u comme des constantes, elles définissent un groupe simplement transitif. On peut du reste supposer que les K ne dépendent pas des u. Remarquons en effet que toute transformation infinitésimale, échangeable avec chacune des transformations (16), admet comme invariants les fonctions $u_1, \ldots, u_q$, et est par suite de la même forme que les transformations (18) et est aussi échangeable avec chacune d'elles; rappelons-nous que, d'après un résultat de M. Lie [1], il y a précisément p de ces transformations, linéairement indépendantes, formant un groupe

$$D_k f = \sum_{j=1}^{p} \delta_{kj}(x \mid a \mid u \mid b) \frac{\partial f}{\partial b_j} \qquad (k = 1, 2, \ldots, p). \tag{20}$$

Nous pouvons ajouter que ce groupe, relativement aux variables $b_1, \ldots, b_p$, est transitif; car si ces transformations (20) étaient liées par une relation linéaire et homogène, on en déduirait des invariants du groupe (16), ce qui ne peut être, ce groupe étant transitif. On voit donc que, relativement aux variables $b_1, \ldots, b_p$, les deux groupes (18) et (20) sont deux groupes simplement transitifs réciproques, et, par suite, ils ont même structure. Et comme la structure du groupe (20) s'exprime par des formules

$$(D_i D_k) = \sum_{l=1}^{p} K_{ihl} D_l \qquad (i, h = 1, 2, \ldots, p),$$

où les K ne dépendent pas des variables u, il en est de même pour le groupe (18).

En définitive, nous sommes ramenés à l'intégration du système (15),

---

[1] Voir *Theorie der Transf.-gruppen*, t. I, Chap. XX.

connaissant le groupe (18) simplement transitif qu'il admet, c'est-à-dire de nouveau au *problème normal* du n° 5. *Tout dépend donc de l'intégration d'une équation linéaire de la forme*

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{k=1}^{p} \theta_k(t) \mathrm{E}_k f = 0,$$

où figure le groupe adjoint du groupe des transformations infinitésimales échangeables à celles du groupe donné (1) : si ce groupe contient des transformations infinitésimales distinguées, il en sera de même du groupe (18), et il faudra, en plus, effectuer certaines quadratures.

Remarquons enfin que les développements qui précèdent nous fournissent le moyen de *déterminer, connaissant les transformations infinitésimales d'un groupe transitif, la structure du groupe des transformations échangeables;* car, la structure du groupe (18) ne dépendant pas des valeurs des u, on peut, pour la déterminer, donner à ces quantités, dans les formules (19), des valeurs arbitraires.

On pourra, ensuite, remplacer les C_k par d'autres combinaisons de même forme, de manière à mettre en évidence la structure ainsi déterminée.

8. Appliquons la méthode générale à un *cas particulier* important, étudié par M. Lie, celui où il n'y a pas, en dehors du groupe (1) lui-même, de transformation infinitésimale échangeable à toutes les siennes. Si le groupe n'est pas asystatique, cas déjà examiné, ses transformations infinitésimales distinguées constituent le groupe des transformations infinitésimales échangeables à toutes les siennes. Alors le groupe (20) ne se compose que de transformations distinguées, et il en est par suite de même du groupe (18). La question se résout donc par autant de quadratures indépendantes qu'il y a de transformations distinguées.

Si l'on considère en particulier le groupe formé de l'ensemble

$$\mathrm{A}_1 f, \quad \ldots, \quad \mathrm{A}_r f, \quad \mathrm{B}_1 f, \quad \ldots, \quad \mathrm{B}_r f$$

des transformations de deux groupes simplement transitifs réciproques, on voit qu'il est asystatique si le groupe $\mathrm{A}_k f$ n'a pas de transformations infinitésimales distinguées, et qu'il a, dans le cas contraire, autant de transformations distinguées que ce dernier. Remarquant, de plus, que la méthode donnée fournit, si l'on veut, les équations canoniques du groupe considéré, et que, celles-ci connues, on peut en déduire aussitôt celles des sous-groupes, on arrive, avec M. Lie, à cette conclusion :

La détermination des équations finies d'un groupe simplement transitif, quand on connaît les transformations infinitésimales du groupe réciproque, exige uniquement autant de quadratures que le groupe contient de transformations infinitésimales distinguées. Ce résultat contient, comme cas particulier, celui dont l'énoncé termine le n° 4 de ce Travail.

