

# ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

A. PARAF

## Sur le problème de Dirichlet et son extension au cas de l'équation linéaire générale du second ordre

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 1<sup>re</sup> série, tome 6, n<sup>o</sup> 3 (1892), p. H25-H75*

[http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_1892\\_1\\_6\\_3\\_H25\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1892_1_6_3_H25_0)

© Université Paul Sabatier, 1892, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

croissants et tendant uniformément vers  $\psi$  dans toute la région  $T$ . Appelons

$$U_1, U_2, \dots, U_n, \dots$$

les valeurs de ces polynômes sur  $s$ . Ces fonctions  $U_n$  sont croissantes et tendent uniformément vers  $U$ .

Nous savons alors résoudre le problème de Dirichlet pour chacune des valeurs

$$U_1, U_2, \dots, U_n, \dots$$

de la fonction donnée sur le contour, et nous trouvons une suite

$$V_1, V_2, \dots, V_n, \dots$$

de fonctions harmoniques dans  $S$ . Nous montrerons que ces fonctions  $V_n$  tendent vers une limite  $V$  qui est la fonction cherchée.

Rappelons à cet effet que, d'après un théorème de M. Picard (¹), on peut toujours trouver un polynôme  $F(x, y)$  qui représente, avec une erreur moindre qu'un nombre  $\epsilon$  donné d'avance, une fonction  $\psi(x, y)$  arbitrairement définie dans une aire  $T$  et assujettie à la seule condition d'être continue.

Soit alors  $\psi(x, y)$  une fonction continue définie dans l'aire  $T$  et se réduisant à  $U$  sur les lignes  $s$ . Appelons  $M$  et  $m$  ses limites supérieure et inférieure dans  $T$ . Nous pouvons toujours supposer  $\psi$  positive ; dans le cas contraire, il suffirait de raisonner sur la fonction  $\psi + C$ ,  $C$  désignant une constante convenable.

Soient  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  une suite infinie de nombres positifs, croissants et tendant vers l'unité, et posons

$$\lambda_{i+1} - \lambda_i = \delta_i$$

en supposant encore  $\delta_i > \delta_{i+1}$ .

Toutes ces conditions seront réalisées en prenant, par exemple,

$$\lambda_i = 1 - \frac{1}{2^i}.$$

Considérons enfin la suite de fonctions continues, positives, croissantes,

(¹) *Comptes rendus*, t. CXII, et *Traité d'Analyse*, t. I, p. 262.

et tendant vers  $\psi$

$$\lambda_1\psi, \lambda_2\psi, \dots, \lambda_n\psi, \dots$$

et construisons le polynôme  $F_i(x, y)$  qui représente  $\lambda_i\psi$  avec une erreur moindre que  $\frac{1}{2}\delta_i m$ .

Ces polynômes  $F_i$  forment une suite croissante, car on a

$$\begin{aligned} F_{i+1} &> \lambda_{i+1}\psi - \frac{1}{2}\delta_{i+1}m, \quad F_i < \lambda_i\psi + \frac{1}{2}\delta_i m, \\ F_{i+1} - F_i &> \lambda_{i+1}\psi - \lambda_i\psi - \frac{1}{2}(\delta_i + \delta_{i+1})m > \delta_i m - \frac{1}{2}(\delta_i + \delta_{i+1})m > 0. \end{aligned}$$

Les  $F_i$  forment donc une suite croissante qui tend uniformément vers  $\psi$ . Si donc on appelle  $U_i$  la valeur de  $F_i$  sur  $s$ , les  $U_i$  forment aussi une suite croissante tendant uniformément vers  $U$ .

Maintenant, nous savons, au moyen de chaque fonction  $F_i$ , construire une fonction  $V_i$  harmonique dans  $S$  et se réduisant à  $U_i$  sur  $s$ .

Ces fonctions  $V_i$  forment aussi une suite croissante, puisque la différence  $V_{i+1} - V_i$ , qui est harmonique dans  $S$ , prend sur  $s$  les valeurs positives  $U_{i+1} - U_i$ .

D'ailleurs  $V_i$  est toujours inférieur à  $M$ , puisqu'il en est de même de  $U_i$ .

Les fonctions  $V_i$  ont donc une limite  $V$ . Je dis que  $V$  est la fonction cherchée.

Considérons, en effet, la série convergente

$$V = V_1 + (V_2 - V_1) + (V_3 - V_2) + \dots + (V_n - V_{n-1}) + \dots$$

Chaque terme de la série est harmonique dans  $S$ , et le terme général  $V_n - V_{n-1}$  tend vers  $U_n - U_{n-1}$ , quand le point mobile se rapproche du contour.

D'ailleurs la série de ces valeurs au contour

$$U_1 + (U_2 - U_1) + (U_3 - U_2) + \dots + (U_n - U_{n-1}) + \dots$$

converge uniformément vers  $U$  sur tout le contour.

Donc, d'après le second théorème de Harnack, la fonction  $V$  est harmonique dans  $S$  et tend vers  $U$  sur  $s$ . c. q. f. d.

10. Jusqu'à présent, nous avons supposé que le contour  $s$  avait en chaque point une tangente bien déterminée et dont la direction variait d'une manière continue. Nous allons voir que la même méthode donne encore la solution du problème dans le cas où, en un nombre limité de points, la direction de la tangente varie brusquement d'un angle fini.

Soit  $M$  un point de  $s$  où il existe deux tangentes. Nous appellerons *angle de ces tangentes* et nous désignerons par  $\alpha\pi$  l'angle dont il faut faire tourner la tangente à l'un des arcs issus de  $M$  pour l'amener à coïncider avec la tangente au second arc *en balayant l'intérieur de  $S$* . Cet angle est toujours compris entre  $0$  et  $2\pi$  et peut d'ailleurs atteindre ces limites.

Ainsi, par exemple, cet angle est inférieur à  $\pi$  dans les *fig. 4 et 5* et supérieur à  $\pi$  dans les *fig. 6 et 7*.

Fig. 4.

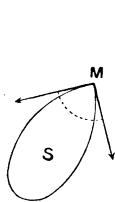


Fig. 5.

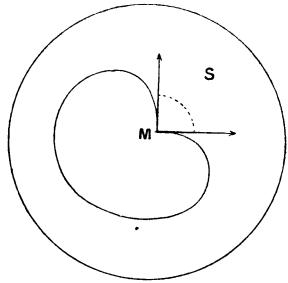


Fig. 6.

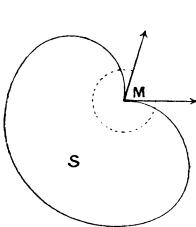
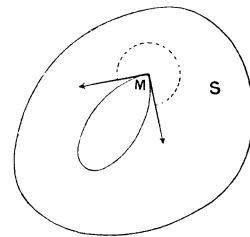


Fig. 7.



A quel moment la méthode pourrait-elle cesser d'être applicable ? Nous pourrons toujours encore construire les cercles  $C_i$ , définir un potentiel  $W_0$ , balayer les cercles  $C_i$ . En tout point non singulier de  $s$ , nous pouvons encore construire un cercle tangent extérieurement, et, par suite, nous savons encore que la méthode conduit dans tous les cas à une fonction  $V$  harmonique dans  $S$  et tendant vers  $U$  quand le point mobile  $x, y$  se rapproche d'un point quelconque *non singulier* de  $s$ . La seule question qui reste douceuse est donc de savoir si cette dernière propriété subsiste encore en un point tel que  $M$ .

Or la chose est d'abord évidente pour un point anguleux pour lequel on a

$$0 \leq \alpha \leq \pi;$$

car on peut toujours, en un tel point, construire un cercle passant par  $M$  et tout entier extérieur à  $S$ . Le raisonnement général reste donc applicable.

Mais nous ne pourrons plus construire ce cercle en un point  $M$  pour lequel on aurait

$$\pi < \alpha \leq 2\pi.$$

On ramènerait facilement ce cas au cas précédent, au moins tant que l'on ne rencontrera pas en un sommet deux arcs présentant un contact d'ordre

supérieur au premier, en combinant convenablement un nombre fini d'inversions et de transformations conformes du type

$$Z = (z - z_0)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Mais le procédé suivant semble plus élégant et, en outre, aura l'avantage de s'appliquer quel que soit l'ordre des contacts.

Soient  $u$  et  $v$  deux variables complexes dans des plans différents, et considérons les deux relations concordantes

$$u = v + \sqrt{v^2 - c^2}, \quad v = \frac{u^2 + c^2}{2u}.$$

Soient  $F$  et  $F'$  les points  $v = +c$ ,  $v = -c$ .

Il est facile de voir que, par cette transformation, l'aire comprise dans le plan des  $u$  entre deux cercles ayant pour centre l'origine et pour rayons des longueurs  $R$  et  $R'$  supérieures à  $c$  sera représentée d'une manière conforme sur l'aire comprise, dans le plan des  $v$ , entre deux ellipses de foyers  $F$  et  $F'$ . Si le plus petit rayon  $R'$  tend vers  $c$ , l'ellipse intérieure s'aplatira indéfiniment et aura pour limite le segment  $FF'$ . En d'autres termes, étant donnée l'aire doublement connexe comprise entre une ellipse et le segment  $FF'$  considéré comme une ellipse infiniment aplatie, nous savons en faire la représentation conforme sur une couronne circulaire convenablement choisie, et, par suite, nous savons résoudre le problème de Dirichlet pour cette aire elliptique.

Revenons alors à la méthode de M. Poincaré. Nous avons vu que, dans tous les cas, elle conduit à une fonction  $V$  harmonique dans l'aire et tendant vers  $U$  toutes les fois que le point mobile tend vers un point du contour qui n'est pas un point singulier d'angle supérieur à  $\pi$ . Il nous restait à examiner ce qui se passe en ces derniers points.

Si l'on a  $\alpha < 2$ , ou si,  $\alpha$  étant égal à 2, les deux branches de courbe sont de part et d'autre de la tangente, on pourra toujours, à partir du point  $M$ , tracer un petit segment rectiligne  $MM'$  tout entier extérieur à l'aire. De  $M$  et  $M'$  comme foyers décrivons une ellipse intérieure à  $T$  mais comprenant  $S$  tout entière à son intérieur. Nous avons ainsi formé une aire elliptique doublement connexe qui peut remplacer la couronne circulaire dont nous nous sommes servi jusqu'à présent. La suite des raisonnements n'est pas changée, et la proposition que nous avions en vue est démontrée.

Si, au contraire, les deux branches de courbe sont d'un même côté de la tangente, il faudra modifier légèrement la méthode. Quel que soit l'ordre de leur contact, on pourra toujours tracer un arc de courbe analytique  $MM'$  circulant entre les deux branches de courbe et tout entier extérieur à l'aire. La portion du plan voisine de cet arc <sup>(1)</sup> pourra être représentée sur le plan de manière que l'arc  $MM'$  se transforme en un segment rectiligne  $FF'$ . De  $F$  et  $F'$  comme foyers, traçons alors une petite ellipse située tout entière dans la portion du plan où la transformation est valable. A cette ellipse correspond dans l'ancien plan une petite courbe fermée  $\sigma$  qui est en partie intérieure et en partie extérieure à  $S$ . Nous avons ainsi défini une petite aire  $\Sigma$  doublement connexe, limitée par la courbe  $\sigma$  et la coupure curviligne  $MM'$ , pour laquelle nous savons résoudre le problème de Dirichlet, puisque  $\Sigma$  est représentable sur une couronne circulaire.

Cela posé, rappelons-nous que l'existence de la fonction  $W$  est démontrée pour l'aire  $T$  tout entière. A l'extérieur de  $S$  elle est égale à  $W_0$ . A l'intérieur de  $S$ , elle est harmonique et tend vers  $W_0$  quand le point mobile se rapproche d'un point non singulier du contour. Formons alors une fonction  $\omega$ , harmonique dans  $\Sigma$ , prenant sur  $\sigma$  les mêmes valeurs que  $W$ , et sur  $MM'$  les mêmes valeurs que  $W_0$ , et considérons, comme au n° 8, la différence

$$F = W_n - \omega.$$

On démontrera, comme à cet endroit, que  $F$  ne peut avoir de minimum en aucun point de  $\Sigma$ . D'ailleurs  $F$  est positive ou nulle sur tout le contour de  $\Sigma$ . On a donc, dans  $\sigma$ ,

$$W_n > \omega,$$

quel que soit  $n$ , et, par suite,

$$W_n > W > \omega.$$

On voit alors, comme au n° 8, que  $W$  tend vers  $W_0$ , même au point  $M$ .

La méthode réussit donc pleinement, quelle que soit la nature des pointes que peut présenter le contour.

---

<sup>(1)</sup> Voir, par exemple, J. RIEMANN, *loc. cit.*, Chap. III.



## CHAPITRE II.

L'ÉQUATION  $\Delta u = f(x, y)$ .

1. L'équation  $\Delta u = f(x, y)$  se présente naturellement après celle que nous venons d'étudier. Elle en est même inséparable, car son intégration se ramène, comme nous allons voir, au problème de Dirichlet. Nous nous proposons de montrer que l'on peut trouver une fonction  $u$ , finie et continue dans une aire donnée  $S$  ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres, vérifiant l'équation proposée, et prenant sur le contour  $s$  de  $S$  des valeurs données d'avance. La fonction  $f(x, y)$  qui figure dans le second membre sera supposée continue dans  $S$ , et, de plus, nous supposerons qu'elle admet dans cette région des dérivées partielles du premier ordre continues.

Il est d'abord évident qu'il ne peut exister deux fonctions  $u$  et  $u'$  satisfaisant aux conditions énoncées, car leur différence  $u - u'$  satisferait évidemment à l'équation de Laplace et s'annulerait sur  $s$ .

Elle serait donc identiquement nulle.

La solution est donc unique, si toutefois elle existe.

Soient encore  $u$  et  $v$  deux fonctions vérifiant l'équation. On aura de nouveau

$$u - v = \theta,$$

$\theta$  étant harmonique dans  $S$ . Si  $v$  s'annule sur le contour  $s$ ,  $\theta$  prendra sur  $s$  la même succession de valeurs que  $u$ . Notre problème sera donc complètement résolu si nous trouvons une intégrale  $v$  de l'équation s'annulant sur le contour, car, pour achever la solution, il suffira de résoudre le problème de Dirichlet pour l'aire  $S$  et la succession donnée  $U$  de valeurs sur le contour. Soit  $\theta$  la fonction harmonique ainsi déterminée, alors

$$u = v + \theta$$

sera la solution du problème proposé.

