ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

E. COSSERAT

Sur l'étude d'une courbe algébrique dans le voisinage d'un de ses points

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 1re série, tome 4, no 4 (1890), p. O1-O16
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1890_1_4_4_O1_0>

SUR L'ÉTUDE

D'UNE COURBE ALGÉBRIQUE

DANS LE VOISINAGE D'UN DE SES POINTS (1),

PAR M. E. COSSERAT,

Chargé d'un Cours complémentaire à la Faculté des Sciences de Toulouse.

I. — *Préliminaires. Signification algébrique du problème.*

Nous prendrons pour base de cette étude le théorème suivant, qui se démontre par des considérations élémentaires :

THÉORÈME I. — *Soit $f(x, y) = 0$ une équation dont le premier membre est un polynôme entier en x et y; si, pour $x = x_0$, l'équation en y a n racines égales à y_0, pour une valeur de x voisine de x_0, cette équation a n racines voisines de y_0, et n seulement.*

On en déduit les propositions suivantes :

THÉORÈME II. — *Si, pour $x = x_0$, l'équation en y a une racine simple y_0, pour une valeur de x voisine de x_0, cette équation admettra une racine simple voisine de y_0, et une seule.*

THÉORÈME III. — *Si l'équation est à coefficients réels et si, en attribuant à x la valeur réelle x_0, l'équation en y a une racine simple réelle y_0, pour une valeur de x réelle et voisine de x_0, l'équation admettra une racine simple réelle voisine de y_0, et une seule.*

Ceci posé, on peut toujours supposer que le point à étudier coïncide avec l'origine; s'il en était autrement, on transporterait l'origine au point considéré. Quelle est alors la signification algébrique du problème proposé?

(1) Conférence faite par M. Cosserat à la Faculté des Sciences de Toulouse.

La courbe représentée par l'équation algébrique à coefficients réels

$$\Sigma A x^{\beta} y^{\alpha} = 0 \tag{1}$$

est la représentation géométrique des solutions *réelles* de cette équation.

Donnons à x la valeur zéro, l'équation en y correspondante admettra la racine zéro; soit n l'ordre de multiplicité de cette racine; donnons à x une valeur infiniment petite, l'équation en y correspondante admettra n racines infiniment petites; *l'étude de celles de ces racines qui sont réelles* n'est évidemment autre chose que l'étude de la courbe algébrique dans le voisinage de l'origine.

Indiquons d'abord, d'après Puiseux, comment on sépare les n racines infiniment petites, et, plus généralement, celles d'une équation algébrique quelconque, à coefficients réels ou imaginaires, prise sous la forme (1).

II. — *Séparation des n racines infiniment petites d'une équation algébrique.*

Désignons par y l'une de ces racines; regardons x comme infiniment petit du premier ordre et *admettons que y soit un infiniment petit d'un ordre déterminé* μ; en d'autres termes, supposons qu'il existe un nombre positif μ tel que $\frac{y}{x^{\mu}}$ ait une limite z, qui ne soit pas nulle, lorsque x tend vers zéro : *cette hypothèse sera justifiée* a posteriori.

Cherchons la partie principale zx^{μ} de l'infiniment petit y; à cet effet, posons

$$y = (z + y_1) x^{\mu} = z x^{\mu} + y_1 x^{\mu},$$

y_1 étant un infiniment petit. Si l'on substitue cette valeur de y dans l'équation, celle-ci devra être identiquement satisfaite; les termes d'ordre minimum, en particulier, devront s'y détruire; ils seront donc au nombre de deux au moins, et d'ailleurs ces termes ne pouvant être évidemment cherchés que dans la suite des termes

$$A z^{\alpha} x^{\beta + \mu\alpha}, \qquad A_1 z^{\alpha_1} x^{\beta_1 + \mu\alpha_1}, \quad \ldots,$$

provenant de la substitution du premier terme zx^{μ} de la valeur de y, il en résulte que μ doit être choisi de telle sorte que, dans la suite des exposants

$$\beta + \mu\alpha, \quad \beta_1 + \mu\alpha_1, \quad \ldots,$$

il y ait au moins deux termes minima.

Soit μ une valeur satisfaisant à cette condition et définie par les relations

$$\beta + \mu\alpha = \beta_1 + \mu\alpha_1 = \ldots = \beta_i + \mu\alpha_i, \tag{2}$$

qui expriment l'égalité des exposants minima $\beta + \mu\alpha, \ldots, \beta_i + \mu\alpha_i$.