On peut du reste l'établir directement, comme on le verra plus loin, et par une méthode qui conduit à des calculs plus simples.

9. Si l'on suppose connues, dans l'application de la méthode précédente, non seulement les transformations infinitésimales, mais aussi les équations finies canoniques des groupes (2) et (3), on pourra lui faire subir quelques modifications avantageuses que nous allons indiquer. Ce sera toujours le cas (*voir* n° 4), si le groupe (1) n'a pas de transformations infinitésimales distinguées; et, dans le cas général, cela nécessitera au plus certaines quadratures préliminaires (*voir* n^{os} 4 et 8).

Supposons donc qu'on ait mis le système (4) sous la forme (7) (8). On peut ici considérer comme connues les équations finies, et par suite les invariants du groupe (8). Soient $v_1, v_2, \ldots, v_n$ n de ces invariants (indépendants), et introduisons-les comme variables nouvelles, à la place de $a_{s+1}, \ldots, a_r$ par exemple. Les équations (8) se réduiront alors à

$$\frac{\partial f}{\partial a_1} = \frac{\partial f}{\partial a_2} = \ldots = \frac{\partial f}{\partial a_s} = 0, \tag{21}$$

et, en tenant compte de ces équations, les équations (7) prendront la forme

$$R_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n} \rho_{ij}(x|v) \frac{\partial f}{\partial v_j} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{22}$$

où les ρ_{ij} ne dépendent pas de $a_1 \ldots a_s$, comme on le voit en écrivant que ces équations forment, avec les équations (21), un système complet.

Le même changement de variables effectué dans les transformations (3) donne

$$B_k f = V_k f + B''_k f \qquad (k = 1, 2, \ldots, r),$$

$$V_k f = \sum_{j=1}^{n} w_{kj}(x|v)\frac{\partial f}{\partial v_j}, \qquad B''_k f = \sum_{h=1}^{s} \beta''_{kh}(x|v|a_1\ldots a_s)\frac{\partial f}{\partial a_h};$$

et, comme le système (21) (22) admet toujours ces transformations, on voit facilement, d'abord, que les w_{kj} ne dépendent plus des a, d'où l'on conclut les relations

$$(V_i V_k) = \sum_{l=1}^{r} c_{ikl} V_l \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, r);$$

et ensuite que le système complet (22) admet les transformations V_k. Enfin, ces transformations forment, d'après ce qui précède, un groupe, et ce groupe est de nouveau semblable au groupe (1). On le voit en remarquant que si l'on prenait pour les v_i les fonctions $F_i(x_1\ldots x_n|a_1\ldots a_r)$, d'après le raisonnement qui a été fait pour le groupe (12), les w_{kj} seraient précisément les fonctions $\xi_{kj}(v_1\ldots v_n)$. On est donc ramené à un problème de tous points semblable à celui du n° 7 et qu'on traitera de même. L'avantage est, ici, d'abord que le système (22) dépend de moins de variables que le système (14), et aussi qu'on peut considérer comme connues les équations finies du groupe V_k.

Enfin, la remarque précédente, sur la similitude du groupe (1) et du groupe V_k, conduit immédiatement à la première méthode donnée par M. Lie pour la détermination des divers types de groupes transitifs de structure donnée, et qui permet de *déterminer, par l'emploi au plus de quadratures, non seulement les transformations infinitésimales, mais aussi les équations finies canoniques de ces divers types*. La marche à suivre sera la même qu'à la fin du n° 6 : on déterminera les divers types de sous-groupes du groupe (2), on formera leurs invariants v et, au moyen du groupe (3), on en déduira les groupes V_k correspondants [1].

