Annales de la faculté des sciences de Toulouse

Ch. Hermite

Sur la transformation des fonctions elliptiques

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 1re série, tome 6, nº 4 (1892), p. L1-L13
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1892_1_6_4_L1_0>

SUR LA

TRANSFORMATION DES FONCTIONS ELLIPTIQUES,

PAR M. Ch. HERMITE,

Professeur d'Algèbre supérieure à la Faculté des Sciences de Paris.

Extrait des Mémoires de l'Académie tchèque de Prague.

Dans le § 32 des *Fundamenta,* Jacobi a fait la remarque que, si l'on désigne par λ l'un des modules relatifs à la transformation d'ordre impair n, par λ' son complément, on a, entre les fonctions complètes Λ, Λ' analogues à K et K′ et le multiplicateur M, les relations suivantes

$$\alpha\Lambda + i\beta\Lambda' = \frac{a\mathrm{K} + ib\mathrm{K}'}{n\mathrm{M}},$$

$$\alpha'\Lambda' + i\beta'\Lambda = \frac{a'\mathrm{K} + ib'\mathrm{K}'}{n\mathrm{M}},$$

où a, a', α, α' sont des nombres impairs, b, b', β, β' des nombres pairs satisfaisant aux conditions $aa' + bb' = n$, $\alpha\alpha' + \beta\beta' = 1$. Puis il ajoute en note : *Accuratior numerorum a, a′, b, b′, ... determinatio pro singulis eiusdem ordinis transformationibus gravibus laborare difficultatibus videtur. Immo hæc determinatio, nisi egregie fallimur, maxime a limitibus pendet, inter quos modulus k versatur, ita ut pro limitibus diversis plane alia evadat : quod quam intricatam reddat questionem, expertus cognoscet, etc.* C'est dans le but d'éviter ces difficultés que j'ai modifié le point de vue du grand géomètre dans la théorie de la transformation ; j'ai suivi une marche inverse : je me suis donné *a priori* les relations entre K, K′, Λ, Λ' pour en conclure les formules analytiques de la transformation que Jacobi, au contraire, établit en premier lieu, et j'ai posé la question comme il suit (1) :

(1) *Cours de la Faculté des Sciences de Paris*, 4e édition, p. 265.

Soient, avec une légère modification des notations employées dans les *Fundamenta*,

$$\mathrm{L}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-l^2\sin^2\varphi}},\qquad \mathrm{L}'=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-l'^2\sin^2\varphi}}$$

les mêmes quantités que K et K′, relatives à un autre module l et à son complément $l'=\sqrt{1-l^2}$. On propose de déterminer ce module, ainsi que la constante M, de telle sorte que $\operatorname{sn}\left(\frac{x}{\mathrm{M}}, l\right)$, $\operatorname{cn}\left(\frac{x}{\mathrm{M}}, l\right)$, $\operatorname{dn}\left(\frac{x}{\mathrm{M}}, l\right)$ admettent pour périodes $2\mathrm{K}$ et $2i\mathrm{K}'$, et s'expriment, par conséquent, au moyen des fonctions doublement périodiques de module k.

Nous ferons, pour cela,

$$(\mathrm{A})\qquad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{K}}{\mathrm{M}}=a\mathrm{L}+ib\mathrm{L}', \\[2mm] \dfrac{i\mathrm{K}'}{\mathrm{M}}=c\mathrm{L}+id\mathrm{L}', \end{cases}$$

a, b, c, d étant des nombres entiers quelconques, avec la condition que le déterminant $ad-bc$ soit positif, afin que la partie réelle du quotient $\frac{\mathrm{L}'}{\mathrm{L}}$ soit positive. On aura ainsi les égalités

$$\operatorname{sn}\left(\frac{x+2\mathrm{K}}{\mathrm{M}}, l\right)=(-1)^a\operatorname{sn}\left(\frac{x}{\mathrm{M}}, l\right),$$
$$\operatorname{cn}\left(\frac{x+2\mathrm{K}}{\mathrm{M}}, l\right)=(-1)^{a+b}\operatorname{cn}\left(\frac{x}{\mathrm{M}}, l\right),$$
$$\operatorname{dn}\left(\frac{x+2\mathrm{K}}{\mathrm{M}}, l\right)=(-1)^b\operatorname{dn}\left(\frac{x}{\mathrm{M}}, l\right),$$

