

ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

G. KOENIGS

La géométrie réglée et ses applications

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 1^{re} série, tome 6, n° 1 (1892), p. 1-67

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1892_1_6_1_1_0>

© Université Paul Sabatier, 1892, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>*

ÉTUDE BIBLIOGRAPHIQUE.

LA

GÉOMÉTRIE RÉGLÉE ET SES APPLICATIONS,

PAR M. G. KOENIGS,

Maitre de Conférences à l'École Normale et à la Sorbonne.

CHAPITRE III.

LES SYSTÈMES DE COMPLEXES LINÉAIRES.

Correspondance entre les points et les plans d'une droite. Couples inverses. — Corrélations homographiques sur une droite. — Rapport anharmonique et angle de deux corrélations. — Involution de deux corrélations. — Corrélations singulières. — Couple de droites conjuguées commun à deux complexes linéaires. — Système à deux termes. — Congruence linéaire. — Congruence linéaire singulière. — Cas de décomposition. — Invariant d'une congruence. — Rapport anharmonique de deux complexes linéaires. — Complexes linéaires en involution. — Systèmes linéaires de complexes linéaires. — Systèmes complémentaires. — Systèmes à trois termes. — Droites communes à trois complexes. — Demi-quadrillques. — Demi-quadrillques complémentaires. — Cas de dégénérescence. — Système à quatre termes. — Droites communes à quatre complexes. — Invariants des systèmes de complexes linéaires. — Forme générale de ces invariants.

20. Je ferai précéder l'étude des systèmes linéaires de complexes du premier degré de quelques remarques générales concernant les correspondances qui peuvent exister entre les points d'une droite x et les plans menés par cette droite.

Soit u un paramètre fixant la position d'un point M sur la droite x , de telle sorte qu'à un point M réponde une seule valeur de u et inversement; soit, de même,

t un paramètre correspondant uniformément aux positions d'un plan π mené par x . Par exemple, u est la distance de M à un point fixe de x , t est la tangente de l'angle du plan π avec un plan fixe mené par x .

Une relation entre u et t

$$f(u, t) = 0$$

fait se correspondre, suivant une certaine loi, les points de x et les plans de x . Si f est du degré m en u et du degré μ en t , on peut dire que cette correspondance est de la classe μ et du degré m . Si $m = \mu = 1$, on retrouve les *corrélations homographiques* introduites au n° 45.

Deux correspondances de degrés m et m' et de classes μ et μ' ont, *en général*,

$$\mu m' + \mu' m$$

couples communs, en appelant couple d'une correspondance le système d'un point M et du plan π correspondant.

Par exemple, deux corrélations homographiques ont en commun, en général, deux couples.

C'est ainsi que, s'il s'agit des deux corrélations de Chasles, relatives à une droite commune à deux surfaces réglées, les deux couples sont les deux couples de rac-cordement des deux surfaces.

21. Considérons sur une droite deux couples $(M, \pi), (M', \pi')$, nous appellerons *couples inverses* des deux premiers ceux que l'on obtient en échangeant les points; ainsi les couples inverses seront

$$(M, \pi'), (M', \pi).$$

22. Considérons sur une droite x deux corrélations homographiques H, H' , soient $(F, \Phi), (F', \Phi')$ leurs couples communs. Si un plan π tourne autour de x , les homologues O et O' de π dans ces deux corrélations se correspondent homographiquement et F, F' sont les points doubles de cette homographie. Le rapport anharmonique

$$(O', O, F, F') = k$$

est constant, d'après une propriété bien connue des homographies.

De même, si un point O se meut sur la droite, ses plans correspondants π et π' décrivent deux faisceaux homographiques dont Φ, Φ' sont les plans doubles; ici encore, le rapport anharmonique

$$(\pi, \pi', \Phi, \Phi') = k_1$$

est constant.

J'ajoute que $k_1 = k$.

En effet, soit π homologue de O dans H , et π' homologue de O dans H' , nous aurons

$$(\pi, \pi', \Phi, \Phi') = k_1.$$

Soit O' homologue de π' dans H ; le plan π' ayant pour homologue dans H le point O' et dans H' le point O , on a

$$(O, O', F, F') = k.$$

Or, dans les correspondances homographiques, le rapport anharmonique de quatre éléments égale celui des quatre correspondants. Donc, puisque à O, O', F, F' correspondent π, π', Φ, Φ' dans H , on a bien

$$k_1 = k.$$

Ce rapport k pourra être appelé le *rapport anharmonique* des deux corrélations.

Depuis que Laguerre a appris à définir les angles par un rapport anharmonique, on rattache souvent un angle à un rapport anharmonique, en posant

$$V = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log k.$$

Dans le cas de deux plans, par exemple, si k désigne le rapport anharmonique qu'ils forment avec les deux plans isotropes menés par leur droite commune, V se trouve être, d'après Laguerre, précisément l'angle des deux plans.

Pour indiquer une application immédiate de cette notion de l'angle de deux corrélations, supposons qu'il s'agisse des deux corrélations de Chasles de deux surfaces réglées suivant la droite commune x ; supposons de plus que, par une transformation homographique, on ait ramené les plans Φ et Φ' des couples de raccordement à être deux plans isotropes. Alors V sera l'angle de deux plans tangents en un même point O aux deux surfaces, et cet angle étant constant, on voit que les surfaces transformées *se couperont sous un angle constant tout du long de leur droite commune*.

23. Un cas particulièrement important de l'angle de deux corrélations homographiques, c'est celui où cet angle est droit, ou, ce qui revient au même, le cas où l'on a

$$k = -1.$$

Nous dirons alors que les deux corrélations sont EN INVOLUTION.

On voit que, dans ce cas, les couples de points O, O' qui correspondent à un

même plan π se correspondent involutivement ; de même pour les plans qui correspondent à un même point.

Ici intervient la notion de couples inverses dont j'ai déjà parlé.

Soit (M, π) un couple d'une corrélation homographique H ; soit H' une corrélation homographique en involution avec la première, et (M', π') un couple de H' , dans lequel le point M est commun avec le premier couple. Soit M' l'homologue de π' dans la corrélation H , en sorte que $(M, \pi), (M', \pi')$ seront deux couples de H . Il est clair que (M, π') étant un couple de H' , (M', π) devra en être un autre. En effet, M et M' correspondent à un même plan π' dans H et H' respectivement : donc, à cause de la symétrie caractéristique de l'involution, les points M' et M doivent être homologues d'un même plan dans H et H' respectivement, et puisque π' est homologue de M' dans H , il doit l'être de M dans H' . Ainsi les couples $(M', \pi), (M', \pi')$, inverses des couples $(M, \pi), (M', \pi')$, appartiennent à H' .

La démonstration elle-même prouve que réciproquement : Si une corrélation H' admet les deux couples inverses de deux couples appartenant à une corrélation H , les corrélations homographiques H et H' sont en involution.

24. Il pourra nous être utile de mettre, sous une forme analytique, les résultats précédents.

L'équation relative à une corrélation homographique aura la forme

$$aut + bu + ct + e = 0.$$

Cette équation dépend de trois paramètres, $a : b : c : e$.

Dans un travail qui date de 1882, j'ai indiqué un mode de représentation des corrélations homographiques au moyen d'un plan dans l'espace, en considérant a, b, c, e comme les coefficients de l'équation d'un tel plan. Je ne rapporterai pas cette représentation qui n'a rien d'essentiel dans cette exposition (¹).

Observons que, si

$$a'ut + b'u + c't + e' = 0$$

est l'équation d'une autre corrélation homographique H' , l'homographie qui relie deux plans homologues d'un même point s'écrit

$$(ac' - ca')tt' + (ae' - b'c)t + (bc' - a'e)t' + (be' - b'e) = 0.$$

La condition d'involution est donc

$$ae' - b'c - bc' + a'e = 0.$$

(¹) Presque en même temps, M. Stephanos publiait, dans les *Mathematische Annalen*, une représentation des homographies binaires qui offre plusieurs traits communs avec celle à laquelle je fais ici allusion.

Si l'on pose, pour un instant,

$$\theta(a, b, c, e) = bc - ae,$$

cette condition s'écrit

$$\frac{\partial \theta}{\partial a} a' + \frac{\partial \theta}{\partial b} b' + \frac{\partial \theta}{\partial c} c' + \frac{\partial \theta}{\partial e} e' = 0.$$

Elle exprime que les éléments $(a, b, c, e), (a', b', c', e')$ sont conjugués par rapport à la forme quadratique $\theta(a, b, c, e)$.

Les corrélations pour lesquelles on a

$$bc - ae = 0$$

seront dites *singulières*.

Les corrélations singulières offrent une particularité fort remarquable. Leur équation s'écrit

$$(at + b)(au + c) = 0;$$

ou encore

$$(t - t_0)(u - u_0) = 0,$$

en posant

$$t_0 = -\frac{b}{a}, \quad u_0 = -\frac{c}{a}.$$

Dans une corrélation singulière, un même point O correspond à tous les plans et un même plan π à tous les points. Une telle corrélation est donc caractérisée et définie par un couple (O, π) , et les couples de la corrélation se divisent en deux classes : les uns s'obtiennent en associant au point O un plan quelconque de la droite, les autres, en associant au plan π un point quelconque de la même droite. Le couple (O, π) fait partie de ces deux classes à la fois : nous l'appelons le *couple singulier* de la corrélation singulière.

25. Que peut bien signifier la condition analytique d'involution lorsque l'une des deux corrélations homographiques est singulière?

On a

$$ae' - b'c - bc' + a'e = 0,$$

et si la corrélation H' est singulière, on peut faire

$$a' = 1, \quad b' = -t_0, \quad c' = -u_0, \quad e' = u_0 t_0,$$

où u_0, t_0 sont les paramètres du couple singulier. La condition d'involution de-

vient

$$au_0 t_0 + bu_0 + ct_0 + e = 0;$$

elle exprime que le couple singulier appartient à H .

Ainsi, nous continuerons à dire qu'une corrélation homographique H est en involution avec une autre H' , H' étant singulière, lorsque le couple singulier de H' appartiendra à H .

Pareillement, deux corrélations singulières seront dites *en involution* si leurs couples singuliers ont en commun soit le point, soit le plan.

Considérons toutes les corrélations homographiques qui admettent deux couples donnés $(u_0, t_0), (u_1, t_1)$; leur équation peut recevoir la forme

$$\frac{u - u_0}{u - u_1} = \lambda \frac{t - t_0}{t - t_1}$$

où λ est quelconque. Il vient, en développant,

$$(1 - \lambda)ut - (u_1 - \lambda u_0)t - (t_0 - \lambda t_1)u + t_0 u_1 - \lambda t_1 u_0 = 0.$$

La condition d'involution avec une autre corrélation (a', b', c', e') s'écrira donc

$$e'(1 - \lambda) - c'(\lambda t_1 - t_0) - b'(\lambda u_0 - u_1) + a'(t_0 u_1 - \lambda t_1 u_0) = 0,$$

ou encore

$$(e' + c't_0 + b'u_1 + a'u_1 t_0) - \lambda(e' + c't_1 + b'u_0 + a'u_0 t_1) = 0.$$

Considérons alors deux corrélations admettant en commun les couples $(u_0, t_0), (u_1, t_1)$; ces corrélations correspondront à deux valeurs $\lambda = \alpha, \lambda = \beta$ de λ , et la condition d'involution de la corrélation (a', b', c', e') avec chacune d'elles donnera

$$\begin{aligned} (e' + c't_0 + b'u_1 + a'u_1 t_0) - \alpha(e' + c't_1 + b'u_0 + a'u_0 t_1) &= 0, \\ (e' + c't_0 + b'u_1 + a'u_1 t_0) - \beta(e' + c't_1 + b'u_0 + a'u_0 t_1) &= 0; \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} e' + c't_0 + b'u_1 + a'u_1 t_0 &= 0, \\ e' + c't_1 + b'u_0 + a'u_0 t_1 &= 0. \end{aligned}$$

Ces équations expriment que les couples inverses $(u_1, t_0), (u_0, t_1)$ appartiennent à la corrélation (a', b', c', e') . On a donc ce théorème :

Si deux corrélations H, H_1 ont en commun deux couples, toute corrélation H' en involution avec H et H_1 contient les couples inverses des deux premiers et, réciproquement, toute corrélation qui contient ces couples inverses est évidemment en involution avec H et H_1 (n° 23).

Ce théorème définit, on le voit, les corrélations qui sont en involution avec deux corrélations données, puisque ces deux corrélations ont généralement en commun deux couples.

26. Un fait domine la théorie des systèmes de complexes linéaires; c'est le suivant :

Deux complexes linéaires ont généralement en commun un couple de droites conjuguées.

On peut donner de ce théorème une démonstration géométrique.

Soient A et B les deux complexes, Δ une droite n'appartenant à aucun d'eux et Δ' , Δ'' les conjuguées de Δ dans les deux complexes. Excluons d'abord le cas où Δ' , Δ'' seraient dans un même plan. Alors Δ , Δ' , Δ'' définissent une quadrique Q, lieu des droites X qui coupent Δ , Δ' , Δ'' . Les droites X appartiennent aux deux complexes, puisqu'elles coupent les couples de droites conjuguées (Δ, Δ') , (Δ, Δ'') (n° 14). Considérons une génératrice Y de Q du même système que Δ , Δ' , Δ'' . Nous savons (n° 14) que les conjuguées Y' , Y'' de Y dans les deux complexes A et B sont aussi des génératrices de Q du même système que Δ , Δ' , Δ'' . De plus, le principe de correspondance nous prouve que Y' , Y'' se correspondent homographiquement, car Y' et Y'' se correspondent univoquement. D'après cela, cherchons les droites Y tracées sur Q du système Δ , Δ' , Δ'' , qui ont mêmes conjuguées dans les deux complexes.

Il faudra exprimer que Y' , Y'' coïncident; il y a généralement deux positions Y'_1 , Y'_2 de coïncidence. Prenons Y'_1 , soit Y_1 sa conjuguée dans A. Par hypothèse, Y'_1 est aussi la conjuguée de Y_1 dans B. Donc Y_1 , aussi bien que Y'_1 , a même conjuguée dans les deux complexes, et, puisqu'il n'y a dans le système de génératrices Δ , Δ' , Δ'' que Y'_1 , Y'_2 qui jouissent de cette propriété, il faut que Y_1 coïncide avec la seconde droite Y'_2 . Les droites Y'_1 , Y'_2 sont donc conjuguées l'une de l'autre dans les deux complexes.

Je ne discuterai pas cette démonstration géométrique. La démonstration analytique que je vais donner conduit à une discussion beaucoup plus sûre et nous fournira des formules utiles.

Prenons les deux complexes linéaires

$$A = \sum a_i x_i = 0,$$

$$B = \sum b_i x_i = 0;$$

les six équations

$$(1) \quad \frac{\partial \Omega(a)}{\partial a_i} = \rho z_i + \rho' z'_i$$

expriment, nous le savons d'après le dernier numéro du Chapitre précédent, que

les droites z, z' sont conjuguées dans le complexe A. Désignons par $c_1, \dots, c_6, c'_1, \dots, c'_6$ les coefficients des deux complexes spéciaux dont z, z' sont les axes; on a, nous l'avons vu,

$$z_i = \frac{\partial \Omega(c)}{\partial c_i}, \quad z'_i = \frac{\partial \Omega(c')}{\partial c'_i},$$

et l'équation (1) peut s'écrire

$$\frac{\partial \Omega(c)}{\partial a_i} = \rho \frac{\partial \Omega(c)}{\partial c_i} + \rho' \frac{\partial \Omega(c')}{\partial c'_i}$$

ou encore

$$\frac{\partial \Omega(a - \rho c - \rho' c')}{\partial (a_i - \rho c_i - \rho' c'_i)} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 6).$$

Puisque le discriminant de la forme Ω n'est pas nul, ces six équations exigent que l'on ait

$$(2) \quad a_i - \rho c_i - \rho' c'_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 6).$$

Pareillement, six équations telles que

$$(3) \quad b_i - \sigma c_i - \sigma' c'_i = 0$$

expriment que les droites z, z' sont conjuguées dans le complexe B.

Observons maintenant que $\rho\sigma' - \rho'\sigma$ ne saurait être nul, sans quoi les complexes A, B ne seraient pas distincts d'après les équations (2), (3), car on tire de ces équations

$$\begin{aligned} \rho b_i - \sigma a_i &= (\rho\sigma' - \rho'\sigma) c'_i, \\ \rho' b_i - \sigma' a_i &= -(\rho\sigma' - \rho'\sigma) c_i. \end{aligned}$$

Puisque $\rho\sigma' - \rho'\sigma$ n'est pas nul, on a, en divisant par ce binôme,

$$(4) \quad c_i = \alpha a_i + \beta b_i,$$

$$(5) \quad c'_i = \alpha' a_i + \beta' b_i.$$

équations équivalentes à (2) et (3).

Il ne reste donc plus, pour résoudre le problème, qu'à calculer $\alpha : \beta$ et $\alpha' : \beta'$. On y parvient en exprimant la dernière condition qui nous reste à écrire, à savoir que le complexe $C = \sum c_i x_i = 0$ est spécial et de même pour $C' = \sum c'_i x_i = 0$. On doit écrire

$$\begin{aligned} \Omega(\alpha a + \beta b) &= \Omega(c) = 0, \\ \Omega(\alpha' a + \beta' b) &= \Omega(c') = 0; \end{aligned}$$

ou, en développant,

$$(6) \quad \Omega(a) \alpha^2 + 2\Omega(a, b) \alpha\beta + \Omega(b) \beta^2 = 0,$$

et même équation pour $\alpha' : \beta'$.

Cette équation nous donnera deux valeurs de $\alpha : \beta$, et, portant une de ces valeurs dans (4) et l'autre dans (5), nous aurons bien deux complexes spéciaux C, C' dont les axes z, z' seront conjugués dans les deux complexes, puisque les équations (4), (5) sont équivalentes aux équations (2), (3), lesquelles expriment précisément que z et z' sont conjugués dans A et B.

Le théorème est donc établi.

L'imaginarité des racines de (6) n'est pas un obstacle; mais la démonstration tombe en défaut si l'équation (6) en $\alpha : \beta$ a ses racines égales, c'est-à-dire si l'expression

$$(7) \quad \Phi(\alpha | b) = \Omega(\alpha) \Omega(b) - [\Omega(\alpha, b)]^2$$

est nulle. Nous reviendrons plus loin sur l'hypothèse où Φ est nul, et qui est exceptionnelle.

27. Tirons tout de suite une conséquence du résultat que l'on vient d'obtenir.

Considérons tous les complexes linéaires compris dans l'équation

$$\lambda A + \mu B = \Sigma (\lambda a_i + \mu b_i) x_i = 0$$

où $\lambda : \mu$ est un paramètre arbitraire. Nous dirons de ces complexes qu'ils forment un faisceau ou mieux un *système à deux termes*.

Les droites z, z' , qui sont conjuguées à la fois dans A et B, sont conjuguées par rapport à tout complexe du système à deux termes (A, B).

