H. ANDOYER

Sur les formules générales de la mécanique céleste

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 1re série, tome 4, nº 2 (1890), p. K1-K35
<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1890_1_4_2_K1_0>

SUR LES

FORMULES GÉNÉRALES DE LA MÉCANIQUE CÉLESTE,

PAR M. H. ANDOYER.

1. Nous nous proposons d'exposer dans ce travail une méthode permettant d'obtenir, pour représenter le mouvement des corps célestes, des formules purement trigonométriques, ne renfermant, par conséquent, aucun terme *séculaire*.

Ce n'est pas la première fois que l'on poursuit un semblable but, et parmi beaucoup de travaux récents sur ce sujet, qu'il serait impossible de rappeler tous, il faut citer spécialement les recherches de M. Gyldén et celles de M. Lindstedt, reprises et généralisées par M. Tisserand dans un *Mémoire sur le problème des trois corps* (*Annales de l'Observatoire de Paris*, tome XVIII, *Mémoires*).

S'il est possible de caractériser en quelques mots les diverses méthodes suivies par ces éminents géomètres, on peut dire que M. Gyldén cherche à obtenir, par l'introduction des fonctions elliptiques, une première approximation (remplaçant celle fournie par le mouvement elliptique, par exemple, s'il s'agit du mouvement de translation des planètes ou de leurs satellites) sur laquelle puissent se greffer des approximations successives convergentes, tout en permettant d'éviter la présence du temps en dehors des signes *sinus* et *cosinus*; M. Lindstedt emploie plus directement la méthode des approximations successives convenablement modifiée; enfin M. Tisserand s'appuie sur la méthode bien connue de Delaunay, généralisée et adaptée au problème des trois corps. Tous ces procédés conduisent d'ailleurs aux mêmes résultats : M. Tisserand (1) l'a montré, dans un cas particulier, pour les mé-

(1) *Sur une équation différentielle du second ordre qui joue un rôle important dans la Mécanique céleste* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. II).

thodes de M. Gyldén et de M. Lindstedt ([1]). Ne peut-on pas se proposer alors d'arriver directement à ces résultats en s'appuyant sur la méthode des coefficients indéterminés, employée par Laplace dans sa *Théorie de la Lune?* La forme des intégrales à obtenir est, en effet, facile à prévoir; leurs coefficients seront déterminés par des équations qui s'écriront pour ainsi dire immédiatement, et qui seront aisées à résoudre par approximations successives.

C'est l'application de ce procédé que nous développons brièvement dans ce travail, qui doit être considéré comme un commentaire des méthodes employées par Laplace dans la *Mécanique céleste,* principalement dans la *Théorie de la Lune* et celle des *Satellites de Jupiter.* Bien entendu, les séries purement trigonométriques obtenues ne représentent réellement le mouvement des corps célestes que si l'on admet leur convergence. C'est là une difficulté inhérente au problème, et que nous laisserons de côté, nous bornant à constater la légitimité *pratique* des résultats obtenus, au moins pour un certain temps.

2. Nous nous appuierons presque constamment sur un principe que suggèrent la théorie connue des équations différentielles linéaires à coefficients périodiques, ainsi que les recherches de MM. Lindstedt et Poincaré sur une équation différentielle particulière que l'on rencontre dans la Mécanique céleste ([2]). Il suffit de se reporter aux Mémoires auxquels nous faisons ici allusion, pour constater que ce principe est une simple généralisation des résultats qui y sont contenus, et se convaincre que la seule application de la méthode des coefficients indéterminés combinée avec celle des approximations successives suffit à sa vérification.

Voici ce dont il s'agit :

Soit un système d'équations différentielles $f_1 = 0, f_2 = 0, \ldots$ à plusieurs inconnues $x_1, x_2, \ldots$, la variable indépendante étant t; les premiers membres sont développés suivant les puissances positives des inconnues (suppo-

---

([1]) Ajoutons que M. S. Newcomb arrive à des résultats du même ordre dans son important Mémoire : *On the general integrals of planetary motion* (*Smithsonian contributions to Knowledge,* t. XXI, 1876).

([2]) Lindstedt, *Beitrag zur Integration der Differentialgleichungen der Störungstheorie* (*Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg,* 7e série, t. XXI). Poincaré, *Sur une méthode de M. Lindstedt* (*Bulletin astronomique,* t. III, 1886).

sées petites par rapport aux coefficients) et de leurs dérivées, et l'on fait l'hypothèse qu'ils ne contiennent aucun terme indépendant des inconnues; les coefficients se composent de parties constantes et de séries trigonométriques procédant suivant les cosinus ou sinus des sommes des multiples de divers arguments $N_1 = n_1 t + l_1$, $N_2 = n_2 t + l_2, \ldots$; $n_1, n_2, \ldots, l_1, l_2, \ldots$ désignant des constantes.

De plus, on suppose que les équations ne changent pas, si l'on change le signe de t, et de $l_1, l_2, \ldots$, en même temps que celui de certaines des inconnues que nous appellerons $z_1, z_2, \ldots$; celles dont il est inutile de changer le signe seront représentées par $y_1, y_2, \ldots$.

Enfin, imaginant, d'autre part, les coefficients ordonnés par rapport à des quantités $m_1, m_2, \ldots$ petites du premier ordre, on suppose que, dans l'une au moins des équations, le coefficient de la première puissance d'une quelconque des inconnues, ainsi que d'une quelconque de ses dérivées, contienne une partie constante d'ordre inférieur à l'ordre des parties périodiques des coefficients de la même quantité dans l'ensemble des équations, à moins que dans chacune des équations le coefficient de cette quantité ne soit purement périodique; d'ailleurs les coefficients étant supposés généralement d'ordre zéro, leurs parties périodiques sont au moins du premier ordre.