Les valeurs de z correspondant à cette valeur de μ s'obtiendront en annulant la somme des coefficients des termes correspondant respectivement à ces exposants, savoir

$$A z^{\alpha} + A_1 z^{\alpha_1} + \ldots + A_i z^{\alpha_i};$$

d'ailleurs z ne doit pas être nul; par suite, si l'on suppose les nombres $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_i$ rangés par ordre de grandeur décroissante, z aura $\alpha - \alpha_i$ valeurs, déterminées par l'équation

$$A z^{\alpha-\alpha_i} + A_1 z^{\alpha_1-\alpha_i} + \ldots + A_i = 0. \tag{3}$$

Newton a indiqué une construction géométrique simple pour déterminer les valeurs de μ.

Traçons dans le plan deux axes coordonnés OX, OY, et représentons chaque terme de l'équation (1) tel que $A x^{\beta} y^{\alpha}$ par un point ayant pour abscisse l'exposant α de y et pour ordonnée l'exposant β de x; on obtiendra ainsi un ensemble de points dont l'un au moins sera sur OX, sinon l'équation (1) contiendrait en facteur une puissance de x que l'on supprimerait; il y aura de même au moins un point sur OY. Soit A le point situé sur OX qui est le plus voisin de O, c'est-à-dire le point dont l'abscisse est égale à n; soit aussi B le point situé sur OY qui est le plus voisin de O.

Les relations (2) montrent que les points $(\alpha, \beta), (\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_i, \beta_i)$ sont situés sur la droite

$$Y + \mu X = \beta + \mu\alpha,$$

et les autres points $(\alpha_{i+1}, \beta_{i+1}), \ldots$ sont situés au-dessus, en vertu des relations $\beta + \mu\alpha < \beta_{i+1} + \mu\alpha_{i+1}, \ldots$.

Donc la droite considérée sera l'un des côtés de la portion inférieure ACBD, comprise entre les axes, du polygone convexe ACDBEF circonscrit au système de points. Il suffira donc de tracer cette partie inférieure pour obtenir les droites qui répondent à la question. Leurs coefficients angulaires, changés de signe, donneront les valeurs de μ.

A chaque côté de la ligne polygonale ACBD correspondent des racines,

dont le nombre est la différence des abscisses des extrémités du côté considéré; le nombre des racines correspondant à la ligne polygonale ACDB entière est donc égal à l'abscisse de A, c'est-à-dire à n; ainsi se trouve justifiée l'hypothèse que nous avons faite sur l'ordre infinitésimal des racines.

Des relations (2) on déduit

$$\mu = -\frac{\beta - \beta_i}{\alpha - \alpha_i} = -\frac{\beta_1 - \beta_i}{\alpha_1 - \alpha_i} = \ldots;$$

donc μ *est un nombre commensurable* et l'on peut poser

$$\mu = \frac{p}{q},$$

$\frac{p}{q}$ désignant une fraction irréductible. On aura alors

$$\alpha - \alpha_i = \gamma q, \qquad \alpha_1 - \alpha_i = \gamma_1 q, \qquad \ldots.$$

$\gamma, \gamma_1, \ldots$ étant des entiers; l'équation (3) deviendra

$$\mathrm{A}\, u^{\gamma} + \mathrm{A}_1 u^{\gamma_1} + \ldots + \mathrm{A}_i = 0, \tag{4}$$

en posant $z^q = u$.

Si les différentes équations telles que (3) ou telles que (4) ont toutes leurs racines simples, nous trouvons pour les n racines infiniment petites des parties principales toutes distinctes qui permettront de les distinguer; on peut dire que ces n racines sont *séparées*.

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi et soit u une racine multiple de l'équation (4); désignons par r son ordre de multiplicité; l'équation (3) aura q racines multiples d'un ordre de multiplicité égal à r; ces q racines multiples pourront s'obtenir en multipliant l'une d'elles par les q racines de l'unité. Considérons l'une de ces racines z. Parmi les racines infiniment petites de l'équation (1), il y en aura r qui auront pour valeur principale $z x^{\frac{q}{p}}$ (1). Pour les séparer, il faudra pousser l'approximation plus loin; à cet effet, et,

(1) Nous désignons par $x^{\frac{p}{q}}$ une des racines $q^{\text{ièmes}}$ de x^p, et nous employons cette même détermination dans la représentation des parties principales de toutes les racines dont l'ordre infinitésimal est $\frac{p}{q}$.

afin d'éviter les exposants fractionnaires, posons

$$x = x_1^q, \qquad y = (z + y_1)x_1^p = zx_1^p + y_1 x_1^p,$$

x_1 et y_1 étant de nouvelles variables.