puis

$$\operatorname{sn}\left(\frac{x+2i\mathrm{K}'}{\mathrm{M}}, l\right)=(-1)^c\operatorname{sn}\left(\frac{x}{\mathrm{M}}, l\right),$$
$$\operatorname{cn}\left(\frac{x+2i\mathrm{K}'}{\mathrm{M}}, l\right)=(-1)^{c+d}\operatorname{cn}\left(\frac{x}{\mathrm{M}}, l\right),$$
$$\operatorname{dn}\left(\frac{x+2i\mathrm{K}'}{\mathrm{M}}, l\right)=(-1)^d\operatorname{dn}\left(\frac{x}{\mathrm{M}}, l\right).$$

Cela étant, la recherche des formules de transformation repose en entier sur les propriétés de la fonction

$$\Phi(x)=\Theta\left(\frac{x}{\mathrm{M}}, l\right)e^{\frac{i\pi b x^2}{4\mathrm{KLM}}},$$

qui consistent dans les relations suivantes

$$\Phi(x+2\mathrm{K}) \quad = (-1)^{(a+1)b}\,\Phi(x),$$
$$\Phi(x+2i\mathrm{K}') = (-1)^{(c+1)d}\,\Phi(x)\,e^{-\frac{in\pi(x+i\mathrm{K}')}{\mathrm{K}}}.$$

Ce sont aussi ces égalités dont je ferai usage pour l'objet de cette Note, et j'indiquerai d'abord une méthode facile pour y parvenir.

Je remarque, à cet effet, qu'ayant

$$\Theta\left(\frac{x}{\mathrm{M}},\ l\right) = \sum (-1)^m e^{\frac{i\pi m x}{\mathrm{LM}} - \frac{\pi m^2 \mathrm{L}'}{\mathrm{L}}},$$
$$(m = 0,\quad \pm 1,\quad \pm 2,\quad \ldots),$$

nous pouvons écrire

$$\Phi(x) = \sum (-1)^m e^{i\pi\varphi(x,\,m)},$$

si l'on pose, pour abréger,

$$\varphi(x, m) = \frac{bx^2}{4\mathrm{KLM}} + \frac{mx}{\mathrm{LM}} + \frac{im^2\mathrm{L}'}{\mathrm{L}}.$$

Remplaçons maintenant dans le dernier terme $i\mathrm{L}'$ par la valeur tirée de la première des équations (A) : on obtient ainsi

$$\varphi(x, m) = \frac{bx^2}{4\mathrm{KLM}} + \frac{mx}{\mathrm{LM}} + \frac{m^2(\mathrm{K} - a\mathrm{LM})}{b\mathrm{LM}}$$

ou bien

$$\varphi(x, m) = \frac{(bx + 2m\mathrm{K})^2}{4b\mathrm{KLM}} - \frac{m^2 a}{b}.$$

De cette nouvelle expression résulte immédiatement que l'on a

$$\varphi(x + 2\mathrm{K}, m) = \varphi(x, m + b) + (2m + b)\,a;$$

le changement de x en $x + 2\mathrm{K}$ se trouve donc ramené à celui de m en $m + b$ qui peut toujours se faire dans une série s'étendant à toutes les valeurs de l'entier m. Nous parvenons de cette manière, en ayant égard au facteur $(-1)^m$, à la première des égalités à démontrer.