Il nous reste donc seulement à trouver la fonction  $v$ .

2. Nous y arriverons aisément par l'emploi de la fonction connue sous le nom de *fonction de Green*, et dont voici la définition. Elle est harmonique dans  $S$ , excepté en un seul point  $P$  où elle devient infinie comme  $\log \frac{1}{r}$ ,  $r$  désignant la distance du point mobile  $xy$  au point  $P$ . De plus, elle s'annule sur le contour.

Il existe évidemment une fonction, et une seule, répondant à ces conditions.

Formons, en effet, une fonction  $\omega$  harmonique dans  $S$  et prenant sur  $s$  les mêmes valeurs que  $\log \frac{1}{r}$ . Alors la différence

$$(1) \quad G(x, y; a, b) = \log \frac{1}{r} - \omega$$

sera la fonction cherchée (nous désignons par  $a, b$  les coordonnées du point  $P$ ). Il ne peut en exister une seconde, car on voit sans peine que la différence de deux fonctions  $G$  serait identiquement nulle.

Pour abréger, nous appellerons  $P$  le pôle de la fonction de Green, comme le font plusieurs auteurs, bien que ce mot soit employé avec une autre acceptation dans la théorie des fonctions d'une variable <sup>(1)</sup>.

La fonction de Green jouit de l'importante propriété exprimée par l'égalité suivante

$$(2) \quad G(a, b; a_1, b_1) = G(a_1, b_1; a, b).$$

On le démontre en entourant chacun des deux points  $ab, a_1b_1$  d'un petit cercle, et appliquant à l'aire  $\Sigma$ , qui résulte de  $S$  par la suppression des aires de ces deux petits cercles, la formule de Green

$$\iint_{\Sigma} [U \Delta V - V \Delta U] d\Sigma + \int_{\sigma} \left( U \frac{dV}{dn} - V \frac{dU}{dn} \right) d\sigma = 0,$$

dans laquelle on fera

$$U = G(x, y; a, b), \quad V = G(x, y; a_1, b_1).$$

Rappelons que, dans l'application de cette formule, les dérivées  $\frac{d}{dn}$  sont

---

(1) Cf. HARNACK, *loc. cit.*

prises dans la direction de la normale intérieure à l'aire  $\Sigma$ , et que chaque courbe du contour est parcourue dans le sens direct relatif à cette courbe prise isolément. Je n'insiste pas sur cette démonstration qui est classique (¹).

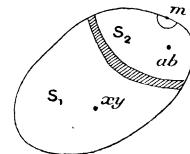
Il en résulte que si, laissant fixe le point  $xy$ , nous considérons le pôle  $ab$  comme variable, les fonctions  $G(a, b)$  et  $\omega(a, b)$  seront harmoniques, la première dans  $S$  sauf au point  $xy$ , la seconde dans toute l'étendue de  $S$ .

Par suite aussi,  $xy$  restant fixe,  $G(a, b)$  tendra vers 0 quand  $ab$  tendra vers un point du contour.

Nous allons présenter ces conséquences sous une forme un peu différente qui nous sera utile plus loin.

Détachons de  $S$  (fig. 8) une bande mince, mais d'épaisseur finie, qui

Fig. 8.



décompose  $S$  en deux parties séparées  $S_1$  et  $S_2$ , et supposons que  $xy$  soit mobile dans  $S_1$  et  $ab$  dans  $S_2$ .

$G(x, y; a, b)$  deviendra alors une fonction continue des quatre paramètres  $x, y, a, b$  et, d'après un théorème général, cette fonction sera *uniformément* continue dans les conditions où nous sommes placé. Autrement dit, à tout nombre  $\epsilon$  on pourra faire correspondre un nombre  $\rho$  tel, que si l'on considère deux cercles de rayon  $\rho$  n'empiétant pas sur la bande mince et ayant pour centres l'un un point quelconque de  $S_1$ , l'autre un point quelconque de  $S_2$ , la variation de  $G$  sera inférieure à  $\epsilon$  tant que  $xy$  ne sortira pas du premier cercle et  $ab$  du second.

Si donc nous prenons un point  $m$  sur la partie de  $s$  qui appartient à  $S_2$ , comme centre d'un arc de cercle de rayon  $\rho$ , et si  $ab$  ne sort pas de ce petit cercle, on aura

$$G(x, y; a, b) < \epsilon,$$

(¹) Voir, par exemple, RIEMANN : *Schwere, Elektricität und Magnetismus*.

quel que soit  $x, y$  dans  $S_1$ , puisque l'on a rigoureusement  $G(x, y; a, b) = 0$ , quel que soit  $x, y$  dans  $S_1$  quand  $a, b$  est au point  $m$  lui-même.

Dans la dernière inégalité, nous avons écrit  $G$  et non pas  $|G|$ , parce que la fonction de Green est toujours positive.

3. Proposons-nous maintenant de trouver l'intégrale continue  $\nu$  qui s'anule sur le contour de  $S$ .

Soit  $a, b$  un point quelconque intérieur à  $S$ . Entourons ce point d'un petit cercle  $c$  et considérons l'aire  $S'$  limitée par  $s$  et  $c$ . Soit  $G(x, y; a, b)$  la fonction de Green relative au point  $a, b$ .

Les deux fonctions  $\nu$  et  $G$  sont, par hypothèse, finies et continues, ainsi que leurs dérivées des deux premiers ordres dans l'aire  $S'$ . On peut donc leur appliquer la formule de Green relativement à cette aire

$$\iint_{S'} (\nu \Delta G - G \Delta \nu) dx dy + \int_s \left( \nu \frac{dG}{dn} - G \frac{d\nu}{dn} \right) ds + \int_c \left( \nu \frac{dG}{dn} - G \frac{d\nu}{dn} \right) dc = 0.$$

Or  $\Delta G$  est nul dans  $S'$ , quelque petit que soit  $c$ . La première intégrale se réduit donc à  $-\iint_s G \Delta \nu dx dy$ . Mais on a  $\Delta \nu = f(x, y)$ , et l'intégrale  $\iint_c f(x, y) G dx dy$  tend vers 0 quand  $c$  tend lui-même vers 0, comme on le voit en employant des coordonnées polaires et remarquant que le produit  $r G$  tend vers 0 avec  $r$ . La première intégrale tend donc vers une limite finie et déterminée

$$-\iint_s f(x, y) G(x, y, a, b) dx dy$$

quand le cercle  $c$  tend vers 0.

La seconde intégrale, relative au contour  $s$ , est nulle, puisque  $\nu$  et  $G$  sont nuls sur  $s$  (<sup>1</sup>).

La troisième intégrale peut s'écrire de la façon suivante :

$$\int_c \nu \frac{d \log \frac{1}{r}}{dn} dc - \int_c \left( \nu \frac{d\omega}{dn} + G \frac{d\nu}{dn} \right) dc,$$

---

(<sup>1</sup>) Ceci suppose, à la vérité, que  $\frac{d\nu}{dn}$  reste finie en tous les points du contour; mais nous verrons que tel est le cas.

en tenant compte de la définition de  $G$ . D'ailleurs,

$$\frac{d \log \frac{1}{r}}{dn} = -\frac{1}{r} \frac{dr}{dn} = -\frac{1}{r}.$$

On a donc

$$\int_c v \frac{d \log \frac{1}{r}}{dn} dc = - \int_0^{2\pi} v d\theta,$$

et cette intégrale a pour limite  $-2\pi v(a, b)$ .

L'intégrale  $\int_c \left( v \frac{d\omega}{dn} + G \frac{dv}{dn} \right) dc$  tend évidemment vers 0.

On a donc finalement

$$(3) \quad v(a, b) = -\frac{1}{2\pi} \iint_S f(x, y) G(x, y; a, b) dx dy,$$

et nous avons ainsi la valeur de la fonction cherchée au point  $a, b$ .

Mais nous l'avons obtenue en supposant qu'il existe effectivement une fonction  $v$ , ce qui n'est nullement évident. Il faut donc démontrer inversement que la fonction  $v$ , définie par l'équation précédente (3), satisfait aux conditions suivantes :

Elle est continue dans  $S$ ;

Elle y admet des dérivées du premier ordre continues;

Elle y admet des dérivées du second ordre continues;

Elle vérifie l'équation  $\Delta v = f(x, y)$ ;

Elle s'annule sur le contour.

C'est ce que nous allons faire maintenant.

4. Le premier point demande à peine une démonstration. Traçons autour de  $a, b$  un petit cercle  $c$ . Soient  $S_1$  la partie de l'aire extérieure à ce cercle,  $S_2$  l'intérieur de ce cercle.

L'intégrale relative à  $S_1$  est évidemment continue tant que  $a, b$  reste dans le cercle. L'intégrale  $S_2$  peut être rendue aussi petite que l'on veut, puisqu'elle tend vers 0 avec le rayon du cercle. L'intégrale totale est donc une fonction continue de  $a, b$ .

Le second point est un peu plus délicat. Bien que l'intégrale

$$-\frac{1}{2\pi} \iint_S f(x, y) \frac{\partial G(x, y, a, b)}{\partial a} dx dy$$

ait une valeur finie et déterminée, comme on le voit en employant des coordonnées polaires, il n'est pas certain qu'elle représente  $\frac{\partial v}{\partial a}$ , car nous ne sommes pas dans les conditions où l'on peut, sans crainte, différentier sous le signe sommatoire.

Il est donc nécessaire de montrer que l'on a bien

$$\begin{aligned} & \lim_{\delta a \rightarrow 0} \iint f(x, y) \frac{G(x, y, a + \delta a, b) - G(x, y, a, b)}{\delta a} dx dy \\ &= \iint f(x, y) \frac{\partial}{\partial a} G(x, y, a, b) dx dy. \end{aligned}$$

Décrivons un petit cercle  $c$  (<sup>1</sup>) contenant, dans son intérieur, les deux points  $a, b$  et  $a + \delta a, b$ . Soit  $S_1$  la partie de  $S$  extérieure à ce cercle.

L'égalité précédente est vraie certainement pour l'aire  $S_1$ , car la fonction  $G$  et sa dérivée sont continues dans  $S_1$ .

D'ailleurs, l'intégrale  $\iint_{S_1} f(x, y) \frac{\partial}{\partial a} G(x, y, a, b) dx dy$  tend vers une limite quand le rayon du cercle  $c$  tend vers 0, car l'intégrale

$$\iint_c f(x, y) \frac{\partial G}{\partial a} dx dy$$

tend vers 0 avec  $c$ . Elle peut s'écrire, en effet,

$$\iint_c f(x, y) \frac{x - a}{r^2} dx dy - \iint_c f(x, y) \frac{\partial \omega}{\partial a} dx dy,$$

et la chose devient alors évidente si l'on emploie des coordonnées polaires.

Il reste donc seulement à montrer que l'intégrale

$$\iint_c f(x, y) \frac{G(a + \delta a, b) - G(a, b)}{\delta a} dx dy$$

tend vers zéro avec le rayon du cercle  $c$ , et il suffira de démontrer ceci en remplaçant  $G$  par  $\log \frac{1}{r}$ .

Appelons  $r$  et  $r'$  les distances de  $x, y$  à  $a, b$  et à  $a + \delta a, b$ .

---

(<sup>1</sup>) Cf. BOUQUET, cité par M. Picard, *Traité d'Analyse*, t. I.

Dans le triangle ayant pour sommets ces trois points, on a toujours

$$|r - r'| < |\delta\alpha|.$$

Élevons sur le milieu de  $a, b; a + \delta\alpha, b$  une perpendiculaire qui divise  $c$  en deux parties  $T_1$  et  $T_2$ .

Dans  $T_1$ , on a  $r < r'$ ; dans  $T_2$ , on a  $r > r'$ .

Considérons d'abord l'intégrale étendue à  $T_1$

$$\int \int_{T_1} f(x, y) \frac{\log \frac{1}{r'} - \log \frac{1}{r}}{\delta\alpha} dx dy.$$

On a, dans  $T_1$ ,

$$\log \frac{1}{r'} - \log \frac{1}{r} = \log \frac{r}{r'} = \log \left( 1 - \frac{r' - r}{r'} \right) = - \left[ \frac{r' - r}{r'} + \frac{1}{2} \left( \frac{r' - r}{r'} \right)^2 + \dots \right],$$

développement possible, puisque  $r$  est plus petit que  $r'$ .

Or la série entre crochets est inférieure à la progression géométrique dont la raison est  $\frac{r' - r}{r'}$  et qui a pour somme

$$\frac{r' - r}{r'} : \left( 1 - \frac{r' - r}{r'} \right) = \frac{r' - r}{r}.$$

On a donc

$$\left| \frac{1}{\delta\alpha} \left( \log \frac{1}{r'} - \log \frac{1}{r} \right) \right| < \frac{r' - r}{r} \frac{1}{|\delta\alpha|} < \frac{1}{r}.$$

L'intégrale  $\int \int_{T_1} f(x, y) \frac{\log \frac{1}{r'} - \log \frac{1}{r}}{\delta\alpha} dx dy$  a donc un module plus petit que  $\int \int_{T_1} f(x, y) dr d\theta$ , c'est-à-dire plus petit que  $2\pi MD$ , en appelant  $M$  le maximum du module de  $f(x, y)$  dans  $c$  et  $D$  le diamètre de  $c$ .

On répéterait la même démonstration pour l'aire  $T_2$ .

Il résulte de là que l'intégrale relative au cercle  $c$  peut être rendue aussi petite que l'on veut. On a donc bien

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = -\frac{1}{2\pi} \int \int_S f(x, y) \frac{\partial G}{\partial \alpha} dx dy,$$

et cette dérivée est une fonction continue, puisque nous avons vu que l'in-

tégrale du second membre, étendue seulement au cercle  $c$ , peut être rendue aussi petite que l'on veut.

5. Si maintenant nous passons aux dérivées secondes, le même raisonnement ne sera plus applicable, car l'intégrale

$$\iint_S f(x, y) \frac{\partial^2 G}{\partial a^2} dx dy$$

n'a plus de sens. Un artifice est nécessaire; nous l'empruntons à Riemann (<sup>1</sup>). Partons de l'expression obtenue

$$-2\pi \frac{\partial \nu}{\partial a} = \iint_S f(x, y) \frac{\partial}{\partial a} \log \frac{1}{r} dx dy - \iint_S f(x, y) \frac{\partial \omega}{\partial a} dx dy.$$

La seconde intégrale admet des dérivées de tous les ordres.

