ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

G. HUMBERT

Sur les coniques inscrites à une quartique

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 1re série, tome 4, nº 3 (1890), p. L1-L8
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1890_1_4_3_L1_0>

SUR LES

CONIQUES INSCRITES A UNE QUARTIQUE,

PAR M. G. HUMBERT.

1. On sait qu'une quartique, c'est-à-dire une courbe du quatrième ordre sans point double, admet soixante-trois systèmes de coniques inscrites, chaque conique inscrite la touchant en quatre points [1]; l'équation générale des coniques d'un système est de la forme

$$(1) \qquad \lambda^2 U + 2\lambda V + W = 0$$

λ étant un paramètre variable et $U = 0$, $V = 0$, $W = 0$ désignant des coniques.

Nous nous proposons ici de faire connaître certaines propriétés simples de trois coniques inscrites de systèmes différents. Observons que, d'après l'équation (1), les huit points de contact de deux coniques du même système sont sur une conique; cette propriété est bien connue. On sait aussi que chacun des soixante-trois systèmes de coniques comprend six couples de bitangentes de la quartique, et il est clair, d'ailleurs, que le système est déterminé quand on se donne un de ces couples de bitangentes.

Hesse a fait connaître, et M. Cayley a discuté à fond, un algorithme qui met en évidence les relations des vingt-huit bitangentes entre elles et avec les soixante-trois systèmes de coniques; nous allons rappeler sommairement cette méthode.

Les huit chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, combinés deux à deux, donnent

[1] Dans un intéressant Mémoire, inséré au tome III, page D.1 de ces *Annales*, M. Andoyer a établi que le nombre des systèmes de coniques proprement dites quadruplement tangentes à une courbe du quatrième degré, à un point double, est de 30 et non de 31, comme l'indiquent les Leçons de Clebsch sur la Géométrie. Cette proposition avait été démontrée par nous dans un Mémoire inséré au tome II (4e série) du *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, et publié en 1886; M. Andoyer l'a complétée en donnant la signification précise du trente et unième système.

vingt-huit symboles, 12, 13, ..., 78, représentant respectivement les vingt-huit bitangentes, et l'on peut appliquer le mode de représentation de manière à vérifier les conditions suivantes.

2. Les six couples de bitangentes appartenant à un même système de coniques inscrites sont, au point de vue de la notation, de deux types. On obtient tous les systèmes du premier type en divisant les huit chiffres en deux groupes de quatre et en combinant deux à deux les quatre chiffres de chaque groupe; ainsi le groupement 1234, 5678 donne les six couples 12,34; 13,24; 14,23; 56,78; 57,68; 58,67.

On obtient tous les systèmes du second type en combinant deux des chiffres, 1 et 2 par exemple, avec les six autres, ce qui donne les six couples 13,23; 14,24; 15,25; 16,26; 17,27; 18,28.

Au point de vue géométrique, il n'y a aucune différence entre les trente-cinq systèmes du premier type et les vingt-huit du second; la notation seule les distingue.

3. Il résulte d'une Remarque précédente que deux couples de bitangentes d'un même système ont leurs huit points de contact sur une conique. Il est aisé de voir, à l'aide de l'algorithme, si trois ou quatre bitangentes de symboles donnés ont leurs six ou huit points de contact sur une conique.

Cela posé, on vérifie sans difficulté, à l'aide de la représentation de Hesse, les propositions suivantes dont Steiner a donné quelques-unes sans démonstration (1) :

Deux systèmes de coniques inscrites ont en commun quatre ou six bitangentes.

Dans le premier cas, les quatre bitangentes communes ont leurs huit points de contact sur une conique, et elles appartiennent à un troisième système.

Dans le second, les six bitangentes de chacun des deux systèmes, non communes à l'autre, appartiennent à un même troisième système.

Ainsi, le premier système étant 1234, 5678 et le second 1256, 3478, il y aura quatre bitangentes communes 12, 34, 56, 78, appartenant aussi au système 1278, 3456.