La seconde découle de l'identité

$$\varphi(x, m) + \frac{nx^2}{4i\mathrm{KK}'} = \frac{(dx + 2im\mathrm{K}')^2}{4id\mathrm{K}'\mathrm{LM}} - \frac{m^2 c}{d};$$

on l'établit en transformant comme il suit la quantité

$$\varphi(x, m) + \frac{nx^2}{4iKK'} = \frac{ibK' + nLM}{4iKK'LM}x^2 + \frac{mx}{LM} + \frac{im^2L}{L}.$$

Je tire d'abord des équations (A), par l'élimination de L', cette expression

$$ibK' + nLM = dK,$$

au moyen de laquelle le premier terme devient $\frac{dx^2}{4iK'LM}$; je remplace ensuite, dans le dernier terme, iL' par la valeur tirée de la seconde de ces égalités. Nous obtenons ainsi

$$\varphi(x, m) + \frac{nx^2}{4iKK'} = \frac{dx^2}{4iK'LM} + \frac{mx}{LM} + \frac{m^2(iK' - cLM)}{dLM},$$

ce qui démontre le résultat annoncé. On en conclut, comme tout à l'heure,

$$\Phi(x + 2iK')e^{\frac{n(x+2iK')^2}{4iKK'}} = (-1)^{(c+1)d}\,\Phi(x)e^{\frac{nx^2}{4iKK'}}$$

et, en simplifiant,

$$\Phi(x + 2iK') = (-1)^{(c+1)d}\,\Phi(x)e^{-\frac{ni\pi(x+iK')}{K}}:$$

c'est la relation qu'il s'agissait de démontrer.

De là résulte immédiatement que, si l'on pose

$$\operatorname{sn}\left(\frac{x}{M}, l\right) = \frac{\Pi(x)}{\Phi(x)},$$
$$\operatorname{cn}\left(\frac{x}{M}, l\right) = \frac{\Pi_1(x)}{\Phi(x)},$$
$$\operatorname{dn}\left(\frac{x}{M}, l\right) = \frac{\Phi_1(x)}{\Phi(x)},$$

les fonctions holomorphes $\Pi(x)$, $\Pi_1(x)$, $\Phi_1(x)$ satisfont à des relations analogues, et il s'ensuit que les quatre quotients

$$P(x) = \frac{\Pi(x)}{\Theta^n(x)},$$
$$Q(x) = \frac{\Pi_1(x)}{\Theta^n(x)},$$
$$R(x) = \frac{\Phi_1(x)}{\Theta^n(x)},$$
$$S(x) = \frac{\Phi(x)}{\Theta^n(x)}$$

vérifient les égalités suivantes, qui sont d'une grande importance :

$$\begin{aligned}
P(x+2K) &= (-1)^{ab+a+b}P(x),\\
P(x+2iK') &= (-1)^{cd+c+d+n}P(x),\\[1ex]
Q(x+2K) &= (-1)^{ab+a}Q(x),\\
Q(x+2iK') &= (-1)^{cd+c+n}Q(x),\\[1ex]
R(x+2K) &= (-1)^{ab}R(x),\\
R(x+2iK') &= (-1)^{cd+n}R(x),\\[1ex]
S(x+2K) &= (-1)^{ab+b}S(x),\\
S(x+2iK') &= (-1)^{cd+d+n}S(x).
\end{aligned}$$

Ces quantités sont donc des fonctions doublement périodiques ayant un pôle unique $x = iK'$, et, sauf un facteur constant qui reste indéterminé, elles s'expriment sous forme entière au moyen de $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$ (1). Nous en donnerons une expression différente qui s'obtient, en introduisant les fonctions de M. Weierstrass, définies par les relations

$$\begin{aligned}
\mathrm{Al}(x) &= \frac{\Theta(x)}{\Theta(0)}e^{-\frac{Jx^2}{2K}},\\
\mathrm{Al}(x)_1 &= \frac{H(x)}{H'(0)}e^{-\frac{Jx^2}{2K}},\\
\mathrm{Al}(x)_2 &= \frac{H_1(x)}{H_1(0)}e^{-\frac{Jx^2}{2K}},\\
\mathrm{Al}(x)_3 &= \frac{\Theta_1(x)}{\Theta_1(0)}e^{-\frac{Jx^2}{2K}}.
\end{aligned}$$

La constante J désigne dans ces formules l'intégrale complète de seconde espèce, et l'on a, comme on sait,

$$J = \int_0^K k^2 \operatorname{sn}^2 x\, dx.$$

Posons, afin de passer au module l,

$$J_1 = \int_0^L l^2 \operatorname{sn}^2(x, l)\, dx,$$

(1) *Cours d'Analyse*, p. 281.