D'après les dernières lignes du n° 19, il suffira, pour démontrer cette proposition, de prouver qu'on peut trouver, λ, μ étant quelconques, deux quantités τ, τ' telles que

$$\frac{\partial \Omega(\lambda a + \mu b)}{\partial (\lambda a_i + \mu b_i)} = \tau z_i + \tau' z'_i$$

ou encore, ce qui revient au même [voir le passage de (1) à (2)],

$$\lambda a_i + \mu b_i = \tau c_i + \tau' c'_i.$$

Il suffit de se reporter aux équations (2), (3) pour reconnaître que l'on satisfait à ces identités en posant

$$\tau = \lambda \rho + \mu \sigma, \quad \tau' = \lambda \rho' + \mu \sigma'.$$

Ainsi : *Tous les complexes d'un système à deux termes (A, B) ont en commun un couple de droites conjuguées.*

Maintenant, parmi les complexes du système (A, B), il y en a deux qui sont

spéciaux, car, si l'on exprime que le complexe $\lambda A + \mu B = o$ est spécial, on est amené à écrire

$$\Omega(\lambda a + \mu b) = o,$$

équation qui n'est autre que l'équation (6), où λ remplace α et μ remplace β . On reconnaît en même temps, par ce moyen, que les droites z , z' sont précisément les directrices de ces complexes spéciaux. Ainsi :

Dans tout système (A, B) à deux termes de complexes linéaires, il y a deux de ces complexes qui sont spéciaux ; les directrices de ces complexes spéciaux sont les deux droites qui sont conjuguées l'une de l'autre dans tous les complexes du système.

28. On appelle *congruence linéaire* l'ensemble des droites communes à deux complexes linéaires.

Il est clair que la congruence commune à deux complexes d'un système à deux termes est composée de droites appartenant à tous les complexes du système. En effet, les équations $A = o$, $B = o$ entraîneront celle-ci

$$\lambda A + \mu B = o.$$

En particulier, les droites de cette congruence appartiennent aux complexes spéciaux, et, par suite :

La congruence commune à deux complexes linéaires A, B est composée des droites qui coupent à la fois les droites z , z' conjuguées l'une de l'autre dans les deux complexes.

Pour ce motif, on donne aux droites z , z' le nom de *directrices de la congruence*.

Pour mener la droite de la congruence issue d'un point P , on prendra l'intersection de deux plans menés par P et les deux directrices. Cette droite est unique. Elle est cependant indéterminée si le point P est pris sur l'une des deux directrices.

Pour tracer la droite de la congruence située dans un plan Π , il suffira de joindre les traces des deux directrices sur ce plan. Il n'y a qu'une solution ; mais le problème est indéterminé si le plan Π passe par l'une des deux directrices.

En résumé, la congruence linéaire commune à deux complexes du premier ordre est du premier ordre et de la première classe ; résultat que l'on pouvait d'ailleurs énoncer *a priori*. De plus, deux complexes linéaires ont en commun une infinité de faisceaux plans que l'on engendre en associant à un plan Π , mené

par une directrice de la congruence commune, le point P où ce plan coupe l'autre directrice.

29. Arrivons maintenant au cas singulier, laissé de côté, où l'expression $\Phi(a|b)$ est nulle. Les deux racines de (6) étant égales, les raisonnements précédents tombent en défaut.

Excluons d'abord le cas où tous les complexes linéaires compris dans le système à deux termes $\lambda A + \mu B = o$ seraient spéciaux, c'est-à-dire excluons le cas où

$$\Omega(\lambda\alpha + \mu b) = \Omega(a)\lambda^2 + 2\Omega(a, b)\lambda\mu + \Omega(b)\mu^2$$

serait nul identiquement; ce qui exigerait

$$\Omega(a) = o, \quad \Omega(a, b) = o, \quad \Omega(b) = o.$$

L'équation (6) possède alors une racine double que je désigne par $\alpha : \beta$, et, dans le système à deux termes, il n'y a qu'un seul complexe spécial, à savoir

$$\alpha A + \beta B = o.$$

Je représente encore par z_i les coordonnées de la directrice de ce complexe; enfin je considère un complexe quelconque

$$\lambda_0 A + \mu_0 B = o$$

du système à deux termes (A, B).

On a d'abord, par hypothèse,

$$\Omega(\alpha A + \beta B) = o;$$

formons en outre

$$\Omega(\alpha A + \beta B | \lambda_0 A + \mu_0 B);$$

λ_0, μ_0 figurent linéairement dans cette expression; de même α, β ; on peut donc écrire

$$\begin{aligned} & \Omega(\alpha A + \beta B | \lambda_0 A + \mu_0 B) \\ &= \Omega(\alpha A + \beta B | a)\lambda_0 + \Omega(\alpha A + \beta B | b)\mu_0 \\ &= \Omega(a | a)\alpha\lambda_0 + \Omega(b | a)\beta\lambda_0 + \Omega(a | b)\alpha\mu_0 + \Omega(b | b)\beta\mu_0. \end{aligned}$$

Mais $\Omega(a | a) = \Omega(a)$, $\Omega(b | a) = \Omega(a | b)$, $\Omega(b | b) = \Omega(b)$; on peut donc écrire

$$= [\Omega(a)\alpha + \Omega(a | b)\beta]\lambda_0 + [\Omega(a | b)\alpha + \Omega(b)\beta]\mu_0,$$

c'est-à-dire $= o$, puisque, $\alpha : \beta$ étant racine double de (6), on a

$$\begin{aligned} & \Omega(a)\alpha + \Omega(a | b)\beta = o, \\ & \Omega(a | b)\alpha + \Omega(b)\beta = o. \end{aligned}$$

Nous avons donc

$$\Omega(\alpha a + \beta b | \lambda_0 a + \mu_0 b) = 0,$$

quels que soient λ_0 et μ_0 ; cela s'écrit

$$\sum \frac{\partial \Omega(\alpha a + \beta b)}{\partial (\alpha a_i + \beta b_i)} (\lambda_0 a_i + \mu_0 b_i) = 0,$$

ou encore, eu égard à nos notations,

$$(8) \quad \Sigma (\lambda_0 a_i + \mu_0 b_i) z_i = 0.$$

De là ce théorème :

Lorsque $\Phi(a|b) = 0$ ou, plus exactement, lorsque l'équation (6) a une racine double et n'est pas une identité, le système (A, B) à deux termes contient un complexe spécial unique et la directrice de ce complexe spécial est une droite commune à tous les complexes du système.

Il est clair que toute droite commune à deux complexes du système appartient à tous les autres complexes du système, comme dans le cas général. La congruence linéaire commune à tous ces complexes est donc composée de droites qui coupent toutes la directrice z du complexe spécial unique qui fait partie du système. Mais cette condition est insuffisante pour définir la congruence.

Il est facile de compléter cette définition. Soient, en effet, Δ une droite de cette congruence, P le point où elle coupe la droite z et Π le plan mené par Δ et par z . Considérons le faisceau plan (P, Π); deux droites de ce faisceau, la droite z et la droite Δ , font partie de l'un quelconque des complexes du système; donc le point P admet le plan Π comme plan polaire dans tous les complexes du système (A, B); le faisceau (P, Π) appartient à tous ces complexes (n° 13). De là résulte aussitôt que *tous les complexes du système (A, B) déterminent sur la droite qui leur est commune la même corrélation normale* (n° 15). Ainsi la congruence linéaire admet ici la définition suivante :

Pour qu'une droite Δ fasse partie de la congruence, il faut et il suffit : 1° qu'elle coupe la droite fixe (directrice z); 2° que le plan (z, Δ) mené par z et Δ et le point (z, Δ) intersection de z et de Δ soient deux éléments correspondants d'une corrélation homographique donnée, a priori, sur la droite z .

On peut placer ici une remarque.

Considérons une congruence linéaire générale admettant les deux directrices z , z' ; considérons une quadrique Q arbitraire menée par z et z' . La congruence est composée des droites qui coupent la quadrique Q en deux points situés l'un sur z , l'autre sur z' . Que z' vienne à se rapprocher infiniment de z , la congruence ne

sera autre que l'ensemble des droites qui rencontrent la quadrique en deux points infiniment voisins, dont l'un situé sur ζ , c'est-à-dire l'ensemble des tangentes à la quadrique aux divers points de sa génératrice ζ . La corrélation qui figure dans la définition de la congruence n'est donc autre que la corrélation de Chasles qui établit la correspondance entre les points de ζ et les plans tangents en ces points.

Le lecteur reconnaîtra facilement que les congruences singulières que nous venons de définir sont encore du premier ordre et de la première classe.

30. Reste le cas réservé où l'équation (6) est une identité. Les complexes du système (A, B) à deux termes sont tous spéciaux. Cherchons le lieu de leurs directrices.

Soit un de ces complexes

$$\lambda A + \mu B = 0,$$

et γ sa directrice, on a

$$\gamma_i = \frac{\partial \Omega(\lambda a + \mu b)}{\partial (\lambda a_i + \mu b_i)},$$

et comme le second membre est linéaire et homogène en λ, μ , on peut écrire

$$\gamma_i = \lambda \frac{\partial \Omega(a)}{\partial a_i} + \mu \frac{\partial \Omega(b)}{\partial b_i}.$$

On reconnaît ainsi que les directrices des complexes du système (A, B) (tous spéciaux) forment un faisceau plan. Énonçons donc ce théorème :

Lorsque tous les complexes d'un système à deux termes sont spéciaux, leurs directrices forment un faisceau plan.

Quelle est la congruence commune à ces complexes? La réponse est facile. Toute droite de la congruence doit couper toutes les droites du faisceau des directrices. Une telle droite doit donc, ou bien être dans le plan du faisceau, ou bien passer au centre du faisceau. En un mot, la congruence se trouve ici décomposée en deux hyperfaisceaux dont l'un est l'ensemble des droites du plan des directrices, et l'autre est la gerbe des droites issues du point de rencontre des directrices.

Voici donc un exemple où la congruence commune à deux complexes se décompose en deux : l'une, formant un système plan, est de l'ordre zéro et de la classe 1; l'autre, formant une gerbe, est du degré 1 et de la classe zéro. La somme des classes et celle de degrés sont égales à $0 + 1 = 1 + 0 = 1$, c'est-à-dire au produit des degrés des complexes.

Nous aurons à reconnaître plus tard la généralité de ce fait pour des complexes quelconques. Il est intéressant de noter qu'il se présente dès la congruence linéaire.

Notre congruence linéaire dégénérée a ici une infinité de directrices qui forment un faisceau (A, α) . Soit x une droite de ce faisceau. Dans le cas d'une congruence singulière, une corrélation sur la directrice x sert à définir la congruence. Il est clair qu'ici cette corrélation est à son tour singulière. Car, soit (O, Π) un couple de cette corrélation, c'est-à-dire tel que toute droite du faisceau (O, Π) appartienne à la congruence, O étant sur x et Π étant un plan de x . Il faudra que O soit en A et Π est alors arbitraire, ou que Π coïncide avec le plan α et O est alors arbitraire.

De cette définition des couples (O, Π) de la corrélation, on peut donc conclure qu'elle est singulière, et que (A, α) est son couple singulier.

31. Nous avons vu que l'expression $\Omega(a)$ est un invariant du complexe $\Sigma a_i x_i = o$. Pareillement, l'expression

$$\Phi(a | b) = \Omega(a)\Omega(b) - [\Omega(a | b)]^2$$

est un invariant de la congruence commune aux deux complexes A et B . Cet invariant est de l'espèce de ceux que l'on nomme *combinant*. Si l'on effectue une transformation linéaire des variables x_i , il se reproduit multiplié par la quatrième puissance du déterminant de la substitution, et, en cela, c'est un invariant. Mais, de plus, si l'on remplace les deux équations

$$A = o, \quad B = o$$

par celles-ci

$$\lambda A + \mu B = o, \quad \lambda' A + \mu' B = o,$$

$\Phi(a | b)$ se reproduit multiplié par $(\lambda\mu' - \mu\lambda')^2$. On a, en effet,

$$\begin{aligned} & \Phi(\lambda a + \mu b | \lambda' a + \mu' b) \\ &= \Omega(\lambda a + \mu b)\Omega(\lambda' a + \mu' b) - [\Omega(\lambda a + \mu b | \lambda' a + \mu' b)]^2 \\ &= [\Omega(a)\lambda^2 + 2\Omega(a | b)\lambda\mu + \Omega(b)\mu^2][\Omega(a)\lambda'^2 + 2\Omega(a | b)\lambda'\mu' + \Omega(b)\mu'^2] \\ &\quad - [\Omega(a)\lambda\lambda' + \Omega(a | b)(\lambda\mu' + \mu\lambda') + \Omega(b)\mu\mu']^2 \\ &= [\Omega(a)\Omega(b) - \Omega(a | b)]^2(\lambda\mu' - \mu\lambda')^2. \end{aligned}$$

Les propriétés de l'invariant Φ correspondent donc à celles de la congruence linéaire prise en elle-même, indépendamment du choix des coordonnées, comme aussi du choix des deux complexes linéaires A, B , au moyen desquels on les définit; de là le nom de *combinant* donné à cet invariant.

32. Deux complexes linéaires A, B étant donnés, on peut séparer les propriétés de leur ensemble en deux groupes; les unes appartiennent à leur congruence commune et demeurent les mêmes si l'on substitue à A, B deux autres complexes

du système à deux termes (A, B) : à ces propriétés se rattache l'invariant $\Phi(a|b)$, dont l'évanouissement exprime que la congruence est singulière.

Mais, à côté de ces propriétés, il en est d'autres qui appartiennent exclusivement aux deux complexes A et B . C'est ainsi que, si l'on se donne deux sphères, leur cercle commun appartient à toutes les sphères du faisceau, tandis que l'angle sous lequel elles se coupent leur appartient en propre.

Ce sont les propriétés de cet ordre que nous allons envisager pour les deux complexes A, B .

Considérons le complexe

$$A + kB = o;$$

lorsque k varie, ce complexe parcourt tout le système à deux termes (A, B). Soit Δ une droite de la congruence commune aux complexes de ce système et Π un plan mené par Δ , appelons P_k le pôle du plan Π dans le complexe $A + kB = o$. Lorsque k varie, le point P_k décrit la droite Δ . Je dis que P_k correspond, d'une façon univoque, aux valeurs de k . D'abord, en effet, k étant donné, P_k est parfaitement déterminé; en second lieu, si l'on se donne P_k comme pôle du plan Π dans un complexe $A + kB$ du faisceau, il suffira, pour trouver la valeur de k , d'écrire qu'une droite z menée par P_k dans le plan Π fait partie du complexe, ce qui donnera

$$A(z) + kB(z) = o,$$

équation en k du premier degré.

On voit que l'on exclut le cas où les complexes du système (A, B) détermineraient la même corrélation normale sur Δ . Dans ce cas, et dans ce cas seulement, $A(z)$ et $B(z)$ seraient nuls pour toute position du point P_k sur la droite Δ . D'ailleurs la congruence serait alors singulière et Δ serait sa directrice.

Puisque P_k et k se correspondent univoquement, il en résulte, d'après le principe de correspondance, que le rapport anharmonique de quatre valeurs de k est égal à celui des points P_k correspondants. On a donc ce théorème :

Soient quatre complexes du système, obtenus en prenant

$$k = \alpha, \beta, \gamma, \delta,$$

et Δ une droite de la congruence commune, les pôles dans les quatre complexes d'un plan, mené par Δ , forment un rapport anharmonique égal au rapport anharmonique des quantités $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Ce rapport anharmonique est donc constant à deux points de vue; d'abord il demeure constant quand le plan tourne autour de Δ , et, en second lieu, quand Δ se déplace dans la congruence.

Le même raisonnement conduit au théorème suivant, qui est le transformé du précédent par polaires réciproques.

Soient quatre complexes du système, obtenus en prenant

$$k = \alpha, \beta, \gamma, \delta,$$

et Δ une droite de la congruence commune; les plans polaires d'un point quelconque, pris sur Δ , dans les quatre complexes forment un faisceau dont le rapport anharmonique est égal à celui des quantités $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Ces deux théorèmes subsistent si les deux directrices de la congruence viennent se confondre.

Ils conservent même leur raison d'être si tous les complexes du système sont spéciaux; le rapport anharmonique est, dans ce cas, égal à celui des quatre directrices du complexe, lesquelles forment un faisceau plan.

33. Raisonnons maintenant dans l'hypothèse où les deux directrices de la congruence sont distinctes. Deux complexes

$$A + \varphi B = 0, \quad A + \varphi' B = 0$$

étant donnés, adjoignons-leur les complexes spéciaux du système

$$A + kB = 0, \quad A + k'B = 0,$$

en sorte que k, k' seront racines de l'équation

$$(8) \quad \Omega(b)k^2 + 2\Omega(a|b)k + \Omega(a) = 0.$$

Soit Δ une droite de la congruence qui coupera, par conséquent, en deux points F, F' les directrices z, z' . Si l'on mène un plan arbitraire Π par Δ , F et F' sont les pôles de ce plan dans les deux complexes *spéciaux* (k) et (k'); ils demeurent fixes lorsque le plan tourne; par contre, les pôles $P_\rho, P_{\rho'}$ de ce plan Π dans les complexes (φ), (φ') varient, mais ils forment, avec F, F' , un rapport anharmonique

$$(P_\rho, P_{\rho'}, F, F') = (\varphi, \varphi', k, k')$$

qui est constant. Ils décrivent donc sur Δ une homographie dont F, F' sont les points doubles et dont $(\varphi, \varphi', k, k')$ est le rapport anharmonique.

On verra de même que si l'on prend un point arbitraire P sur Δ , si $\Pi_\rho, \Pi_{\rho'}$ sont les plans polaires de P dans les complexes (φ), (φ') et Φ, Φ' les plans menés par Δ et z , par Δ et z' , ces plans sont les plans polaires de P dans les complexes *spéciaux* (k), (k'); ils sont fixes. Le rapport anharmonique des quatre plans $\Pi_\rho, \Pi_{\rho'}, \Phi, \Phi'$,

Φ, Φ' est égal à

$$(\Pi_\rho, \Pi_{\rho'}, \Phi, \Phi') = (\rho, \rho', k, k');$$

il est constant et a même valeur que le premier.

Lorsque P se déplace sur Δ , les plans $\Pi_\rho, \Pi_{\rho'}$ varient seuls et décrivent dès lors deux faisceaux homographiques autour de Δ , dont Φ, Φ' sont les plans doubles et (ρ, ρ', k, k') le rapport anharmonique constant.

Ce rapport anharmonique est facile à calculer. Désignons-le par ε ; nous aurons

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{\rho - k}{\rho' - k} : \frac{\rho - k'}{\rho' - k'} = \frac{(\rho - k)(\rho' - k')}{(\rho' - k)(\rho - k')} \\ &= \frac{2(\rho\rho' + kk') - (k + k')(\rho + \rho') - (k' - k)(\rho' - \rho)}{2(\rho\rho' + kk') - (k + k')(\rho + \rho') + (k' - k)(\rho' - \rho)}, \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{\varepsilon + 1}{\varepsilon - 1} = \frac{2(\rho\rho' + kk') - (k + k')(\rho + \rho')}{(k' - k)(\rho' - \rho)},$$

et comme k, k' sont racines de (8), il vient

$$\frac{\varepsilon + 1}{\varepsilon - 1} = \frac{\Omega(b)\rho\rho' + \Omega(a|b)\sqrt{\rho + \rho'} + \Omega(a)}{(\rho' - \rho)\sqrt{-\Phi(a|b)}}.$$

Faisons, en particulier, $\rho' = \infty$, puis $\rho = 0$, les deux complexes considérés seront alors A et B, et nous aurons

$$\frac{\varepsilon + 1}{\varepsilon - 1} = \frac{\Omega(a|b)}{\sqrt{-\Phi(a|b)}}.$$

Il suffit de se reporter à ce que nous avons dit plus haut au sujet des corrélations homographiques sur une droite pour voir que ce rapport anharmonique constant ε est égal à celui des deux corrélations normales des complexes suivant une quelconque de leurs droites *communes*. L'angle de ces deux corrélations normales sera, ce que nous appellerons aussi avec M. Klein, l'*angle des deux complexes*.