Substituons dans (1), nous obtiendrons une nouvelle équation

$$f_1(x_1, y_1) = 0, \tag{5}$$

$f_1(x_1, y_1)$ désignant un polynôme entier en x_1 et y_1. Parmi les racines de cette équation, correspondant à une valeur infiniment petite de x_1, il y en a évidemment r infiniment petites et r seulement : ce sont celles qui correspondent aux valeurs de y dont la partie principale est zx_1^p.

Lorsqu'on cherchera les parties principales de ces r racines infiniment petites, on sera conduit à des équations auxiliaires en z_1 (ou en u_1), analogues à l'équation (3) [ou à l'équation (4)]. Si toutes les racines de ces équations sont simples, la séparation sera effectuée : les racines de l'équation en y, qui avaient des valeurs approchées égales à la première approximation, seront séparées à la seconde approximation.

Dans le cas contraire où l'on rencontre encore des racines multiples, on appliquera de nouveau la même méthode, et ainsi de suite jusqu'à ce que toutes les équations auxiliaires dont dépend la solution aient des racines simples.

Il nous reste à établir la proposition suivante :

Il est impossible que la suite des transformations se prolonge indéfiniment.

En effet, soit $z_1 x_1^{\mu_1}$ la partie principale d'une des r racines infiniment petites de (5); on aura

$$\mu_1 = \frac{p'}{q_1},$$

p' et q_1 étant deux entiers premiers entre eux, et le coefficient correspondant z_1 sera racine d'une équation algébrique de degré $\leq r$; cette équation admettra q_1 racines d'un ordre de multiplicité égal à r_1, en désignant par r_1 l'ordre de multiplicité de la racine z_1, on aura donc

$$q_1 r_1 \leq r,$$

et, par suite,

$$q q_1 r_1 \leq n.$$

Nous posons maintenant

$$x_1 = x_2^{q_1}, \qquad y_1 = z_1 x_2^{p'} + y_2 x_2^{p'},$$

c'est-à-dire

$$x = x_2^{qq_1}, \qquad y = z x_2^{pq_1} + z_1 x_2^{p_1} + y_2 x_2^{p_1},$$

en désignant par p_1 le nombre entier égal à $pq_1 + p'$, en sorte que p_1 et q_1 sont premiers entre eux.

Si l'on substitue les valeurs de x_1, y_1 dans (5), ou les valeurs de x, y dans (1), on obtient une nouvelle équation

$$f_2(x_2, y_2) = 0,$$

$f_2(x_2, y_2)$ désignant un polynôme entier en x_2 et y_2, sur laquelle on recommencera les opérations précédentes, et ainsi de suite.

Considérons les ordres

$$\frac{p}{q}, \quad \frac{p_1}{qq_1}, \quad \frac{p_2}{qq_1q_2}, \quad \dots$$

des différents termes successifs. Les dénominateurs q, qq_1, qq_1q_2, ... ne peuvent pas surpasser n; si donc la suite des transformations se prolongeait indéfiniment, les ordres qui vont constamment en croissant augmenteraient indéfiniment (1). Par suite, la différence entre deux des racines serait infiniment petite d'un ordre aussi grand qu'on le voudrait. Or, le produit des carrés des différences des racines de l'équation (1) est une fonction symétrique des racines de cette équation qui s'exprime rationnellement à l'aide des coefficients et par suite aussi à l'aide de x; il ne peut donc être que d'un ordre infinitésimal déterminé, à moins qu'il ne soit identiquement nul. Mais cette dernière hypothèse, dans laquelle l'équation en y admettrait des racines égales, quel que soit x, peut toujours être écartée : en effet, on peut toujours commencer par diviser le premier membre de l'équation (1) par le plus grand commun diviseur des polynômes $f(x,y)$ et $f'_y(x,y)$. La proposition est donc établie.

La démonstration précédente a été déduite de cette remarque que q, qq_1, qq_1q_2, ... ne peuvent surpasser n, quelque loin que l'on pousse

(1) On peut ajouter que les numérateurs $p, p_1, p_2, \dots$ sont des entiers croissant constamment, comme le montre la formule $p_1 = pq_1 + p'$ et les formules analogues déterminant $p_2, \dots$.

l'approximation. Il en résulte aussi qu'il arrivera nécessairement un moment à partir duquel les entiers q, q_1, q_2, ... se réduiront à l'unité. Soit

$$q_{i+1} = q_{i+2} = \ldots = 1.$$

On obtiendra, par suite, toute racine y infiniment petite sous la forme

$$(6) \quad \begin{cases} y = z\, t^{pq_1 \cdots q_i} + z_1\, t^{p_1 q_2 q_3 \cdots q_i} + \ldots + z_{i-1}\, t^{p_{i-1} q_i} \\ \qquad + z_i\, t^{p_i} + z_{i+1}\, t^{p_{i+1}} + \ldots + z_s\, t^{p_s} + y_{s+1}\, t^{p_s}, \end{cases}$$

en posant

$$(7) \quad x = t^{qq_1 \cdots q_i}$$

et en désignant par y_{s+1} une fonction de t infiniment petite avec t; en prenant s suffisamment grand, on aura *séparé* les n racines infiniment petites.