Soit une des bitangentes communes, 12 par exemple, les bitangentes asso-

(1) *Journal de Crelle*, t. XLIX. C'est dans le même volume que se trouve le Mémoire de Hesse.

ciées de 12 dans le premier et dans le second système, c'est-à-dire 34 et 56, sont associées entre elles dans le troisième.

Au contraire, le premier système étant toujours 1234, 5678 et le second 1235, 4678, il y a six bitangentes communes, 12, 13, 23, 67, 68, 78; les autres bitangentes des deux systèmes, c'est-à-dire 15, 25, 35, 14, 24, 34, 56, 57, 58, 46, 47, 48 forment le système du second type déterminé par les caractères 4 et 5.

Soit une bitangente commune telle que 12; ses associées dans le premier et dans le second système, c'est-à-dire 34 et 35, sont associées entre elles dans le troisième système; mais leurs six points de contact ne sont pas sur une conique, comme dans le premier cas.

On peut ajouter qu'un système a quatre bitangentes communes avec trente systèmes, et six bitangentes communes avec trente-deux autres.

4. Cela posé, nous allons donner une propriété de trois coniques inscrites, appartenant respectivement à trois systèmes tels que ceux que nous avons considérés tout à l'heure.

Soient d'abord trois systèmes ayant quatre bitangentes communes; désignons par

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad z = 0, \qquad t = 0$$

les équations de ces droites, par $V = 0$ celle de la conique qui passe par les huit points de contact; l'équation de la quartique H sera de la forme

$$H = V^2 - xyzt = 0.$$

Les trois systèmes de coniques inscrites auxquels appartiennent les quatre bitangentes ont respectivement pour équations, α, β, γ étant des paramètres variables,

$$\begin{aligned} A &= \alpha^2 yz + 2\alpha V + xt = 0, \\ B &= \beta^2 zx + 2\beta V + yt = 0, \\ C &= \gamma^2 xy + 2\gamma V + zt = 0. \end{aligned}$$

Or, en posant

$$\begin{aligned} \varphi &= \alpha yz + \beta zx + \gamma xy, \\ \psi &= \alpha\beta z + \beta\gamma x + \gamma\alpha y, \\ S &= V(t + \psi) + t\varphi + \alpha\beta\gamma xyz, \\ G &= 8\alpha\beta\gamma V + 4\alpha\beta\gamma\varphi - (t - \psi)^2, \end{aligned}$$

on a identiquement

$$ABC - S^2 = HG.$$

On en déduit que la cubique S passe par les douze points de contact avec H des trois coniques A, B, C; de plus, elle coupe chacune de ces coniques en deux nouveaux points, et il existe une conique G doublement tangente à A, B, C en ces points. Ainsi :

Soient deux coniques inscrites à une quartique et appartenant à deux systèmes différents, ayant quatre bitangentes communes. Toute cubique passant par leurs huit points de contact coupe la quartique en quatre nouveaux points, qui sont les points de contact d'une autre conique inscrite, appartenant au troisième système, qui comprend les quatre bitangentes communes aux deux premiers.

Inversement, trois coniques appartenant respectivement à ces trois systèmes ont leurs douze points de contact sur une cubique; elles sont doublement tangentes à une même conique qu'elles touchent en des points situés sur la cubique précédente.

En particulier, les trois systèmes comprennent respectivement quatre couples de bitangentes distinctes des quatre bitangentes communes; six bitangentes appartenant à trois de ces couples, choisis dans chaque système respectivement, ont leurs douze points de contact sur une cubique et touchent une conique [1]. Hesse et Steiner ont démontré directement cette proposition que nous trouvons ici comme cas particulier d'un théorème plus général. On sait qu'on peut grouper les bitangentes en 1008 hexades jouissant de la propriété précédente.

5. Soient maintenant deux systèmes ayant six bitangentes communes; désignons par $z = 0$ l'une d'elles et par $y = 0$, $x = 0$ les bitangentes associées de z dans chaque système; ces deux bitangentes sont associées dans un troisième système qui comprend les six bitangentes de chaque système non communes à l'autre.