Si l'on pose

$$V = \frac{1}{2i} \log \varepsilon,$$

on trouve aisément

$$(9) \quad \cos V = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} + \sqrt{\varepsilon} \right) = \frac{\Omega(a|b)}{\sqrt{\Omega(a)\Omega(b)}}.$$

Sans qu'il soit nécessaire d'insister beaucoup, on voit que si $V = \frac{\pi}{2}$ ou $\varepsilon = -1$, les corrélations normales sont en involution et les deux complexes sont dits aussi en *involution* ou orthogonaux.

La condition d'involution de deux complexes A, B est dès lors la suivante

$$\Omega(\alpha | b) = 0.$$

34. Examinons quelques cas particuliers.

La notion d'involution, telle que nous venons de la donner, tombe en défaut si l'un des complexes A, B est spécial. Mais nous pouvons continuer à dire que deux complexes sont en involution chaque fois que l'invariant simultané $\Omega(\alpha | b)$ sera nul, même si α et b devaient spéciaux à la fois.

Au surplus, supposons que B soit spécial et soit z sa directrice. L'équation

$$\Omega(\alpha | b) = 0$$

s'écrit

$$\sum \frac{\partial \Omega}{\partial b_i} \alpha_i = 0;$$

mais, comme

$$z_i = \frac{\partial \Omega}{\partial b_i},$$

on a, en somme,

$$\sum \alpha_i z_i = 0.$$

Ainsi un complexe spécial est en involution avec tous les complexes qui contiennent sa directrice et réciproquement.

Plus particulièrement encore, si A lui-même devient spécial, on voit, par application de ce théorème, que deux complexes spéciaux sont en involution sous la condition nécessaire et suffisante que leurs directions se rencontrent.

On peut présenter à un autre point de vue la notion de complexes en involution.

Soit un complexe

$$\sum \alpha_i x_i = 0;$$

la condition pour que deux droites y, y' soient conjuguées dans le complexe s'écrit, comme on sait, sous la forme

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \Omega(\alpha)}{\partial \alpha_i} = \rho y_i + \rho' y'_i \quad (i = 1, 2, \dots, 6),$$

où ρ, ρ' sont deux paramètres.

Supposons que la droite y décrive le complexe

$$\sum b_i y_i = 0,$$

l'équation

$$\frac{1}{2} \sum \frac{\partial \Omega(\alpha)}{\partial \alpha_i} b_i = \Omega(\alpha | b) = \rho \sum b_i y_i + \rho' \sum b_i y'_i$$

donne

$$\Omega(\alpha | b) = \rho' \sum b_i y'_i.$$

Si nous cherchons dès lors la condition pour que la droite y' décrive aussi le complexe B, nous trouvons

$$\Omega(\alpha | b) = 0.$$

Mais si y' fait partie d'un complexe B en même temps que y , cela signifie que B est à lui-même son propre polaire réciproque par rapport au complexe A.

On arrive donc au théorème suivant :

Si deux complexes linéaires sont en involution, chacun d'eux est son propre polaire réciproque par rapport à l'autre.

Si l'un des complexes est spécial, on retrouve la propriété des droites d'un complexe de coïncider avec leur conjuguée par rapport à ce complexe.

35. La considération des complexes en involution joue le rôle le plus important dans la géométrie de la ligne droite. Elle est liée étroitement à la théorie *des systèmes linéaires de complexes du premier degré*.

Nous avons appelé *système à deux termes* l'ensemble des complexes contenus dans l'équation

$$\lambda A + \mu B = 0;$$

pareillement, soient A, B, C trois complexes linéaires non contenus dans un même système à deux termes, nous appellerons *système à trois termes* l'ensemble des complexes représentés par l'équation

$$\lambda A + \mu B + \nu C = 0.$$

Considérons encore quatre complexes linéaires A, B, C, D non contenus dans un même système à trois termes, les complexes linéaires représentés par l'équation

$$\lambda A + \mu B + \nu C + \rho D = 0$$

formeront un ensemble à quatre termes.

Enfin, en prenant cinq complexes linéaires, A, B, C, D, E, non contenus dans un même système à quatre termes, l'équation

$$\lambda A + \mu B + \nu C + \rho D + \sigma E = 0$$

représentera un système à cinq termes.

Il y a lieu d'observer que l'équation d'un complexe linéaire

$$\sum a_i x_i = 0$$

contient six coefficients et, par suite, cinq paramètres. Si l'on prend six complexes

$$\begin{aligned} A &= \sum a_i x_i = 0, \\ B &= \sum b_i x_i = 0, \\ C &= \sum c_i x_i = 0, \\ D &= \sum d_i x_i = 0, \\ E &= \sum e_i x_i = 0, \\ F &= \sum f_i x_i = 0, \end{aligned}$$

et que l'on forme l'expression

$$\lambda A + \mu B + \nu C + \rho D + \sigma E + \tau F = \sum u_i x_i,$$

on aura

$$(10) \quad u_i = a_i \lambda + b_i \mu + c_i \nu + d_i \rho + e_i \sigma + f_i \tau \quad (i = 1, 2, \dots, 6).$$

Le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 & f_1 \end{vmatrix}$$

n'étant pas supposé nul, on ne pourra pas trouver de valeurs de $\lambda, \mu, \nu, \rho, \sigma, \tau$ autres que zéro, qui annulent tous les u_i . Il ne pourra donc exister de relation linéaire de la forme

$$\lambda A + \mu B + \nu C + \rho D + \sigma E + \tau F = 0,$$

et les complexes A, B, C, D, E, F ne feront pas partie d'un même système à cinq termes.

Si, au contraire, Δ était nul, une telle relation linéaire aurait lieu et les six complexes feraient partie d'un même système à cinq ou à un nombre moindre de termes.

Si Δ n'est pas nul, c'est-à-dire si A, B, C, D, E, F ne font pas partie d'un même système à cinq termes ou d'un système à moins de cinq termes, les équations (10) peuvent être résolues par rapport à $\lambda, \mu, \nu, \rho, \sigma, \tau$ et, par suite, tout complexe linéaire

$$\sum u_i x_i = 0$$

peut être représenté par une équation telle que

$$\lambda A + \mu B + \nu C + \rho D + \sigma E + \tau F = 0.$$

On a donc ce théorème :

Si six complexes linéaires, A, B, C, D, E, F, ne font pas partie d'un même

système à cinq termes ou d'un même système à un nombre de termes moindre que cinq, l'équation de tout complexe linéaire peut recevoir la forme

$$\lambda A + \mu B + \nu C + \rho D + \sigma E + \tau F = 0.$$

Autrement dit, un système à six termes comprend tous les complexes linéaires possibles. Nous aurons à faire usage, plus loin, de ce théorème, à propos de la transformation des coordonnées. Pour le moment, nous ne nous écarterons pas des systèmes linéaires, qui sont l'objet de notre présente étude.

36. Considérons le système à p termes

$$(11) \quad \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_p A_p = 0,$$

où

$$A_\mu = \alpha_{\mu 1} x_1 + \alpha_{\mu 2} x_2 + \dots + \alpha_{\mu 6} x_6.$$

Soit le complexe $\Sigma u_i x_i = 0$, et exprimons que ce complexe u est en involution avec le complexe (11), nous aurons

$$\Omega(u | \lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_p \alpha_p) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\Omega(u | \alpha_1) \lambda_1 + \dots + \Omega(u | \alpha_p) \lambda_p = 0.$$

On voit donc que, si l'on écrit

$$(12) \quad \Omega(u | \alpha_1) = 0, \quad \Omega(u | \alpha_2) = 0, \quad \Omega(u | \alpha_p) = 0,$$

le complexe (u) sera tout d'abord en involution avec les complexes $(\alpha_1), (\alpha_2), \dots, (\alpha_p)$, et, de plus, **COMME CONSÉQUENCE**, sera en involution avec tous les complexes du système à p termes (11).

Les équations (12) s'écrivent

$$\sum \frac{\partial \Omega(\alpha_1)}{\partial \alpha_{1i}} u_i = 0, \quad \sum \frac{\partial \Omega(\alpha_2)}{\partial \alpha_{2i}} u_i = 0, \quad \dots, \quad \sum \frac{\partial \Omega(\alpha_p)}{\partial \alpha_{pi}} u_i = 0.$$

Nous avons là p équations entre les u_i ; elles sont toutes distinctes, car, s'il en était autrement, on pourrait trouver des quantités $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p$ non toutes nulles et vérifiant les relations

$$\rho_1 \frac{\partial \Omega(\alpha_1)}{\partial \alpha_{1i}} + \dots + \rho_p \frac{\partial \Omega(\alpha_p)}{\partial \alpha_{pi}} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 6).$$

Ces relations s'écrivent

$$\frac{\partial \Omega(\rho_1 \alpha_1 + \dots + \rho_p \alpha_p)}{\partial (\rho_1 \alpha_{1i} + \dots + \rho_p \alpha_{pi})} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 6),$$

et, comme Ω a son discriminant non nul, cela exigerait que l'on eût

$$\rho_1 \alpha_{1i} + \dots + \rho_p \alpha_{pi} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 6).$$

Il en résulterait donc l'identité

$$\rho_1 A_1 + \dots + \rho_p A_p = 0,$$

et les complexes A_1, \dots, A_p feraient partie d'un système à $(p - 1)$ termes ou à un nombre moindre de termes. Ce serait contraire à notre hypothèse que le système (11) est un système à p termes.

Les équations (12) sont donc distinctes et permettent, en conséquence, de tirer p des u_i en fonction des $6 - p$ autres. Les valeurs générales des u_i qui vérifient les équations (12) auront donc la forme

$$u_i = g_{1,i} \mu_1 + g_{2,i} \mu_2 + \dots + g_{6-p,i} \mu_{6-p} \quad (i = 1, 2, \dots, 6),$$

et les g sont des coefficients constants tels que, pour aucune valeur des μ autre que zéro, les u_i ne peuvent s'annuler tous à la fois. D'après cela, si l'on pose

$$G_1 = \sum g_{1,i} x_i, \quad G_2 = \sum g_{2,i} x_i, \quad \dots, \quad G_{6-p} = \sum g_{6-p,i} x_i,$$

les $(6 - p)$ complexes G ne peuvent vérifier d'identité telle que

$$\rho_1 G_1 + \rho_2 G_2 + \dots + \rho_{6-p} G_{6-p} = 0,$$

ce qui signifie que ces complexes ne font pas partie d'un même système à $6 - p - 1 = 5 - p$ termes ou d'un système à un nombre moindre de termes. L'ensemble des complexes en involution avec tous ceux du système à p termes, lequel ensemble est représenté par l'équation

$$\sum u_i x_i = \mu_1 G_1 + \dots + \mu_{6-p} G_{6-p} = 0,$$

forme donc un système à $6 - p$ termes.

De là ce théorème :

Les complexes linéaires qui sont en involution avec tous ceux d'un système à p termes forment eux-mêmes un système à $6 - p$ termes.

Nous appellerons, pour abréger, *systèmes complémentaires* ces deux systèmes à p et à $(6 - p)$ termes, dont les complexes sont en involution.

Prenons, par exemple, un système à cinq termes. Le système complémentaire ne comporte qu'un seul complexe. On a donc ce théorème :

Les complexes d'un système à cinq termes sont orthogonaux à un complexe linéaire fixe.

37. Soient Σ, Σ_0 deux systèmes complémentaires à p et à $(6 - p)$ termes. Supposons que p soit au moins égal à 2; alors, parmi les complexes du système Σ , il y'en a de spéciaux, comme on le voit en écrivant

$$\Omega(a_1\lambda_1 + \dots + a_p\lambda_p) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\Omega(a_1)\lambda_1^2 + \Omega(a_2)\lambda_2^2 + \dots + \Omega(a_p)\lambda_p^2 + 2\Omega(a_1|a_2)\lambda_1\lambda_2 + 2\Omega(a_1|a_3)\lambda_1\lambda_3 + \dots = 0.$$

Or les directrices de ces complexes spéciaux doivent appartenir à chacun des complexes du système complémentaire Σ_0 ; en effet, ces complexes spéciaux sont en involution avec tous ceux du système complémentaire Σ_0 : donc, d'après un théorème du n° 34, leurs directrices appartiennent à ces complexes. Réciproquement, toute droite commune à tous les complexes du système Σ_0 est la directrice d'un complexe spécial en involution avec tous les complexes du système Σ_0 ; ce complexe spécial fait donc partie du système Σ . Énonçons donc ce théorème :

Les directrices des complexes spéciaux contenus dans un système Σ ne sont autres que les droites communes aux complexes du système complémentaire Σ_0 .

Ajoutons cette remarque :

Les droites communes aux complexes d'un système Σ coupent toutes les droites qui sont communes aux complexes du système complémentaire Σ_0 .

Ces droites sont, en effet, des directrices de complexes spéciaux qui sont en involution.

38. L'introduction de la notion d'involution simplifie beaucoup le problème de la recherche des droites communes à plusieurs complexes linéaires. Nous avons déjà traité le cas de deux complexes; il reste encore le cas de trois et de quatre complexes.

Soient trois complexes A, B, C ne faisant pas partie d'un même système à deux termes, nous nous proposons de chercher leurs droites communes.

Considérons pour cela le système à trois termes

$$\Sigma = \lambda A + \mu B + \nu C = 0;$$

le système complémentaire Σ_0 est également un système à trois termes. Cherchons les complexes spéciaux contenus dans le premier système Σ . Nous écrirons

$$\Omega(\lambda a + \mu b + \nu c) = 0,$$

étant donné que

$$A = \Sigma a_i x_i, \quad B = \Sigma b_i x_i, \quad C = \Sigma c_i x_i.$$

Nous aurons, en développant,

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega(\lambda\alpha + \mu b + \nu c) \\ = \Omega(\alpha)\lambda^2 + \Omega(b)\mu^2 + \Omega(c)\nu^2 + 2\Omega(\alpha|b)\lambda\mu + 2\Omega(\alpha|c)\lambda\nu + 2\Omega(b|c)\mu\nu = 0; \end{array} \right.$$

je pose

$$(14) \quad \Psi(\alpha|b|c) = \begin{vmatrix} \Omega(\alpha) & \Omega(\alpha|b) & \Omega(\alpha|c) \\ \Omega(b|\alpha) & \Omega(b) & \Omega(b|c) \\ \Omega(c|\alpha) & \Omega(c|b) & \Omega(c) \end{vmatrix},$$

en sorte que Ψ est le discriminant de la forme quadratique (13). Ce discriminant est un invariant simultané des complexes A, B, C. Mais il y a plus; c'est aussi un *combinant*, comme la fonction $\Phi(\alpha|b)$. Si, en effet, on remplace A, B, C par des combinaisons telles que

$$A_1 = pA + qB + rC,$$

$$B_1 = p'A + q'B + r'C,$$

$$C_1 = p''A + q''B + r''C,$$

où le déterminant

$$\begin{vmatrix} p & q & r \\ p' & q' & r' \\ p'' & q'' & r'' \end{vmatrix}$$

n'est pas nul, la fonction Ψ se reproduit multipliée par le carré de ce déterminant. Observons, en passant, que, si l'on remplace A, B, C par des expressions telles que A_1, B_1, C_1 , pour lesquelles le déterminant $\Sigma \pm pq'r''$ ne soit pas nul, cela revient à effectuer, dans la forme (13), la transformation linéaire

$$\lambda = p\lambda_1 + p'\mu_1 + p''\nu_1,$$

$$\mu = q\lambda_1 + q'\mu_1 + q''\nu_1,$$

$$\nu = r\lambda_1 + r'\mu_1 + r''\nu_1$$

sur les variables λ, μ, ν . On peut profiter de cette remarque pour réduire la forme (13). Ainsi, si l'invariant Ψ n'est pas nul, la forme (13) est réductible à trois carrés ou, ce qui est la même chose, au type

$$\lambda\mu - \nu^2.$$

Si Ψ est nul, mais non tous ses mineurs, la forme (13) est le produit de deux facteurs et l'on pourra supposer la forme ramenée au type

$$\lambda\mu.$$

Si Ψ est nul, ainsi que tous ses mineurs, la forme est un carré parfait et l'on

pourra supposer que ce carré est

$$\nu^2.$$

Enfin il se peut que la forme (13) soit nulle identiquement.

Nous avons ainsi les quatre cas qui peuvent se présenter dans l'intersection de trois complexes du premier degré. Examinons-les successivement.

39. Dans le premier cas, on devra avoir

$$\Omega(a) = 0, \quad \Omega(b) = 0, \quad \Omega(a|c) = 0, \quad \Omega(b|c) = 0, \quad 2\Omega(a|b) = -\Omega(c) = 1.$$

Les deux premières équations prouvent que les deux complexes A, B sont spéciaux, et, à cause de $2\Omega(a|b) = 1$, on voit que leurs directrices ne peuvent se couper, puisque $\Omega(a|b) = 0$ est la condition de leur rencontre. La troisième et la quatrième équation prouvent que ces directrices font partie du complexe C.

Maintenant on vérifie de la façon la plus générale l'équation

$$\lambda\mu - \nu^2 = 0,$$

en prenant

$$\lambda = t^2, \quad \mu = 1, \quad \nu = t,$$

où t est un paramètre, en sorte que tous les complexes spéciaux du système sont représentés par l'équation

$$\Sigma(a_i t^2 + c_i t + b_i) x_i = 0.$$

Les coordonnées de la directrice z de l'un de ces complexes seront

$$z_i = \frac{\partial \Omega(\alpha t^2 + c t + b)}{\partial (a_i t^2 + c_i t + b_i)},$$

ou encore

$$z_i = \frac{\partial \Omega(\alpha)}{\partial a_i} t^2 + \frac{\partial \Omega(c)}{\partial c_i} t + \frac{\partial \Omega(b)}{\partial b_i}.$$

Le lieu de ces directrices z est donc une série réglée, et même une série réglée du second ordre, car, si l'on cherche combien de droites de la série coupent la droite fixe y_i , on est conduit à l'équation du second degré en t

$$\begin{aligned} 0 &= \omega(y|z) = \sum \frac{\partial \omega}{\partial y_i} z_i \\ &= \left[\sum \frac{\partial \omega}{\partial y_i} \frac{\partial \Omega(\alpha)}{\partial a_i} \right] t^2 + \left[\sum \frac{\partial \omega}{\partial y_i} \frac{\partial \Omega(c)}{\partial c_i} \right] t + \left[\sum \frac{\partial \omega}{\partial y_i} \frac{\partial \Omega(b)}{\partial b_i} \right] = 0. \end{aligned}$$

Une série réglée peut être constituée par les génératrices d'une surface réglée, par celles d'un cône, ou bien enfin par les tangentes d'une courbe plane. Dans ces deux derniers cas, la série réglée est contenue dans un hyperfaisceau.

Or, tel n'est pas ici le cas, car, si cela avait lieu, les directrices des complexes spéciaux A et B devraient se couper comme faisant partie d'un même hyperfaisceau. L'expression $\Omega(a|b)$ devrait être nulle, ce qui n'a pas lieu.

Il faut donc conclure que les directrices de nos complexes spéciaux forment une surface réglée, laquelle est du second degré, puisque la série réglée des directrices est du second ordre.