Pour transformer la première, remarquons que l'on a

$$\frac{\partial}{\partial a} \log \frac{1}{r} = -\frac{\partial}{\partial x} \log \frac{1}{r}.$$

Cette substitution permettra d'intégrer par parties. Mais, pour plus de rigueur, commençons par séparer de  $S$  un petit cercle  $c$  comprenant le point A, et soit  $S'$  l'aire ainsi obtenue. On a alors

$$\begin{aligned} \iint_S f(x, y) \frac{\partial}{\partial a} \log \frac{1}{r} dx dy &= - \iint_{S'} f(x, y) \frac{\partial}{\partial x} \log \frac{1}{r} dx dy \\ &= - \int_{s+c} f(x, y) \log \frac{1}{r} dy + \iint_S \frac{\partial f}{\partial x} \log \frac{1}{r} dx dy, \end{aligned}$$

l'intégrale curviligne est prise positivement sur le contour total de  $S'$  et peut s'écrire

$$+ \int_s f(x, y) \log \frac{1}{r} \cos \alpha ds + \int_c f(x, y) \log \frac{1}{r} \cos \alpha dc.$$

Dans ces deux intégrales,  $\alpha$  désigne l'angle de la normale intérieure à  $S'$  avec l'axe des  $x$ , et chaque courbe doit être décrite, en ayant à gauche l'aire enveloppée par la courbe.

---

(<sup>1</sup>) RIEMANN-HATTENDORF, *Schwere, Elektricität und Magnetismus*.

Si maintenant on fait décroître le rayon du cercle  $c$ , les intégrales doubles relatives à  $S'$  tendent vers les intégrales relatives à  $S$ , parce que les mêmes intégrales, étendues au cercle  $c$ , sont infiniment petites.

L'intégrale relative à  $s$  ne change pas, et celle qui est relative à  $c$  tend vers 0. On a donc, en toute rigueur,

$$\iint_S f(x, y) \frac{\partial}{\partial \alpha} \log \frac{1}{r} dx dy = + \int_s f(x, y) \log \frac{1}{r} \cos \alpha ds + \iint_S \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \log \frac{1}{r} dx dy$$

et enfin

$$(4) \quad \begin{aligned} 2\pi \frac{\partial \varphi}{\partial a} &= - \int_s f(x, y) \log \frac{1}{r} \cos \alpha ds \\ &\quad - \iint_S \frac{\partial f}{\partial x} \log \frac{1}{r} dx dy + \iint_S f(x, y) \frac{\partial \omega}{\partial a} dx dy. \end{aligned}$$

On aura de même

$$(5) \quad \begin{aligned} 2\pi \frac{\partial \varphi}{\partial b} &= - \int_s f(x, y) \log \frac{1}{r} \sin \alpha ds \\ &\quad - \iint_S \frac{\partial f}{\partial y} \log \frac{1}{r} dx dy + \iint_S f(x, y) \frac{\partial \omega}{\partial b} dx dy. \end{aligned}$$

On voit bien maintenant que  $\varphi$  admet des dérivées partielles du second ordre, car les trois intégrales admettent des dérivées du premier ordre, et il est clair que, si  $f(x, y)$  admet des dérivées jusqu'à l'ordre  $n$ ,  $\varphi$  admettra des dérivées jusqu'à l'ordre  $n + 1$ .

Nous pouvons, au moyen de ces expressions, former  $\Delta \varphi$ . Il vient

$$(6) \quad \begin{aligned} 2\pi \Delta \varphi &= + \int_s f(x, y) \frac{d}{dn} \log \frac{1}{r} ds \\ &\quad + \iint_S \left( \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial y} \right) dx dy + \iint_S f(x, y) \Delta \omega dx dy. \end{aligned}$$

[Nous avons mis le signe (+) devant les deux premières intégrales, parce que nous avons remplacé sous le signe  $\int$  les dérivées en  $a$  et  $b$  par des dérivées en  $x$  et  $y$ .]

La troisième intégrale est nulle, parce que  $\Delta \omega = \frac{\partial^2 \omega}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial b^2} = 0$ .

Mais cette expression va se simplifier bien davantage.

Reprenons l'aire  $S'$  dans laquelle les fonctions  $f$  et  $\log \frac{1}{r}$  sont continues, ainsi que leurs dérivées premières. On aura, d'après une formule de Green,

$$\begin{aligned} & \iint_{S'} f(x, y) \Delta \log \frac{1}{r} dx dy \\ &= - \int_{s+c} f(x, y) \frac{d}{dn} \log \frac{1}{r} ds - \iint_{S'} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial y} \right) dx dy. \end{aligned}$$

D'ailleurs,  $\Delta \log \frac{1}{r} = 0$  dans  $S'$ . On a donc

$$0 = \int_s f \frac{d}{dn} \log \frac{1}{r} ds + \int_c f \frac{d}{dn} \log \frac{1}{r} dc + \iint_{S'} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial y} \right) dx dy.$$

Si maintenant nous faisons décroître indéfiniment le rayon de  $c$ , la première de ces intégrales ne change pas, la seconde tend vers une limite qui est évidemment  $-2\pi f(a, b)$ , et la troisième tend vers  $\iint_{S'}$ . On a donc

$$(7) \quad \int_s f(x, y) \frac{d}{dn} \log \frac{1}{r} ds + \iint_{S'} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \log \frac{1}{r}}{\partial y} \right) dx dy = 2\pi f(a, b).$$

Ajoutant membre à membre les équations (6) et (7), il vient

$$\Delta \varphi = f(a, b);$$

$\varphi$  est donc bien solution de l'équation proposée.

6. Il nous reste enfin à faire voir que, quand  $x, y$  tend vers un point du contour,  $\varphi$  tend vers 0.

Remarquons à cet effet que, si nous appelons  $D$  la plus grande corde du contour et  $\frac{1}{2}M$  la plus grande des deux quantités  $\frac{1}{e}$  et  $D \left| \log \frac{1}{D} \right|$ , on aura toujours

$$0 < r \leq M.$$

En effet, le produit  $r \log \frac{1}{r}$ , quand  $r$  varie de 0 à 1, part de 0 pour revenir à 0 en passant par un maximum égal à  $\frac{1}{e}$ . Si  $D$  est  $> 1$  et que  $r$  continue à

varier de  $i$  à  $D$ , le produit devient négatif, et son module croît de 0 à

$$D \left| \log \frac{i}{D} \right|.$$

Or la fonction  $G$  est, comme on sait, toujours positive. Si l'on pose

$$G = \log \frac{i}{r} - \omega,$$

on aura toujours

$$\omega < \log \frac{i}{r}.$$

De plus, la plus grande valeur négative de  $\omega$  sur le contour est certainement inférieure en valeur absolue à  $\left| \log \frac{i}{D} \right|$ , d'après la définition de  $\omega$ .

On a donc certainement et toujours

$$-\left| \log \frac{i}{D} \right| < \omega < \log \frac{i}{r},$$

$$-r \left| \log \frac{i}{D} \right| < r\omega < r \log \frac{i}{r}$$

et *a fortiori*

$$-D \left| \log \frac{i}{D} \right| < r\omega < r \log \frac{i}{r}.$$

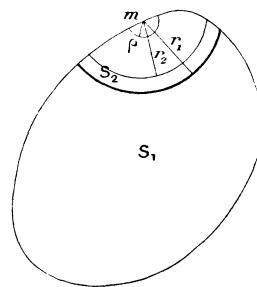
Donc, enfin,

$$-\frac{M}{2} < r\omega < \frac{M}{2},$$

$$rG < M.$$

Cela posé, soit  $m$  (fig. 9) un point du contour. De ce point comme centre,

Fig. 9.



avec des rayons  $r_1$  et  $r_2$  ( $r_1 > r_2$ ), décrivons des arcs de cercle qui vont découper dans  $S$  une bande annulaire d'épaisseur  $r_1 - r_2$ . Plaçons le point  $a, b$

à l'intérieur de  $r_2$  et partageons l'intégrale en deux parties, l'une relative à l'extérieur  $S_1$  de  $r_1$ , l'autre à son intérieur  $S_2$ .

Nous avons vu au n° 2 qu'on peut décrire de  $m$  comme centre un cercle de rayon  $\rho$  assez petit, pour que,  $a, b$  étant à l'intérieur de ce cercle et  $x, y$  dans  $S_1$ , on ait toujours  $G < \varepsilon$ .

Si donc  $F$  désigne le module maximum de  $f(x, y)$  dans  $S$ , et si  $A$  désigne l'aire totale  $S$ , l'intégrale relative à  $S_1$  aura un module inférieur à

$$\frac{1}{2\pi} FA\varepsilon.$$

Quant à l'intégrale relative à  $S_2$ , son module reste inférieur à

$$\frac{1}{2\pi} FM 2\pi 2r_1 = 2FMr_1.$$

On a donc, tant que  $a, b$  reste dans le cercle  $\rho$ ,

$$|\varphi| < \frac{1}{2\pi} FA\varepsilon + 2FMr_1.$$

$A, F$  et  $M$  sont des quantités fixes,  $\varepsilon$  et  $r_1$  sont arbitraires et peuvent être choisis aussi petits que nous voulons. Le théorème est donc démontré.

7. Nous avons démontré plus haut que la fonction  $\varphi$  admet des dérivées des deux premiers ordres continues dans  $S$ . Il est intéressant de savoir si ces dérivées tendent vers des valeurs finies et déterminées quand le point mobile se rapproche d'un point du contour. C'est là un fait que nous avons admis implicitement au n° 3, au moins pour les dérivées du premier ordre. Bien qu'une démonstration rigoureuse de ce point ne soit pas nécessaire pour l'objet que nous avons en vue, puisque nous avons vérifié après coup que la fonction  $\varphi$  répond bien à la question, il peut être intéressant d'être fixé à ce sujet.

Nous ne procéderons pas directement, à cause des difficultés que présente l'emploi de la fonction  $G$  et de ses dérivées lorsque le pôle et l'argument tendent simultanément vers un point du contour, et nous traiterons d'abord le problème suivant :

*Que devient la fonction  $\varphi$  si l'on suppose que  $f(x, y)$ , satisfaisant encore, en général, aux conditions du problème précédent, admette un*

segment AB de l'axe des  $x$  comme ligne singulière, sur les deux bords de laquelle la fonction  $f$  et ses dérivées premières prennent des valeurs différentes, mais finies et déterminées.

On voit tout d'abord que les raisonnements des n° 4 et 6 subsistent entièrement. La fonction  $\varphi$  définie par la formule (3) est encore continue dans  $S$ , y admet des dérivées premières continues et tend vers 0 sur le contour. Mais le n° 5 doit être modifié.

Repronons la formule

$$-2\pi \frac{\partial \varphi}{\partial a} = \iint f(x, y) \frac{\partial}{\partial a} \log \frac{1}{r} dx dy - \iint f(x, y) \frac{\partial \omega}{\partial a} dx dy.$$

L'axe des  $x$  partage  $S$  en deux parties,  $S_1$  et  $S_2$ . Supposons, par exemple,  $a, b$  dans  $S_1$ . On aura

$$\begin{aligned} -2\pi \frac{\partial \varphi}{\partial a} &= \iint_{S_1} f(x, y) \frac{\partial}{\partial a} \log \frac{1}{r} dx dy \\ &\quad + \iint_{S_2} f(x, y) \frac{\partial}{\partial a} \log \frac{1}{r} dx dy - \iint_S f(x, y) \frac{\partial \omega}{\partial a} dx dy. \end{aligned}$$

On peut appliquer à la première de ces intégrales la transformation du n° 5 et le même résultat sera atteint pour la seconde au moyen d'une simple intégration par parties. On aura donc

$$\begin{aligned} -2\pi \frac{\partial \varphi}{\partial a} &= \int_{s_1} f(x, y) \log \frac{1}{r} \cos \alpha ds_1 + \int_{s_2} f(x, y) \log \frac{1}{r} \cos \alpha ds_2 \\ &\quad + \iint_{S_1} \frac{\partial f}{\partial x} \log \frac{1}{r} dx dy + \iint_{S_2} \frac{\partial f}{\partial x} \log \frac{1}{r} dx dy - \iint_S f(x, y) \frac{\partial \omega}{\partial a} dx dy. \end{aligned}$$

Il ne faut pas oublier que, dans les intégrales simples,  $ds$  est toujours pris positivement, et  $\alpha$  est l'angle fait avec l'axe des  $x$  par la normale *intérieure* à l'aire considérée.

Si l'on remarque que  $s_1$  et  $s_2$  ont en commun le segment AB, il vient

$$\begin{aligned} -2\pi \frac{\partial \varphi}{\partial a} &= \int_S f(x, y) \log \frac{1}{r} \cos \alpha ds \\ &\quad + \int_{AB} (f_1 - f_2) \log \frac{1}{r} \cos \alpha ds + \iint_{S_1} + \iint_{S_2} - \iint_S. \end{aligned}$$

Dans la seconde de ces intégrales,  $f_1$  et  $f_2$  sont les valeurs que prend

$f(x, y)$  en deux points infiniment voisins du point  $(x, 0)$ , mais situés, le premier dans  $S_1$  et le second dans  $S_2$ .  $\alpha$  est relatif à la normale intérieure à  $S_1$ .

On a, de même,

$$-2\pi \frac{\partial \varphi}{\partial b} = \int_s f(x, y) \log \frac{1}{r} \sin \alpha \, ds + \int_{AB} (f_1 - f_2) \log \frac{1}{r} \sin \alpha \, ds + \iint_{S_1} \frac{\partial f}{\partial y} \log \frac{1}{r} \, dx \, dy + \iint_{S_2} - \iint_S \cdot$$

Toutes ces intégrales, sauf peut-être celles qui sont relatives à  $AB$ , admettent des dérivées continues quand le point  $a, b$  tend vers un point de  $AB$ .

L'intégrale  $\int_{AB}$  qui figure dans  $\frac{\partial \varphi}{\partial a}$  est identiquement nulle, puisque  $\cos \alpha = 0$  sur  $AB$ . Il en résulte déjà que  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial a^2}$  et  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial a \partial b}$  existent et sont continues, même quand  $a, b$  traverse  $AB$ .