L'équation (1) d'ailleurs pourra s'écrire

$$f(t^{qq_1 \cdots q_i}, y) = 0;$$

elle ne change pas si l'on remplace t par ωt, ω étant l'une quelconque des racines de l'équation

$$(8) \quad X^{qq_1 \cdots q_i} = 1;$$

par suite, l'expression (6), où t est remplacé par toutes les racines de l'équation (7), représentera $qq_1 \ldots q_i$ racines infiniment petites de (1).

Nous pouvons, en conséquence, énoncer le théorème suivant qui résulte presque immédiatement de ce qui précède :

Soit y une fonction algébrique de la variable x, et soit x_0 une valeur de cette variable pour laquelle diverses déterminations de y prennent une valeur commune y_0. Pour les valeurs de $x - x_0$, ayant leurs modules inférieurs à une limite déterminée, ces diverses déterminations de y se répartissent en des systèmes entièrement distincts entre eux. Toutes celles qui composent un même système se répartissent simultanément, leur nombre étant égal à N, *sous la forme suivante :*

$$(9) \qquad x - x_0 = t^{\mathrm{N}}, \qquad y - y_0 = a_1 t + a_2 t^2 + \ldots + a_k t^k + \varepsilon_{k+1} t^k,$$

ε_{k+1} désignant une fonction de t infiniment petite avec t; le nombre k est un entier arbitraire qui doit toutefois être choisi assez grand pour que les formules (9) *effectuent la séparation entre les* N *racines qu'elles représentent et les autres racines.*

Cette proposition s'énonce de la manière suivante, si on l'interprète géométriquement :

Soient x_0, y_0 les coordonnées d'un point sur une courbe algébrique. Aux environs de ce point, les diverses branches de la courbe sont représentées par un ou plusieurs systèmes d'équations analogues au système (9), *où ε_{k+1} et k sont soumis aux mêmes restrictions que précédemment.*

La portion de courbe représentée par le système (9) est appelée un *cycle;* le point (x_0, y_0) est dit l'*origine du cycle.*

Considérons, pour les différentes branches de courbe appartenant à un même cycle, le rapport $\frac{y-y_0}{x-x_0}$: ou bien ce rapport croît indéfiniment pour toutes les branches lorsque x tend vers x_0 ; ou bien il a une limite, la même pour toutes les branches du cycle ; donc :

Les différentes branches de courbe appartenant à un même cycle ont même tangente.

Cette tangente commune est la *tangente du cycle.*

III. — *Séparation des racines réelles infiniment petites d'une équation algébrique à coefficients réels.*

Tout ce que nous avons dit au § II s'applique si l'équation (1) est à coefficients réels ou imaginaires. Particularisons cette équation en supposant qu'elle soit à coefficients réels ; donnons à x des valeurs réelles infiniment petites ; il importe d'indiquer à quels caractères simples on reconnaîtra que l'une des racines y que l'on sépare peut donner lieu à une branche de courbe réelle ; il faut déterminer les conditions nécessaires et suffisantes pour que, x prenant à partir de zéro des valeurs infiniment petites, soit toutes positives, soit toutes négatives, les valeurs correspondantes, définies par (6), de la racine considérée y soient réelles.

Posons le problème sous une forme peu différente : cherchons sous quelles conditions le cycle représenté par les formules (6) et (7) est réel ; pour préciser, examinons si ce cycle peut avoir des branches réelles et combien il a de pareilles branches.

Supposons que l'une des branches du cycle soit réelle ; c'est-à-dire suppo-

sons que, lorsqu'on fait varier x à partir de zéro par des valeurs, soit toutes positives, soit toutes négatives, les valeurs successives, obtenues par voie de continuité (1), d'une racine t de l'équation (7) rendent réel le second membre de (6); il faut et il suffit, pour qu'il en soit ainsi, que les $s+1$ premiers termes de la valeur de y soient tous réels, ainsi que le terme complémentaire $y_{s+1}t^{p_s}$.