On a donc ce théorème :

Les directrices des complexes spéciaux d'un système à trois termes constituent généralement les génératrices rectilignes d'une famille d'une quadrique.

Nous dirons, pour abréger, qu'elles forment une *demi-quadrice*. Les génératrices du second système de cette quadrice constitueront ce que nous appellerons la *demi-quadrice complémentaire de la première*.

Il est maintenant facile d'avoir les droites communes aux trois complexes A, B, C. L'ensemble de ces droites appartient à tous les complexes du système à trois termes

$$\lambda A + \mu B + \nu C = 0,$$

et peut être défini en prenant trois complexes quelconques A_1, B_1, C_1 de ce système, pourvu que ces trois complexes ne fassent pas partie d'un même système à deux termes. Or c'est précisément le cas de trois complexes spéciaux A_1, B_1, C_1 du système; en effet, leurs directrices ne se coupent pas, puisque ce sont les génératrices d'une même demi-quadrice. Le système à deux termes

$$\rho A_1 + \sigma B_1 = 0$$

ne comporte donc pas d'autre complexe spécial que A_1 et B_1 , et, par suite, A_1, B_1, C_1 ne peuvent faire partie d'un même système à deux termes (il pourrait ne plus en être de même si les directrices de A_1 et B_1 se coupaient).

Les droites communes aux complexes du système à trois termes sont donc définies par la condition de couper trois génératrices quelconques de la demi-quadrice \mathcal{Q} , lieu des directrices des complexes linéaires spéciaux du système. Ces droites constituent donc la quadrice complémentaire \mathcal{Q}_0 . Énonçons dès lors ce théorème :

Les droites communes à trois complexes A, B, C non compris dans un même système à deux termes, et, par suite, les droites communes à tous les complexes du système à trois termes

$$\Sigma = \lambda A + \mu B + \nu C = 0$$

forment une demi-quadrice \mathcal{Q}_0 , complémentaire de la demi-quadrice \mathcal{Q} lieu des directrices des complexes spéciaux contenus dans le système à trois termes.

On ne manquera pas d'observer que le système Σ_0 à trois termes, complémentaire du système Σ , admet la demi-quadrice \mathcal{Q}_0 comme lieu des directrices de ses complexes spéciaux, et que les droites de la demi-quadrice \mathcal{Q} sont, au contraire, communes à tous les complexes du système Σ_0 . Cela résulte du corollaire qui termine le n° 37.

40. Nos raisonnements supposent que Ψ n'est pas nul ; admettons maintenant que $\Psi = 0$; nous savons que la forme (13) peut être réduite à $\lambda\mu$; cela nous donne

$$\Omega(a) = 0, \quad \Omega(b) = 0, \quad \Omega(c) = 0, \quad \Omega(bc) = 0, \quad \Omega(c|a) = 0;$$

mais $\Omega(a|b)$ n'est pas nul.

Les complexes A, B, C sont spéciaux, d'après les trois premières équations. Les deux dernières nous prouvent, en outre, que la directrice Δ_C du complexe C coupe les directrices Δ_A , Δ_B des deux autres complexes ; mais celles-ci ne se coupent pas elles-mêmes puisque $\Omega(a|b)$ n'est pas nul.

Soit F le point de rencontre de Δ_C et de Δ_A , F' celui de Δ_C et de Δ_B ; Φ le plan de Δ_C et de Δ_A ; Φ' celui de Δ_C et de Δ_B .

Les complexes spéciaux du système à trois termes, eu égard à l'équation

$$\lambda\mu = 0,$$

se décomposent en deux familles, savoir

$$\mu B + \nu C = 0 \quad \text{et} \quad \lambda A + \nu C = 0.$$

Chacune de ces familles constitue un système à deux termes, et, d'après ce que nous savons, sur ces systèmes, puisque les complexes qui les composent sont tous spéciaux, leurs directrices forment un faisceau plan.

La famille

$$\lambda A + \nu C = 0$$

est donc composée de complexes spéciaux dont les directrices engendrent le faisceau plan (F, Φ) , tandis que le faisceau (F', Φ') correspond à la seconde famille.

On observera que les deux faisceaux plans (F, Φ) , (F', Φ') ont une droite commune Δ_C , directrice du complexe C.

Il est maintenant facile d'avoir les droites communes aux complexes du système à trois termes. Une quelconque de ces droites est définie par la condition de couper toutes les droites des faisceaux (F, Φ) , (F', Φ') . Si elle ne passe pas

par F , elle est donc dans le plan Φ , et si elle ne passe pas par F' , elle est dans le plan Φ' . Ces droites sont donc celles des deux faisceaux plans (F, Φ') , (F', Φ) . On voit que les couples (F, Φ') , (F', Φ) sont les inverses (n° 21) des couples (F, Φ) , (F', Φ') .

Les droites des faisceaux (F, Φ) , (F', Φ') constituent ainsi une dégénérescence des droites d'une demi-quadruple, tandis que les faisceaux inverses (F, Φ') , (F', Φ) constituent la demi-quadruple complémentaire dégénérée.

Il est fort digne de remarque qu'une nouvelle conception des quadriques conduit, pour ces êtres géométriques, à un mode de dégénérescence qu'on ne rencontre pas lorsqu'on les définit soit par leurs points, soit par leurs plans tangents. On sait, du reste, que ces deux dernières définitions conduisent chacune à des dégénérescences propres : cônes ou plans pour les quadriques ponctuelles ; coniques ou points pour les quadriques tangentielles.

Une quadrique ponctuelle ne peut pas devenir une conique ou un point, pas plus qu'une quadrique tangentiale ne peut devenir un cône ou un plan. Au nouveau point de vue où nous nous plaçons, la quadrique peut dégénérer en quatre faisceaux plans inverses (F, Φ) , (F', Φ') , (F', Φ) , (F, Φ') , les deux premiers représentant les génératrices d'un système et les deux autres celles de l'autre.

41. Admettons maintenant que l'invariant Ψ soit nul ainsi que ses mineurs du premier ordre. Alors la forme est un carré parfait qu'on peut supposer être v^2 . Il vient, dans ce cas,

$$\Omega(a) = 0, \quad \Omega(b) = 0, \quad \Omega(a|b) = 0, \quad \Omega(a|c) = 0, \quad \Omega(b|c) = 0,$$

mais $\Omega(c)$ n'est pas nul.

Les complexes A , B sont spéciaux et, à cause de $\Omega(a|b) = 0$, leurs directrices se coupent. Soient F le point et Φ le plan commun. Puisque $\Omega(a|c) = 0$, $\Omega(b|c) = 0$, les droites directrices de A et de B appartiennent au complexe non spécial C , et, par suite, F est le pôle du plan Φ dans ce complexe. On en déduit aussitôt que les droites communes aux complexes A , B , C ne sont autres que celles du faisceau plan (F, Φ) . Comme, du reste, les complexes spéciaux du système forment le système à deux termes

$$\lambda A + \mu B = 0,$$

il est clair que les directrices de ces complexes spéciaux sont également les droites du faisceau plan (F, Φ) .

Si l'on envisage le système complémentaire Σ_0 du système Σ considéré

$$\Sigma = \lambda A + \mu B + v C,$$

on voit que les complexes du système Σ_0 ont en commun les droites du faisceau

(F, Φ) , comme ceux du système Σ , et les complexes spéciaux sont représentés encore par

$$\lambda A + \mu B = o.$$

Ce cas n'est autre que le précédent, mais dans lequel les faisceaux (F, Φ) , (F', Φ') coïncident.

42. Il reste enfin, pour épuiser les systèmes à trois termes, à traiter le cas où la forme (13) est identiquement nulle. Tous les complexes du système

$$\Sigma = \lambda A + \mu B + \nu C = o$$

sont spéciaux. Soit z la directrice de l'un de ces complexes, on a

$$z_i = \frac{\partial \Omega(a)}{\partial a_i} \lambda + \frac{\partial \Omega(b)}{\partial b_i} \mu + \frac{\partial \Omega(c)}{\partial c_i} \nu,$$

et, par suite, ces directrices forment un hyperfaisceau.

Le système Σ est donc composé de complexes spéciaux dont les directrices forment un hyperfaisceau. Les droites mêmes de cet hyperfaisceau sont, dès lors, les seules qui soient communes à tous les complexes du système.

Ce cas offre ceci de remarquable que le système Σ coïncide avec son complémentaire. Le lecteur prouvera facilement que c'est le seul cas où ce fait se présente.

Il est assurément fort remarquable que les complexes linéaires d'un tel système à trois termes puissent avoir, en commun, une congruence de droites (de classe 1 et de degré zéro, ou de classe zéro et de degré 1), sans que pourtant il existe entre trois quelconques de ces complexes une relation linéaire. Ce fait montre avec quelle circonspection doivent être traitées ces questions, et explique le soin peut-être un peu minutieux que nous avons cru devoir apporter dans cette partie de notre exposition.

43. Arrivons maintenant aux droites communes à quatre complexes linéaires, et aux systèmes à quatre termes. Soit Σ un tel système, représenté par l'équation

$$\Sigma = \lambda A + \mu B + \nu C + \rho D = o.$$

Le système Σ_0 complémentaire étant à deux termes, nous pouvons utiliser ce que nous savons des systèmes à deux termes et des systèmes complémentaires. Le système à deux termes contient deux complexes spéciaux qui peuvent coïncider dans certains cas : il peut aussi se composer de complexes spéciaux dont les directrices forment un faisceau plan. Voyons ce que sont les systèmes complémentaires à quatre termes correspondants.

D'abord, dans le cas général, nous voyons que les complexes du système Σ à quatre termes auront deux droites communes Δ, Δ' , directrices de la congruence linéaire commune aux complexes du système à deux termes. Donc :

Quatre complexes linéaires, non compris dans un même système à trois termes, ont, en général, deux droites communes Δ, Δ' .

La congruence dont Δ, Δ' sont les directrices est le lieu des directrices des complexes spéciaux du système.

Accidentellement, Δ et Δ' peuvent coïncider : la congruence des directrices des complexes spéciaux est alors singulière.

Enfin, il y a le cas où tous les complexes du système à deux termes complémentaires Σ_0 sont spéciaux. Soit (F, Φ) le faisceau plan formé par les directrices de ces complexes spéciaux. Les complexes du système à quatre termes ont alors (d'après un théorème établi n° 37) toutes les droites du faisceau (F, Φ) en commun, et pas d'autres.

Les complexes de ce système à quatre termes sont alors définis par la propriété d'admettre un faisceau plan de droites donné (F, Φ) .

Comme dans les cas précédents, on pourrait introduire la forme en λ, μ, ν, ρ ,

$$\Omega(a\lambda + b\mu + c\nu + d\rho) = 0,$$

et son discriminant

$$\begin{vmatrix} \Omega(a) & \Omega(a|b) & \Omega(a|c) & \Omega(a|d) \\ \Omega(b|a) & \Omega(b) & \Omega(b|c) & \Omega(b|d) \\ \Omega(c|a) & \Omega(c|b) & \Omega(c) & \Omega(c|d) \\ \Omega(d|a) & \Omega(d|b) & \Omega(d|c) & \Omega(d) \end{vmatrix},$$

lequel est un combinant. Si ce discriminant n'est pas nul, on est dans le cas général. S'il est nul, les droites Δ, Δ' coïncident.

Si ses mineurs du premier ordre sont nuls, tous ensemble, on est dans le cas où les complexes ont en commun un faisceau plan de droites.

Je laisse au lecteur le soin de démontrer ces résultats, si analogues à ceux que nous avons déjà rencontrés pour les systèmes à trois termes. On verra que la forme en λ, μ, ν, ρ ne peut être nulle identiquement, ni même être un carré parfait.

44. Nous compléterons cette étude des systèmes linéaires de complexes par une remarque concernant les systèmes à cinq termes.

Soit A, B, C, D, E cinq complexes non contenus dans un même système à

quatre termes. Si l'on résout les cinq équations

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad D = 0, \quad E = 0,$$

les valeurs de x_1, \dots, x_6 correspondantes ne vérifieront pas, en général, l'équation

$$\omega(x) = 0,$$

en un mot, cinq complexes linéaires n'ont pas, en général, de droite commune.

Le système complémentaire se réduit à un complexe linéaire unique, comme nous l'avons fait remarquer au n° 37, et, d'après les résultats obtenus au même endroit, puisque les droites communes aux complexes d'un système sont les directrices des complexes spéciaux du système conjugué, cinq complexes linéaires non compris dans un même système à quatre termes ne peuvent avoir qu'une seule droite commune, à savoir la directrice du complexe complémentaire, lequel *encore devra être spécial*.

Réciproquement, les complexes linéaires qui contiennent une droite donnée z forment un système à cinq termes, à savoir le système complémentaire du système à un terme constitué par le complexe linéaire dont z est la directrice.

45. Au cours de cette exposition, nous avons introduit successivement les invariants $\Omega(a)$, $\Phi(a|b)$, $\Psi(a|b|c)$, et nous en avons indiqué un autre relatif aux systèmes à quatre termes; le système à cinq termes a aussi un invariant. On peut représenter ces combinants d'une façon uniforme comme il suit. Soit

$$\omega(x) = \sum \omega_{ik} x_i x_k$$

la forme fondamentale, on a, à un facteur constant près, cette expression de $\Omega(a)$

$$\begin{vmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \dots & \omega_{16} & a_1 \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \dots & \omega_{26} & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_{61} & \omega_{62} & \dots & \omega_{66} & a_6 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_6 & 0 \end{vmatrix}.$$

On aura de même pour $\Phi(a|b)$

$$\begin{vmatrix} \omega_{11} & \dots & \omega_{16} & a_1 & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_{61} & \dots & \omega_{66} & a_6 & b_6 \\ a_1 & \dots & a_6 & 0 & 0 \\ b_1 & \dots & b_6 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

et pour $\Psi(a \mid b \mid c)$,

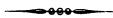
$$\left| \begin{array}{cccccc} \omega_{11} & \dots & \alpha_{16} & \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_{61} & \dots & \omega_{66} & \alpha_6 & b_6 & c_6 \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_6 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & \dots & b_6 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & \dots & c_6 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right|.$$

L'invariant d'un système à quatre termes s'obtiendra en bordant, à droite et en bas, avec une ligne de plus $d_1 \dots d_6 0000$; en ajoutant encore une autre bordure à droite et en bas $e_1 \dots e_6 000000$, on aura l'invariant du système à cinq termes. Cet invariant s'annule si les complexes du système ont une droite commune, c'est-à-dire si le complexe complémentaire est spécial.

46. Faisons enfin remarquer, en terminant ce Chapitre, qu'il résulte de la discussion précédente que tout complexe P qui contient les droites communes à p autres A, B, \dots, D , *non contenues* dans un même système à $(p - 1)$ termes ou à un nombre de termes moindre que $(p - 1)$, fait partie du système à p termes

$$P = \lambda A + \mu B + \dots + \rho D = 0.$$

Le lecteur vérifiera facilement cette remarque que je me contente ici d'énoncer.



CHAPITRE IV.

PRINCIPES DE GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE EN COORDONNÉES DE DROITES.

Surfaces gauches. — Corrélation de Chasles. — Quadriques de raccordement et congruence des tangentes. — Hyperbolôïde osculateur. — Contact d'une surface gauche avec un complexe linéaire. — Contact des divers ordres. Série réglée à enveloppe. — Faisceau osculateur. — Cas du cône et de la courbe plane. — Théorème sur les courbes dont les tangentes font partie d'un complexe linéaire. — Éléments de contact de Lie. — Faisceaux plans dépendant d'un paramètre. — Bandeaux. — Théorème général sur les faisceaux plans à enveloppes. — Propriétés infinitésimales du premier ordre des complexes de droites. — Complexes tangents. — Corrélation normale. — Ses propriétés. — Faisceaux plans d'un complexe. — Invariant de Klein. — Droites singulières. — Surface de singularités. — Théorème de Pasch. — Complexes singuliers. — Théorème de Cayley et Klein. — Congruences. — Surfaces focales. — Couples focaux. — Développables. — Complexes linéaires tangents. — Cas particuliers. — Invariant. — Congruences de tangentes asymptotiques. — Cas de dégénérescence.

47. Nous allons, dans ce Chapitre, développer les *premiers principes* de Géométrie infinitésimale en coordonnées de droites.

Supposons qu'une droite x dépende d'un paramètre t ; elle engendre une série réglée qui peut constituer une surface gauche, une développable, un cône ou l'ensemble des tangentes d'une courbe plane.

Examinons d'abord le cas où la série constitue une surface gauche. On sait que la distribution des plans tangents en chaque point d'une génératrice rectiligne s'opère au moyen d'une corrélation homographique, dont nous avons déjà parlé, et que nous appelons la *corrélation* de Chasles.

L'ensemble des tangentes à la surface en tous les points de la génératrice x constitue une congruence linéaire singulière; tous les complexes linéaires qui contiennent cette congruence définissent sur x la même corrélation normale, à savoir la corrélation de Chasles.

Ces complexes forment un système à deux termes facile à représenter.

On peut regarder la congruence des tangentes comme l'ensemble des droites assujetties à couper les droites voisines x et $x + x' dt$, où $x' = \frac{dx}{dt}$. Elle est donc

définie par les deux équations suivantes, où γ est la droite courante,

$$\begin{aligned} 2\omega(x|\gamma) &= \sum \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \gamma_i = 0, \\ 2\omega(x+dx|\gamma) &= \sum \left[\frac{\partial \omega}{\partial x_i} + \frac{\partial \omega(x')}{\partial x'_i} dt \right] \gamma_i = 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(1) \quad \sum \frac{\partial \omega(x)}{\partial x_i} \gamma_i = 0, \quad \sum \frac{\partial \omega(x')}{\partial x'_i} \gamma_i = 0.$$

Le système à deux termes considéré aura donc pour équation

$$(2) \quad \sum \left[\lambda \frac{\partial \omega(x)}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial \omega(x')}{\partial x'_i} \right] \gamma_i = 0,$$

ou encore

$$(3) \quad \omega(\lambda x + \mu x' | \gamma) = 0.$$

On voit qu'il ne contient qu'un seul complexe spécial, car les complexes spéciaux du système, d'après la forme de l'équation (3), auront pour directrices des droites dont les coordonnées seront comprises dans la formule

$$\lambda x_i + \mu x'_i;$$

or ces expressions ne sont les coordonnées d'une droite que si

$$\omega(\lambda x + \mu x') = 0,$$

c'est-à-dire, si

$$\omega(x)\lambda^2 + 2\omega(x|x')\lambda\mu + \omega(x')\mu^2 = 0,$$

ou enfin, si

$$\omega(x')\mu^2 = 0,$$

car

$$\omega(x) = 0, \quad 2\omega(x|x') = \frac{d\omega(x)}{dt} = 0.$$

Il se pourrait que $\omega(x')$ fut nul; mais alors, comme nous le verrons plus loin, la série réglée ne constitue plus une surface gauche. Dans l'hypothèse où nous nous plaçons, il n'y a donc qu'une seule solution, à savoir

$$\mu = 0.$$

On dit de deux surfaces réglées qu'elles se raccordent suivant une génératrice commune si, en chaque point de cette génératrice, le plan tangent est le même, ce qui exige que la corrélation de Chasles soit la même pour les deux surfaces. Il y a une infinité d'hyperboloides et de paraboloides qui remplissent cette condi-

tion, ce sont les *quadriques de raccordement*; dont l'usage est si répandu en Géométrie descriptive. Toute quadrique contenue dans la congruence linéaire des tangentes est évidemment une quadrique de raccordement.