nous pourrons écrire

$$\mathrm{Al}\left(\frac{x}{\mathrm{M}}, l\right) = \frac{\Theta\left(\frac{x}{\mathrm{M}}, l\right)}{\Theta(0, l)} e^{-\frac{\mathrm{J}_1 x^2}{2\mathrm{LM}^2}}.$$

Soit enfin

$$\text{(B)} \qquad \mathrm{N} = \frac{\mathrm{J}_1}{\mathrm{LM}^2} - \frac{n\mathrm{J}}{\mathrm{K}} + \frac{i\pi b}{2\mathrm{KLM}},$$

au lieu du quotient $\frac{\Phi(x)}{\Theta^n(x)}$, on sera amené, en déterminant par la condition $\mathrm{S}(0) = 1$ le facteur arbitraire qui entre dans $\mathrm{S}(x)$, à la nouvelle formule

$$\mathrm{S}(x) = \frac{\mathrm{Al}\left(\frac{x}{\mathrm{M}}, l\right)}{\mathrm{Al}^n(x)} e^{\frac{\mathrm{N}x^2}{2}},$$

et les relations

$$\operatorname{sn} x = \frac{\mathrm{Al}(x)_1}{\mathrm{Al}(x)},$$

$$\operatorname{cn} x = \frac{\mathrm{Al}(x)_2}{\mathrm{Al}(x)},$$

$$\operatorname{dn} x = \frac{\mathrm{Al}(x)_3}{\mathrm{Al}(x)}$$

nous donneront pareillement

$$\mathrm{P}(x) = \frac{\mathrm{Al}\left(\frac{x}{\mathrm{M}}, l\right)_1}{\mathrm{Al}^n(x)} e^{\frac{\mathrm{N}x^2}{2}},$$

$$\mathrm{Q}(x) = \frac{\mathrm{Al}\left(\frac{x}{\mathrm{M}}, l\right)_2}{\mathrm{Al}^n(x)} e^{\frac{\mathrm{N}x^2}{2}},$$

$$\mathrm{R}(x) = \frac{\mathrm{Al}\left(\frac{x}{\mathrm{M}}, l\right)_3}{\mathrm{Al}^n(x)} e^{\frac{\mathrm{N}x^2}{2}}.$$

La quantité N qui est mise en évidence dans ces expressions me semble appeler l'attention et avoir dans la théorie de la transformation un rôle important. Aux équations algébriques entre k et l, entre le multiplicateur M et le module doivent, en effet, s'ajouter celles qu'on peut former entre N et k; j'ai essayé d'ouvrir la voie à ces nouvelles recherches par les remarques qui vont suivre.

En premier lieu, j'établirai les relations entre les deux fonctions complètes de seconde espèce, qui correspondent aux égalités

$$\frac{K}{M} = aL + ibL',$$
$$\frac{iK'}{M} = cL + idL'.$$

Je remarque d'abord que, si l'on pose $ad - bc = n$, on en déduit

$$nL = \frac{dK - ibK'}{M},$$
$$inL' = \frac{-cK + iaK'}{M}.$$

de sorte qu'en tirant de l'équation (B)

$$\frac{J_1}{M} = \frac{nJLM}{K} - \frac{i\pi b}{2K} + LMN,$$

nous trouvons

$$\frac{J_1}{M} = \left(d - \frac{ibK'}{K}\right)J - \frac{i\pi b}{2K} + (dK - ibK')\frac{N}{n}.$$