Or, considérons la suite des opérations qui conduisent à la séparation de la racine considérée et supposons que cette séparation soit effectuée par la $(s+1)^{\text{ième}}$ opération, en sorte que z_s soit déterminée par une équation l'admettant pour racine simple. On peut alors énoncer le théorème suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour que le cycle défini par les équations (6) *et* (7) *ait au moins une branche réelle est que les* $(s+1)$ *premiers termes de la valeur de* y *soient réels lorsqu'on donne à* t *une suite de valeurs résultant, par voie de continuité, d'une suite de valeurs, soit toutes positives, soit toutes négatives, de* x. *Si cette condition est remplie, il y aura deux cas à distinguer, suivant que* $qq_1\dots q_i$ *sera impair ou pair; dans le premier cas, on aura une seule branche réelle, et dans le second deux branches réelles.*

En effet, la condition énoncée est évidemment nécessaire; il reste à démontrer qu'elle est suffisante.

1° Supposons d'abord que $qq_1\dots q_i$ soit impair.

Remarquons que l'on peut prendre, pour représentation du même cycle, $qq_1\dots q_i$ formules telles que (6), savoir toutes les formules qu'on obtient en remplaçant dans (6) t par ωt, où ω sera pris successivement égal à toutes les racines de l'équation (8). En d'autres termes, étant donnée une suite de valeurs de t, définie par l'équation (7), on peut prendre pour le cycle une représentation telle que la valeur de y, correspondant à la suite considérée des valeurs de t, soit l'une quelconque des racines du cycle; et réciproquement, étant donnée une racine infiniment petite du cycle, on peut toujours prendre pour ce cycle une représentation telle que la suite des valeurs de t qui donne lieu à la racine considérée soit l'une quelconque des suites définies par l'équation (7).

Or, dans le cas considéré, nous avons une suite de valeurs de t qui donne

(1) C'est-à-dire les valeurs successives obtenues en appliquant le théorème II du § I à l'équation (7), où x prend une suite continue de valeurs toutes de même signe.

par la formule (6) une racine pour laquelle les $(s+1)$ premiers termes de (6) sont réels; adoptons une représentation du cycle telle que la suite des valeurs de t qui conduit à cette racine soit la suite formée de valeurs réelles définie par (7); supposons, pour fixer les idées, que cette représentation soit précisément (6); les coefficients $z_1, z_2, \ldots, z_s$ seront réels : il s'agit d'établir que, dans ces conditions, la formule (6) définit une branche réelle pour les valeurs réelles de t voisines de zéro; en effet, posons

$$y = z\, t^{pq_1\cdots q_i} + \ldots + z_{s-1}\, t^{p_{s-1}} + \mathrm{Z}\, t^{p_s},$$

et substituons dans l'équation

$$f(t^{qq_1\cdots q_i}, y) = 0.$$

On obtient une équation

$$\mathrm{F}(t, \mathrm{Z}) = 0, \tag{10}$$

où $\mathrm{F}(t, \mathrm{Z})$ est un polynôme entier en t et Z, à coefficients réels; l'équation (10) admet la racine $z_s + y_{s+1}$ et, par hypothèse, si l'on y fait $t = 0$, l'équation obtenue admet la racine simple réelle z_s; donc, en vertu du théorème III du § I, l'équation (10) admettra, pour des valeurs de t suffisamment voisines de zéro, une racine simple et une seule voisine de z_s, savoir $z_s + y_{s+1}$, et cette racine sera réelle.

La première partie de la proposition est donc établie, la seconde est évidente puisque l'équation (7) n'admet, dans le cas présent, qu'une seule racine réelle.

2° Supposons maintenant que $qq_1q_2\ldots q_i$ soit pair.

Dans ce cas, les $(s+1)$ premiers termes du second membre de (6) ne peuvent être réels que lorsqu'on donne à t une suite de valeurs résultant, par voie de continuité, d'une suite de valeurs, toutes de même signe de x.

Supposons, en effet, en premier lieu, que, lorsqu'on donne à t une suite de valeurs résultant d'une suite de valeurs toutes positives de x, on ait une racine y, pour laquelle les $(s+1)$ premiers termes de (6) soient réels; adoptons une représentation (6) du cycle telle que la suite des valeurs de t, qui conduit à cette racine, soit constituée, quand x est positif, par l'une des deux suites de valeurs réelles définies par (7); pour la représentation (6) considérée, les coefficients $z_1, z_2, \ldots, z_s$ seront réels et, par suite, quand x sera négatif, la formule (6) ne pourra pas représenter de branche réelle, puisque alors l'équation (7) aura toutes ses racines imaginaires. De plus, en répétant le raisonnement fait précédemment, on démontrera que y_{s+1} est réel pour

des valeurs de t, suffisamment voisines de zéro, et correspondant à des valeurs positives de x. Enfin, comme l'équation (7) définit, quand x varie par valeurs positives, deux suites de valeurs réelles de t, le cycle aura deux branches réelles correspondantes.