48. Je désigne par C_x cette congruence linéaire; il est clair que la droite voisine donne lieu à une autre congruence $C_x + dx$; on peut démontrer que ces deux congruences ont en commun une même demi-quadrique.

En effet, les équations (1) représentent C_x ; si l'on y change x en $x + x' dt$ et x' en $x' + x'' dt$, où $x''_i = \frac{dx'_i}{dt}$, on aura la représentation de $C_x + dx$; on trouve ainsi

$$(4) \quad \begin{cases} \sum \left[\frac{\partial \omega(x)}{\partial x_i} + \frac{\partial \omega(x')}{\partial x'_i} dt \right] y_i = 0, \\ \sum \left[\frac{\partial \omega(x')}{\partial x'_i} + \frac{\partial \omega(x'')}{\partial x''_i} dt \right] y_i = 0; \end{cases}$$

ces équations, jointes aux équations (1), ne donnent en tout que trois équations

$$(5) \quad \sum \frac{\partial \omega(x)}{\partial x_i} y_i = 0, \quad \sum \frac{\partial \omega(x')}{\partial x'_i} y_i = 0, \quad \sum \frac{\partial \omega(x'')}{\partial x''_i} y_i = 0.$$

Ces trois équations sont celles de trois complexes, qui ont en commun une demi-quadrique \mathcal{Q} .

Une droite quelconque y de cette demi-quadrique doit, d'après les équations (5), couper trois droites consécutives de la surface réglée; ces droites y sont donc les tangentes asymptotiques du second système menées en tous les points de la droite x ; la demi-quadrique \mathcal{Q} est ainsi constituée par un système de génératrices de l'*hyperbololoïde osculateur* de la surface.

49. La demi-quadrique complémentaire \mathcal{Q}_0 se trouve reliée à la théorie générale du contact d'une surface réglée avec un complexe linéaire.

Soit un complexe linéaire

$$\sum \xi_i x_i = 0,$$

nous dirons qu'il a, avec une surface réglée donnée, un contact du $p^{\text{ième}}$ ordre s'il contient $(p+1)$ génératrices consécutives de la surface.

Les complexes tangents vérifient donc les deux équations

$$\sum \xi_i x_i = 0, \quad \sum \xi_i x'_i = 0,$$

lesquelles indiquent que ces complexes linéaires tangents forment un système à quatre termes, complémentaire du système à deux termes représenté par l'équation (2).

Considérons maintenant les complexes qui ont, avec la surface, un contact du second ordre; ils sont soumis aux conditions

$$(6) \quad \Sigma \xi_i x_i = 0, \quad \Sigma \xi_i x'_i = 0, \quad \Sigma \xi_i x''_i = 0.$$

Ces équations ne se réduiraient à deux que si l'on avait les six relations

$$\alpha x''_i + \beta x'_i + \gamma x_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, 6;$$

or, dans ce cas, les x_i étant solutions d'une même équation du second ordre, on pourrait poser

$$x_i = C_i T + C'_i T_0,$$

les C_i, C'_i désignant des constantes, et T, T_0 des fonctions de t : la série réglée se réduirait à un faisceau plan.

Les équations (6) étant supposées distinctes, les complexes qu'elles définissent forment un système à *trois* termes.

Le système complémentaire nous est connu, c'est le système

$$(7) \quad \sum \left[\lambda \frac{\partial \omega(x)}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial \omega(x')}{\partial x'_i} + \nu \frac{\partial \omega(x'')}{\partial x''_i} \right] y_i = 0,$$

lequel comprend tous les complexes linéaires qui contiennent la demi-quadrice \mathcal{Q} .

En effet, l'involution du complexe (7) avec le complexe ξ s'écrit

$$(8) \quad 2\Omega(\xi | u) = \sum \frac{\partial \Omega(u)}{\partial u_i} \xi_i = 0,$$

en posant

$$u_i = \lambda \frac{\partial \omega(x)}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial \omega(x')}{\partial x'_i} + \nu \frac{\partial \omega(x'')}{\partial x''_i},$$

et, comme de cette équation de définition on tire

$$\lambda x_i + \mu x'_i + \nu x''_i = \frac{\partial \Omega(u)}{\partial u_i},$$

l'équation (8) s'écrit

$$\lambda \Sigma \xi_i x_i + \mu \Sigma \xi_i x'_i + \nu \Sigma \xi_i x''_i = 0.$$

Tous les complexes (7) sont ainsi en involution avec les complexes ξ qui vérifient les équations (6).

Les complexes ξ ont donc bien en commun la demi-quadrice \mathcal{Q}_0 , complémentaire de la quadrice \mathcal{Q} , c'est-à-dire les génératrices de l'hyperboloïde osculateur de même système que x .

50. Considérons maintenant les complexes qui ont, avec la surface, un triple contact; ils sont définis par les quatre équations

$$(9) \quad \Sigma \xi_i x_i = 0, \quad \Sigma \xi_i x'_i = 0, \quad \Sigma \xi_i x''_i = 0, \quad \Sigma \xi_i x'''_i = 0,$$

lesquelles sont distinctes, à moins que l'on n'ait six équations de la forme

$$\alpha x''_i + \beta x''_i + \gamma x'_i + \delta x_i = 0.$$

Or, si cela a lieu, les x_i ont la forme

$$(10) \quad x_i = C_i T + C'_i T_0 + C''_i T_{00},$$

où les C sont des constantes, et T, T_0, T_{00} trois fonctions de t .

Formons

$$\omega(x) = \omega(CT + C'T_0 + C''T_{00}) = 0,$$

ou, en développant,

$$\omega(C)T^2 + \omega(C')T_0^2 + \omega(C'')T_{00}^2 + 2\omega(C|C')TT_0 + 2\omega(C|C'')TT_{00} + 2\omega(C'|C'')T_0T_{00} = 0.$$

Si les coefficients de cette forme en T, T_0, T_{00} sont nuls identiquement, la droite x est contenue dans un hyperfaisceau fixe; la série réglée est formée des génératrices d'un cône ou des tangentes d'une courbe. Ce cas exclu, il peut se faire encore que l'équation quadratique ci-dessus ne soit pas identique. Mais alors on vérifie cette équation en prenant pour T, T_0, T_{00} des polynômes du second degré d'un paramètre s , que l'on peut substituer au paramètre t . Les formules (10) prennent la forme

$$x_i = D_i s^2 + D'_i s + D''_i.$$

La série réglée est alors une demi-quadratique.

Ce nouveau cas exclu, les équations (9) sont distinctes, et les complexes ξ , qui les vérifient, forment un système à quatre termes. Le système à deux termes complémentaire comprend deux complexes spéciaux, dont les directrices Δ, Δ' possèdent la propriété, en vertu des équations (9), de couper quatre génératrices consécutives de la surface. Ces droites Δ et Δ' ont donc un contact du troisième ordre avec la surface, chacune en un point de la droite x .

Si l'on considère l'hyperboloïde osculateur relatif à une droite x et l'hyperboloïde osculateur relatif à la droite voisine $x + dx$, ces deux hyperboloides se coupent suivant deux génératrices voisines de x et suivant deux autres génératrices du système opposé. Ces deux génératrices sont les droites Δ et Δ' .

Considérons enfin un complexe linéaire qui ait un contact du quatrième ordre avec la surface réglée. On devra avoir

$$\Sigma \xi_i x_i = 0, \quad \Sigma \xi_i x'_i = 0, \quad \Sigma \xi_i x''_i = 0, \quad \Sigma \xi_i x'''_i = 0, \quad \Sigma \xi_i x^{IV}_i = 0,$$

et ces cinq équations, si elles sont distinctes, définiront les rapports des ξ ; le complexe sera parfaitement déterminé.

Il n'y aurait indétermination que s'il existait six équations de la forme

$$\alpha x_i^{\text{IV}} + \beta x_i''' + \gamma x_i'' + \delta x_i' + \varepsilon x_i = 0,$$

équations qui prouvent que, entre les x_i , il existe au moins deux relations linéaires à coefficients constants.

La surface ou série réglée fait donc partie, dans ce cas, d'une congruence linéaire. Les surfaces réglées contenues dans une congruence linéaire jouent un rôle fort important et nous les retrouverons plus loin. Pour elles, le complexe osculateur est forcément indéterminé.

Si l'on considère les complexes osculateurs relatifs à deux droites voisines x et $x + dx$ d'une surface réglée, les directrices de leur congruence commune sont les droites Δ et Δ' déjà définies.

Trois complexes osculateurs consécutifs ont en commun la demi-quadruple Q_0 déjà définie.

Quatre complexes osculateurs consécutifs ont en commun deux droites *infinitiment voisines* de la droite x .

Le lecteur prouvera aisément ces propriétés. La dernière montre que, si l'on prend arbitrairement un complexe linéaire dépendant d'un paramètre, ce complexe n'est pas toujours osculateur à une surface réglée; car quatre complexes consécutifs du système se coupent suivant deux droites qui sont généralement distinctes.

51. On a exclu, jusqu'ici, l'hypothèse de $\omega(x') = 0$. Soit maintenant

$$\omega(x') = 0.$$

Les complexes (2) sont tous spéciaux, et les x'_i sont les coordonnées d'une droite x' qui est la directrice de l'un de ces complexes. Les droites x , x' se coupent en un point O et ont en commun un plan π ; les droites du faisceau plan (O, π) sont précisément les directrices des complexes (2). La congruence C_x des droites qui coupent deux droites consécutives x et $x + x'dt$ se décompose donc ici dans l'ensemble des droites du plan π et l'ensemble des droites issues du point O.

On peut dire que les droites consécutives x et $x + x'dt$ se coupent au point O et ont en commun le plan π . On peut même apprécier à quel ordre infinitésimal près cette rencontre a lieu.

En effet, la condition de rencontre de deux droites x et z peut s'écrire

$$\omega(z - x) = \omega(z) + \omega(x) - 2\omega(z|x) = -2\omega(z|x) = 0,$$

attendu que $\omega(x) = 0$, $\omega(z) = 0$. Prenons

$$z_i = x_i + x'_i \Delta t + x''_i \frac{\Delta t^2}{2} + x'''_i \frac{\Delta t^3}{6} + \dots,$$

et l'on trouve sans peine

$$\omega(z - x) = \omega(x') \Delta t^2 + \frac{1}{2} \frac{d\omega(x')}{dt} \Delta t^3 + \left[\frac{1}{6} \frac{d^2\omega(x')}{dt^2} - \frac{1}{12} \omega(x'') \right] \Delta t^4 + \dots$$

Si donc $\omega(x')$ est nul pour chaque droite de la série réglée, $\omega(z - x)$, qui est généralement du deuxième ordre, se réduit au quatrième

$$(11) \quad \omega(z - x) = -\frac{1}{12} \omega(x'') \Delta t^4 + \dots;$$

on retrouve là, sous une autre forme, une propriété mise en évidence pour la première fois par M. Bouquet.

Nous verrons, en effet, que, si l'on fait usage d'éléments métriques, $\omega(z - x)$ est proportionnel au produit de la plus courte distance p des droites x et z par le sinus de leur angle ε ou par cet angle lui-même, soit

$$p^\varepsilon.$$

Si l'on prend comme infiniment petit principal l'élément ε de l'arc de l'indicatrice sphérique des génératrices de la série réglée, $p\varepsilon$ sera d'un ordre infinitésimal supérieur d'une unité à celui de p . Si donc $\omega(x')$ est nul, $p\varepsilon$ étant du quatrième ordre, p sera du troisième, et c'est là justement le théorème de M. Bouquet.

En général, la série réglée sera formée des tangentes d'une courbe gauche. Le point O de rencontre des droites consécutives sera le point de contact de la courbe avec x , et le plan π sera le plan osculateur. D'après cela, les droites du faisceau plan (O, π), que j'appellerai le *faisceau plan osculateur*, auront une représentation de la forme

$$(12) \quad x_i + \lambda x'_i.$$

Cette représentation nous sera très utile.

52. Il se pourrait, cependant, que la série réglée fût formée des génératrices d'un cône ou des tangentes d'une courbe plane; mais alors les formules prennent un caractère très spécial. On remarque, en effet, que deux droites quelconques de la série réglée se coupent dans ce cas, puisqu'elles font toutes partie d'un même hyperfaisceau (gerbe ou système plan). L'expression $\omega(z - x)$ doit donc être rigoureusement nulle, et, par suite, il faudra avoir

$$\omega(x'') = 0,$$

car le terme Δt^4 doit disparaître. Il est inutile de chercher à exprimer que les

termes en $\Delta t^5, \dots$ disparaissent. Je vais, en effet, prouver que, si l'on a

$$\omega(x'') = 0,$$

la série réglée est contenue dans un hyperfaisceau.

On tire, en effet, des équations

$$\omega(x) = 0, \quad \omega(x') = 0, \quad \omega(x'') = 0,$$

par différentiation, l'ensemble des équations

$$\begin{aligned} \omega(x|x) &= 0, & \omega(x'|x) &= 0, & \omega(x''|x) &= 0, \\ \omega(x|x') &= 0, & \omega(x'|x') &= 0, & \omega(x''|x') &= 0, \\ \omega(x|x'') &= 0, & \omega(x'|x'') &= 0, & \omega(x''|x'') &= 0, \\ \omega(x|x''') &= 0, & \omega(x'|x''') &= 0, & \omega(x''|x''') &= 0, \end{aligned}$$

qui peuvent se résumer en disant que (x_1, x_2, \dots, x_6) , $(x'_1, x'_2, \dots, x'_6)$, $(x''_1, x''_2, \dots, x''_6)$, $(x'''_1, x'''_2, \dots, x'''_6)$ sont quatre systèmes de solutions des équations linéaires en u_1, u_2, \dots, u_6

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\omega(x|u) = \sum \frac{\partial \omega(x)}{\partial x_i} u_i = 0, \\ 2\omega(x'|u) = \sum \frac{\partial \omega(x')}{\partial x'_i} u_i = 0, \\ 2\omega(x''|u) = \sum \frac{\partial \omega(x'')}{\partial x''_i} u_i = 0. \end{array} \right.$$

Ces trois équations en u_i sont distinctes, car, s'il existait une identité de la forme

$$\lambda \omega(x|u) + \mu \omega(x'|u) + \nu \omega(x''|u) = 0,$$

on aurait

$$\lambda \frac{\partial \omega(x)}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial \omega(x')}{\partial x'_i} + \nu \frac{\partial \omega(x'')}{\partial x''_i} = 0$$

ou

$$\frac{\partial \omega(\lambda x + \mu x' + \nu x'')}{\partial (\lambda x_i + \mu x'_i + \nu x''_i)} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 6),$$

et, comme ω a son discriminant non nul, cela exigerait que l'on eût

$$\lambda x_i + \mu x'_i + \nu x''_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 6).$$

Nous avons déjà vu que, dans ce cas, la série réglée est un faisceau plan.

Dès lors, les trois équations (13) étant distinctes et ayant lieu entre six variables, tout système de solutions de ces équations se déduit linéairement de trois autres systèmes particuliers, mais indépendants. Il doit donc exister des relations

de la forme

$$\alpha x_i''' + \beta x_i'' + \gamma x_i' + \delta x_i = 0,$$

qui prouvent que les x_i ont pour expression générale

$$x_i = a_i R + b_i S + c_i T,$$

où R, S, T sont trois fonctions de t , et a_i, b_i, c_i des constantes. On reconnaît bien ainsi que la série réglée est contenue dans un hyperfaisceau. Elle est donc un cône ou l'ensemble des tangentes d'une courbe plane.

53. Comme application des remarques précédentes, démontrons ce théorème :

Si les tangentes d'une courbe appartiennent à un complexe linéaire, le plan osculateur π , en un point O de la courbe, est le plan polaire de ce plan dans le complexe.

Il suffit de prouver que les droites du faisceau plan osculateur

$$z_i = \lambda x_i + \mu x_i'$$

font toutes partie du complexe.

Or, en effet, on a, en faisant

$$A = \sum a_i x_i,$$

où $\sum a_i x_i = 0$ est l'équation du complexe linéaire,

$$\sum a_i z_i = \lambda A + \mu \frac{dA}{dt} = 0,$$

puisque $A = 0$ pour toutes les tangentes de la courbe.

54. Dans ses recherches sur la théorie du contact, M. Lie a introduit la notion de ce qu'il appelle l'*élément de contact*, c'est-à-dire l'ensemble d'un point et d'un plan mené par ce point (point et plan unis n° 3).

Nous avons rencontré l'élément de contact dans les Chapitres précédents, soit sous la forme d'un faisceau plan de droites, soit comme un couple d'éléments correspondants d'une correspondance entre les points et les plans d'une droite.

Nous allons donner quelques propriétés simples des faisceaux plans dans l'espace, en supposant d'abord que le point et le plan dépendent d'un même paramètre.

Par exemple, si x est une droite variable douée d'une enveloppe, nous savons que

$$x_i + \lambda x_i'$$

représente un faisceau plan variable, le faisceau osculateur.

Soient, plus généralement, un faisceau quelconque (o, π) et a, b deux droites de ce faisceau, dépendant d'un paramètre t . Toute droite z du faisceau sera représentée par

$$z_i = a_i \lambda + b_i \mu.$$

Je considère une droite variable quelconque C passant au point O et dépendant aussi du paramètre t , la gerbe des droites issues de O sera représentée par

$$z_i = a_i \lambda + b_i \mu + c_i \nu;$$

à chaque valeur de $\lambda : \mu : \nu$ correspond une droite z de la gerbe, et si $\lambda : \mu : \nu$ sont fonctions de t , la droite z se déplace avec le point O . Cherchons ce que sont λ, μ, ν lorsque z est précisément la tangente à la courbe lieu du point O .

Il suffit d'écrire que $\lambda : \mu : \nu$ sont des fonctions de t telles que la droite z a une enveloppe qu'elle touche au point O , ou d'exprimer que le faisceau osculateur a deux de ses droites dans la gerbe. La droite z est déjà une droite du faisceau; il suffit donc d'écrire que la droite z' , dont les coordonnées sont z'_1, \dots, z'_6 , fait partie de la gerbe ou que

$$z'_i = a_i \varepsilon + b_i \varepsilon_1 + c_i \varepsilon_2,$$

c'est-à-dire

$$a'_i \lambda + b'_i \mu + c'_i \nu + a_i \lambda' + b_i \mu' + c_i \nu' = a_i \varepsilon + b_i \varepsilon_1 + c_i \varepsilon_2,$$

équations de la forme

$$(14) \quad a'_i \lambda + b'_i \mu + c'_i \nu = a_i \rho + b_i \sigma + c_i \tau.$$

Je multiplie par $\frac{\partial \omega(a)}{\partial a_i}$ et je somme de $i=1$ à $i=6$; il vient

$$\omega(a | a') \lambda + \omega(a | b') \mu + \omega(a | c') \nu = \omega(a) \rho + \omega(a | b) \sigma + \omega(a | c) \tau = 0,$$

car

$$\omega(a) = 0, \quad \omega(a | b) = 0, \quad \omega(a | c) = 0.$$

On a aussi

$$\omega(a | a') = 0,$$

il reste donc

$$\omega(a | b') \mu + \omega(a | c') \nu = 0.$$

Mais comme $\omega(a | c) = 0$, on a

$$\frac{d \omega(a | c)}{dt} = \omega(a' | c) + \omega(a | c') = 0,$$

et, par suite, l'équation obtenue peut s'écrire

$$\omega(a | b') \mu - \omega(c | a') \nu = 0.$$

On trouverait de même

$$\begin{aligned} \omega(a | b') \lambda - \omega(b | c') \nu &= 0, \\ \omega(c | a') \lambda - \omega(b | c') \mu &= 0 \end{aligned}$$

et, en définitive,

$$(15) \quad \frac{\lambda}{\omega(b|c')} = \frac{\mu}{\omega(c|a')} = \frac{\nu}{\omega(a|b')}.$$

Pareillement, si nous prenons une droite e dans le plan π , toute droite de ce plan aura une représentation de la forme

$$z_i = \lambda_1 a_i + \mu_1 b_i + \nu_1 e_i.$$

Si l'on veut, en particulier, les $\lambda_1 : \mu_1 : \nu_1$, qui donnent la droite de contact du plan π avec son enveloppe (caractéristique), on trouvera

$$(15') \quad \frac{\lambda_1}{\omega(b|e')} = \frac{\mu_1}{\omega(e|a')} = \frac{\nu_1}{\omega(a|b')}.$$

Les droites c et e ne jouent ici qu'un rôle auxiliaire.