J'introduis maintenant la seconde fonction complète de seconde espèce en employant la relation

$$J'K - JK' = \frac{\pi}{2};$$

je remplace, à cet effet, $\frac{\pi}{2K}$ par $J' - \frac{JK'}{K}$, et il vient, après une réduction facile,

$$\frac{J_1}{M} = dJ - ibJ' + (dK - ibK')\frac{N}{n}.$$

C'est la première relation que je voudrais obtenir; une autre semblable, qui concerne $\frac{J'_1}{M}$, se conclut de l'égalité

$$J'_1 L - J_1 L' = \frac{\pi}{2},$$

d'où l'on tire

$$\frac{J'_1}{M} = \frac{J_1 L'}{LM} + \frac{\pi}{2LM},$$

en éliminant J_1 au moyen de l'équation (B). Nous substituerons donc la valeur

$$\frac{J_1}{LM} = \frac{nJM}{K} + MN - \frac{i\pi b}{2KL},$$

ce qui donne

$$\frac{J'_1}{M} = \frac{nL'JM}{K} + LMN + \frac{\pi}{2LM} - \frac{i\pi b L'}{2KL}.$$

Cela étant, si l'on écrit d'abord

$$\frac{\pi}{2LM} - \frac{i\pi b L'}{2KL} = \frac{\pi(K - ibL'M)}{2KLM}$$

et qu'ensuite on remplace $K - ibL'M$ par aLM, et $L'M$ par $\frac{-cK + iaK'}{in}$, cette expression devient

$$\begin{aligned}\frac{iJ'_1}{M} &= \left(-c + \frac{iaK'}{K}\right)J + (-cK + iaK')\frac{N}{n} + \frac{ia\pi}{2K}\\ &= -cJ + ia\left(\frac{JK'}{K} + \frac{\pi}{2K}\right) + (-cK + iaK')\frac{N}{n}\end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$\frac{iJ'_1}{M} = -cJ + iaJ' + (-cK + iaK')\frac{N}{n}.$$

Il importe d'observer que dans ces résultats la quantité N, comme nous allons l'établir, est une fonction algébrique du module. Considérons, pour en donner un exemple, le cas simple de la transformation du second ordre; au théorème II du § 37 des *Fundamenta,* qu'en remplaçant q par q^2, les quantités k, K et K′ deviennent $\frac{1-k'}{1+k'}$, $\frac{1+k'}{2}K$, $(1+k')K'$, nous ajouterons que J et J′ se changent en $\frac{1}{1+k'}J - \frac{1}{2}(1-k')K$ et $\frac{1}{1+k'}J - (1-k')K$.

On remarquera encore que les relations auxquelles nous venons de parvenir peuvent être présentées sous une forme plus simple; en se rappelant qu'on a posé $ad - bc = n$, on en déduit aisément les égalités

$$(\mathrm{C})\qquad \begin{cases} \dfrac{aJ_1 + ibJ'_1}{M} = nJ + KN,\\[2ex] \dfrac{cJ_1 + idJ'_1}{M} = inJ' + iK'N,\end{cases}$$

dont nous allons montrer les conséquences.

Multiplions la première par J′, la seconde par J, et retranchons membre à membre, on obtiendra d'abord cette nouvelle expression de N, à savoir

$$\frac{\pi}{2}\mathrm{N} = \frac{1}{\mathrm{M}}[\mathrm{J}'(a\mathrm{J}_1 + ib\mathrm{J}'_1) + i\mathrm{J}(c\mathrm{J}_1 + id\mathrm{J}'_1)]$$

$$= \frac{1}{\mathrm{M}}[a\mathrm{J}'\mathrm{J}_1 - d\mathrm{J}\mathrm{J}'_1 + i(b\mathrm{J}'\mathrm{J}'_1 - c\mathrm{J}\mathrm{J}_1)],$$

où n'entrent que les intégrales complètes de seconde espèce.

Soient ensuite

$$\mathrm{U} = a\mathrm{L} + ib\mathrm{L}',$$

$$\mathrm{V} = a\mathrm{J}_1 + ib\mathrm{J}_1,$$

on a ces deux relations

$$ll'^2\frac{d\mathrm{U}}{dl} = l^2\mathrm{U} - \mathrm{V},$$

$$ll'^2\frac{d\mathrm{V}}{dl} = l^2(\mathrm{U} - \mathrm{V}),$$

que je vais employer pour différentier, par rapport à k, l'égalité $\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{M}} = a\mathrm{L} + ib\mathrm{L}'$ ou bien $\mathrm{K} = \mathrm{MU}$.