L'équation de la quartique peut se mettre sous l'une des trois formes

$$L^2 - lyz = 0, \qquad M^2 - mzx = 0, \qquad N^2 - nxy = 0,$$

$L = 0$, $M = 0$, $N = 0$; $l = 0$, $m = 0$, $n = 0$ désignant des coniques. On voit aisément qu'on pourra disposer des facteurs constants qui figurent

---

[1] La conique, dans ce cas, peut être une droite double.

dans L, M, ..., n pour que l'on ait identiquement

$$L^2 - lyz = M^2 - mzx = N^2 - nxy.$$

On en déduit

$$L^2 - M^2 = z(ly - mx);$$

par suite L — M ou L + M est divisible par z; on a donc

$$L \pm M = 2rz, \qquad M \pm N = 2px, \qquad N \pm L = 2qy,$$

p, q, r étant linéaires en x, y, z.

Comme L, M, N ne sont déterminés qu'au signe près, puisque L^2, M^2, N^2 figurent seuls dans l'équation de la quartique, on peut écrire, sans diminuer la généralité,

$$L + M = 2rz, \qquad M + N = 2px, \qquad N \pm L = 2qy,$$

et l'on est conduit à distinguer deux cas.

Si, d'abord, on prend le signe — dans N — L, on écrira pour la symétrie, en changeant M en — M et p en $-p$,

$$L - M = 2rz, \qquad M - N = 2px, \qquad N - L = 2qy,$$

d'où

$$px + qy + rz = 0$$

et, par suite,

$$2p = \nu y - \mu z, \qquad 2q = \lambda z - \nu z, \qquad 2r = \mu x - \lambda y,$$

λ, μ, ν étant des constantes. On en conclut

$$L - \lambda yz = M - \mu zx = N - \nu xy$$

et, en appelant V la valeur commune de ces trois expressions, on a pour l'équation de la quartique les formes

$$V^2 - a'yz = 0, \qquad V^2 - b'zx = 0, \qquad V^2 - c'xy = 0,$$

d'où l'on conclut immédiatement

$$a' = tx, \qquad b' = ty, \qquad c' = tz.$$

La quartique est alors

$$V^2 - xyzt = 0,$$

et les trois systèmes de coniques déterminés par les couples de bitangentes

yz, zx, xy ont quatre bitangentes communes, dont les huit points de contact sont sur la conique V : c'est le cas étudié tout à l'heure.

La seconde hypothèse est

$$L + M = 2rz, \qquad M + N = 2px, \qquad N + L = 2qy,$$

d'où

$$L = qy + rz - px, \qquad \ldots.$$

La relation

$$L^2 - M^2 = z(ly - mx)$$

donne alors

$$4r(qy - px) = ly - mx,$$

de même

$$4p(rz - qy) = mz - ny;$$

on en tire

$$\frac{l - 4rq}{x} = \frac{m - 4rp}{y} = \frac{n - 4pq}{z}$$

et, par suite,

$$l = tx + 4rq, \qquad m = ty + 4rp, \qquad n = tz + 4pq,$$

t étant une fonction linéaire de x, y, z. L'équation de la quartique, $L^2 - lyz = 0$, est alors

$$p^2x^2 + q^2y^2 + r^2z^2 - 2pqxy - 2prxz - 2qryz = txyz.$$

On vérifie aisément que les six points de contact des trois bitangentes x, y, z ne sont pas sur une conique, par suite les systèmes déterminés par les couples yz, zx ont six bitangentes communes, et leurs bitangentes non communes forment un troisième système auquel appartient le couple xy.