55. En général, la tangente D au lieu du point O n'est pas dans le plan π , et la caractéristique Δ du plan π ne passe pas au point O .

Pour que D soit dans le plan π , c'est-à-dire fasse partie du faisceau (o, π) , il faut et il suffit que l'on ait

$$\begin{aligned} & v = o, \\ & \text{c'est-à-dire} \\ & \omega(a|b') = o; \end{aligned}$$

mais c'est aussi la condition pour que $v_i = o$, c'est-à-dire pour que la droite Δ fasse aussi partie du faisceau (o, π) .

Si un faisceau plan dépendant d'un paramètre contient à chaque instant la tangente au lieu de son centre O , il contient donc aussi la caractéristique de son plan π et inversement.

Ce théorème est évident par la Géométrie : le plan π roule sur une courbe C , qu'il touche au point O , et la génératrice de la développable engendrée par le plan passe au point O . J'appellerai *bandeau* les systèmes de faisceaux plans ainsi définis. Ils équivalent géométriquement au système formé par une courbe et une développable menée par elle.

Les bandeaux sont caractérisés par l'équation

$$\omega(a|b') = o.$$

Il est du reste facile, dans ce cas, d'avoir les droites D et Δ en n'ayant recours qu'à la représentation du faisceau et sans faire appel aux droites auxiliaires c et e .

Supposons que $\lambda : \mu$ ait été pris de façon que

$$\lambda a_i + \mu b_i$$

soient les coordonnées de la tangente à la courbe lieu du point O, laquelle, par hypothèse, appartient au faisceau.

Les équations (14) donnent, puisque ν est nul,

$$\begin{aligned} a'_i \lambda + a'_i \mu &= \rho a_i + \sigma b_i + \tau c_i, \\ \text{d'où} \quad \omega(a' \lambda + b' \mu) &= \omega(\rho a + \sigma b + \tau c) = 0; \\ \text{on a donc} \end{aligned}$$

$$(16) \quad \omega(a') \lambda^2 + 2\omega(a' | b') \lambda \mu + \omega(b') \mu^2 = 0,$$

équation qui donne pour $\lambda : \mu$ deux valeurs : l'une fournira la tangente à la courbe lieu du point O ; l'autre, comme on le voit aisément, donnera la caractéristique du plan.

56. Il y a coïncidence de ces droites, si

$$(17) \quad [\omega(a' | b')]^2 - \omega(a') \omega(b') = 0.$$

Supposons, pour simplifier, que a soit justement la tangente au lieu du point O ; cela est toujours permis. On a, dans ce cas,

$$\omega(a') = 0,$$

puisque a est tangente à une courbe.

Nous pouvons donc regarder les a'_i comme les coordonnées d'une droite a' , laquelle, comme on va le voir, fait partie du faisceau (o, π) . L'équation (17), puisque $\omega(a') = 0$, donne en effet

$$\omega(b' | a') = 0,$$

en sorte que la droite a' fait partie du complexe linéaire

$$(18) \quad \omega(b' | x) = 0.$$

Ce complexe ne serait spécial que si l'on avait $\omega(b') = 0$. Si le point O ou le plan π ne sont pas fixes l'un ou l'autre, auquel cas toutes les droites des faisceaux considérés se couperaient, on peut toujours supposer que la droite b du faisceau n'a pas d'enveloppe et que $\omega(b')$ n'est pas nul.

Les équations

$$\omega(b' | a) = 0, \quad \omega(b' | b) = 0$$

prouvent que les droites a, b font partie du complexe (18) et que π est le plan polaire du point O. La droite a' du complexe étant issue de O doit donc être dans le plan π .

Le faisceau (o, π) est donc le faisceau osculateur de la courbe lieu du point O.

Si les α' sont tous nuls ou proportionnels aux α , le raisonnement tombe en défaut; mais alors la droite α est fixe, le point O et le plan π sont un point et un plan de cette droite fixe qui, puisqu'ils dépendent d'un même paramètre, constituent deux éléments homologues d'une certaine correspondance donnée *a priori* entre les points et les plans de α . Il est à retenir qu'un pareil ensemble possède les propriétés des faisceaux osculateurs d'une courbe gauche.

Enfin il se pourrait que le point O ou bien le plan π fût fixe. On a, dans ces deux cas,

$$\omega(\alpha') = 0, \quad \omega(b') = 0, \quad \omega(\alpha' | b') = 0.$$

§7. Je vais actuellement m'occuper des faisceaux plans qui dépendent de plusieurs paramètres.

Je rappellerai d'abord une proposition générale concernant ces faisceaux plans.

Prenons un système d'axes rectangulaires et soient x, y, z les coordonnées d'un point O ; l'équation d'un plan π mené par O sera

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y),$$

en sorte que le système (O, π) sera défini par les cinq quantités x, y, z, p, q .

Supposons que ces quantités dépendent de *plusieurs* paramètres et que, de plus, lorsque ces paramètres varient, le déplacement du point O ait lieu, au second ordre près, dans le plan π ; autrement dit, quelle que soit la loi de variation des paramètres, la tangente au lieu du point O sera dans le plan π .

Nous devrons avoir, d'après cette hypothèse,

$$dz - p dx - q dy = 0.$$

Cette équation prouve qu'il existe au moins une relation entre x, y, z .

Nous envisagerons donc successivement les hypothèses où entre x, y, z il existerait une, deux ou trois relations.

S'il n'y a qu'une relation

$$z = \varphi(x, y),$$

on en tire

$$dz = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy,$$

d'où

$$\left(p - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx + \left(q - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dy = 0.$$

Si les coefficients de dx, dy n'étaient pas nuls, il existerait entre x, y une relation, ce qui ferait une seconde relation entre x, y ; on a donc ici

$$p = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

ce qui prouve que le système des faisceaux (o, π) est constitué par les points d'une surface et le plan tangent en chacun de ces points.

Admettons qu'il existe deux relations

$$\begin{aligned} z &= \varphi(x), & y &= \psi(x), \\ \text{nous aurons} & & dz &= \varphi'(x) dx, & dy &= \psi'(x) dx, \\ \text{d'où} & & [\varphi'(x) - p - q \psi'(x)] dx &= 0. \end{aligned}$$

Si dx était nul, il y aurait trois relations entre x, y, z , ce n'est pas le cas. On a donc

$$\varphi'(x) - p - q \psi'(x) = 0,$$

et il n'y a pas d'autre relation entre x, y, z, p, q , car z, y, p, q seraient fonctions de la seule variable x , et les faisceaux ne dépendraient pas de *plusieurs* paramètres.

Nous avons donc ici l'ensemble des faisceaux obtenus en associant à chaque point d'une courbe un plan tangent *quelconque* à la courbe en ce point.

Si enfin trois relations existent entre x, y, z , alors on a des faisceaux dont le point est fixe; le plan seul devant être variable et contenir au moins deux paramètres, le plan devra être l'un quelconque de ceux qui passent au point fixe.

Comme cas particulier des surfaces, on a la développable qui donne des faisceaux dans lesquels le plan ne dépend que d'un paramètre, et le plan qui fournit des faisceaux dont le plan est fixe et dont le point est quelconque dans ce plan. Ces deux cas sont dualistiques des deux que l'on a considérés en premier lieu.

Un cas intermédiaire est celui des faisceaux obtenus en associant chaque point d'une droite à un point de cette droite. Dans ce cas, en effet, le point ne dépend que d'un paramètre, le plan dépend d'un autre et ces deux paramètres sont indépendants.

§8. Ces faits trouvent une représentation fort simple et élégante en coordonnées de droites.

Prenons, en effet, le faisceau plan

$$z_i = a_i + \lambda b_i,$$

où les droites a, b dépendent de plusieurs paramètres; que faudra-t-il pour que ces faisceaux aient une enveloppe? c'est-à-dire pour que, quel que soit le déplacement du faisceau, la tangente à la courbe décrite par O et, par conséquent, la caractéristique du plan du faisceau, fassent partie de ce faisceau?

Il sera nécessaire et suffisant, conformément aux résultats déjà acquis, que l'on ait, pour tous les déplacements possibles,

ou, ce qui est la même chose,

$$(19') \quad \omega(b | da) = o,$$

car

$$o = d\omega(a | b) = \omega(a | db) + \omega(b | da).$$

On voit donc qu'un faisceau dépendant de plusieurs paramètres et qui vérifiera la condition

$$\omega(b | da) = o$$

devra être constitué :

Soit par un point d'une surface et le plan tangent en ce point;

Soit par un point d'une courbe et un plan quelconque tangent à la courbe en ce point;

Soit par le plan tangent d'une développable et un quelconque des points de contact de ce plan avec la développable;

Soit par un point et un plan d'une droite, arbitrairement associés;

Soit par un point d'un plan, associé à ce plan;

Soit par un plan mené par un point, associé à ce point.

Nous dirons, dans tous les cas, que le faisceau a une enveloppe si

$$\omega(b | da) = o.$$

Les faisceaux à enveloppe ne dépendent, on le voit, que de deux paramètres. En sorte que, *si l'on se trouve en présence de faisceaux variables dépendant de plusieurs paramètres, la condition*

$$\omega(b | da) = o$$

entraîne que les paramètres dont dépendent les faisceaux sont réductibles à deux.

Nous aurons bientôt à faire une application de cette remarque.

Je passe maintenant à l'étude des propriétés infinitésimales des complexes de droites.

59. Soient le complexe de droites

$$f(x_1, x_2, \dots, x_6) = f(x) = o,$$

x une droite de ce complexe, $\omega(x)$ la forme fondamentale, et je considère le système de complexes linéaires à deux termes

$$(20) \quad \sum \left(\lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right) y_i = o,$$

Je donnerai à ces complexes le nom de *complexes linéaires tangents*.

La remarque suivante justifie cette dénomination. Soit $x + dx + \frac{1}{2}d^2x + \dots$ une droite du complexe voisine de x , et remplaçons γ_i par $x_i + dx_i + \frac{1}{2}d^2x_i + \dots$ dans le premier membre de (20), il viendra

$$\sum \left(\lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right) \gamma_i = \frac{1}{2} \sum \left(\lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right) d^2x_i + \dots,$$

en tenant compte de $df = 0$, $d\omega = 0$, c'est-à-dire un résultat du second ordre.

Si les complexes linéaires tangents forment un système à deux termes, cela tient évidemment à ce qu'un complexe ne se trouve pas représenté par une équation unique, mais bien par le système des deux équations

$$f(x) = 0, \quad \omega(x) = 0.$$

Cherchons les complexes spéciaux tangents ; nous devrons écrire

$$\Omega \left(\lambda \frac{\partial f}{\partial x} + \mu \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\lambda^2 \Omega \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) + 2\lambda\mu \Omega \left(\frac{\partial f}{\partial x} \middle| \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) + \mu^2 \Omega \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right) = 0.$$

Mais on a

$$2 \Omega \left(\frac{\partial f}{\partial x} \middle| \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) = \sum \frac{\partial \Omega \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)}{\partial \frac{\partial \omega}{\partial x_i}} \frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0,$$

car $x_i = \frac{\partial \Omega \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)}{\partial \frac{\partial \omega}{\partial x_i}}$; on a aussi $\Omega \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right) = \omega(x) = 0$; il reste donc

$$\lambda^2 \Omega \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = 0.$$

L'équation qui fournit les complexes spéciaux tangents a donc ses racines égales et, par suite, les complexes tangents ne comprennent généralement qu'un seul complexe spécial, celui qui a x pour directrice. Si l'on se reporte au n° 29, on voit que tous les complexes linéaires tangents définissent sur x la même corrélation normale; pour ce motif, nous donnerons à cette corrélation le nom de *corrélation normale du complexe $f(x) = 0$ sur sa droite x* . On voit comment cette notion généralise la notion de corrélation normale d'un complexe linéaire (n° 15).

Nous avons vu (n° 53) que, si les tangentes x d'une courbe font partie d'un complexe linéaire, le faisceau plan osculateur appartient à ce complexe et, par suite, que le point O de contact et le plan osculateur π sont des éléments correspondants

de la corrélation normale du complexe sur la droite x . Cette importante propriété s'étend au cas d'un complexe quelconque.

Je vais prouver que, *si les tangentes x d'une courbe font partie d'un complexe*

$$f(x) = 0,$$

le faisceau osculateur de la courbe appartient à la corrélation normale du complexe $f = 0$ sur la droite x .

Il suffit évidemment de prouver que ce faisceau osculateur appartient à la corrélation normale du complexe tangent

$$\sum \frac{\partial f}{\partial x_i} y_i = 0,$$

puisque, par définition, cette corrélation est la corrélation normale du complexe $f(x) = 0$.

En effet, le faisceau osculateur est représenté par

$$\rho x_i + \sigma x'_i,$$

en supposant les x_i exprimés en fonction d'un paramètre t et posant $x'_i = \frac{dx_i}{dt}$.

Il faut prouver que

$$\sum \frac{\partial f}{\partial x_i} (\rho x_i + \sigma x'_i) = 0;$$

or cela est évident, puisque

$$\sum \frac{\partial f}{\partial x_i} x_i = m f(x) = 0, \quad \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} x'_i = \frac{d f(x)}{dt} = 0.$$

Le théorème est ainsi démontré.

60. Quelques cas particuliers feront comprendre la portée de ce théorème capital.

Considérons un plan quelconque π mené par x , les droites du complexe $f = 0$ contenues dans ce plan enveloppent une courbe et la droite x , elle-même, touche cette courbe en un point O. Il résulte du théorème précédent que O et π se correspondent dans la corrélation normale.

Ainsi :

Si l'on fait passer un plan π par une droite x d'un complexe, la courbe enveloppe du complexe relative au plan π est touchée par la droite x en un point O ; le point O et le plan π se correspondent dans la corrélation normale du complexe.

Pareillement :

Si l'on prend un point O sur une droite x d'un complexe, le cône du complexe qui a O pour sommet est tangent le long de x à un plan π homologue de O dans la corrélation normale.

61. On peut généraliser ces résultats.

Considérons une surface réglée engendrée par des droites du complexe.

Supposons, pour préciser, qu'on ait exprimé les coordonnées x_i d'une droite de cette surface en fonction d'un paramètre t . Soient x et $x + x' dt$ deux droites voisines sur cette surface.

Les complexes linéaires contenus dans l'équation à deux termes

$$\sum \left[\rho \frac{\partial \omega(x)}{\partial x_i} + \sigma \frac{\partial \omega(x')}{\partial x'_i} \right] y_i = 0$$

définissent sur x (n° 47) une corrélation normale qui n'est autre que la corrélation de Chasles, relative à la surface réglée.

Or comparons ces complexes aux complexes tangents au complexe proposé

$$\sum \left[\lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial \omega(x)}{\partial x_i} \right] y_i = 0,$$

et formons leur invariant simultané

$$\begin{aligned} & \Omega \left[\rho \frac{\partial \omega(x)}{\partial x} + \sigma \frac{\partial \omega(x')}{\partial x'} \middle| \lambda \frac{\partial f}{\partial x} + \mu \frac{\partial \omega(x)}{\partial x} \right] \\ &= \rho \lambda \Omega \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \middle| \frac{\partial f}{\partial x} \right) + \mu \rho \Omega \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \middle| \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) \\ & \quad + \sigma \lambda \Omega \left(\frac{\partial \omega}{\partial x'} \middle| \frac{\partial f}{\partial x} \right) + \sigma \mu \Omega \left(\frac{\partial \omega}{\partial x'} \middle| \frac{\partial \omega}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

Cette expression est nulle identiquement, car nous avons déjà vu que

$$\begin{aligned} & \Omega \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \middle| \frac{\partial f}{\partial x} \right) = m f(x) = 0, \\ & \Omega \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \middle| \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) = \Omega \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right) = \omega(x) = 0, \\ & \Omega \left(\frac{\partial \omega}{\partial x'} \middle| \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} x'_i = \frac{1}{2} \frac{df}{dt} = 0, \\ & \Omega \left(\frac{\partial \omega}{\partial x'} \middle| \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \sum \frac{\partial \omega}{\partial x_i} x'_i = \frac{1}{2} \frac{d\omega}{dt} = 0. \end{aligned}$$

Les deux systèmes à deux termes considérés sont donc composés de complexes linéaires en involution.

De là suit (n° 33) que les deux corrélations normales que détermine sur x chacun des deux systèmes respectivement sont en involution. En employant la locution introduite au n° 59, on peut donc dire ceci :

Si l'on considère la corrélation de Chasles d'une surface réglée d'un complexe relative à une de ses droites x , cette corrélation est en involution avec la corrélation normale du complexe relative à x .

En d'autres termes, prenons un point O sur la droite x et menons en O le plan τ tangent à la surface, ce plan τ et le plan π homologue de O dans la corrélation normale forment un faisceau harmonique avec deux plans fixes. Ou encore :

Soient

O un point sur x ;

τ le plan tangent à la surface réglée;

O' le point correspondant à τ dans la corrélation normale;

τ' le plan tangent en O' ;

τ' est le plan qui correspond à O dans la corrélation normale du complexe.

Si la surface considérée est développable (ou plus généralement forme une série réglée à enveloppe), la corrélation de Chasles est singulière et son involution avec la corrélation normale signifie que son couple singulier appartient à cette corrélation. C'est précisément le théorème du n° 59.

62. Considérons toutes les droites x d'un complexe et tous les faisceaux plans (O, π) dont le point et le plan sont des éléments correspondants de la corrélation normale du complexe sur une droite x . J'appellerai ces faisceaux plans les *faisceaux plans* du complexe. On voit comment cette définition généralise celle que nous avons donnée au n° 13 pour le cas d'un complexe linéaire.

Soient (O, π) un faisceau du complexe, x la droite du complexe dont la corrélation normale admet comme éléments correspondants le point O et le plan π . Le cône du complexe qui a pour sommet le point O sera tangent suivant x au plan π , et la courbe enveloppe des droites du complexe relative au plan π touchera en O la droite x . On peut donc énoncer ces théorèmes :

Les plans π des faisceaux du complexe dont le point O est donné enveloppent le cône du complexe qui a pour sommet ce point.

Le lieu des points O des faisceaux d'un complexe dont le plan est donné est la courbe enveloppe des droites du complexe relative à ce plan.

Le cône du complexe est ainsi le lieu enveloppe des plans dont la courbe enve-

loppe passe au sommet du cône; la courbe enveloppe relative à un plan est le lieu des sommets des cônes du complexe tangents à ce plan.