Nous trouvons ainsi

$$(k^2\mathrm{K} - \mathrm{J})\frac{dk}{kk'^2} = \mathrm{U}\,d\mathrm{M} + \mathrm{M}(l^2\mathrm{U} - \mathrm{V})\frac{dl}{ll'^2};$$

cela étant, j'exprime au moyen de J et K le second membre, en remplaçant U et V par les valeurs

$$\mathrm{U} = \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{M}},$$

$$\mathrm{V} = \mathrm{M}(n\mathrm{J} + \mathrm{KN}).$$

Ce calcul nous donne

$$(k^2\mathrm{K} - \mathrm{J})\frac{dk}{kk'^2} = \frac{\mathrm{K}\,d\mathrm{M}}{\mathrm{M}} + [l^2\mathrm{K} - \mathrm{M}^2(n\mathrm{J} + \mathrm{KN})]\frac{dl}{ll'^2},$$

ce qui est une relation linéaire homogène entre J et K. On aurait évidemment le même résultat en J′ et K′, en posant

$$\mathrm{U} = c\mathrm{L} + id\mathrm{L}',$$

$$\mathrm{V} = c\mathrm{J} + id\mathrm{J}',$$

pour différentier l'égalité $i\mathrm{K}' = \mathrm{M}(c\mathrm{L} + id\mathrm{L}')$; il faut donc que les coefficients de J et K soient séparément nuls, le déterminant $J'K - JK'$ étant différent de zéro. Nous avons, par conséquent,

$$\frac{dk}{kk'^2} = n\mathrm{M}^2 \frac{dl}{ll'^2},$$

$$\frac{k\,dk}{k'^2} = \frac{d\mathrm{M}}{\mathrm{M}} + \frac{l\,dl}{l'^2} - \mathrm{M}^2\mathrm{N}\frac{dl}{ll'^2}.$$

La première de ces relations a été découverte par Jacobi et donnée dans le § 32 des *Fundamenta;* on sait qu'elle est d'une importance capitale dans la théorie de la transformation. Elle permet d'écrire la seconde sous la forme

$$\frac{k\,dk}{k'^2} = \frac{d\mathrm{M}}{\mathrm{M}} + \frac{l\,dl}{l'^2} - \frac{\mathrm{N}\,dk}{nkk'^2},$$

et nous en tirons l'expression suivante qui est purement algébrique, comme nous l'avons annoncé,

$$\mathrm{N} = nkk'^2\mathrm{D}_k \log \frac{\mathrm{M}k'}{l'};$$

je vais en faire quelques applications.

Je considère d'abord le cas de la transformation du second ordre où l'on a

$$l = \frac{2\sqrt{k}}{1+k},$$

$$\mathrm{M} = \frac{1}{1+k}.$$

On en conclut aisément

$$\left(\frac{\mathrm{M}k'}{l'}\right)^2 = \frac{1+k}{1-k};$$

nous avons donc

$$\mathrm{D}_k \log \frac{\mathrm{M}k'}{l'} = \frac{1}{k'^2},$$

ce qui donne immédiatement

$$\mathrm{N} = 2k.$$

En passant au cas de $n = 3$, j'emploierai les expressions des deux modules et du multiplicateur qu'obtient Jacobi dans le § 13 des *Fundamenta,* à savoir