---

[1] Voir *Theorie der Transf. gruppen*, t. I, Ch. XXII et t. III, Ch. XXVII.

III. — Autre méthode. Cas des groupes intransitifs.

10. Soit toujours à déterminer les équations finies du groupe

$$(1)\qquad X_k f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x_1 \ldots x_n)\frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k = 1, 2, \ldots, r).$$

Supposant encore connues les transformations infinitésimales

$$(2)\qquad A_k f = \sum_{j=1}^{r} \alpha_{kj}(a_1 \ldots a_r)\frac{\partial f}{\partial a_j} \qquad (k = 1, 2, \ldots, r),$$

$$(3)\qquad B_k f = \sum_{j=1}^{r} \beta_{kj}(a_1 \ldots a_r)\frac{\partial f}{\partial a_j} \qquad (k = 1, 2, \ldots, r),$$

de deux groupes isomorphes au groupe (1), simplement transitifs et réciproques, nous ramenons encore la question à intégrer le système complet

$$(4)\qquad X_k f + A_k f = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, r),$$

qui admet les transformations infinitésimales connues (3). Mais nous ne voulons plus faire d'hypothèse sur la nature du groupe (1).

Résolvons les équations (4) par rapport aux $\frac{\partial f}{\partial a_k}$, ce qui est toujours possible; employant toujours les notations de M. Lie, il vient

$$(5)\qquad P_k f = \frac{\partial f}{\partial a_k} + \sum_{j=1}^{r} \psi_{jk}(a) X_j f = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, r),$$

où les ψ_{jk} sont des fonctions introduites au n° 1 [éq. (4)]. Portons les valeurs ainsi trouvées dans les transformations (3), ce qui revient à faire les combinaisons

$$(6)\qquad Y_h f = B_h f - \sum_{k=1}^{r} \beta_{hk}(a) P_k f = \sum_{j=1}^{r} \rho_{hj}(a_1 \ldots a_r) X_j f$$
$$(h = 1, 2, \ldots, r),$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$(7)\qquad \rho_{hj}(a) = -\sum_{k=1}^{r} \beta_{hk}(a)\psi_{jk}(a) \qquad (h, j = 1, 2, \ldots, r).$$

Des formules (7) on conclut facilement que le déterminant des ρ_{hj} n'est pas identiquement nul, de sorte que, si l'on considère les a comme des constantes, les transformations (6) définissent précisément le groupe (1). Du reste, si l'on suppose la structure commune des groupes (1), (2), (3) définie par les identités

$$(X_i X_k) = \sum_s c_{iks} X_s, \qquad (A_i A_k) = \sum_s c_{iks} A_s, \qquad (B_i B_k) = \sum_s c_{iks} B_s,$$

un calcul direct facile donne, en partant des valeurs (6),

$$(Y_i Y_k) = \sum_s c_{iks} Y_s + \text{comb. lin. des P},$$

et, comme aucune combinaison linéaire des transformations infinitésimales (5) ne peut être indépendante des $\frac{\partial f}{\partial a_k}$, on en conclut simplement

$$(Y_i Y_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks} Y_s \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, r).$$

Remarquons enfin qu'il suffit de comparer la formule (7) à celles qui terminent la page 80 du t. I de la *Theorie der Transformations-gruppen* de M. Lie pour en conclure que nos fonctions ρ_{hj} sont bien les mêmes que celles qui figurent dans les équations finies du groupe adjoint, de sorte que les transformations (6) sont ce que deviennent les transformations (1) quand on y effectue la transformation définie par les équations finies

$$x'_i = f_i(x_1 \ldots x_n | a_1 \ldots a_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

de ce groupe. Résultat que l'on s'explique, du reste, bien facilement, en faisant, dans les équations (4), la transformation inverse de celle-là.

Quoi qu'il en soit, le problème est ramené à intégrer le système (5), connaissant les transformations (6) qui le laissent invariant, et l'on voit immédiatement que toutes les propriétés du groupe (1) vont influer sur la nature des opérations à effectuer dans cette intégration.