Supposons, en second lieu, que lorsqu'on donne à t une suite de valeurs résultant, par voie de continuité, d'une suite de valeurs toutes négatives de x, on ait une racine y pour laquelle les $(s+1)$ premiers termes de (6) soient réels. Il suffit de changer x en $-x$ dans l'équation (1), c'est-à-dire de supposer un instant que l'on ait changé le sens de l'axe des x, pour retomber sur le cas précédent.

IV. — *Quelques applications.*

L'étude d'une courbe algébrique dans le voisinage d'un de ses points résulte immédiatement de ce qui précède; le point étant pris pour origine des coordonnées, on fera jouer à l'une des deux coordonnées le rôle de la variable indépendante x des paragraphes précédents et à l'autre coordonnée celui de la variable y; l'étude de la courbe algébrique dans le voisinage de l'origine ne sera autre, comme nous l'avons dit, que la traduction géométrique de la mise en pratique, à l'égard de l'équation donnée, des faits algébriques considérés aux § II et III; l'exposition de ces paragraphes ayant surtout été faite au point de vue de l'application au problème proposé, quelques exemples simples suffiront pour élucider la théorie présente.

Supposons d'abord qu'on se propose d'étudier une courbe algébrique aux environs d'un point simple de cette courbe. Prenons le point pour origine et supposons les deux axes coordonnés différents de la tangente en ce point. Soit alors

$$\varphi_1(x, y) + \varphi_2(x, y) + \ldots + \varphi_m(x, y) = 0$$

l'équation de la courbe, en groupant ensemble les termes de même degré; on a

$$\varphi_1(x, y) = a_1 x + b_1 y,$$

a_1 et b_1 n'étant pas nuls. Prenons x pour variable indépendante; pour $x = 0$, l'équation en y a une seule racine nulle; pour x infiniment petit, elle a une racine infiniment petite qui forme un cycle dont la tangente est la tangente de la courbe; nous connaissons, par suite, *a priori*, la partie principale $t_1 x$ de la racine infiniment petite, en posant $t_1 = -\frac{a_1}{b_1}$; afin d'avoir des éléments

suffisants pour la construction de la courbe, nous pousserons plus loin l'approximation, en posant

$$y = (t_1 + y_1)x;$$

l'équation déterminant y_1 sera

$$b_1 y_1 + x\varphi_2(1, t_1 + y_1) + \ldots + x^{m-1}\varphi_m(1, t_1 + y_1) = 0.$$

Soit $\varphi_{q+1}(1, t)$ la première des fonctions $\varphi(1, t)$ qui ne s'annule pas pour $t = t_1$ et posons

$$\varphi_{q+1}(1, t_1) = a_{q+1}.$$

Pour $x = 0$, l'équation en y_1 a une seule racine nulle et, pour x infiniment petit, elle a une racine infiniment petite qui forme un cycle dont la tangente est Ox; nous déterminerons la partie principale de la racine infiniment petite par le procédé indiqué au § II; la ligne polygonale de Newton se réduit ici à la droite qui joint le point d'abscisse égale à 1, situé sur OX, au point d'ordonnée égale à q situé sur OY.

Les relations (2) se réduisent ici à

$$\mu_1 = q,$$

et l'équation (3) à

$$b_1 z + a_{q+1} = 0.$$

On aura donc

$$y_1 = \left(-\frac{a_{q+1}}{b_1} + y_2\right) x^q,$$

et, par suite,

$$y = t_1 x + \left(-\frac{a_{q+1}}{b_1} + y_2\right) x^{q+1},$$

y_2 désignant une quantité infiniment petite avec x.

Nous avons maintenant tous les éléments nécessaires pour construire la courbe aux environs de l'origine. Il est clair, en effet, que, pour x suffisamment petit, le coefficient $-\frac{a_{q+1}}{b_1} + y_2$ de x^{q+1} a le signe de son premier terme $-\frac{a_{q+1}}{b_1}$. D'ailleurs l'ordonnée de la courbe est égale à la somme de l'ordonnée de la tangente $y = t_1 x$ et de la quantité $\left(-\frac{a_{q+1}}{b_1} + y_2\right) x^{q+1}$. On a immédiatement les résultats suivants :

1° Si q est impair, par l'origine passe un arc de courbe tangent à la droite qui a pour équation $y = t_1 x$; cet arc de courbe est concave ou convexe vers les ordonnées positives selon que $\frac{a_{q+1}}{b_1}$ est négatif ou positif.