$$k^2 = \frac{(2+\alpha)\alpha^3}{1+2\alpha},$$

$$l^2 = \frac{(2+\alpha)^3\alpha}{(1+2\alpha)^3},$$

$$M = \frac{1}{1+2\alpha}.$$

On en tire d'abord, par un calcul facile,

$$k'^2 = \frac{(1-\alpha^2)(1+\alpha)^2}{1+2\alpha},$$

$$l'^2 = \frac{(1-\alpha^2)(1-\alpha)^2}{(1-2\alpha)^3},$$

d'où

$$\frac{k'}{l'} = \frac{(1+\alpha)(1+2\alpha)}{1-\alpha}$$

et, par conséquent,

$$\frac{Mk'}{l'} = \frac{1+\alpha}{1-\alpha}.$$

Ayant ainsi la formule

$$N = 3kk'^2 \frac{d\log\dfrac{1+\alpha}{1-\alpha}}{dk},$$

nous écrirons d'abord

$$N = 6kk'^2 \frac{d\alpha}{dk}\,\frac{1}{1-\alpha^2}.$$

En remarquant ensuite que l'on a

$$3kk'^3\frac{d\alpha}{dk} = (1-\alpha^2)(2\alpha+\alpha^2),$$

nous parvenons à l'expression suivante

$$N = 2(2\alpha+\alpha^2).$$

On en conclut, si l'on résout par rapport à α,

$$\alpha = -1 + \sqrt{1+\tfrac{1}{2}N},$$

et, en substituant dans la valeur de k^2, on trouve l'équation entre N et k^2, à laquelle nous voulions parvenir, à savoir

$$\left(\frac{N}{2}\right)^4 - 6k^2\left(\frac{N}{2}\right)^2 - (4k^2 + 4k^4)\frac{N}{2} - 3k^4 = 0.$$

Nous rapprocherons ce résultat de la formule

$$\operatorname{sn} 3x = \frac{3 - (4 + 4k^2)\operatorname{sn}^2 x + 6k^2 \operatorname{sn}^4 x - k^4 \operatorname{sn}^8 x}{1 - 6k^2 \operatorname{sn}^4 x + (4k^2 + 4k^4)\operatorname{sn}^6 x - 3k^4 \operatorname{sn}^8 x};$$

en considérant le numérateur, elle fait voir sur-le-champ que l'on a

$$N = -2k^2 \operatorname{sn}^2 \frac{2m\mathrm{K} + 2ni\mathrm{K}'}{3},$$

m et n étant deux entiers quelconques.

EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE A M. HERMITE,

PAR M. BRIOSCHI.

Rome, 4 décembre 1892.

Voici quelques réflexions relatives à la quantité N, qui découlent de votre relation

$$N = nkk'^2 D_k \log \frac{Mk'}{l'}.$$

Soit, en supposant n impair,

$$x = \sqrt{k}\operatorname{sn}(u, k), \qquad y = \sqrt{l}\operatorname{sn}\left(\frac{u}{M}, l\right),$$

on a

$$y = \frac{U}{V}$$

ou

$$U = x\left(Bx^{n-1} + B_1 x^{n-3} + \ldots + B_{\frac{n-3}{2}} x + B_{\frac{n-1}{2}}\right),$$
$$V = B + B_1 x^2 + \ldots + B_{\frac{n-3}{2}} x^{n-3} + B_{\frac{n-1}{2}} x^{n-1}.$$

On sait que

$$B = \sqrt{\frac{\lambda'}{Mk'}};$$

par conséquent votre valeur de N peut s'écrire

$$N = -2nkk'D_k \log B.$$

Mais de l'équation aux différences partielles de Jacobi, à laquelle satisfont U et V, on tire

$$N = 2k\frac{B_1}{B};$$

de là résulte l'expression

$$N = -2k^2 \Sigma \operatorname{sn}^2(2s\omega, k)$$

$$\left(s = 1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}\right),$$

où j'ai fait

$$\omega = \frac{mK + m'iK'}{n}.$$

Dans mon travail [*Die Auflösung der Gleichungen von fünften Graden* (*Mathematische Annalen,* t. XIII, p. 111)], j'avais considéré les équations en $\frac{B_1}{B} = \nu$.

J'en ai donné deux, pour $n = 3$,

$$\nu^4 - 6\nu^2 - 4\frac{1+k^2}{k}\nu - 3 = 0;$$

c'est la vôtre, pour $n = 5$,

$$\nu^6 - 60\nu^4 - 160\alpha\nu^3 - 80(1 + 2\alpha^2)\nu^2 - 64\alpha(\alpha^2 + 2)\nu^2 - 80\alpha^2 = 0.$$

En posant $\alpha = \frac{1+k^2}{k}$, et par la méthode que j'ai indiquée, on calculerait facilement d'autres cas. Mais ces équations en ν n'ont pas la propriété caractéristique de celles que j'ai nommées *jacobiennes*.