Reste seulement à examiner l'intégrale suivante

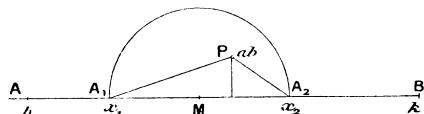
$$H = \int_{AB} (f_1 - f_2) \frac{\partial}{\partial b} \log \frac{1}{r} \sin \alpha \, ds = - \int_{AB} (f_1 - f_2) \frac{b \, ds}{r^2},$$

$$r^2 = (x - a)^2 + b^2, \quad ds = dx,$$

$$H = - \int_{AB} (f_1 - f_2) \frac{b \, dx}{b^2 + (x - a)^2}.$$

Soit  $M$  (fig. 10) le point de  $AB$  vers lequel tend  $a, b$ . Décrivons de ce

Fig. 10.



point comme centre un demi-cercle  $A_1, A_2$  dans lequel  $a, b$  va rester en tenant vers  $M$ ,

$$H = - \int_a^{x_1} (f_1 - f_2) \frac{b \, dx}{b^2 + (x - a)^2}$$

$$- \int_{x_1}^{x_2} (f_1 - f_2) \frac{b \, dx}{b^2 + (x - a)^2} - \int_a^b (f_1 - f_2) \frac{b \, dx}{b^2 + (x - a)^2}.$$

La première et la troisième intégrale tendent évidemment vers des limites finies quand  $a, b$  tend vers  $M$ , le cercle restant fixe.

Quant à la seconde, elle tend aussi vers une limite, puisque l'on a

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{b \, dx}{b^2 + (x - a)^2} = \arctan \frac{x_2 - a}{b} - \arctan \frac{x_1 - a}{b} = \arctan A_1 P A_2$$

dont la limite est  $\pi$ .

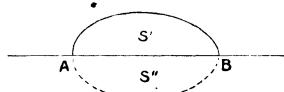
Ainsi  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial b^2}$  tend vers une limite finie et déterminée quand  $a, b$  tend vers un point  $M$  de  $a, b$ . Mais cette limite est différente suivant que  $a, b$  tend vers  $M$  par  $S_1$  ou par  $S_2$ .

Si l'on voulait étudier  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial a \partial b}$  en partant de  $\frac{\partial \varphi}{\partial b}$ , le même raisonnement ne serait pas immédiatement applicable, parce que l'on aurait à considérer une intégrale qui n'est pas *absolument* convergente. On surmonterait cette petite difficulté en se rappelant que  $f_1 - f_2$  admet par hypothèse des dérivées premières. Mais ce calcul est inutile, puisque nous avons déjà constaté la continuité de  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial a \partial b}$ .

En résumé, les dérivées du premier ordre sont continues dans toute l'étendue de  $S$ . Il en est de même de  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial a^2}$  et  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial a \partial b}$ , mais  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial b^2}$  éprouve un saut brusque en traversant la ligne singulière.

Cela posé, revenons à la question qui fait l'objet de ce paragraphe, et supposons d'abord qu'une portion  $AB$  (fig. 11) de l'axe des  $x$  fasse partie

Fig. 11.



du contour  $s$ . Joignons  $A$  et  $B$  par un trait continu ne se coupant pas et détachant de  $S$  une aire  $S'$  simplement connexe et tout entière au-dessus de l'axe des  $x$ . Appelons  $S''$  l'aire symétrique de  $S'$  par rapport à  $AB$ .

Nous pouvons toujours former une fonction  $\theta$  harmonique dans  $S'$  et prenant sur le contour de  $S'$  les mêmes valeurs que  $\varphi$ . La différence  $w = \varphi - \theta$  joue alors pour  $S'$  le même rôle que  $\varphi$  pour  $S$ . Définissons main-

tenant dans  $S''$  une fonction que nous appellerons encore  $f(x, y)$  et qui prendra en chaque point de  $S''$  une valeur égale et de signe contraire à celle que prenait  $f(x, y)$  au point symétrique dans  $S'$ . Nous avons ainsi une fonction  $f(x, y)$  définie dans l'aire  $\Sigma = S' + S''$  et admettant la droite  $AB$  pour ligne singulière.

Il existe donc une fonction  $W$ , continue ainsi que ses dérivées premières dans toute l'étendue de  $\Sigma$ , admettant dans  $S'$  et dans  $S''$  des dérivées secondes continues (<sup>1</sup>), et satisfaisant dans chacune de ces régions à l'équation  $\Delta W = f(x, y)$ . De plus,  $W$  s'annule sur le contour de  $\Sigma$  et est donnée par la formule

$$W = -\frac{1}{2\pi} \iint_{\Sigma} f(x, y) G(x, y; a, b) dx dy.$$

Mais il est clair que  $W$  s'annule en tous les points  $a, b$  de l'axe des  $x$ , car, alors, en deux points symétriques,  $G$  prend la même valeur et  $f$  change seulement de signe, de sorte que les éléments de l'intégrale se détruisent deux à deux.

$W$  s'annule donc sur le contour de  $S'$  et coïncide, par suite, avec  $\varphi$  dans l'aire  $S'$ . Or les dérivées des deux premiers ordres de  $W$  sont continues dans toute l'étendue de  $S'$  et sur  $AB$ . Il en est donc de même pour  $\varphi$ ; et comme la fonction harmonique  $\theta$  jouit de la même propriété, la chose se trouve ainsi démontrée pour  $\varphi$ .

Ce résultat s'étend immédiatement au cas où le segment rectiligne  $AB$  est remplacé par un arc régulier  $AB$  de ligne analytique. Formons, comme précédemment, une aire simplement connexe  $S'$  détachée de  $S$  par une ligne analytique intérieure allant de  $A$  à  $B$ , et déterminons la fonction  $\theta$  relative à cette aire. La différence  $\varphi = \varphi - \theta$  joue le rôle de  $\varphi$  par rapport à  $S'$ .

Effectuons alors la représentation de  $S'$  sur un demi-cercle dont le diamètre correspondra à l'arc  $AB$  du contour primitif. Comme  $S'$  est limitée par des lignes analytiques, la fonction de transformation et ses dérivées resteront continues et déterminées, même au delà de ce contour. D'ailleurs, par cette transformation, l'équation

$$\Delta \varphi = f(x, y)$$

---

(<sup>1</sup>) Et tendant vers des valeurs déterminées, mais distinctes, quand le point mobile tend vers l'axe des  $x$  en restant dans  $S_1$  ou dans  $S_2$ .

va devenir

$$\Delta\omega' = \mathbf{F}(x', y'),$$

$\mathbf{F}(x', y')$  étant le produit de ce que devient  $f(x, y)$  par un facteur indépendant de  $\omega$  et dépendant seulement de la fonction de transformation. Or, à l'égard de la fonction  $\omega'$ , définie dans l'aire  $S'$ , transformée de  $S$ , tout ce qui a été dit plus haut est applicable. Ses dérivées restent donc continues jusque sur le contour de  $S'$ . Le même résultat subsiste donc dans l'aire  $S$  pour la fonction  $\omega$ , et, par suite, pour la fonction  $\varphi$ .

Il est donc établi que les dérivées des deux premiers ordres de  $\varphi$  restent continues sur tout arc analytique régulier du contour de  $S$ .

---

## CHAPITRE III.

## L'ÉQUATION LINÉAIRE GÉNÉRALE.

1. Nous allons maintenant considérer l'équation générale (¹)

$$(1) \quad A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2D \frac{\partial u}{\partial x} + 2E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0,$$

dans laquelle les coefficients  $A, B, \dots$  désignent des fonctions de  $x$  et  $y$  qui, dans une région  $R$  du plan, sont finies, continues, bien déterminées, et admettent des dérivées partielles également continues des deux premiers ordres.

On peut se proposer à l'égard de cette équation un problème analogue à celui de Dirichlet, et chercher une fonction  $u$  admettant, dans une aire  $S$  intérieure à  $R$ , des dérivées continues des deux premiers ordres, vérifiant l'équation (1) et se réduisant sur le contour  $s$  à une fonction arbitrairement donnée d'avance. Nous n'arriverons pas, sans doute, à résoudre ce problème aussi complètement que celui de Dirichlet, mais nous donnerons des conditions suffisantes, sinon nécessaires, pour qu'il existe une telle solution et qu'il n'en existe qu'une.

Nous allons, avant tout, ramener cette équation (1) à une forme plus simple qui facilitera cette recherche.

Substituons d'abord aux variables  $x$  et  $y$  de nouvelles variables  $X$  et  $Y$  au moyen des formules

$$X = \varphi(x, y), \quad Y = \psi(x, y),$$

dont le déterminant ne devra s'annuler en aucun point de  $S$ .

L'équation va devenir

$$(2) \quad A' \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + 2B' \frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} + C' \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} + 2D' \frac{\partial u}{\partial X} + 2E' \frac{\partial u}{\partial Y} + F' u = 0,$$

---

(¹) *Voir* plus loin pour le cas d'un second membre.

et l'on aura

$$\begin{aligned} A' &= A \left( \frac{\partial X}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial X}{\partial y} + C \left( \frac{\partial X}{\partial y} \right)^2 \\ C' &= A \left( \frac{\partial Y}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial Y}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial y} + C \left( \frac{\partial Y}{\partial y} \right)^2 & F' = F. \\ B' &= A \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial x} + B \left( \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial y} \frac{\partial Y}{\partial x} \right) + C \frac{\partial X}{\partial y} \frac{\partial Y}{\partial y} \end{aligned}$$

Or il est facile de voir que, par la même substitution, la forme quadratique

$$A dy^2 - 2B dx dy + C dx^2$$

se transforme identiquement en

$$A' dY^2 - 2B' dX dY + C' dX^2,$$

à un facteur près, toujours positif, et qui n'est jamais nul ni infini.

Il résulte de là que pour ramener les termes du second ordre dans notre équation à la forme

$$A' \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + 2B' \frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} + C' \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2},$$

où  $A', B', C'$  sont choisis arbitrairement, il suffit de chercher la substitution qui donne lieu à l'identité

$$(3) \quad A dy^2 - 2B dx dy + C dx^2 \equiv \rho (A' dY^2 - 2B' dX dY + C' dX^2).$$

Nous sommes donc ramenés au problème des Cartes géographiques, qui exige seulement, comme on sait, l'intégration d'une équation ordinaire du premier ordre, laquelle coïncide ici avec l'équation des caractéristiques de la proposée.

Suivant que ces caractéristiques seront réelles ou imaginaires, c'est-à-dire suivant que  $B^2 - AC$  sera positif ou négatif, nous saurons donc, par une substitution réelle, ramener l'équation à l'un des deux types suivants

$$(4) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} + a \frac{\partial u}{\partial X} + b \frac{\partial u}{\partial Y} + cu = 0,$$

$$(5) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} + a \frac{\partial u}{\partial X} + b \frac{\partial u}{\partial Y} + cu = 0.$$

Dans ces équations, les coefficients sont de même nature que ceux de

l'équation (1). En particulier,  $c$  ne diffère de  $F$  que par un facteur positif qui n'est ni nul ni infini dans toute l'étendue du domaine  $R'$  qui correspond à la partie de l'ancien domaine  $R$  où  $B^2 - AC$  garde un signe constant.

Dans ce qui va suivre, nous nous bornerons à l'étude de l'équation (5).

Le domaine  $R'$  est maintenant celui où les coefficients  $a, b, c$  sont finis et continus avec leurs dérivées des deux premiers ordres; nous n'en sortirons plus désormais, et négligerons par suite de le mentionner, quand nous parlerons de l'équation (5).

2. La première question qui se pose est maintenant la suivante :

Une intégrale est-elle déterminée par ses valeurs le long d'un contour  $s$ ?

Commençons par traiter un cas particulier, en supposant que le coefficient  $c$  soit négatif et non nul dans  $S$  et sur  $s$ . Je dis que dans ce cas il ne pourra y avoir deux intégrales  $u_1$  et  $u_2$  prenant sur  $s$  les mêmes valeurs. Il faut donc faire voir que, si une intégrale  $u = u_1 - u_2$  s'annule sur  $s$ , elle est nécessairement nulle dans  $S$ . Or nous allons voir qu'elle ne peut prendre dans  $S$  aucune valeur positive.

Si la fonction continue  $u$  pouvait prendre dans  $S$  des valeurs positives, elle aurait une certaine limite supérieure  $M$ , positive, qu'elle atteindrait au moins pour un point  $x_0, y_0$  de  $S$ . Donnons alors à  $y$  la valeur fixe  $y_0$  et faisons varier  $x$  de  $x_0 - \varepsilon$  à  $x_0 + \varepsilon$ .

Entre  $x_0 - \varepsilon$  et  $x_0$ , la fonction  $u(x, y_0)$  est croissante ou constante.

Entre  $x_0$  et  $x_0 + \varepsilon$ , la même fonction est décroissante ou constante.

Ainsi, dans le premier intervalle, la dérivée  $\frac{\partial u}{\partial x}$  est positive ou nulle, dans le second elle est négative ou nulle. Elle est donc nulle au point  $x_0, y_0$  et de plus n'est jamais croissante entre  $x_0 - \varepsilon$  et  $x_0 + \varepsilon$ . Donc  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  est au point  $x_0, y_0$  négative ou nulle.

Mêmes raisonnements pour  $\frac{\partial u}{\partial y}$  et  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ .

On a donc au point  $x_0, y_0$

$$u > 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \leq 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \leq 0.$$

Le premier membre de (5) serait alors, pour  $x = x_0$  et  $y = y_0$ , la somme de trois quantités dont aucune ne serait positive et dont la troisième au moins ne serait pas nulle, ce qui est impossible.

Il est donc établi qu'aucune intégrale  $u$  ne peut avoir dans  $S$  un maximum positif, en entendant le mot maximum au sens le plus large, de limite supérieure.

Elle ne peut non plus avoir une limite inférieure négative, comme on le voit en changeant  $u$  en  $-u$ .

Dans tout ceci on n'a pas fait usage des valeurs de  $u$  sur  $s$ .

Nous avons donc établi les résultats suivants :

Quand dans une aire  $S$  le coefficient  $c = \frac{F}{A}$  est constamment négatif et non nul, aucune intégrale continue ne peut avoir de maximum positif ni de limite supérieure positive à l'intérieur de  $S$ , ni de minimum négatif ou de limite inférieure négative.