11. Reprenons d'abord le cas où le groupe (1) est transitif. En général, il n'y aura qu'à opérer exactement comme au n° 7 et l'on sera conduit aux mêmes résultats.

Mais supposons qu'on connaisse toutes les transformations infinitésimales

$$Z_l f = \sum_{i=1}^{n} \zeta_{li}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (l = 1, 2, \ldots, p) \tag{8}$$

qui sont échangeables à toutes les transformations (1). Le système complet (5) les admet aussi et l'on a à opérer cette fois avec le groupe formé de l'ensemble des transformations (6) et (8). Ce groupe n'admet pas, en dehors de lui, de transformations infinitésimales échangeables à toutes les siennes. Si donc il ne contient pas de transformations infinitésimales distinguées, il est asystatique; de sorte que, si l'on exprime en fonction de n des transformations (6) et (8), toutes les autres, il y aura, parmi les coefficients, n fonctions indépendantes, qui seront des intégrales du système (5). Donc, dans ce cas, les équations finies du groupe (1) s'obtiennent par de simples éliminations.

Si, au contraire, le groupe (6), (8) contient ρ transformations infinitésimales distinguées, la méthode du n° 7, appliquée à ce groupe au lieu du groupe des $B_h f$, fournira $n - \rho$ intégrales sans intégration, et ramènera le calcul des ρ dernières à ρ quadratures indépendantes.

Donc, *la détermination des équations finies d'un groupe transitif, quand on connaît, en même temps que ses transformations infinitésimales, toutes celles qui leur sont échangeables, dépend au plus de quadratures.*

Ce résultat est, au fond, équivalent à celui du n° 8. Dans le cas où le groupe est simplement transitif, le raisonnement précédent est précisément celui que nous avions annoncé en terminant le n° 8.

12. Disons quelques mots du cas où le groupe (1) est intransitif. Supposons d'abord que les transformations (1) soient, comme formes linéaires en $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$, linéairement indépendantes; il en est de même des transformations (6). Alors $r < n$, et le système

$$P_k f = 0, \qquad Y_h f = 0 \qquad (k, h = 1, 2, \ldots, r)$$

admet $n - r$ invariants qu'il faudra d'abord calculer; on les introduira ensuite comme variables et l'on sera ramené au *problème normal* du n° 5. Cela revient à la détermination préliminaire des invariants du groupe (1), que l'on peut prendre justement pour les $n-r$ invariants précédents. Ce procédé peut, du reste, être employé dans tous les cas, mais dans les autres cas ceux que nous allons indiquer peuvent être plus avantageux.

Si nous supposons, en effet, que, parmi les transformations (1) et, par suite, (6), il y en ait, au sens indiqué, seulement $m < r, n$ d'indépendantes, en exprimant les autres au moyen de celles-là, on obtiendra, comme au n° 7, des intégrales du système (5), en nombre σ par exemple. Si $\sigma = n$, le problème est achevé. Si $n > \sigma \geqq m$, il restera à déterminer, sans réduction en général dans ce problème, les $n-\sigma$ restantes. Enfin, si $\sigma = m$, en opérant, comme au n° 7, on sera ramené à un système de r équations, à $r+n-\sigma$ variables avec $m-\sigma$ transformations infinitésimales indépendantes, et il sera de nouveau nécessaire de déterminer d'abord $n-m$ intégrales, qui seront, par exemple, les invariants du groupe (1), avant d'être ramené au *problème normal* de M. Lie.

On voit donc que, pour les groupes intransitifs, au contraire de ce qui avait lieu pour les groupes transitifs, ce n'est qu'exceptionnellement que le problème pourra se ramener à l'intégration d'équations linéaires. Et cela était à prévoir, car la détermination des équations finies d'un groupe transitif entraîne celle de ses invariants et la recherche de ceux-ci comprend, comme cas particulier, l'intégration d'un système complet, absolument quelconque, qui peut toujours se mettre sous la forme

$$L_1 f = 0, \qquad \ldots, \qquad L_m f = 0,$$

les $L_k f$ étant des transformations infinitésimales échangeables.