Les trois systèmes de coniques inscrites déterminés par les couples yz, zx, xy ont pour équations, α, β, γ étant des paramètres variables,

$$\begin{aligned} A &= \alpha^2 yz + 2\alpha(qy + rz - px) + 4rq + tx = 0, \\ B &= \beta^2 zx + 2\beta(rz + px - qy) + 4pr + ty = 0, \\ C &= \gamma^2 zx + 2\gamma(px + qy - rz) + 4pq + tz = 0. \end{aligned}$$

Les points de contact d'une conique du premier système, A, sont à l'intersection des deux coniques

$$\begin{aligned} \alpha yz + qy + rz - px &= 0, \\ \alpha(qy + rz - px) + 4rq + tx &= 0. \end{aligned}$$

Or, si nous considérons la fonction du troisième ordre en x, y, z,

$$\begin{aligned} S = & (\alpha yz + qy + rz - px)(2\gamma r + 2\beta q + \beta\gamma x - t) \\ & - (\alpha qy + \alpha rz - \alpha px - 4rq + tx)(\gamma y + \beta z + 2p), \end{aligned}$$

la courbe $S = 0$ passe par les points de contact de la conique A et de la quartique, d'après la forme même de son équation. Si nous développons, nous voyons que S est symétrique en x, y, z; p, q, r; α, β, γ, c'est-à-dire ne change pas quand on permute x, y, z, en permutant de la même manière p, q, r et α, β, γ, et en laissant t invariable. Il en résulte que la cubique S passe par les douze points de contact des coniques A, B, C avec la quartique.

Cette cubique coupe la conique A, en outre des quatre points de contact, en deux nouveaux points; comme on peut écrire

$$\begin{aligned} S = & (\alpha yz + qy + rz - px)[2\gamma r + 2\beta q + \beta\gamma x - t \\ & \qquad + \alpha(\gamma y + \beta z + 2p)] - A(\gamma y + \beta z + 2p), \end{aligned}$$

la droite qui joint les deux nouveaux points a pour équation

$$2\gamma r + 2\beta q + \beta\gamma x - t + \alpha(\gamma y + \beta z + 2p) = 0,$$

ou, en ordonnant,

$$\beta\gamma x + \gamma\alpha y + \alpha\beta z + 2p\alpha + 2q\beta + 2r\gamma - t = 0.$$

Elle est symétrique en x, y, z; p, q, r; α, β, γ; il en résulte que les six points, distincts des points de contact avec la quartique, où la cubique S coupe les coniques A, B, C, sont sur une même droite et, par suite, les coniques A, B, C ont, deux à deux, trois points d'intersection en ligne droite situés sur la cubique S. Ces propriétés se vérifient directement sur les équations de la cubique et des coniques. Si l'on désigne par $D = 0$ l'équation de la droite dont il s'agit, par $H = 0$ celle de la quartique, on a l'identité

$$ABC - S^2 = HD^2.$$

Ces résultats peuvent s'énoncer ainsi :

Soient deux coniques inscrites à une quartique, et appartenant à deux systèmes différents, qui ont six bitangentes communes. Toute cubique menée par leurs huit points de contact a pour neuvième point fixe un des points communs aux deux coniques; elle coupe de nouveau la quar-

tique en quatre points qui sont les points de contact d'une troisième conique inscrite, appartenant au système qui comprend les six bitangentes de chacun des deux premiers, non communes à l'autre.

Inversement, trois coniques appartenant respectivement à ces trois systèmes ont leurs douze points de contact sur une cubique; ces coniques, prises deux à deux, ont douze points d'intersection, dont trois sont en ligne droite et sont situés sur la cubique précédente.

Chacun des trois systèmes comprend six couples de bitangentes; mais, d'après ce qui précède, l'ensemble des six couples se compose seulement de dix-huit droites distinctes. On peut répartir ces bitangentes en six triangles $a_1 b_1 c_1$, ..., $a_6 b_6 c_6$, et choisir les notations des sommets de telle sorte que les douze côtés issus des sommets a forment les six couples du premier système; de même, les six couples issus des sommets b appartiendront au second système et ceux issus des sommets c au troisième. Il résulte du théorème général précédent que les deux bitangentes issues d'un sommet a, deux autres issues d'un sommet b et deux autres issues d'un sommet c, ont leurs douze points de contact sur une cubique; on peut les répartir en trois couples de telle sorte que les sommets des trois couples soient en ligne droite. Hesse et Steiner ont montré qu'il y a 5040 hexades de cette sorte.

Dans un autre travail nous ferons une application des résultats précédents à la surface de Kummer et à d'autres surfaces remarquables du quatrième ordre.