On observe qu'un faisceau plan (O, π) du complexe ne peut appartenir à la corrélation normale de deux droites x, y du complexe que si le cône de sommet O touche le plan π suivant x et y ; de plus, dans ce cas, la courbe enveloppe relative au point O a un point double en ce point, dont x et y sont les tangentes. Je réserve ces cas exceptionnels.

63. Reprenons le système à deux termes des complexes linéaires tangents

$$\sum \left(\lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right) y_i = 0,$$

les complexes spéciaux de ce système sont fournis, nous l'avons vu (n° 59), par l'équation

$$\lambda^2 \Omega \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = 0.$$

Ils sont donc tous spéciaux si

$$\Omega \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = 0.$$

Nous rencontrons ainsi naturellement cette expression remarquable

$$\Omega \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right),$$

introduite par M. Klein. Je vais montrer qu'elle est un invariant différentiel du complexe.

Effectuons la transformation linéaire

$$x_i = \sum_{\rho} A_{i\rho} x'_{\rho} \quad (i, \rho = 1, 2, \dots, 6);$$

les coefficients a de l'équation d'un complexe linéaire se trouvent liés à ceux de son équation transformée a' par les formules

$$a'_{\rho} = \sum_i A_{i\rho} a_i,$$

et, en vertu de ces dernières formules, on aura identiquement

$$\Omega'(a') = \Delta^2 \Omega(a),$$

où $\Omega(a)$ est la forme adjointe de $\omega(x)$, $\Omega'(a')$ la forme adjointe de $\omega'(x')$, transformée de $\omega(x)$, et Δ le déterminant de la substitution.

Ceci posé, supposons que la fonction $f(x)$ devienne $f'(x')$, en sorte que

$$f'(x') = f(x),$$

on aura

$$\frac{\partial f'}{\partial x'_p} = \sum_i A_{ip} \frac{\partial f}{\partial x_i};$$

or ces équations entraînent la suivante

$$\Omega' \left(\frac{\partial f'}{\partial x'} \right) = \Delta^2 \Omega \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right);$$

ce qui démontre bien l'invariance de $\Omega \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$.

On appelle *droite singulière* d'un complexe toute droite pour laquelle l'invariant $\Omega \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$ est nul.

Il est intéressant de se rendre compte de la façon dont se comporte la corrélation normale d'une droite singulière.

Puisque les complexes tangents sont tous spéciaux et qu'ils forment un système à deux termes, il faut conclure que leurs directrices forment un faisceau plan (O, π) , et, d'après la remarque du n° 30, la corrélation normale sera singulière. Toute corrélation homographique en involution avec elle devra donc contenir son couple singulier (O, π) . Par suite, toute surface réglée non développable contenue dans le complexe et passant par la droite singulière x devra toucher en O le plan π .

Par contre, toute surface développable (du complexe) passant par la droite x devra ou bien admettre O sur son arête de rebroussement, ou bien toucher le plan π .

64. Nous allons trouver ici une intéressante application des principes de la représentation des surfaces par leurs tangentes exposés au n° 58.

Je vais prouver, en effet, ce théorème dû à M. Pasch :

Les faisceaux plans (O, π) afférents à toutes les droites singulières d'un complexe ont une enveloppe.

Puisque l'on a

$$\Omega \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = 0,$$

si l'on pose

$$\gamma_i = \frac{\partial \Omega \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)}{\partial \frac{\partial f}{\partial x_i}},$$

les y_i sont les coordonnées d'une droite γ , et cette droite est la directrice de l'un des complexes linéaires tangents.

Le faisceau plan des directrices de ces complexes, le faisceau (O, π) , est donc représenté par les formules

$$z_i = \lambda x_i + \mu y_i.$$

Les conditions

$$\omega(x) = 0, \quad \omega(\gamma) = 0, \quad \omega(x | \gamma) = 0$$

étant évidemment remplies, il suffit de prouver (n° 58) que

$$\omega(\gamma | dx) = 0,$$

ou que

$$\sum \frac{\partial \omega(\gamma)}{\partial y_i} dx_i = 0.$$

Mais puisque l'on a posé

$$y_i = \frac{\partial \Omega \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)}{\partial \frac{\partial f}{\partial x_i}},$$

on en tire

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial \omega(\gamma)}{\partial y_i};$$

il suffit donc de prouver que

$$\sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = df = 0,$$

ce qui est évident.

On a donné le nom de **surface de singularités** à cette surface remarquable (¹).

Le théorème relatif aux droites singulières tracées sur les surfaces réglées du complexe prouve, si l'on observe qu'une surface réglée du complexe contient généralement des droites singulières, prouve le théorème suivant :

Toute surface réglée du complexe touche généralement la surface de singularités en un certain nombre de points.

65. Maintenant le théorème du n° 58 nous permet de démontrer le théorème suivant partiellement trouvé par M. Cayley et complété par M. Klein.

Si, pour un complexe de droites, on a

$$\Omega \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = 0,$$

identiquement ou en vertu de $f = 0$, $\omega = 0$, les droites du complexe ont une

(¹) On voit qu'il pourra arriver que la surface de singularités se réduise à une simple courbe, ou que les faisceaux plans singuliers engendrent l'un des quatre autres ensembles définis au n° 58, ou un système de plusieurs de ces ensembles.

enveloppe, c'est-à-dire, touchent une surface fixe, non développable ou développable, ou bien coupent une courbe fixe.

Reprendons en effet les notations précédentes

$$\gamma_i = \frac{\partial \Omega \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)}{\partial \frac{\partial f}{\partial x_i}};$$

à toute droite x du complexe nous faisons ainsi correspondre une droite γ qui la coupe en un point O , et a avec elle en commun un plan π .

Le faisceau (O, π) a pour représentation

$$z_i = \lambda x_i + \mu \gamma_i.$$

On pourrait croire qu'il dépend de trois paramètres comme la droite x , et s'il ne dépend que de deux en réalité, du moins on ne le sait pas *a priori*; mais, quoi qu'il en soit, puisque l'on a

$$2\omega(\gamma | dx) = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = df = 0,$$

on est assuré que le faisceau (O, π) a une enveloppe (n° 58). *Et dès lors il ne dépend pas de plus de deux paramètres.* Si O décrit une surface, π touche la surface et le complexe est celui des tangentes à cette surface. Si, au contraire, O décrit une courbe, toutes les droites du complexe coupent cette courbe, et leur ensemble est défini par cette condition.

Nous aurons à voir plus loin comment se diffèrentient ces deux cas.

66. Les propriétés infinitésimales des congruences sont connues depuis beaucoup plus longtemps que celles des complexes. Elles se sont présentées aux géomètres dès les premières recherches sur la théorie des surfaces. Dans son Traité de Géométrie, M. G. Darboux leur a consacré une place importante et a ajouté à l'intérêt que les géomètres leur prêtaient déjà en les rattachant aux recherches de Laplace sur les équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre. Nous aurons occasion d'insister sur le rôle de ces équations dans l'étude des congruences. Je vais auparavant rappeler les principales propriétés des congruences de droites.

Les droites d'une congruence sont généralement tangentes à deux surfaces; cependant, dans certains cas, ces surfaces peuvent se réduire à des courbes ou coïncider.

Soit une congruence commune à deux complexes A et B ; soit x une droite de cette congruence. Les corrélations normales H_A, H_B des complexes A, B sur la droite x ont en commun deux couples $(F, \Phi') (F', \Phi)$: les couples $(F, \Phi) (F', \Phi')$ inverses (n° 21) de ces couples jouent un rôle particulièrement important; nous

les appellerons les *couples focaux* : F , F' seront les *foyers* et Φ , Φ' les *plans focaux* de la droite x .

Les couples focaux peuvent être réels ou imaginaires, ou même confondus.

Supposons-les d'abord distincts. Les droites x dépendent de deux paramètres (n° 9), les points F , F' , les plans Φ , Φ' dépendront donc en général de deux paramètres. Les points F et F' décriront donc en général deux surfaces S et S' (respectivement) que l'on appelle les *surfaces focales*. Cependant il se peut que le point F , par exemple, décrive une courbe, auquel cas nous dirons que la surface focale S se réduit à une courbe.

Considérons une surface réglée contenue dans la congruence et passant par la droite x ; elle détermine sur x une corrélation de Chasles qui doit être (n° 61) en involution avec chacune des corrélations normales H_A , H_B et qui, par conséquent (n° 25), doit admettre les couples $(F, \Phi)(F', \Phi')$ inverses des couples (F, Φ) (F', Φ) , communs à H_A et H_B . En un mot, *toute corrélation de Chasles définie sur x par une surface réglée de la congruence doit admettre les couples focaux*. Ou encore : *Toute surface réglée de la congruence qui passe par x touche en F le plan Φ et en F' le plan Φ'* .

Considérons les corrélations de Chasles singulières qui appartiennent à la congruence. Ces corrélations sont définies par la condition d'être en involution avec H_A et H_B . Donc, d'après le n° 25, leur couple singulier est (F, Φ') pour l'une et (F', Φ) pour l'autre.

On peut en conclure qu'autour de chaque droite x de la congruence il y a deux droites voisines $x + dx$, $x + d'x$ de la congruence qui forment avec x chacune *un élément* de série réglée à enveloppe; nous dirons, pour abréger, *un élément de développable*.

Il y a donc deux manières de déplacer continuement une droite d'une congruence, à partir d'une position donnée quelconque, de telle sorte que la droite engendre une développable. La congruence peut ainsi être de deux manières décomposée en développables d'une famille. Par chaque droite x de la congruence, il passe deux de ces développables, et les faisceaux osculateurs de ces développables sont respectivement (F, Φ') et (F', Φ) . Les deux développables en question ne sont donc réelles qu'autant que ces deux couples le sont.

Envisageons d'abord le cas où S et S' sont de vraies surfaces. Considérons une développable formée des droites de la congruence; l'arête de cette développable est *un lieu* des points F , elle est tracée sur S . Nous aurons donc sur S une famille de courbes C dont les tangentes engendrent la congruence. Pareillement, nous aurons sur S' une famille de courbes C' dont les tangentes engendrent également la congruence.

Toute droite x de la congruence est tangente en F à une courbe C et en F' à

une courbe C' ; elle est donc tangente en ses foyers aux surfaces focales S et S' .

Toute surface réglée formée de droites de la congruence se trouve ainsi circonscrite à la fois aux surfaces S et S' . Or son plan tangent en F est le plan Φ , son plan tangent en F' est le plan Φ' .

Les couples focaux (F, Φ) , (F, Φ') sont donc tangents aux surfaces focales.

Considérons en particulier la développable dont une courbe C' est l'arête; elle est circonscrite à S suivant une courbe D . Lorsque C' décrit la surface S' , la courbe D engendre sur S une famille de courbes. Je dis que les courbes C et D forment sur S un réseau conjugué.

En effet, la courbe D est la courbe de contact de S avec une développable dont la génératrice rectiligne qui passe en F touche, en ce point, la courbe C . La tangente à D au point F et la droite x tangente à C en F sont donc deux tangentes conjuguées au sens de Dupin.

Pareillement, les développables qui ont pour arêtes les courbes C sont circonscrites à S' suivant des courbes D' qui forment avec les courbes C' un système conjugué.

On voit qu'une congruence établit une correspondance point par point entre ses surfaces focales. Au point F pris sur S correspond F' pris sur S' et inversement. Lorsque deux surfaces se correspondent point par point, il existe généralement sur chacune deux familles de courbes conjuguées dont l'image sur l'autre est un autre couple de familles conjuguées. Ici, ces deux familles sont les courbes C , D sur S et les courbes C' , D' sur S' , car, si F décrit une courbe C , F' décrit une courbe D' , et si F décrit une courbe D , F' décrit une courbe C' .

Il y a lieu toutefois d'observer, et nous reviendrons sur ce point, que si les asymptotiques se correspondent sur les deux nappes S et S' , à tout système conjugué tracé sur S correspond sur S' un autre système conjugué.

67. Le cas où une des surfaces S , S' , ou même toutes les deux, deviennent des courbes, n'offre aucune difficulté. Supposons que F décrive une courbe V et F' une surface S' , cette surface étant encore le lieu des courbes C' , arêtes des développables d'une famille formées avec les droites de la congruence, ces droites sont assujetties à la double condition de couper V et de toucher S' . Seulement, ici, les développables d'une famille se réduiront aux cônes dont le sommet F est pris sur la courbe V et qui sont circonscrits à S' .

Les courbes D' seront les courbes de contact de ces cônes.

Quant aux courbes C' , ce seront les arêtes de développables passant par la courbe V .

Si la surface S' elle-même se réduit à une courbe V' , la congruence est l'ensemble des droites qui coupent V et V' ; les développables de la congruence seront alors les cônes passant par V' et dont les sommets sont sur V , et les cônes passant par V' et dont les sommets sont sur V' .

Un exemple intéressant est fourni par les droites qui coupent deux coniques focales l'une de l'autre. Tous les cônes sont alors de révolution.

Nous avons déjà rencontré un exemple de surfaces focales réduites à des lignes, dans la congruence linéaire.

68. Il ne sera pas inutile de reprendre, par une autre voie, l'exposition de ces résultats.

Soient les équations des complexes A et B

$$f(x) = 0, \quad g(x) = 0,$$

et x une droite de la congruence commune; je considère l'équation

$$(21) \quad \sum \left(\lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial g}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right) \gamma_i = 0.$$

Dans cette équation, γ désigne une droite courante et λ, μ, ν trois arbitraires; $\omega(x)$ est, comme toujours, la forme fondamentale. Cette équation représente un système à trois termes de complexes linéaires qui ont en commun une demi-quadrique dégénérée (n° 40).

Formons, en effet, l'invariant

$$\begin{aligned} & \Omega \left(\lambda \frac{\partial f}{\partial x} + \mu \frac{\partial g}{\partial x} + \nu \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) \\ &= \Omega \left(\lambda \frac{\partial f}{\partial x} + \mu \frac{\partial g}{\partial x} \right) + \nu^2 \Omega \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right) + \nu \sum \frac{\partial \Omega \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)}{\partial \frac{\partial \omega}{\partial x_i}} \left(\lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial g}{\partial x_i} \right). \end{aligned}$$

On a d'abord

$$\begin{aligned} & \Omega \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right) = \omega(x) = 0, \\ & x_i = \frac{\partial \Omega \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)}{\partial \frac{\partial \omega}{\partial x_i}}, \end{aligned}$$

et, par suite, le coefficient de ν s'écrit

$$\sum x_i \left(\lambda \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial g}{\partial x_i} \right) = \lambda m f(x) + \mu m' g(x),$$

où m, m' sont les degrés d'homogénéité de f et de g . Comme $f = g = 0$, on a

donc

$$\Omega \left(\lambda \frac{\partial f}{\partial x} + \mu \frac{\partial g}{\partial x} + \nu \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) = \Omega \left(\lambda \frac{\partial f}{\partial x} + \mu \frac{\partial g}{\partial x} \right),$$

ou, en développant,

$$(22) \quad = \Omega \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \lambda^2 + 2 \Omega \left(\frac{\partial f}{\partial x} \middle| \frac{\partial g}{\partial x} \right) \lambda \mu + \Omega \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right) \mu^2.$$

Les complexes spéciaux du système s'obtiendront en prenant pour $\lambda : \mu$ les valeurs $\lambda_0 : \mu_0$ et $\lambda'_0 : \mu'_0$ qui annulent cet invariant. Ces complexes spéciaux formeront donc les systèmes à deux termes

$$(23) \quad \sum \left(\lambda_0 \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu_0 \frac{\partial g}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right) \gamma_i = 0,$$

$$(24) \quad \sum \left(\lambda'_0 \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu'_0 \frac{\partial g}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right) \gamma_i = 0.$$

Dans ces formules, ν demeure un paramètre arbitraire. D'après le n° 30, chacun de ces systèmes (23), (24) se compose de complexes spéciaux dont les directrices forment un faisceau plan. Nous avons donc deux faisceaux plans; j'ajoute que (F', Φ) , (F, Φ') sont ces deux faisceaux. En effet, cherchons les deux faisceaux plans dont l'ensemble constitue les droites communes aux complexes (21). Ces droites communes γ vérifient les équations

$$\sum \frac{\partial f}{\partial x_i} \gamma_i = 0, \quad \sum \frac{\partial g}{\partial x_i} \gamma_i = 0, \quad \sum \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \gamma_i = 0.$$

Elles coupent x d'après la dernière relation et comme x appartient aux deux complexes

$$\sum \frac{\partial f}{\partial x_i} \gamma_i = 0, \quad \sum \frac{\partial g}{\partial x_i} \gamma_i = 0,$$

elles ne peuvent elles-mêmes appartenir à ces deux complexes qu'à la condition de faire partie de l'un des deux faisceaux (F, Φ') , (F', Φ) qu'ont en commun les deux corrélations H_A , H_B déjà définies plus haut. Puisque les droites des faisceaux (F, Φ') , (F', Φ) sont celles qu'ont en commun tous les complexes (21), les directrices des complexes spéciaux de ce système engendrent les couples focaux (F, Φ) , (F', Φ') , inverses des deux premiers.

Supposons dès lors que les complexes (23) engendrent le faisceau (F, Φ) , toute droite de ce faisceau sera ainsi représentée,

$$z_i + \nu x_i$$

où l'on a posé

$$\frac{\partial \omega(z)}{\partial z_i} = \lambda_0 \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu_0 \frac{\partial g}{\partial x_i}.$$

Il est évident que les z_i ainsi définis seront les coordonnées d'une droite particulière du faisceau (F, Φ) .

Vérifions que la condition pour que (F, Φ) ait une enveloppe se trouve remplie,

$$\begin{aligned} \omega(z | dx) &= \sum \frac{\partial \omega(z)}{\partial z_i} dx_i \\ &= \sum \left(\lambda_0 \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu_0 \frac{\partial g}{\partial x_i} \right) dx_i = \lambda_0 df + \mu_0 dg = 0, \end{aligned}$$

car $df = 0$, $dg = 0$.

Il est ainsi prouvé que les couples focaux possèdent une enveloppe.

Le système des complexes (21) possède une propriété qui justifie le nom de *complexes linéaires tangents* que l'on donne à ces complexes. Si l'on substitue aux y_i dans le premier membre de (21) les coordonnées d'une droite de la congruence

$$x_i + dx_i + \frac{1}{1,2} d^2 x_i + \frac{1}{1,2,3} d^3 x_i + \dots$$

infiniment voisine de x , on trouve un résultat du second ordre au plus. Aucun autre complexe linéaire n'offre cette particularité, ainsi que le lecteur le vérifiera lui-même.

69. Bien que nous ne voulions pas placer ici une étude détaillée des congruences de droites, nous devons cependant tenir compte du cas où, pour toutes les droites de la congruence, les couples focaux coïncideraient.