2° Si q est pair, on a un arc de courbe tangent à l'origine, à la droite $y = t_1 x$ et qui présente, en ce point, une inflexion.

Considérons maintenant une courbe algébrique, admettant l'origine comme point double, c'est-à-dire supposons que, dans l'équation de la courbe il n'y ait pas de termes de premier degré; il y a deux cas à distinguer suivant que les tangentes à l'origine sont distinctes ou sont confondues.

Envisageons d'abord le premier cas et, plus généralement, le cas où l'origine est un point multiple d'ordre p à tangentes distinctes; supposons que les axes coordonnés soient différents des p tangentes à l'origine. L'équation de la courbe, en groupant ensemble les termes de même degré, sera de la forme

$$\varphi_p(x, y) + \varphi_{p+1}(x, y) + \ldots + \varphi_m(x, y) = 0,$$

et l'équation $\varphi_p(1, t) = 0$ admettra p racines distinctes $t_1, t_2, \ldots, t_p$.

Pour $x = 0$, l'équation en y a p racines nulles; pour x infiniment petit, elle a p racines infiniment petites, qui forment p cycles distincts dont les tangentes sont

$$y = t_1 x, \qquad \ldots, \qquad y = t_p x;$$

nous connaissons par suite, *a priori*, les parties principales $t_1 x, \ldots, t_p x$ des racines infiniment petites.

A chaque racine réelle de l'équation $\varphi_p(1, t) = 0$ correspondra donc une branche de courbe réelle; la construction d'une de ces branches se fait de la même manière que dans le cas d'un point simple; considérons la branche qui correspond à une racine réelle t_1 de l'équation $\varphi_p(1, t) = 0$.

Soit $\varphi_{p+q}(1, t)$ la première des fonctions $\varphi(1, t)$, qui ne s'annule pas pour $t = t_1$ et posons

$$\varphi_{p+q}(1, t_1) = a_{p+q}.$$

Soit, d'autre part, b_p le coefficient de y, dans le polynôme $\varphi_p(1, t_1 + y)$, coefficient qui n'est pas nul puisque t_1 est une racine simple de $\varphi_p(1, t) = 0$.

On aura, pour définir la branche considérée, aux environs de l'origine,

$$y = t_1 x + \left(- \frac{a_{p+q}}{b_p} + y_2 \right) x^{q+1},$$

y_2 étant infiniment petit avec x.

On voit que chaque branche se comporte comme la branche relative à un point simple.

Considérons maintenant le cas d'un point double à tangentes confondues; supposons que la tangente soit l'axe des x en sorte que l'équation de la

courbe soit de la forme

$$y^2+\varphi_3(x,y)+\ldots+\varphi_m(x,y)=0,$$

en groupant ensemble les termes de même degré.

Plaçons-nous dans le cas général, en sorte que, si l'on pose

$$\varphi_3(x,y)=ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3,$$

a ne sera pas nul.

Nous pouvons toujours supposer a négatif; si a était positif, on commencerait par changer le sens de l'axe des x et l'on retomberait sur le cas que nous allons traiter.

Prenons x pour variable indépendante; pour $x=0$, l'équation en y a deux racines nulles et pour x infiniment petit, elle a deux racines infiniment petites. Séparons ces racines, en appliquant la marche indiquée au § II.

La ligne polygonale de Newton se réduit à la droite qui joint le point d'abscisse égale à 2, situé sur OX, au point d'ordonnée égale à 3, situé sur OY; les relations (2) se réduisent à

$$2\mu=3,$$

et l'équation (3) à

$$z^2=-a.$$

Les deux racines forment donc un cycle défini par les équations

$$y=(\sqrt{-a}+y_1)t^3,$$
$$x=t^2,$$

où y_1 est une quantité réelle pour les valeurs réelles de t, suffisamment voisines de zéro.

Dans le voisinage de l'origine, on a deux arcs de courbe tangents à Ox, situés, de part et d'autre de cette droite, dans la région des abscisses positives; les ordonnées de ces deux arcs de courbe diffèrent, aussi peu que l'on voudra, des ordonnées des arcs de courbe définis par les équations

$$y=\quad x\sqrt{-a}x,$$
$$y=-x\sqrt{-a}x.$$

L'origine est un *point de rebroussement de première espèce.*

Nous avons supposé que a n'était pas nul; dans le cas où cette hypothèse n'est pas réalisée, on opérera identiquement de la même manière.