IV. — Troisième méthode. — Extension au problème de l'intégration d'une équation de Lie.

13. La recherche des équations finies du groupe

$$(1) \qquad X_k f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x_1 \ldots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k = 1, 2, \ldots, r)$$

revient, comme l'on sait (*voir* par exemple n° 2), à l'intégration de l'équation aux dérivées partielles

$$(2) \qquad Lf = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k X_k f = 0.$$

Pour appliquer à cette équation la méthode d'intégration de M. Lie, nous commencerons par déterminer les transformations infinitésimales qui la laissent invariante et qui sont de la forme

$$(3) \qquad \mathrm{Y}f = \sum_{k=1}^{r} \rho_k(t)\mathrm{X}_k f.$$

Les fonctions $\rho_k(t)$ doivent satisfaire à l'identité $(\mathrm{L}, \mathrm{Y}) = 0$, qui s'écrit, en développant les calculs,

$$\sum_{s=1}^{r}\left(\frac{d\rho_s}{dt} + \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\lambda_j c_{jks}\rho_k\right)\mathrm{X}_s f = 0.$$

Cette relation se décompose, les transformations (1) étant indépendantes, en les r suivantes :

$$(4) \qquad \frac{d\rho_s}{dt} = \sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{r} c_{kjs}\lambda_j\rho_k \qquad (s = 1, 2, \ldots, r).$$

Les constantes c_{kjs} sont celles qui définissent la structure du groupe (1), et l'on a tenu compte des relations

$$c_{jks} + c_{kjs} = 0.$$

Les équations (4) sont des équations linéaires à coefficients constants, dont l'intégration dépend, par suite, seulement de la résolution d'une équation algébrique. Elles admettent r solutions indépendantes, qui, portées dans (3), fourniront r transformations infinitésimales indépendantes

$$(5) \qquad \mathrm{Y}_k f = \sum_{h=1}^{r} \rho_{kh}(t)\mathrm{X}_h f \qquad (k = 1, 2, \ldots, r),$$

laissant invariante l'équation (2). Le crochet de deux d'entre elles, étant de la forme (3) et laissant encore invariante l'équation (2), est forcément une combinaison linéaire à coefficients constants des transformations (5); et, comme le groupe que celles-ci forment ne diffère pas, quand on traite t comme une constante du groupe (1), on peut supposer les transformations (5) choisies par exemple de manière que l'on ait, en même temps,

$$(\mathrm{X}_i\mathrm{X}_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks}\mathrm{X}_s, \qquad (\mathrm{Y}_i\mathrm{Y}_k) = \sum_{s=1}^{r} c_{iks}\mathrm{Y}_s \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, r).$$

On est dès lors ramené à un problème tout semblable à celui du n° 7, et l'on retrouverait par suite sans peine, par cette voie, tous les résultats précédemment obtenus sur la nature des intégrations que nécessite le problème considéré.

Remarquons que le système (4) est équivalent à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{k=1}^{r} \lambda_k E_k f = 0,$$

où les transformations infinitésimales $E_k f$ sont, suivant la notation habituelle, celles du groupe adjoint du groupe (1), de sorte que l'on pourrait prendre pour les ρ_{rk} les coefficients qui figurent dans les équations canoniques de ce groupe adjoint. On en conclurait bien facilement que le résultat actuel ne diffère pas de celui du n° 10, lorsqu'on applique au système (5) (n° 10) la méthode de Mayer, en supposant que les groupes $A_k f$ et $B_k f$ y sont les groupes paramétriques canoniques.

Mais la méthode présente a l'avantage de ne supposer connus que les théorèmes les plus fondamentaux de la théorie des groupes.

