

ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

R. LE VAVASSEUR

Solution d'une question posée par M. Hermite

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 1^{re} série, tome 8, n° 2 (1894), p. G1-G3

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1894_1_8_2_G1_0>

© Université Paul Sabatier, 1894, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>*

SOLUTION

D'UNE

QUESTION POSÉE PAR M. HERMITE,

PAR M. LE VAVASSEUR,

Professeur au Lycée de Moulins.

1. *Problème.* — L'intégrale elliptique de seconde espèce

$$J = \int_0^K k^2 \operatorname{sn}^2 x \, dx$$

peut s'écrire sous la forme

$$J = K k^2 \operatorname{sn}^2(\xi, k),$$

ξ étant compris entre les limites 0 et K.

Cette quantité ξ donne le maximum de la fonction $\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}$, comme le montre la relation de Jacobi

$$\int_0^x k^2 \operatorname{sn}^2 x \, dx = \frac{Jx}{K} - \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}.$$

On demande de la définir en fonction du module par une équation différentielle (C. HERMITE, *Intermédiaire des Mathématiciens*, n° 4, janvier 1894).

2. Soit

$$J = \int_0^1 \frac{k^2 y^2 dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2 y^2)}}, \quad K = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2 y^2)}}, \quad k^2 + k'^2 = 1.$$

On a

$$\frac{dJ}{dk} = \frac{k(K-J)}{k'^2}, \quad \frac{dK}{dk} = \frac{k^2 K - J}{kk'^2}.$$

Rappelons aussi que \mathbf{K} et $\mathbf{K}' = \mathbf{K}(k')$ sont des intégrales de l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$kk'^2 \frac{d^2 \mathbf{K}}{dk^2} + (1 - 3k^2) \frac{d\mathbf{K}}{dk} - k\mathbf{K} = 0.$$

3. Partons de l'équation

$$\mathbf{J} = \mathbf{K}k^2 \operatorname{sn}^2(\xi, k).$$

Prenons une première fois la dérivée des deux membres de cette équation par rapport à k ,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{J}}{dk} &= \left(k^2 \frac{d\mathbf{K}}{dk} + 2k\mathbf{K} \right) \operatorname{sn}^2(\xi, k) \\ &\quad + 2\mathbf{K}k^2 \operatorname{sn}(\xi, k) \operatorname{cn}(\xi, k) \operatorname{dn}(\xi, k) \frac{d\xi}{dk} + 2\mathbf{K}k^2 \operatorname{sn}(\xi, k) \frac{\partial \operatorname{sn}(\xi, k)}{\partial k}. \end{aligned}$$

Dans cette équation, remplaçons $\frac{d\mathbf{J}}{dk}, \frac{d\mathbf{K}}{dk}$ par leurs valeurs; remarquons, en outre, qu'on a

$$\operatorname{sn}(\xi, k) = \frac{\sqrt{\mathbf{J}}}{k\sqrt{\mathbf{K}}}, \quad \operatorname{cn}(\xi, k) = \frac{\sqrt{k^2 \mathbf{K} - \mathbf{J}}}{k\sqrt{\mathbf{K}}}, \quad \operatorname{dn}(\xi, k) = \frac{\sqrt{\mathbf{K} - \mathbf{J}}}{\sqrt{\mathbf{K}}},$$

enfin que

$$kk' \frac{\partial \operatorname{sn}(x, k)}{\partial k} = k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{cn}^2 x + \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x \left[\frac{\mathbf{J}x}{\mathbf{K}} - \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} - k^2 x \right]$$

(voir *Cours Hermite*, 3^e édition, page 263).

Il vient, après simplifications,

$$(1) \quad kk'^2 \frac{d\xi}{dk} + \frac{\mathbf{J} - k^2 \mathbf{K}}{\mathbf{K}} \xi - \frac{\Theta'(\xi)}{\Theta(\xi)} = \frac{k^2 \mathbf{K}^2 - 2(1 + k^2) \mathbf{K} \mathbf{J} + 3 \mathbf{J}^2}{2\sqrt{\mathbf{K} \mathbf{J} (\mathbf{K} - \mathbf{J}) (k^2 \mathbf{K} - \mathbf{J})}}.$$

4. Posons, d'autre part, avec M. Hermite,

$$\mathbf{U}(x) = \frac{\mathbf{J}x}{\mathbf{K}} - \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)},$$

et servons-nous de la formule

$$kk'^2 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial k} = \mathbf{U} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} - k^2 \left(\mathbf{U} + x \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} \right) + k^2 (x - \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x)$$

(voir *Cours Hermite*, 3^e édition, page 264).

On en déduit, en observant que ξ annule la dérivée par rapport à x de $\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}$,

$$kk'^2 \frac{\partial}{\partial k} \left[\frac{\Theta'(\xi)}{\Theta(\xi)} \right] = \frac{J - k^2 K}{K} \frac{\Theta'(\xi)}{\Theta(\xi)} + \frac{\sqrt{KJ(K-J)(k^2 K - J)}}{K^2}.$$

5. Prenant dès lors la dérivée par rapport à k des deux membres de l'équation (1) et éliminant $\frac{\Theta'(\xi)}{\Theta(\xi)}$ entre le résultat obtenu et l'équation (1), on trouve, après un calcul assez long, mais n'offrant aucune difficulté, que l'équation différentielle demandée est

$$kk'^2 \frac{d^2 \xi}{dk^2} + (1 - 3k^2) \frac{d\xi}{dk} - k\xi = \frac{[k^2(K-J)^2 + k'^2 J^2][J^2 - k^2 K^2][(K-J)^2 - k'^2 K^2]}{4kk'^2 [KJ(K-J)(k^2 K - J)]^{\frac{3}{2}}}.$$

La fonction ξ de k sera donc de la forme

$$\xi = K(k)f(k) + K'(k)\varphi(k);$$

les fonctions $f(k)$ et $\varphi(k)$ seront données par de simples quadratures.