Considérons, par exemple, le cas suivant : supposons que a soit nul, b n'étant pas nul; supposons, de plus, que le coefficient a_1 de x^1 soit égal à $\frac{b^2}{4}$.

Pour x infiniment petit, l'équation en y a encore deux racines infiniment petites qu'il s'agit de séparer.

La ligne polygonale de Newton se réduit à la droite qui passe par les trois points (2, 0), (1, 2), (0, 4); les relations (2) deviennent

$$2\mu = \mu + 2 = 4,$$

et l'équation (3)

$$z^2 + bz + a_1 = 0.$$

L'équation en z a ses deux racines égales à $-\frac{b}{2}$ et les deux racines infiniment petites ont leur partie principale égale à

$$-\frac{b}{2}x^2.$$

La séparation n'étant pas effectuée par la première approximation, nous posons

$$y = \left(-\frac{b}{2} + y_1\right)x^2,$$

et nous formons l'équation en y_1; les termes du premier degré renferment x en facteur; plaçons-nous dans le cas général où le coefficient de x dans l'équation en y_1 n'est pas nul; soit alors

$$\alpha x + y_1^2 + \ldots = 0$$

cette équation.

Pour x infiniment petit, elle a deux racines infiniment petites; appliquant la méthode du § II, on trouve immédiatement pour leurs parties principales

$$\sqrt{-\alpha}\,x^{\frac{1}{2}} \qquad \text{et} \qquad -\sqrt{-\alpha}\,x^{\frac{1}{2}}.$$

En sorte que les deux racines y forment un cycle défini par les équations

$$y = -\frac{b}{2}t^4 + (\sqrt{-\alpha} + y_2)\,t^5,$$
$$x = t^2,$$

où y_2 est infiniment petit; nous pouvons supposer que α est positif, sinon on changerait le sens de l'axe des x; y_2 est alors une quantité infiniment petite réelle, pour les valeurs réelles de t, suffisamment voisines de zéro. Dans le voisinage de l'origine, les ordonnées des deux branches différeront aussi peu

que l'on voudra des ordonnées des arcs de courbe définis par les équations

$$y = -\frac{b}{2}x^2 + x^2\sqrt{-\alpha}x,$$
$$y = -\frac{b}{2}x^2 - x^2\sqrt{-\alpha}x.$$

L'origine est *un point de rebroussement de seconde espèce.*

Pour terminer, nous remarquerons qu'on peut se faire une idée générale de la forme d'une courbe aux environs d'un de ses points en indiquant les différentes formes possibles d'un cycle réel.

Prenons pour origine des coordonnées l'origine du cycle réel et pour axe des x la tangente à ce cycle; on a alors, pour ce cycle, une représentation de la forme suivante

$$x = t^n$$
$$y = a_{n+\nu}t^{n+\nu} + \ldots + a_{n+s}t^{n+s} + \gamma_{s+1}t^{n+s};$$

le nombre n est dit l'*ordre du cycle* et le nombre ν la *classe* du cycle.

Halphen a remarqué que les deux nombres n et ν donnent immédiatement l'aspect graphique du cycle supposé réel et il a énoncé les conclusions suivantes (¹), qui apparaîtront immédiatement en répétant les mêmes raisonnements que précédemment.

1° Si *n et* ν *sont impairs*, l'aspect est celui d'un point ordinaire. Une branche ordinaire correspond d'ailleurs au cas où $n = \nu = 1$.

2° Si *n est impair et* ν *pair*, l'aspect est celui d'une inflexion. L'*inflexion proprement dite* ou *ordinaire* répond au cas où $n = 1$, $\nu = 2$.

3° Si *n est pair* et ν *impair*, l'aspect est celui d'un rebroussement de première espèce. Le *rebroussement ordinaire* correspond à $n = 2$, $\nu = 1$.

3° Si *n et* ν *sont pairs*, l'aspect est celui d'un rebroussement de seconde espèce.

Nous ferons remarquer, à l'égard des résultats obtenus dans les § II et III que non seulement ils sont la base de l'étude d'une courbe algébrique dans le voisinage d'un de ses points, mais qu'ils *se suffisent à eux-mêmes* dans cette étude; l'exposition que nous avons adoptée dans le § IV a été faite afin de mettre en lumière la remarque que nous faisons en terminant.

(¹) *Voir*, dans la traduction française des *Courbes planes* de M. Salmon, l'*Étude sur les points singuliers des courbes algébriques planes*, par G.-H. HALPHEN, p. 547.