14. Cette méthode a un autre avantage, celui de pouvoir s'étendre à l'intégration d'une *équation de Lie* quelconque

$$(6) \qquad \Lambda f = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{k=1}^{r} \theta_k(t) X_k f = 0.$$

Cherchons en effet de nouveau les transformations de la forme

$$(3) \qquad Y f = \sum_{k=1}^{r} \rho_k(t) X_k f,$$

qui satisfont à l'identité $(\Lambda f, Y f) = 0$. Il vient, en développant les calculs,

$$\sum_{s=1}^{r} \left(\frac{d\rho_s}{dt} + \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{r} c_{jks} \theta_j \rho_k \right) X_s f = 0,$$

c'est-à-dire que les ρ_k sont définis par le système linéaire

$$(7) \qquad \frac{d\rho_s}{dt} = \sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} c_{kjs} \theta_j \rho_k,$$

équivalent à l'équation de Lie

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_{k=1}^{r}\theta_k(t)\mathrm{E}_k f=0, \tag{8}$$

où intervient le groupe adjoint de celui qui figure dans l'équation donnée (6), et que nous pouvons appeler l'*équation de Lie adjointe* à l'équation (6). Ce système linéaire intégré, on en déduira, comme précédemment, un groupe

$$\mathrm{Y}_k f=\sum_{h=1}^{r}\mathrm{P}_{kh}(t)\mathrm{X}_h f \qquad (k=1, 2, \ldots, r), \tag{9}$$

auquel on peut supposer la structure c_{jks}, et l'on sera ramené au *problème normal* (*voir* n° 5) de M. Lie, c'est-à-dire à de nouvelles équations linéaires, ou à des quadratures auxiliaires, par les mêmes opérations qu'au n° 7.

Le fait essentiel de la réduction des équations de Lie aux équations linéaires, toutes les fois que le groupe correspondant est transitif, se trouve ainsi établi.

15. Une fois déterminées les transformations (9), on peut achever la question autrement, en imaginant que l'on cherche, d'autre part, les transformations infinitésimales échangeables avec chacune des transformations (1), ce qui a l'avantage de ne plus faire intervenir les fonctions $\theta_k(t)$. C'est un problème qu'il serait facile de traiter directement, mais nous nous contenterons de remarquer qu'il est équivalent, à certaines quadratures près, au plus, à celui de la détermination des équations finies du groupe (1). Car d'une part nous avons vu que, ces transformations une fois déterminées, le calcul des équations finies du groupe exige au plus des quadratures [1]; et M. Lie a montré d'autre part que ces transformations se déduisent par des éliminations des équations finies du groupe, supposées connues [2].

Nous pouvons alors supposer le groupe (1) transitif, car s'il ne l'est pas, on connaît ses invariants, et, en les prenant comme variables nouvelles, on

[1] *Voir* n° 11 : nous n'avons raisonné que sur les groupes transitifs, mais il est facile d'étendre les résultats aux groupes intransitifs, en remarquant que les invariants sont alors connus.

[2] Voir *Theorie der Transf.-gruppen,* t. I, p. 394, 513 et suivantes.

sera ramené au cas d'un groupe transitif. On se trouve alors dans des conditions tout à fait analogues à celles du n° 11, en considérant l'équation (6) qui admet le groupe formé des transformations (9) et des transformations

$$Z_l f = \sum_{i=1}^{n} \zeta_{li}(x_1 \dots x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (l = 1, 2, \dots, p) \tag{10}$$

échangeables avec les transformations (1). Et trois cas peuvent se présenter :

1° $p = 0$, c'est-à-dire que le groupe (1) est asystatique. Les relations linéaires entre les transformations (9) fournissent toutes les intégrales de l'équation proposée.

2° $p > 0$, mais le groupe (1), (10) ne contient pas de transformations infinitésimales distinguées : il est alors asystatique et, des relations linéaires entre ses transformations infinitésimales, on déduit encore, sans intégrations, toutes les intégrales de l'équation proposée.

3° $p > 0$, mais le groupe (1), (10) contient un certain nombre de transformations infinitésimales distinguées : il faudra un certain nombre de quadratures indépendantes pour achever la question.