Si les valeurs sur le contour sont toutes nulles, l'intégrale sera nulle dans l'intérieur de  $S$ .

Si les valeurs sur le contour sont positives ou nulles, la fonction ne deviendra jamais négative et n'aura pas de maximum dans l'aire.

Si les valeurs sur le contour sont négatives ou nulles, la fonction ne sera jamais positive et n'aura pas de minimum.

En tout état de cause, les valeurs positives de la fonction seront inférieures à la plus grande des valeurs positives sur le contour, et les valeurs négatives seront inférieures en valeur absolue à la plus grande valeur négative sur le contour. Ces résultats nous serviront plus tard. Remarquons seulement qu'ils ne sont établis jusqu'à présent que si, dans  $S$ ,  $c$  est négatif et *non nul*.

### 3. Revenons maintenant au cas général, et posons

$$u = zv,$$

$v$  étant la nouvelle fonction inconnue, et  $z$  une fonction que nous laissons arbitraire pour le moment et assujettie seulement à la condition d'admettre des dérivées continues des deux premiers ordres.

L'équation devient alors

$$(6) \quad z \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \left( 2 \frac{\partial z}{\partial x} + az \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left( 2 \frac{\partial z}{\partial y} + bz \right) \frac{\partial u}{\partial y} + v F(z) = 0,$$

en appelant  $F(z)$  le résultat de la substitution de  $z$  à la place de  $u$  dans le premier membre de (5).

A l'intégrale  $u$  de (5) correspond maintenant une intégrale  $\varphi$  de (6) prenant sur le contour les valeurs  $\frac{u}{z}$ .

Si alors on suppose que la fonction  $z$  ait été choisie de telle sorte que dans la région considérée du plan on ait constamment

$$(7) \quad z > 0, \quad \mathbf{F}(z) < 0,$$

les inégalités étant prises au sens précis du mot et excluant l'égalité, alors on retombera sur le cas précédent, et tous les résultats obtenus seront encore applicables au contour  $S$  et à la fonction  $\varphi$ .

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème suivant :

*Dans le voisinage de tout point  $x_0, y_0$ , on peut tracer un domaine  $D$  assez petit pour que, un contour quelconque  $s$  étant tracé dans  $D$ , l'intégrale de (5) soit complètement déterminée par ses valeurs sur  $s$ .*

Il suffit, en effet, de montrer que dans le voisinage de tout point on peut déterminer une fonction  $z$  satisfaisant aux conditions (7). Or ceci est toujours possible et de bien des manières. Posons

$$z = \sin m(x - \alpha),$$

$m$  et  $\alpha$  étant deux constantes indéterminées et  $m > 0$ ;  $z$  sera positif si l'on prend  $m(x - \alpha)$  entre 0 et  $\pi$ .

On a, d'ailleurs,

$$\mathbf{F}(z) = (c - m^2) \sin m(x - \alpha) + m\alpha \cos m(x - \alpha).$$

Pour que  $\mathbf{F}(z)$  soit négatif,  $x$  restant dans l'intervalle déterminé, il suffira de prendre

$$a \cot m(x - \alpha) < \frac{m^2 - c}{m}.$$

Appelons  $A$  le module maximum de  $a$ . L'inégalité peut s'écrire

$$\frac{a}{A} \cot m(x - \alpha) < \frac{m^2 - c}{m A}.$$

Prenons alors pour  $m$  une quantité supérieure à la plus grande valeur positive de  $c$ . Le second membre devient une quantité positive et non nulle

dont j'appelle  $\cot m\alpha_0$  la limite inférieure.  $\alpha_0$  est certainement compris entre 0 et  $\frac{\pi}{2m}$  et différent de ces deux limites.

D'ailleurs, on a

$$\left| \frac{\alpha}{A} \right| < 1.$$

Donc, si l'on prend  $x - \alpha$  entre  $\alpha_0$  et  $\frac{\pi}{m} - \alpha_0$ , l'inégalité sera certainement vérifiée.

En résumé, si l'on trace une bande parallèle aux  $y$  et de largeur égale à  $\frac{\pi}{m} - 2\alpha_0$ , pour tout contour situé tout entier dans cette bande, il ne pourra y avoir deux intégrales prenant les mêmes valeurs le long du contour.

Il est clair que si nous avions pris

$$z = \sin m(\alpha x + \beta y - \gamma),$$

nous serions arrivé à une bande de direction arbitraire.

Le théorème que nous avions en vue est donc démontré en toute rigueur, mais les limites que nous obtenons ainsi sont certainement beaucoup trop resserrées et purement théoriques. On trouvera dans chaque cas particulier des limites beaucoup plus larges en appliquant plus habilement la même méthode.

Voici un ou deux exemples :

Soit l'équation

$$(8) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x} + (1 + e^b) \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{4} u \sin(x - y) = 0,$$

$\alpha$  et  $b$  désignant des fonctions continues quelconques.

Prenons  $z = e^{-\alpha y}$ ,

$$\mathbf{F}(z) = [\alpha^2 - \alpha(1 + e^b) + \frac{1}{4} \sin(x - y)] e^{-\alpha y}.$$

Pour  $\alpha = \frac{1}{2}$ , il vient

$$\mathbf{F}(z) = [-\frac{1}{4} - \frac{1}{2} e^b + \frac{1}{4} \sin(x - y)] e^{-\alpha y}.$$

Les conditions (7) sont ici remplies, quels que soient  $x$  et  $y$ .

Donc, pour un contour quelconque, il ne peut y avoir deux intégrales de

l'équation (8) prenant les mêmes valeurs sur le contour. On remarquera que, dans cet exemple, le coefficient  $c$  n'a pas un signe constant.

Prenons encore un exemple où  $c$  soit positif,

$$(9) \quad \Delta u + k^2 u = 0,$$

$k$  étant une constante, et posons  $z = R^2 - (x - \alpha)^2 - (y - \beta)^2$ ,

$$F(z) = -4 + k^2 R^2 - k^2 [(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2].$$

Si nous prenons  $R < \frac{2}{k}$ , les conditions (7) sont vérifiées à l'intérieur de tout cercle de rayon  $R$ . L'intégrale est donc encore déterminée par ses valeurs sur tout contour dont aucune dimension n'excède  $\frac{4}{k}$ .

Pour la même équation, l'emploi de la fonction  $z = \sin m(\alpha x + \beta y)$  conduirait à une bande de largeur  $\frac{\pi}{k}$  et de direction arbitraire.

4. Une dernière application de la méthode nous permettra de démontrer un théorème très général (1) dont nous avons déjà vu un cas particulier.

*Pour toute aire S en tous les points de laquelle c n'est jamais positif, l'intégrale est déterminée par ses valeurs le long du contour.*

Il suffit ici de prendre

$$z = e^{-\frac{\alpha}{M} e^{Mx}},$$

$\alpha$  et  $M$  étant des constantes indéterminées. On a, en effet,

$$F(z) = z(\alpha^2 e^{2Mx} - \alpha M e^{Mx} - \alpha \alpha e^{Mx} + c) = z \{ \alpha e^{2Mx} [\alpha - (\alpha + M) e^{-Mx}] + c \}.$$

Prenons pour  $M$  une quantité positive supérieure au module de la plus petite valeur de  $\alpha$ . Alors  $\alpha + M$  est toujours supérieur à un nombre positif  $k$ . D'ailleurs, dans l'aire  $S$  considérée, quelle qu'elle soit, pourvu qu'elle soit limitée, on a

$$z > 0, \quad e^{-Mx} > h > 0.$$

Si donc on choisit pour  $\alpha$  un nombre compris entre 0 et  $hk$ , le premier

---

(1) Ce théorème est plus général que celui du n° 2, car ici on peut avoir  $c \leq 0$ , tandis qu'au n° 2 l'égalité était exclue.

terme du binôme qui multiplie  $z$  sera négatif et non nul, le second sera négatif ou nul : donc on aura toujours

$$F(z) < 0,$$

et le théorème est démontré.

Les régions du plan où  $c$  ne devient jamais positif présentent ainsi un intérêt particulier et feront plus loin l'objet d'une étude spéciale.

5. Nous n'avons démontré jusqu'ici que des propriétés pour ainsi dire négatives, car nous avons montré que, dans certains cas que nous précisons, il ne peut y avoir deux intégrales prenant des valeurs données sur un contour. Il faut maintenant prouver l'existence de cette unique intégrale<sup>(1)</sup>.

Commençons par le cas d'un contour assez petit pour que le théorème du n° 3 lui soit applicable. Nous supposerons aussi d'abord que ce contour est circulaire.

Écrivons l'équation sous la forme

$$(10) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu.$$

Nous procéderons par approximations successives.

Partons d'une première fonction  $u_1 = 0$  que nous substituerons dans le second membre de (10) et intégrons l'équation

$$\Delta u = a \frac{\partial u_1}{\partial x} + b \frac{\partial u_1}{\partial y} + cu_1 = f(u_1) = 0.$$

Soit  $u_2$  l'intégrale de cette équation prenant sur le contour les valeurs données.

Passons ensuite à l'équation

$$\Delta v_3 = f(u_2),$$

que nous intégrerons en supposant que  $v_3$  s'annule sur le contour ; puis l'on passera à

$$\Delta v_4 = f(v_3).$$

que l'on intégrera dans les mêmes conditions que la précédente.

---

(1) Cf. PICARD, *Journal de Mathématiques*; 1890.

On formera ainsi une suite de fonctions

$$u_2, \quad v_3, \quad v_4, \quad \dots,$$

qui, dans le contour, seront continues et admettront des dérivées continues des deux premiers ordres. La première de ces fonctions prend sur le contour les valeurs données, les autres s'annulent sur le contour.

Si donc nous démontrons que la série

$$(11) \quad u_2 + v_3 + v_4 + \dots$$

est uniformément convergente et représente une fonction admettant des dérivées continues des deux premiers ordres, nous aurons bien la solution cherchée. En effet, cette fonction prendra sur le contour les valeurs données, à cause de la convergence uniforme de la série (11). Ce sera, d'ailleurs, une intégrale de l'équation (10). Pour le voir bien nettement, posons

$$u_n = u_2 + v_3 + \dots + v_n.$$

On aura évidemment

$$(12) \quad \Delta u_n = a \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + b \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} + c u_{n-1}.$$

Or, par hypothèse, les séries

$$u_2 + \sum v_p, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x} + \sum \frac{\partial v_p}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \sum \frac{\partial^2 v_p}{\partial x^2}$$

sont convergentes, et même absolument et uniformément convergentes, comme on le verra, et ont pour sommes

$$u, \quad \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Le premier membre de (12) tend donc vers  $\Delta u$ , le second membre tend vers  $a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu$ , et, par suite,  $u$  est bien solution de (10).

Il suffit donc de démontrer la convergence uniforme de toutes ces séries. Cette démonstration n'est pas immédiate. Pour y arriver, nous n'emploierons pas les expressions des  $u$  et des  $v$  que nous avons trouvées au Chapitre II sous forme d'intégrales doubles, et qui nous conduiraient à des discussions pénibles. Nous aurons recours au développement de ces fonctions en séries

trigonométriques. Mais nous commencerons par deux lemmes qui nous seront utiles.

**6. LEMME.** — *Si une fonction  $f(x, y)$  de deux variables réelles est continue dans un cercle et y admet des dérivées continues des deux premiers ordres, cette fonction est développable dans ce cercle en série*

$$(13) \quad f(x, y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos m\theta + b_m \sin m\theta),$$

*absolument et uniformément convergente.*

Les  $a_m$  et  $b_m$  sont des fonctions continues de  $r$  satisfaisant aux relations

$$|a_m| \quad \text{et} \quad |b_m| < \frac{h}{m^2},$$

$h$  est ici une constante ne dépendant que de la fonction et non du rayon du cercle. On a posé d'ailleurs  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ .

Soit, en effet,

$$f(x, y) = f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \varphi(r, \theta).$$

Posons

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(r, \gamma) \cos m\gamma d\gamma, \quad b_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(r, \gamma) \sin m\gamma d\gamma.$$

Une double intégration par partie donnera

$$a_m = -\frac{1}{\pi} \frac{1}{m^2} \int_0^{2\pi} \varphi''(r, \gamma) \cos m\gamma d\gamma, \quad b_m = -\frac{1}{\pi} \frac{1}{m^2} \int_0^{2\pi} \varphi''(r, \gamma) \sin m\gamma d\gamma.$$

On aura donc

$$|a_m| \quad \text{et} \quad |b_m| < \frac{h}{m^2}, \quad h = \max |\varphi''(r, \gamma)|.$$

Il résulte déjà de là que la série (13) est absolument et uniformément convergente. Pour en trouver la somme, considérons la série suivante en  $\rho$  et  $\theta$ , où  $r$  entre dans les coefficients à titre de paramètre,

$$(14) \quad \Phi(\rho, \theta) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \rho^m (a_m \cos m\theta + b_m \sin m\theta).$$

On sait que cette série n'est autre chose que le développement de l'inté-

grale de Poisson

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(r, \gamma) \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho \cos(\gamma - \theta) + \rho^2} d\gamma.$$

Quand  $\rho$  tend vers l'unité,  $\Phi(\rho, \theta)$  tend vers la somme de la série (13), puisque celle-ci est convergente. D'autre part, dans les mêmes conditions, l'intégrale tend vers  $\varphi(r, \gamma)$ . On a donc bien

$$\varphi(r, \gamma) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos m\theta + b_m \sin m\theta).$$

Le second lemme sur lequel nous nous appuierons concerne certaines séries numériques; nous l'énoncerons comme il suit :

LEMME. — *Les sommes des trois séries convergentes*

$$(15) \quad \sum_{q=1}^{q=m-1} \frac{1}{q^2(m-q)^2},$$

$$(16) \quad \sum_{q=1}^{q=\infty} \frac{1}{q^2(m+q)^2},$$

$$(17) \quad \sum_{q=m+1}^{q=\infty} \frac{1}{q^2(q-m)^2}$$

sont inférieures à  $\frac{1}{3} \frac{\theta}{m^2}$ ,  $\theta$  étant une quantité purement numérique.