Ce cas est évidemment caractérisé par le fait que les deux racines de l'équation (22) sont égales, ce qui donne

$$(25) \quad \left[\Omega \left(\frac{\partial f}{\partial x} \middle| \frac{\partial g}{\partial x} \right) \right]^2 - \Omega \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \Omega \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right) = 0.$$

Le premier membre de cette équation est un invariant de la congruence; c'est même un combinant, car, si l'on pose

$$\begin{aligned} f_1 &= \tilde{J}(f, g), \quad g_1 = \tilde{G}(f, g), \\ \Delta &= \frac{\partial \tilde{J}}{\partial f} \frac{\partial \tilde{G}}{\partial g} - \frac{\partial \tilde{J}}{\partial g} \frac{\partial \tilde{G}}{\partial f}, \end{aligned}$$

on trouve

$$\begin{aligned} &\left[\Omega \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \middle| \frac{\partial g_1}{\partial x} \right) \right]^2 - \Omega \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \right) \Omega \left(\frac{\partial g_1}{\partial x} \right) \\ &= \Delta^2 \left\{ \left[\Omega \left(\frac{\partial f}{\partial x} \middle| \frac{\partial g}{\partial x} \right) \right]^2 - \Omega \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \Omega \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Cherchons quelle peut bien être, dans ce cas, la définition de la congruence. Nous n'avons plus qu'une seule famille de séries réglées à enveloppe et le

couple focal unique (F, Φ) est le lieu des directrices des complexes linéaires tangents spéciaux

$$\sum \left(\lambda_0 \frac{\partial f}{\partial x_i} + \mu_0 \frac{\partial g}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right) y_i = 0.$$

Comme plus haut, on reconnaîtra que ce couple (F, Φ) possède une enveloppe, laquelle sera généralement une surface S .

D'autre part, puisque le plan Φ' coïncide ici avec le plan Φ , le couple (F, Φ) constitue en même temps le faisceau osculateur de l'unique développable que l'on puisse former avec les droites de la congruence, et qui passe par la droite x . L'arête C de cette développable est tracée sur S et, comme le plan osculateur Φ de C au point F est en même temps tangent à S , il en résulte que C est une ligne asymptotique de la surface S . Ceci ayant lieu pour toutes les développables de la congruence, celle-ci apparaît *comme l'ensemble des tangentes aux lignes asymptotiques d'une famille de la surface S*.

Réciproquement, si l'on considère les asymptotiques C d'une famille sur une surface S , leurs tangentes constituent une congruence à couples focaux confondus.

En effet, soit généralement sur une surface S une famille de courbes C , et considérons la congruence des tangentes à ces courbes. Soit x une de ces tangentes qui touche en F une courbe C ; Φ le plan tangent en F à la surface et Φ' le plan osculateur à C en F .

Les plans Φ et Φ' sont les plans focaux de la droite x et la seconde surface focale S' est l'enveloppe du plan Φ' . Mais que les lignes C soient des asymptotiques de S , alors Φ' coïncide avec Φ et les couples focaux coïncident.

70. Il nous reste à considérer ce qui arrive si, les couples focaux coïncidant, le point F décrit non plus une surface, mais une courbe V . Ce cas, assez rarement considéré, offre cependant un réel intérêt.

La congruence est composée de droites qui coupent la courbe fixe V . Par tout point F de V il passe donc une infinité de ces droites. Les droites issues de F forment un hyperfaisceau dont on peut représenter une quelconque des droites par les formules

$$z_i = \lambda a_i + \mu b_i + \nu c_i$$

ou

$$\omega(a) = \omega(b) = \omega(c) = \omega(a+b) = \omega(a+c) = \omega(b+c) = 0,$$

a_i, b_i, c_i étant des fonctions d'un paramètre u . De plus, entre λ, μ, ν doit exister une relation homogène, qui est en quelque sorte l'équation du cône que décrivent les droites de la congruence issues de F .

On a

$$\begin{aligned} dz_i &= \lambda da_i + \mu db_i + \nu dc_i + a_i d\lambda + b_i d\mu + c_i d\nu \\ &= (\lambda a'_i + \mu b'_i + \nu c'_i) du + (a_i d\lambda + b_i d\mu + c_i d\nu), \end{aligned}$$

a'_i, b'_i, c'_i étant les dérivées de a_i, b_i, c_i prises par rapport à u . Donc

$$\begin{aligned} \omega(dz) &= \omega(\lambda a' + \mu b' + \nu c') du^2 \\ &\quad + 2\omega(\lambda a' + \mu b' + \nu c' | a d\lambda + b d\mu + c d\nu) du + \omega(a d\lambda + b d\mu + c d\nu). \end{aligned}$$

L'expression $\omega(a d\lambda + b d\mu + c d\nu)$ est nulle identiquement, et il reste

$$\omega(dz) = \omega(a' \lambda + b' \mu + c' \nu) du^2 + 2\omega(a' \lambda + b' \mu + c' \nu | a d\lambda + b d\mu + c d\nu) du.$$

L'équation $\omega(dz) = 0$ définit les droites de la congruence voisine de z , qui forment avec z un élément de développable. La solution $du = 0$ fournit les cônes dont le sommet est sur la courbe V. Mais ici, puisqu'il y a coïncidence des deux familles de développables, les deux solutions doivent donner $du = 0$.

Supposons λ, μ, ν exprimés en fonction de u et d'un paramètre v qui varie quand la droite décrit le cône cherché. Il faudra que le terme en $du dv$ disparaîsse ou que l'on ait identiquement

$$\omega\left(a' \lambda + b' \mu + c' \nu \mid a \frac{\partial \lambda}{\partial v} + b \frac{\partial \mu}{\partial v} + c \frac{\partial \nu}{\partial v}\right) = 0,$$

ce qui s'écrit, en développant,

$$\omega(b | c') \left(\mu \frac{\partial \nu}{\partial v} - \nu \frac{\partial \mu}{\partial v} \right) + \omega(c | a') \left(\nu \frac{\partial \lambda}{\partial v} - \lambda \frac{\partial \nu}{\partial v} \right) + \omega(a | b') \left(\lambda \frac{\partial \mu}{\partial v} - \mu \frac{\partial \lambda}{\partial v} \right) = 0.$$

Si l'on observe que $\omega(b | c')$, $\omega(c | a')$, $\omega(a | b')$ ne dépendent pas de v , on voit que cette équation équivaut à la relation finie

$$26) \quad \begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ \omega(b | c') & \omega(c | a') & \omega(a | b') \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 0,$$

où α, β, γ sont des constantes, c'est-à-dire des fonctions de u .

La forme linéaire de cette équation nous prouve d'abord que les droites de la congruence issues du point F de la courbe V engendrent un faisceau plan. Le plan Φ de ce faisceau est évidemment le plan focal. De plus, dans la gerbe lieu des droites issues de F, la tangente FT à la courbe V est représentée par les valeurs suivantes de $\lambda : \mu : \nu$ (n° 54)

$$\frac{\lambda}{\omega(b | c')} = \frac{\mu}{\omega(c | a')} = \frac{\nu}{\omega(a | b')}.$$

Comme ces valeurs de $\lambda : \mu : \nu$ vérifient l'équation (26), on doit conclure que le plan Φ touche la courbe V , c'est-à-dire, conformément à la locution du n° 55, que les caractéristiques du faisceau (F, Φ) appartiennent à ce faisceau. De là résulte aussitôt que, en général, *la congruence est le lieu des droites qui touchent une développable donnée en des points d'une courbe tracée sur cette développable*, et que, exceptionnellement, elle est le lieu des faisceaux plans (F, Φ) dont le point et le plan constituent un couple d'une correspondance déterminée entre les points et les plans d'une droite fixe (n° 56).

La congruence linéaire singulière (n° 29) est le cas le plus simple que l'on puisse citer.

71. Il est souvent utile de représenter une congruence en exprimant les coordonnées x_i de l'une quelconque de ses droites x en fonction de deux paramètres u, v . De même, il est souvent utile de représenter les coordonnées d'une droite d'un complexe au moyen de fonctions de trois variables. Nous reviendrons plus tard sur cette représentation des complexes; mais je vais présenter immédiatement quelques remarques sur ce qui concerne les congruences.

Si l'on forme $\omega(dx)$, comme

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial u} du + \frac{\partial x_i}{\partial v} dv,$$

on aura

$$(27) \quad \omega(dx) = E du^2 + 2F du dv + G dv^2,$$

où

$$E = \omega\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right), \quad F = \omega\left(\frac{\partial x}{\partial u} \middle| \frac{\partial x}{\partial v}\right), \quad G = \omega\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right).$$

Toute équation entre u, v fournit une surface réglée de la congruence; en particulier, les intégrales de l'équation

$$E du^2 + 2F du dv + G dv^2 = 0$$

donneront les développables de la congruence. Ces développables coïncideront si $EG - F^2 = 0$.

Considérons un complexe linéaire

$$\sum a_i y_i = 0,$$

et substituons à la place de y_i les coordonnées d'une droite de la congruence voisine de la droite x de cette même congruence

$$\begin{aligned} y_i &= x_i + \frac{\partial x_i}{\partial u} du + \frac{\partial x_i}{\partial v} dv + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_i}{\partial u} d^2 u + \frac{\partial x_i}{\partial v} d^2 v \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial u^2} du^2 + 2 \frac{\partial^2 x_i}{\partial u \partial v} du dv + \frac{\partial^2 x_i}{\partial v^2} dv^2 \right) + \dots \end{aligned}$$

Il viendra

$$\begin{aligned}\sum a_i y_i &= \sum a_i x_i + \sum a_i \frac{\partial x_i}{\partial u} du + \sum a_i \frac{\partial x_i}{\partial v} dv + \frac{1}{2} \left(\sum a_i \frac{\partial x_i}{\partial u} d^2 u + \sum a_i \frac{\partial x_i}{\partial v} d^2 v \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum a_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial u^2} du^2 + \sum a_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial u \partial v} du dv + \sum a_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial v^2} dv^2 + \dots\end{aligned}$$

Si l'on choisit les a de sorte que

$$(28) \quad \sum a_i x_i = 0, \quad \sum a_i \frac{\partial x_i}{\partial u} = 0, \quad \sum a_i \frac{\partial x_i}{\partial v} = 0,$$

le résultat de la substitution est

$$\sum a_i y_i = \frac{1}{2} \sum a_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial u^2} du^2 + \sum a_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial u \partial v} du dv + \frac{1}{2} \sum a_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial v^2} dv^2 + \dots;$$

il se réduit au deuxième ordre.

Pour certaines congruences, on peut déterminer le complexe $\sum a_i y_i = 0$ de manière à faire disparaître aussi les termes du deuxième ordre, en sorte que, *au troisième ordre près*, les droites voisines d'une droite x dans la congruence peuvent être envisagées comme contenues dans un complexe linéaire. Nous dirons que, dans ce cas, la congruence possède, suivant chacune de ses droites, un *complexe linéaire osculateur*.

Il faut, pour que les termes du deuxième ordre disparaissent, que l'on ait, en même temps que les équations (28), les suivantes

$$(29) \quad \sum a_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial u^2} = 0, \quad \sum a_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial u \partial v} = 0, \quad \sum a_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial v^2} = 0.$$

La compatibilité de ces équations s'exprime en écrivant que le déterminant suivant est nul

$$(30) \quad \left| \left| \frac{\partial^2 x_i}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 x_i}{\partial u \partial v}, \frac{\partial^2 x_i}{\partial v^2}, \frac{\partial x_i}{\partial u}, \frac{\partial x_i}{\partial v}, x_i \right| \right| = 0.$$

Or ce déterminant nul exprime évidemment la condition nécessaire et suffisante pour que les x_i soient solutions d'une même équation de la forme de Laplace

$$(31) \quad A \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + 2B \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} + C \frac{\partial^2 \theta}{\partial v^2} + D \frac{\partial \theta}{\partial u} + E \frac{\partial \theta}{\partial v} + G \theta = 0.$$

Ainsi, pour qu'une congruence admette un complexe linéaire osculateur, il faut et il suffit que les coordonnées d'une de ses droites vérifient une même équation de la forme (31).

72. Les congruences à couples focaux confondus sont *toujours* dans ce cas.

Supposons, en effet, que $v = \text{const.}$ soient les développables de la congruence, l'expression de $\omega(dx)$ doit se réduire à dv^2 ; on a

$$\omega(dx) = \omega\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) du^2 + 2\omega\left(\frac{\partial x}{\partial u} \middle| \frac{\partial x}{\partial v}\right) du dv + \omega\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right) dv^2;$$

nous aurons donc

$$\omega\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) = 0, \quad \omega\left(\frac{\partial x}{\partial u} \middle| \frac{\partial x}{\partial v}\right) = 0.$$

Je considère les expressions suivantes

$$\varphi_i = A \frac{\partial^2 x_i}{\partial u^2} + B \frac{\partial^2 x_i}{\partial u \partial v} + C \frac{\partial x_i}{\partial u} + D \frac{\partial x_i}{\partial v} + G x_i,$$

et je forme

$$\omega(x \mid \varphi) = A \omega\left(x \middle| \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right) + B \omega\left(x \middle| \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\right) + C \omega\left(x \middle| \frac{\partial x}{\partial u}\right) + D \omega\left(x \middle| \frac{\partial x}{\partial v}\right) + G \omega(x),$$

$$\omega\left(\frac{\partial x}{\partial u} \middle| \varphi\right) = A \omega\left(\frac{\partial x}{\partial u} \middle| \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right) + B \omega\left(\frac{\partial x}{\partial u} \middle| \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\right) + C \omega\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) + D \omega\left(\frac{\partial x}{\partial u} \middle| \frac{\partial x}{\partial v}\right) + G \omega\left(x \middle| \frac{\partial x}{\partial u}\right).$$

Ces deux expressions sont nulles. On a, en effet,

$$\begin{aligned} \omega(x) &= 0, & \frac{1}{2} \frac{\partial \omega(x)}{\partial u} &= \omega\left(x \middle| \frac{\partial x}{\partial u}\right) = 0, & \frac{1}{2} \frac{\partial \omega(x)}{\partial v} &= \omega\left(x \middle| \frac{\partial x}{\partial v}\right) = 0, \\ && \frac{\partial \omega\left(x \middle| \frac{\partial x}{\partial u}\right)}{\partial u} &= \omega\left(x \middle| \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right) + \omega\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) &=& 0, \end{aligned}$$

et comme $\omega\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right) = 0$, on a

$$\omega\left(x \middle| \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right) = 0;$$

de même

$$\frac{\partial \omega\left(x \middle| \frac{\partial x}{\partial v}\right)}{\partial v} = \omega\left(x \middle| \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\right) + \omega\left(\frac{\partial x}{\partial u} \middle| \frac{\partial x}{\partial v}\right) = 0,$$

et comme $\omega\left(\frac{\partial x}{\partial u} \middle| \frac{\partial x}{\partial v}\right) = 0$, on a

$$\omega\left(x \middle| \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\right) = 0.$$

On a donc bien

$$(32) \quad \begin{cases} 2\omega(x \mid \varphi) &= \sum \frac{\partial \omega(x)}{\partial x_i} \varphi_i = 0, \\ 2\omega\left(\frac{\partial x}{\partial u} \mid \varphi\right) &= \sum \frac{\partial \omega(x)}{\partial \zeta_i} \varphi_i = 0, \end{cases}$$

où l'on fait, pour un instant, $\zeta_i = \frac{\partial x_i}{\partial u}$.

Si l'on avait

$$\frac{\frac{\partial \omega(\xi)}{\partial \xi_1}}{\frac{\partial \omega(x)}{\partial x_1}} = \frac{\frac{\partial \omega(\xi)}{\partial \xi_2}}{\frac{\partial \omega(x)}{\partial x_2}} = \dots = \frac{\frac{\partial \omega(\xi)}{\partial \xi_6}}{\frac{\partial \omega(x)}{\partial x_6}},$$

il viendrait, en appelant ρ la valeur commune de ces rapports,

$$\frac{\partial \omega(\xi - \rho x)}{\partial (\xi_i - \rho x_i)} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 6),$$

ce qui exigerait que

$$\xi_i - \rho x_i = 0$$

ou

$$\frac{\partial x_i}{\partial u} = \rho x_i,$$

d'où

$$x_i = e^{\int \rho du} V_i;$$

les rapports des x_i ne dépendraient que de v , ce qui est contraire à nos hypothèses.

L'un au moins des déterminants

$$\frac{\partial \omega(\xi)}{\partial \xi_i} \frac{\partial \omega(x)}{\partial x_k} - \frac{\partial \omega(\xi)}{\partial \xi_k} \frac{\partial \omega(x)}{\partial x_i}$$

n'est pas nul, d'après ce qui précède. Par exemple, celui qui correspond aux indices $i = 1, k = 2$. On peut alors déterminer l'équation

$$(33) \quad A \frac{\partial^2 \theta}{\partial u^2} + B \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} + C \frac{\partial \theta}{\partial u} + D \frac{\partial \theta}{\partial v} + G \theta = 0$$

de façon qu'elle admette les solutions x_3, x_4, x_5, x_6 ; $\varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$ étant nuls, les équations (32) donneront dès lors, pour φ_1, φ_2 , des valeurs nulles puisque le déterminant correspondant n'est pas nul.

Les six expressions φ_i étant ainsi nulles, les six coordonnées x_i vérifient l'équation (33). La congruence admet donc un complexe linéaire osculateur.

73. Mais ce cas n'est pas le seul.

Prenons, par exemple, une congruence G contenue dans un complexe linéaire. Les deux surfaces focales sont polaires réciproques par rapport à ce complexe. En effet, soit Δ une droite de la congruence et $(F, \Phi), (F', \Phi')$ les couples focaux. Le couple (F, Φ') est le faisceau plan osculateur de la courbe C tracée sur la surface S (n° 66); ce faisceau plan appartient donc au complexe linéaire, attendu que les tangentes de C appartiennent à ce complexe (n° 53). Le plan Φ' est ainsi

le plan polaire de F dans le complexe; pareillement, le plan Φ est le plan polaire de F' . Les deux faisceaux plans (F, Φ) , (F', Φ') sont polaires l'un de l'autre et, par suite, les deux surfaces focales S et S' qu'ils enveloppent sont polaires l'une de l'autre par rapport au complexe.

Il y a même plus : lorsque le point F décrira sur S une courbe ou, plus exactement, lorsque le faisceau plan (F, Φ) décrira un *bandeau* circonscrit à S , le faisceau plan (F', Φ') décrira le bandeau réciproque circonscrit à S' . Si, en particulier, le bandeau est un bandeau asymptotique de S , c'est-à-dire un bandeau dans lequel le lieu du point F est une asymptotique de S , le bandeau correspondant de S' sera également asymptotique. Cela tient à ce que, par dualité, les bandeaux asymptotiques d'une surface se transforment dans ceux de la surface transformée.

Autrement dit, les asymptotiques se correspondent sur les surfaces focales.

Cette propriété remarquable est générale, ainsi que l'a montré M. G. Darboux, et les considérations précédentes permettent d'en donner une démonstration immédiate.

Soit une congruence G , qui admet, suivant sa droite x , un complexe linéaire osculateur C_x ; soit S une surface focale, et considérons les tangentes de S qui font partie du complexe C_x . J'appelle S_1 la polaire réciproque de S dans le complexe C_x , la surface S_1 sera la seconde surface focale de la congruence G_1 des droites tangentes à S qui font partie de C_x ; soit enfin S' la seconde surface focale de la congruence G . Autour de la droite x , les congruences G et G_1 coïncident jusqu'aux propriétés qui dépendent du troisième ordre. Les deux surfaces focales S' et S_1 doivent donc être tangentes au point F' où x touche S' et, de plus, les éléments du second ordre de S' et S_1 doivent être les mêmes autour de F' . Les tangentes asymptotiques de S' et de S_1 doivent coïncider.

Mais si F se déplace sur une tangente asymptotique de S , F' se déplace sur S_1 suivant une tangente asymptotique, donc suivant une tangente asymptotique de S' . Il est ainsi établi que les déplacements asymptotiques sur S et S' se correspondent. Les asymptotiques de S et de S' se correspondent donc.

Nous aurons occasion de revenir sur cette question.