Occupons-nous d'abord de la première, dont le nombre des termes est limité. Un raisonnement géométrique bien connu nous permet d'écrire

$$\sum_{q=1}^{m-1} \frac{1}{q^2(m-q)^2} < \frac{2}{(m-1)^2} + \int_1^{m-1} \frac{dx}{x^2(m-x)^2},$$

en envisageant l'aire de la courbe  $y = \frac{1}{x^2(m-x)^2}$ .

L'intégrale qui figure au second membre se calcule aisément et a pour valeur

$$\frac{1}{m^2} \left[ \frac{4}{m-1} \operatorname{L}(m-1) - \frac{2}{m-1} + 2 \right].$$

La quantité entre crochets est visiblement inférieure à une certaine quan-

tité purement numérique, quel que soit  $m$ . Il en est de même de la quantité  $\frac{m}{m-1}$ . On peut donc bien écrire

$$\sum_{1}^{m-1} \frac{1}{q^2(m-q)^2} < \frac{1}{3} \frac{\theta}{m^2}.$$

Pour la seconde somme, on procédera de même.

On écrira d'abord

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{q^2(m+q)^2} < \frac{1}{(m+1)^2} + \int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2(m+x)^2}$$

et l'on arrivera à la même conclusion.

Enfin la troisième somme se ramène à la deuxième en posant  $q = m + q'$ . On a donc finalement

$$(18) \quad \sum_{1}^{m-1} \frac{1}{q^2(m-q)^2} + \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{q^2(m+q)^2} + \sum_{m+1}^{\infty} \frac{1}{q^2(q-m)^2} < \frac{\theta}{m^2}, \quad \text{C. Q. F. D.}$$

7. Considérons alors l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y),$$

où nous supposons que  $f(x, y)$  est développable en série trigonométrique avec des coefficients  $a_m$  et  $b_m$  dont les modules sont inférieurs à  $\frac{h}{m^2}$ . Il suffira pour cela que  $f(x, y)$  admette des dérivées secondes limitées dans le cercle, mais cette condition n'est pas indispensable, et ne se trouvera même pas réalisée, en général, dans les applications que nous rencontrerons. La seule chose essentielle est la limitation des  $a_m$  et  $b_m$  en  $\frac{h}{m^2}$ .

Nous savons déjà qu'il existe une intégrale de cette équation, continue et s'annulant sur le cercle R. Mais nous allons rechercher directement une telle intégrale sous forme trigonométrique (¹).

---

(¹) Cf. PICARD, *Journal de l'École Polytechnique*, LX<sup>e</sup> Cahier. Dans ce Mémoire, il s'agit d'équations à coefficients analytiques.

Écrite en coordonnées polaires, l'équation va devenir

$$(19) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = \varphi(r, \theta),$$

et l'on a par hypothèse

$$\varphi(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} (a_m \cos m\theta + b_m \sin m\theta), \quad |a_m| \text{ et } |b_m| < \frac{h}{m^2}.$$

Essayons de vérifier l'équation (19) par une série de la forme

$$(20) \quad u = \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} (\alpha_m \cos m\theta + \beta_m \sin m\theta).$$

En substituant ce développement supposé convergent dans (19) et identifiant les coefficients de  $\cos m\theta$  et de  $\sin m\theta$ , on trouve que  $\alpha_m$  satisfait à la relation

$$(21) \quad \frac{d^2 \alpha_m}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\alpha_m}{dr} - \frac{m^2}{r^2} \alpha_m = a_m.$$

On a d'ailleurs une équation analogue pour  $\beta_m$ .

La fonction  $u$  doit être continue dans le cercle, et s'annuler pour  $r = R$ . Il faut donc qu'il en soit de même pour les  $\alpha_m$  ('). Un calcul élémentaire donne alors, pour l'intégrale  $\alpha_m$  de l'équation (21) qui reste finie pour  $r = 0$  et qui s'annule pour  $r = R$ , la valeur suivante

$$2m \alpha_m = r^m \int_R^r \frac{\alpha_m dr}{r^{m-1}} - \frac{1}{r^m} \int_0^r \alpha_m r^{m+1} dr + \frac{r^m}{R^{2m}} \int_0^R \alpha_m r^{m+1} dr.$$

Cette expression est, comme les  $a_m$  et  $b_m$ , une fonction continue de  $r$  dans le cercle et sur le cercle.

$\alpha_m$  admet une limite supérieure  $M$  égale à  $\frac{h}{m^2}$ . On a donc

$$2m |\alpha_m| < \frac{2MR^2}{m-2} + \frac{2MR^2}{m+2},$$

---

(1) Théorème de Cantor.

d'où

$$|\alpha_m| < \frac{\lambda_1 h R^2}{m^4},$$

$\lambda_1$  désignant une constante purement numérique.

Il résulte déjà de là que la série (20) est convergente et admet des dérivées des deux premiers ordres par rapport à  $\theta$ , continues elles-mêmes.

Mais nous avons besoin aussi des dérivées en  $r$ .

On a d'abord

$$2 \frac{d\alpha_m}{dr} = r^{m-1} \int_R^r \frac{a_m dr}{r^{m-1}} + \frac{1}{r^{m+1}} \int_0^r a_m r^{m+1} dr + \frac{r^{m-1}}{R^{2m}} \int_0^R a_m r^{m+1} dr;$$

cette expression reste continue pour  $r = 0$ . Elle donne d'ailleurs

$$\begin{aligned} 2 \left| \frac{d\alpha_m}{dr} \right| &< \frac{2MR}{m-2} + \frac{2MR}{m+2}, \\ \left| \frac{d\alpha_m}{dr} \right| &< \frac{\lambda_2 h R}{m^3}, \quad \lambda_2 = \text{constante numérique.} \end{aligned}$$

Passons aux dérivées secondes

$$\begin{aligned} 2 \frac{d^2 \alpha_m}{dr^2} &= (m-1) r^{m-2} \int_R^r \frac{a_m dr}{r^{m-1}} - (m+1) \frac{1}{r^{m+2}} \int_0^r a_m r^{m+1} dr \\ &\quad + 2 a_m + (m-1) \frac{r^{m-2}}{R^{2m}} \int_0^R a_m r^{m+1} dr. \end{aligned}$$

Ici encore tous les termes restent finis pour  $r = 0$  et l'on a

$$\left| \frac{d^2 \alpha_m}{dr^2} \right| < \frac{\lambda_3 h}{m^2}.$$

De ces calculs résultent les résultats suivants :

Tout d'abord la série (20) et toutes celles qu'on en déduit par une ou deux dérivations sont absolument et uniformément convergentes. La série (20) représente donc bien l'intégrale que nous cherchions. De plus, dans le développement trigonométrique de cette intégrale  $u$  et de ses dérivées, on a les limites suivantes pour les modules des coefficients de  $\cos m\theta$

et de  $\sin m\theta$ ,

(22)	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 30%;">Dans <math>u</math> . . . . .</td><td style="width: 70%; text-align: right;"><math>\frac{\lambda h R^2}{m^4}</math></td></tr> <tr> <td>Dans <math>\frac{\partial u}{\partial r}, \frac{\partial u}{\partial \theta}</math> . . . . .</td><td style="text-align: right;"><math>\frac{\lambda h R}{m^3}</math></td></tr> <tr> <td>Dans <math>\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta}, \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}</math> . . . . .</td><td style="text-align: right;"><math>\frac{\lambda h}{m^2}</math></td></tr> </table>	Dans $u$ . . . . .	$\frac{\lambda h R^2}{m^4}$	Dans $\frac{\partial u}{\partial r}, \frac{\partial u}{\partial \theta}$ . . . . .	$\frac{\lambda h R}{m^3}$	Dans $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta}, \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$ . . . . .	$\frac{\lambda h}{m^2}$
Dans $u$ . . . . .	$\frac{\lambda h R^2}{m^4}$						
Dans $\frac{\partial u}{\partial r}, \frac{\partial u}{\partial \theta}$ . . . . .	$\frac{\lambda h R}{m^3}$						
Dans $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta}, \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$ . . . . .	$\frac{\lambda h}{m^2}$						

$\lambda$  étant purement numérique.

On en déduit sans peine les limites correspondantes pour  $\frac{\partial u}{\partial x}$  et  $\frac{\partial u}{\partial y}$ .

Il s'agit de développer en série trigonométrique l'expression

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r}.$$

On a tout d'abord

$$(23) \quad \frac{\partial u}{\partial r} \cos \theta = \cos \theta \left[ \frac{1}{2} \frac{d\alpha_0}{dr} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{d\alpha_n}{dr} \cos n\theta + \frac{d\beta_n}{dr} \sin n\theta \right) \right].$$

Or la formule

$$2 \cos p \theta \cos q \theta = \cos(p+q)\theta + \cos(p-q)\theta$$

et ses analogues montrent que l'on obtiendra dans (23) un terme en  $\cos m\theta$  seulement par les termes  $\frac{d\alpha_{m-1}}{dr}$  et  $\frac{d\alpha_{m+1}}{dr}$ . Le coefficient de  $\cos m\theta$ , dans le développement de  $\frac{\partial u}{\partial r} \cos \theta$ , aura donc une limite de la forme

$$\frac{\lambda_0 \lambda h R}{m^3},$$

$\lambda_0$  étant purement numérique.

Le terme  $\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \sin \theta$  conduit à la même conclusion.

Les coefficients de  $\cos m\theta$  et  $\sin m\theta$ , dans  $\frac{\partial u}{\partial x}$  et  $\frac{\partial u}{\partial y}$ , ont donc pour limite

$$(24) \quad \frac{\lambda_0 \lambda h R}{m^3}.$$

Nous avons maintenant tous les éléments nécessaires pour montrer que la méthode des approximations successives conduit bien au résultat.

## 8. Reprenons la suite d'équations

$$\Delta u_2 = 0, \quad \Delta v_3 = a \frac{\partial u_2}{\partial x} + b \frac{\partial u_2}{\partial y} + cu_2, \quad \Delta v_4 = a \frac{\partial v_3}{\partial x} + b \frac{\partial v_3}{\partial y} + cv_3, \quad \dots$$

Nous avons supposé que les  $a, b, c$  admettent des dérivées seconde continuées. Dans le développement de ces fonctions, les coefficients de  $\cos m\theta$  et de  $\sin m\theta$  sont donc plus petits que  $\frac{k}{m^2}$  d'après un des lemmes.

La fonction harmonique  $u_2$  est analytique et admet donc des dérivées de tous les ordres *dans le cercle*. Nous allons maintenant supposer que la série des valeurs données sur le contour soit une fonction de  $\theta$  qui admette des dérivées *troisièmes*. (Cette hypothèse n'est pas indispensable, mais la simple hypothèse des dérivées seconde est insuffisante dans notre mode de démonstration.) Alors, dans le développement de  $u_2$  en série trigonométrique, on aura

$$u_2 = \frac{1}{2} a_0 + \sum \left( \frac{r}{R} \right)^m (a_m \cos m\theta + b_m \sin m\theta), \quad |a_m| \text{ et } |b_m| < \frac{h}{m^3};$$

les  $a_m$  et  $b_m$  sont ici des constantes absolues.

Il résulte de là que, dans les fonctions  $\frac{\partial u_2}{\partial r}$  et  $\frac{1}{r} \frac{\partial u_2}{\partial \theta}$ , les coefficients de  $\cos m\theta$  et  $\sin m\theta$  auront pour limite

$$\frac{h}{m^2 R}.$$

Donc, d'après un calcul fait au numéro précédent, les limites analogues seront

$$\frac{\lambda_0 h}{m^2 R}$$

dans  $\frac{\partial u_2}{\partial x}$  et  $\frac{\partial u_2}{\partial y}$ .

Étudions alors le développement trigonométrique de

$$a \frac{\partial u_2}{\partial x} + b \frac{\partial u_2}{\partial y} + cu_2.$$

Prenons isolément le terme  $a \frac{\partial u_2}{\partial x}$ .

Si nous désignons d'une manière générale par  $A_p$  et  $B_q$  les coefficients des lignes trigonométriques respectivement dans  $\alpha$  et dans  $\frac{\partial u_2}{\partial x}$ ,  $\alpha \frac{\partial u_2}{\partial x}$  sera la somme de quatre groupes analogues au suivant

$$\sum_{-1}^{\infty} \sum_{-1}^{\infty} A_p B_q \cos p\theta \cos q\theta$$

et de la quantité

$$\frac{1}{2} A_0 \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{1}{2} B_0 \alpha.$$

Dans cette dernière partie, le coefficient de  $\cos m\theta$  est limité en  $\frac{h'}{m^2}$ . Dans la somme double, on obtiendra un terme en  $\cos m\theta$  en prenant pour  $p$  et  $q$  les combinaisons suivantes

$$p + q = m, \quad p - q = m, \quad q - p = m.$$

Le coefficient de  $\cos m\theta$  dans cette somme aura donc pour limite

$$\sum_{-1}^{m-1} |A_{m-q}| |B_q| + \sum_{-1}^{\infty} |A_{m+q}| |B_q| + \sum_{m+1}^{\infty} |A_{q-m}| |B_q|,$$

et de plus nous savons que

$$|A_p| < \frac{k}{p^2}, \quad |B_p| < \frac{h_1}{P^2} \quad \left( h_1 = \frac{\lambda_0 h}{R} \right).$$

Ce coefficient aura donc pour limite

$$\frac{\lambda_0 h k}{R} \left[ \sum_{-1}^{m-1} \frac{1}{(m-q)^2 q^2} + \sum_{-1}^{\infty} \frac{1}{q^2 (m+q)^2} + \sum_{m+1}^{\infty} \frac{1}{q^2 (q-m)^2} \right] < \frac{\lambda_0 h k \theta}{m^2 R},$$

d'après le second lemme.

Telle sera donc évidemment la forme de la limite pour l'expression

$$a \frac{\partial u_2}{\partial x} + b \frac{\partial u_2}{\partial y} + c u_2.$$

Nous nous trouvons donc dans les conditions du n° 7 et nous pouvons par

suite affirmer que les coefficients de  $\cos m\theta$  et  $\sin m\theta$  ont pour limites

(25)	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 30%;">Dans</td><td style="width: 40%;"><math>v_3 \dots \dots \dots</math></td><td style="width: 30%; text-align: right;"><math>\frac{h\mu R}{m^4}</math></td></tr> <tr> <td>Dans</td><td><math>\frac{\partial v_3}{\partial x}</math> et <math>\frac{\partial v_3}{\partial y} \dots \dots \dots</math></td><td style="text-align: right;"><math>\frac{\lambda_0 h \mu}{m^3}</math></td></tr> <tr> <td>Dans</td><td><math>\frac{\partial v_3}{\partial r}</math> et <math>\frac{\partial v_3}{\partial \theta} \dots \dots \dots</math></td><td style="text-align: right;"><math>\frac{h \mu}{m^3}</math></td></tr> <tr> <td>Dans</td><td><math>\frac{\partial^2 v_3}{\partial r^2}, \frac{\partial^2 v_3}{\partial r \partial \theta}, \frac{\partial^2 v_3}{\partial \theta^2} \dots \dots \dots</math></td><td style="text-align: right;"><math>\frac{h \mu}{m^2 R}</math></td></tr> </table>	Dans	$v_3 \dots \dots \dots$	$\frac{h\mu R}{m^4}$	Dans	$\frac{\partial v_3}{\partial x}$ et $\frac{\partial v_3}{\partial y} \dots \dots \dots$	$\frac{\lambda_0 h \mu}{m^3}$	Dans	$\frac{\partial v_3}{\partial r}$ et $\frac{\partial v_3}{\partial \theta} \dots \dots \dots$	$\frac{h \mu}{m^3}$	Dans	$\frac{\partial^2 v_3}{\partial r^2}, \frac{\partial^2 v_3}{\partial r \partial \theta}, \frac{\partial^2 v_3}{\partial \theta^2} \dots \dots \dots$	$\frac{h \mu}{m^2 R}$
Dans	$v_3 \dots \dots \dots$	$\frac{h\mu R}{m^4}$											
Dans	$\frac{\partial v_3}{\partial x}$ et $\frac{\partial v_3}{\partial y} \dots \dots \dots$	$\frac{\lambda_0 h \mu}{m^3}$											
Dans	$\frac{\partial v_3}{\partial r}$ et $\frac{\partial v_3}{\partial \theta} \dots \dots \dots$	$\frac{h \mu}{m^3}$											
Dans	$\frac{\partial^2 v_3}{\partial r^2}, \frac{\partial^2 v_3}{\partial r \partial \theta}, \frac{\partial^2 v_3}{\partial \theta^2} \dots \dots \dots$	$\frac{h \mu}{m^2 R}$											

formules obtenues en remplaçant purement et simplement, dans (22) et (24), la quantité  $h$  par  $\frac{\lambda_0 h k \theta}{R}$ , et posant, pour abréger,  $\lambda_0 \lambda k \theta = \mu$ .  $\mu$  est une constante numérique.

Mais  $v_4$  se déduit de  $v_3$  comme  $v_3$  se déduit de  $u_2$ . Les limites relatives à  $v_4$  se déduiront donc des précédentes en y changeant  $h$  en  $h\mu R$ , c'est-à-dire en multipliant simplement ces limites par  $\mu R$ . Donc enfin les limites relatives à  $v_n$  seront

$$\frac{h\mu R}{m^4} (\mu R)^{n-3}, \quad \frac{\lambda_0 h\mu}{m^3} (\mu R)^{n-3}, \quad \frac{h\mu}{m^3} (\mu R)^{n-3}, \quad \frac{h\mu}{m^2 R} (\mu R)^{n-3}.$$

Il en résulte que la série  $\Sigma \omega_n$ , dans laquelle  $\omega_n$  désigne  $v_n$  ou l'une quelconque de ses dérivées en  $r$  et  $\theta$  des deux premiers ordres, se présentera sous la forme d'une série double absolument et uniformément convergente, car les différents coefficients de  $\cos m\theta$ , par exemple, dans  $\Sigma \omega_n$  sont respectivement inférieurs aux termes de la progression géométrique

$$\frac{H}{m^\alpha} \sum_{p=1}^{\infty} (\mu R)^p$$

qui est convergente si  $\mu R < 1$ .  $H$  est une constante indépendante de  $m$ , et  $\alpha$  est l'un des nombres 2, 3 ou 4.

La série totale converge donc comme  $\sum \frac{1}{m_x^2}$ .

D'ailleurs la condition  $\mu R < 1$  sera toujours vérifiée si le rayon du cercle est assez petit, puisque  $\mu$  est une constante absolue.

La série  $u_2 + v_3 + v_4 + \dots$  représente donc bien une fonction continue admettant des dérivées partielles continues des deux premiers ordres. C'est ce que nous voulions démontrer.

9. Avant d'aller plus loin, quelques remarques trouveront ici leur place.

On peut tout d'abord étendre tous les résultats précédents à l'équation complète

$$(26) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu + f,$$

contenant un terme indépendant de  $u$ .

En effet, l'intégrale de cette équation qui prend des valeurs données le long d'un contour sera nécessairement unique toutes les fois qu'il en sera de même en supposant  $f = 0$ . Car, s'il existait deux telles intégrales, leur différence s'annulerait le long du contour et vérifierait l'équation homogène

$$\Delta u = a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu.$$

Cette différence serait donc identiquement nulle d'après l'hypothèse.

De plus, la méthode des approximations s'applique à l'équation (26) de la manière suivante.

Partons de  $u_1 = 0$  et déterminons  $u_2$  par l'équation

$$\Delta u_2 = f$$

avec les valeurs données au contour.

Puis déterminons l'intégrale  $v_3$  de l'équation

$$\Delta v_3 = a \frac{\partial u_2}{\partial x} + b \frac{\partial u_2}{\partial y} + cu_2$$

qui s'annule sur le contour, et de même  $v_4, v_5, \dots$

Tous les raisonnements déjà faits vont s'appliquer à la série des fonctions  $u_2, v_3, v_4, \dots$ . Car  $u_2$  admet des dérivées troisièmes (Chapitre II, n° 5), puisque  $f$  admet par hypothèse des dérivées secondes comme  $a, b, c$ , et ses coefficients sont donc limités en  $\frac{1}{m^3}$  comme dans le numéro précédent. La série

$$u_2 + v_3 + v_4 + \dots$$

et ses dérivées des deux premiers ordres sont donc encore absolument et uniformément convergentes. C'est d'ailleurs une intégrale de (26), car, en posant encore

$$u_n = u_2 + v_3 + v_4 + \dots + v_n,$$

il vient de nouveau

$$\Delta u_n = a \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + b \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} + c u_{n-1} + f.$$

Il n'y a donc rien à changer aux raisonnements déjà faits.

Les résultats obtenus peuvent encore être étendus dans une autre direction.

Le changement de variables qui correspond à une représentation conforme transforme l'équation proposée en une autre de même espèce, et la nature des coefficients ne sera pas changée si la fonction de transformation a le caractère d'une fonction entière dans toute la région que l'on veut considérer. On saura donc résoudre le problème pour un contour formé d'un seul arc analytique régulier, si ce contour est suffisamment petit, car on sait représenter l'aire en question sur le cercle d'une manière conforme, au moyen d'une fonction qui a le caractère d'une fonction entière dans toute l'aire et sur le contour. Mais on ne pourrait plus le faire si l'aire était limitée par plusieurs arcs de lignes analytiques différentes, car, dans le voisinage des sommets d'un tel polygone, la fonction de transformation perdrat le caractère de fonction entière, et les coefficients de l'équation transformée ne satisferaient plus aux conditions de continuité qui leur étaient imposées dans la démonstration.

Remarquons enfin que la solution, dans le cas d'une aire assez petite, se présente toujours sous la forme d'une somme de deux termes, le premier étant la fonction harmonique qui prend sur le contour les valeurs données, le second étant une fonction continue dans l'aire et tendant vers 0 sur le contour.

10. Nous allons maintenant revenir, pour ne plus la quitter, à l'équation homogène. Nous avons vu que dans la région  $T$ , où  $c$  est négatif ou nul, il existe au plus une intégrale continue dans une aire  $S$  et prenant sur  $s$  des valeurs données. Il s'agit de démontrer l'existence de cette intégrale unique. C'est ce que nous ferons en faisant voir que le procédé alterné de M. Schwarz s'applique à notre équation.

Nous pouvons évidemment supposer  $c$  négatif et non nul, puisque nous avons vu (n° 4) que le cas où  $c$  peut s'annuler se ramène aisément au cas où  $c$  ne peut pas s'annuler, au moyen d'un changement de fonction

$$u = v e^{-\frac{\alpha}{M} e^{Mx}}.$$

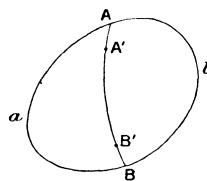
Or, en supposant  $c$  négatif et non nul, nous avons établi au n° 2 le résultat suivant qui est fondamental.

A l'intérieur de l'aire  $S$ , les valeurs positives de l'intégrale sont toutes *inférieures* à la plus grande valeur positive sur le contour, et les valeurs négatives ont toutes un module inférieur au plus grand module des valeurs négatives sur le contour.

Ceci suffit à faire voir que le procédé alterné est applicable.

Soit, en effet, un contour pour lequel on sache résoudre le problème. Traçons une ligne  $AB$  (fig. 12) qui ne soit pas tangente au contour et qui

Fig. 12.



le divise en deux parties  $\alpha$  et  $\beta$ . Construisons la fonction  $u$  qui vérifie l'équation en prenant sur  $\alpha$  la valeur 0 et sur  $\beta$  la valeur 1. On sera assuré que, en tout point de  $AB$ ,  $u$  a une valeur positive inférieure à un nombre  $q < 1$ . C'est le lemme fondamental de Schwarz qui s'étend à notre équation.

En effet, séparons de  $AB$  deux petits arcs  $AA'$  et  $BB'$ .

Sur  $A'B'$ ,  $u$  est une fonction continue qui, nous le savons, reste inférieure à l'unité, puisque l'arc  $A'B'$  est tout entier intérieur à  $S$ . Elle a donc une limite supérieure  $q$ , qu'elle atteint effectivement et qui est inférieure à 1. Maintenant l'aire  $S$  que nous envisageons sera toujours formée, dans les applications que nous ferons de ce lemme, par la superposition d'un certain nombre d'aires élémentaires assez petites pour que, à l'intérieur de chacune de ces aires, la fonction  $u$  puisse être mise sous la forme  $u_2 + U$ ,  $u_2$  étant la fonction harmonique prenant sur le contour de l'aire élémentaire les mêmes valeurs que  $u$  et  $U$  tendant vers 0 sur le contour de l'aire. La portion de  $s$ , voisine de  $A$ , peut donc être rattachée à une semblable aire élémentaire, et, par suite,  $A'$  peut être pris assez voisin de  $A$  pour que, sur tout l'arc  $AA'$ , la fonction  $u_2$  soit inférieure à un nombre  $q_2$  plus petit que 1, et que  $U$  soit aussi petit que nous voudrons. Sur  $AA'$  on a donc

$$u < q_2 < 1,$$

et de même sur  $BB'$

$$u < q_3 < 1.$$

Si donc  $q$  désigne la plus grande des trois quantités  $q_1, q_2, q_3$ , on aura, sur tout l'arc  $AB$ ,

$$u < q < 1.$$

De là résulte que, si une intégrale  $U$  prend sur  $a$  la valeur  $0$  et sur  $b$  des valeurs dont le module est inférieur ou égal à  $H$ , les valeurs de  $U$  sur  $AB$  auront un module inférieur à  $qH$ .

Soit, en effet,  $u$  l'intégrale égale à  $0$  sur  $a$  et à  $1$  sur  $b$ , et considérons la fonction

$$U + Hu$$

qui est nulle sur  $a$  et positive ou nulle sur  $b$ . Elle sera certainement positive ou nulle sur  $AB$ . Mais on peut l'écrire sous la forme suivante

$$U + qH + H(u - q).$$

Sur  $AB$  on a, d'après le lemme,  $u - q < 0$ . Il faut donc que l'on ait

$$U + qH > 0.$$

Ainsi sur  $AB$  on a  $U > -qH$  et la considération de la fonction  $U - Hu$  conduirait de même à la conclusion

$$U < qH \text{ sur } AB.$$

44. Nous pouvons maintenant montrer que, si l'on sait résoudre le problème pour deux aires empiétant l'une sur l'autre et dont les contours ne sont pas tangents, on saura aussi le résoudre pour l'aire formée par la superposition des deux aires données, en entendant bien par là que la portion commune aux deux aires n'est censée recouvrir le plan qu'une seule fois.

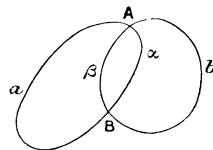
Ainsi, dans la *fig. 13*, les deux aires données sont  $A\alpha B\alpha$ ,  $A\beta B\beta$ , et l'aire formée par leur superposition est  $A\alpha B\beta$ .

Appelons  $S_1$  la première aire,  $S_2$  la deuxième,  $\Sigma$  l'aire commune  $A\beta B\alpha$ . Par hypothèse, on sait résoudre le problème pour  $S_1$  et  $S_2$  avec des valeurs arbitraires sur les contours, et l'on veut résoudre le problème pour l'aire totale en donnant sur son contour une suite continue de valeurs  $U$ .

Construisons l'intégrale  $u$ , qui prend sur  $\alpha$  les valeurs données, et sur  $\alpha$

une suite de valeurs que nous choisirons arbitrairement, mais formant cependant avec les valeurs données sur  $\alpha$  une suite continue. Cette intégrale est

Fig. 13.



définie dans l'aire  $S_1$  et prend sur  $\beta$  des valeurs déterminées. Pour plus de netteté, appelons  $U_1$  les valeurs de  $U$  sur  $\alpha$  et  $U_2$  les valeurs de  $U$  sur  $b$ . Alors les valeurs de  $u_1$  sur  $\beta$  forment évidemment un prolongement continu de  $U_2$ .

Construisons alors la fonction  $v_1$  qui vérifie l'équation dans  $S_2$  prenant sur  $b$  les valeurs  $U_2$  et sur  $\beta$  les mêmes valeurs que  $u_1$ . Cette fonction prendra sur  $\alpha$  des valeurs déterminées qui seront un prolongement continu de  $U_1$ .

Formons alors de nouveau l'intégrale  $u_2$  relative à l'aire  $S_1$  qui prend sur  $\alpha$  les valeurs  $U_1$  et sur  $\alpha$  les mêmes valeurs que  $v_1$ . Cette fonction prendra sur  $\beta$  des valeurs déterminées, etc.

Nous formons ainsi deux suites infinies de fonctions que j'écris dans le Tableau suivant :

$$(27) \quad \begin{array}{ccccccccccccc} u_1 & u_2 & u_3 & \cdots & u_{n-1} & u_n & u_{n+1} & \cdots & | & \beta & / & \alpha. \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & & & \\ v_1 & v_2 & v_3 & \cdots & v_{n-1} & v_n & v_{n+1} & \cdots & | & & & \end{array}$$

Les fonctions  $u_i$  existent dans l'aire  $S_1$  et y vérifient l'équation proposée. Elles prennent toutes sur  $\alpha$  les valeurs  $U_1$ . Les fonctions  $v_i$  existent dans  $S_2$  et y vérifient l'équation. Elles prennent toutes sur  $b$  les valeurs  $U_2$ .

De plus, d'après la manière dont nous avons opéré, il est clair que dans le Tableau précédent les fonctions jointes par un trait vertical ont la même valeur sur  $\beta$  et celles qui sont jointes par un trait oblique, la même valeur sur  $\alpha$ .

Il faut montrer que :

Les fonctions  $u_i$  tendent vers une limite  $u$  qui vérifie l'équation dans  $S_1$  et prend sur  $\alpha$  les valeurs données;

Les fonctions  $v_i$  tendent vers une limite  $v$  qui vérifie l'équation proposée dans  $S_2$  et prend sur  $b$  les valeurs données;

Enfin, que les fonctions  $u$  et  $v$  coïncident dans la portion commune aux deux aires.

Nous aurons ainsi montré l'existence d'une fonction continue avec ses dérivées des deux premiers ordres, donnée à la vérité par deux développements analytiques, distincts dans les régions  $S_1$  et  $S_2$ , mais qui coïncident dans la région commune à  $S_1$  et  $S_2$ ; cette fonction vérifie l'équation dans toute l'aire  $S_1 + S_2$  et prend les valeurs données sur le contour total. Le problème sera ainsi complètement résolu.

Dans ce but, calculons le module de  $u_{n+1} - u_n$ .

On a, d'après le Tableau ci-dessus, et en employant une notation qui se comprend d'elle-même,

$$(u_{n+1} - u_n)_\alpha = (v_n - v_{n-1})_\alpha, \quad (u_{n+1} - u_n)_\alpha = 0;$$

$$(\varphi_n - \varphi_{n-1})b = 0, \quad (\varphi_n - \varphi_{n-1})\beta = (u_n - u_{n-1})\beta.$$

D'après l'un des lemmes, à chacune des lignes  $\alpha$  et  $\beta$  est attaché un nombre  $q_1$  ou  $q_2$  inférieur à l'unité. Appelons  $q$  le plus grand de ces deux nombres. On aura donc

$$|v_n - v_{n-1}|_\alpha < q \max. |u_n - u_{n-1}|_\beta, \\ |u_{n+1} - u_n|_\alpha < q \max. |u_n - u_{n-1}|_\beta.$$

Et de là se concluent les deux relations fondamentales

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} |u_{n+1} - u_n|_{\mathbb{M}} < q \max_{\beta} |u_n - u_{n-1}|_{\beta}, \\ |u_{n+1} - u_n|_{\beta} < q^2 \max_{\beta} |u_n - u_{n-1}|_{\beta}. \end{array} \right.$$

M désignant un point quelconque de la première aire.

Nous avons donc la série suivante d'inégalités

$$\begin{aligned}
 & |u_{n+1} - u_n|_{\mathbb{M}} < q \max. |u_n - u_{n-1}|_{\beta}, \\
 & \max. |u_n - u_{n-1}|_{\beta} < q^2 \max. |u_{n-1} - u_{n-2}|_{\beta}, \\
 & \max. |u_{n-1} - u_{n-2}|_{\beta} < q^2 \max. |u_{n-2} - u_{n-3}|_{\beta}, \\
 & \dots \\
 & \max. |u_3 - u_2|_{\beta} < q^2 \max. |u_2 - u_1|_{\beta},
 \end{aligned}$$

et, en multipliant membre à membre,

$$|u_{n+1} - u_n|_M \leq q^{2n-3} \max_{1 \leq i \leq n} |u_i - u_{i-1}|.$$

Or  $q$  est plus petit que l'unité. La série dont le terme général serait  $(u_{n+1} - u_n)_M$  est donc absolument et uniformément convergente. La somme des  $n$  premiers termes, qui est  $u_n - u_1$ , tend donc vers une limite.  $u_n$  a donc une limite  $u$ , qui représente une fonction continue dans l'aire  $S_1$ . Comme on a constamment  $(u_n - u_{n-1})_\alpha = 0$ , la fonction  $u$  prend sur  $\alpha$  les valeurs données. Je dis maintenant que  $u$  admet des dérivées continues des deux premiers ordres et vérifie l'équation proposée. Pour le faire voir, construisons la solution continue  $u'$  de l'équation qui existe dans  $S_1$  et qui prend sur le contour de  $S_1$  les mêmes valeurs que  $u$ . (Ceci est possible, puisque par hypothèse on sait résoudre le problème pour  $S_1$ .) Nous allons montrer que  $u$  et  $u'$  coïncident.

On peut, en effet, prendre  $n$  assez grand pour que  $u_n$  diffère aussi peu que l'on veut de sa limite  $u$ . A tout nombre  $\varepsilon$  arbitraire correspond donc un nombre  $n$  tel que l'on ait

$$|u - u_n|_M < \varepsilon,$$

quel que soit  $M$  dans  $S_1$  et même sur le contour de  $S_1$ .

On a donc en tout point du contour

$$|u' - u_n| < \varepsilon,$$

puisque  $u$  et  $u'$  coïncident sur le contour.

Mais alors on a en tout point intérieur

$$|u' - u_n|_M < \varepsilon.$$

Puisque  $u'$  et  $u_n$  sont solutions de l'équation. Il vient donc

$$|u' - u|_M < 2\varepsilon.$$

On a donc rigoureusement  $u = u'$  dans toute l'aire  $S_1$ , puisque, en un point  $M$  quelconque,  $u$  et  $u'$  ont des valeurs fixes et que  $\varepsilon$  est arbitraire.

On démontrera de même que  $v_n$  tend vers une limite  $v$  qui vérifie l'équation dans l'aire  $S_2$ .

Maintenant  $u$  et  $v$  coïncident dans  $\Sigma$ . Car la différence  $u - v$  est définie dans  $\Sigma$  et y vérifie l'équation. Cette différence est d'ailleurs nulle sur  $\alpha$  et sur  $\beta$ , car on a, d'après le Tableau (27),

$$(u_n - v_n)_\beta = 0, \quad (u_{n+1} - v_n)_\alpha = 0;$$

on a donc

$$|u - v|_\beta = |(u - u_n) - (v - v_n) + (u_n - v_n)|_\beta < |u - u_n|_\beta + |v - v_n|_\beta + |u_n - v_n|_\beta,$$

et, par suite,

$$|u - v|_\beta < \varepsilon$$

en prenant  $n$  assez grand.

On a donc, de nouveau, rigoureusement

$$(u - v)_\beta = 0$$

et de même

$$(u - v)_\alpha = 0.$$

$u - v$  est donc nulle sur le contour de  $\Sigma$  et y vérifie l'équation.

$\Sigma$  est d'ailleurs dans la région  $T$  où  $c$  est négatif. On a donc identiquement

$$u = v \quad \text{dans } \Sigma.$$

On pourra ainsi résoudre le problème pour des aires de plus en plus compliquées et étendues, et qui différeront aussi peu que l'on voudra d'une aire arbitrairement donnée. Pour pouvoir résoudre entièrement le problème relativement à une aire donnée d'avance, il manque encore un intermédiaire, par exemple la solution pour le cas d'un petit secteur ou d'un petit segment circulaire, ou d'un triangle, en un mot d'une aire présentant un angle aigu arbitraire. La méthode de M. Schwarz s'appliquerait alors sans modification. C'est là une question qui appelle encore de nouvelles recherches.

12. Avant de quitter ce sujet, nous ne pouvons nous dispenser de mentionner une importante propriété de l'équation linéaire dans le cas où les coefficients sont des fonctions analytiques de  $x$  et  $y$ . Toute intégrale de l'équation est alors elle-même une fonction analytique, dans la région, du moins, où les caractéristiques sont imaginaires<sup>(1)</sup>. Il suffit, évidemment, de démontrer la chose pour l'équation réduite

$$\Delta u = a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu,$$

puisque l'on peut toujours ramener l'équation à cette forme (sous l'hypo-

---

(1) PICARD, *Journal de l'École Polytechnique*, LX<sup>e</sup> Cahier.

thèse que les caractéristiques sont imaginaires) au moyen d'un changement de variables effectué par des fonctions analytiques.

Pour démontrer ce théorème, il y a peu de chose à ajouter aux développements donnés au n° 7.

Nous disons qu'une fonction  $f(x, y)$  de deux variables réelles est analytique et régulière dans une région, lorsque, dans le voisinage d'un point quelconque  $x_0, y_0$  de cette région, la fonction est développable en série procédant suivant les puissances entières et positives de  $x - x_0$  et  $y - y_0$ , la série restant convergente quand on remplace chaque terme par sa valeur absolue.

Il résulte de cette définition que si dans ce développement on pose

$$x - x_0 = r \cos \theta, \quad y - y_0 = r \sin \theta,$$

et qu'on exprime les puissances des lignes trigonométriques en fonctions linéaires des sinus et cosinus des arcs multiples, le groupe des termes homogènes en  $x - x_0$  et  $y - y_0$  de degré  $\nu$  va devenir une expression de la forme  $r^\nu P_\nu$ ,  $P_\nu$  étant une somme linéaire de sinus et cosinus des arcs

$$\nu\theta, \quad (\nu - 2)\theta, \quad (\nu - 4)\theta, \quad \dots,$$

et la série restera convergente si dans  $P_\nu$  on prend chaque terme avec sa valeur absolue <sup>(1)</sup>. Les coefficients de  $\theta$  sous les signes *sin* et *cos* dans  $P_\nu$  sont les entiers positifs inférieurs ou égaux à  $\nu$  et de même parité que  $\nu$ . Cela résulte immédiatement des expressions connues de  $\cos^\nu \theta$  et  $\sin^\nu \theta$  en fonction linéaire trigonométrique, et des formules qui transforment en somme un produit de deux lignes trigonométriques.

La série ainsi obtenue étant absolument convergente par hypothèse, nous pouvons y grouper les termes comme nous le voulons. Si donc nous groupons tous les termes en  $\cos \nu \theta$  par exemple, le coefficient de  $\cos \nu \theta$  sera une série ordonnée suivant les puissances croissantes de  $r$ , commençant par un terme en  $r^\nu$ , tous les termes ayant, d'ailleurs, la parité de  $\nu$ ; cette série reste évidemment convergente si l'on y remplace chaque terme par sa valeur absolue.

Réciiproquement, si une série trigonométrique absolument convergente

---

(1) Ce point résulte de l'expression que l'on peut obtenir pour les coefficients de  $P_\nu$  en calculant  $P_\nu$  par un développement de Fourier appliqué simplement aux termes homogènes de degré  $\nu$ .

admet pour coefficients de  $\cos\nu\theta$  et de  $\sin\nu\theta$  des séries en  $r$  présentant ce caractère, la série totale représentera une fonction analytique. Il suffit pour le voir de remonter la chaîne des déductions précédentes.

Reportons-nous alors au n° 7. Les  $a_m$  et  $b_m$  sont des séries en  $r$  comme celles que nous venons de rencontrer. Il en est donc de même pour  $\alpha_m$  et  $\beta_m$  d'après les expressions de ces quantités par des intégrales définies.

Si, de là, nous passons au n° 8, nous voyons donc que les différentes quantités  $u_2, v_3, v_4, \dots$  sont des fonctions analytiques. Mais, dans le cas actuel, il ne sera plus nécessaire, pour montrer que la série

$$(29) \quad u_2 + v_3 + v_4 + \dots$$

résoit le problème, de supposer que la série des valeurs au contour est une fonction admettant des dérivées troisièmes. Cette hypothèse avait pour but d'obtenir, pour certains coefficients du développement, une limite de la forme  $\frac{h}{m^4}$ , ce qui nous était indispensable pour démontrer rigoureusement que la série (29) admet des dérivées secondes.

Il va nous suffire de supposer l'existence de dérivées *secondes* seulement pour la fonction donnée sur le contour, et ce point est important pour la suite.

En effet, dans cette hypothèse, on voit immédiatement que, dans toutes les formules du Tableau (25), les exposants de  $m$  au dénominateur doivent simplement être diminués d'une unité, les formules restant, d'ailleurs, inaltérées. La série (29) converge donc maintenant comme  $\sum \frac{1}{m^3}$  au lieu de converger comme  $\sum \frac{1}{m^4}$ . Elle est encore absolument et uniformément convergente; seulement maintenant le coefficient de  $\cos m\theta$  dans cette série est une série en  $r$  obtenue par le groupement de tous les coefficients de  $\cos m\theta$  dans ses différents termes. C'est donc une série ordonnée suivant les puissances croissantes et positives de  $r$ , commençant par un terme en  $r^m$ , ne contenant que des termes de même parité que  $m$ , et absolument convergente. La série (29) est donc une fonction analytique de  $x$  et de  $y$ ; elle admet, par suite, des dérivées de tous les ordres, et, en particulier, du second ordre. Elle représente donc bien l'intégrale cherchée.

Il résulte immédiatement de là que toute intégrale est une fonction analytique. Soit, en effet, une intégrale quelconque  $u_1$ , continue dans le voisi-

nage de  $x_0, y_0$ . Traçons de ce point comme centre un cercle de rayon suffisamment petit. L'intégrale considérée  $u$ , prend sur la circonférence de ce cercle des valeurs déterminées formant une fonction  $U$  qui *admet des dérivées secondes*, puisque l'intégrale considérée admet des dérivées secondes en  $x$  et  $y$  dans toute région où elle existe. Si alors nous formons, par la méthode du n° 8, l'intégrale continue  $v$ , qui se réduit à  $U$  sur la circonférence, cette intégrale  $v$ , sera, comme on vient de le voir, une fonction analytique. Mais les intégrales  $u$ , et  $v$ , coïncident nécessairement, si le rayon du cercle est assez petit, puisqu'elles prennent les mêmes valeurs sur la circonférence. L'intégrale  $u$ , est donc analytique.

---