Ceci posé, si l'on réduit ces équations à former un système linéaire à coefficients constants, en supprimant tous les termes qui n'ont pas la forme correspondant à un tel système, on pourra les intégrer aisément; entre autres opérations, il faudra former l'équation caractéristique; les racines distinctes et non nulles de cette équation (*racines caractéristiques*) seront égales et de signe contraire deux à deux; nous les supposerons imaginaires de la forme $\pm \mathbf{g}_1\sqrt{-1}$, $\pm \mathbf{g}_2\sqrt{-1}, \ldots$.

Alors la méthode des coefficients indéterminés, combinée avec celle des approximations successives, permettra de déterminer des valeurs de x_1, $x_2, \ldots$, vérifiant les équations primitives et de la forme suivante :

$$y_1 = \sum Y_1^{(p_1, p_2, \ldots; k_1, k_2, \ldots)} \cos(p_1 N_1 + p_2 N_2 + \ldots + k_1 G_1 + k_2 G_2 + \ldots),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$z_1 = \sum Z_1^{(p_1, p_2, \ldots; k_1, k_2, \ldots)} \sin(p_1 N_1 + p_2 N_2 + \ldots + k_1 G_1 + k_2 G_2 + \ldots),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

où $p_1, p_2, \ldots, k_1, k_2, \ldots$ sont des entiers pouvant prendre toutes les valeurs possibles; d'ailleurs, pour la symétrie des formules, nous supposerons (et nous conserverons cette hypothèse dans tous les cas analogues)

$$\begin{array}{l} Y_1^{(p_1, p_2, \ldots; k_1, k_2, \ldots)} = \quad Y_1^{(-p_1, -p_2, \ldots; -k_1, -k_2, \ldots)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Z_1^{(p_1, p_2, \ldots; k_1, k_2, \ldots)} = - Z_1^{(-p_1, -p_2, \ldots; -k_1, -k_2, \ldots)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Les $G_1, G_2, \ldots$ sont des arguments de la forme $g_1 t + \varpi_1, g_2 t + \varpi_2, \ldots$, $\varpi_1, \varpi_2, \ldots$ étant des constantes arbitraires, tandis que $g_1, g_2, \ldots$ sont des constantes déterminées par la suite même des approximations, et dont les premières valeurs approchées sont $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \ldots$ ou, plus généralement, $h_{11} n_1 + h_{12} n_2 + \ldots + \mathbf{g}_1$, $h_{21} n_1 + h_{22} n_2 + \ldots + \mathbf{g}_2$, $\ldots$, les h étant des entiers fixés arbitrairement, de la façon la plus convenable, suivant les cas.

Si maintenant $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ désignent des constantes arbitraires, petites par rapport aux coefficients des équations (puisque nous avons fait la même hypothèse sur les inconnues), un coefficient quelconque $Y_1^{(p_1, p_2, \ldots; k_1, k_2, \ldots)}$, par exemple, sera de la forme $\varepsilon_1^{|k_1|} \varepsilon_2^{|k_2|} \ldots y_1^{(p_1, p_2, \ldots; k_1, k_2, \ldots)}$, ce dernier facteur étant une série ordonnée suivant les puissances paires des ε, et, par suite, de la forme $\sum \varepsilon_1^{2q_1} \varepsilon_2^{2q_2} \ldots y_{1(2q_1, 2q_2, \ldots)}^{(p_1, p_2, \ldots; k_1, k_2, \ldots)}$, $q_1, q_2, \ldots$ étant des entiers positifs ou nuls. Ces coefficients ne dépendent que des coefficients des équations, et sont eux-mêmes ordonnés par rapport aux quantités $m_1, m_2, \ldots$. Aucun terme des inconnues ne pouvant d'ailleurs être indépendant des constantes $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$, d'après la forme supposée aux équations, on voit que les coefficients tels que $y_{1(0,0,\ldots)}^{(p_1, p_2, \ldots; 0, 0, \ldots)}$ seront nuls. Ajoutons encore que les quantités $g_1, g_2, \ldots$ sont de la même forme que les quantités $y_1^{(p_1, \ldots; k_1, \ldots)}$: on peut écrire $g_1 = \sum \varepsilon_1^{2q_1} \varepsilon_2^{2q_2} \ldots g_{1(2q_1, 2q_2, \ldots)}$, ... Enfin, dans chaque cas particulier, on précisera, de la façon qui sera la plus convenable, la signification des constantes $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$, en remarquant que l'on peut choisir pour ε_1 l'un quelconque des coefficients $Y_i^{(p_1, p_2, \ldots; 1, 0, 0, \ldots)}$ ou $Z_i^{(p_1, p_2, \ldots; 1, 0, 0, \ldots)}$ et ainsi des autres (exception faite naturellement pour ceux de ces coefficients qui seraient nécessairement nuls, ou d'un degré supérieur au premier par rapport aux constantes $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$).

En terminant, il n'est pas inutile d'insister sur ce que nous entendons, en disant que les formules ainsi trouvées pour les inconnues vérifient les équations. Cela veut dire que l'on peut pousser assez loin le calcul de ces formules, qui sont des séries procédant suivant les puissances des quantités $m_1, m_2, \ldots, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$, pour que, après substitution dans les premiers membres des équations, les résidus soient d'un ordre aussi élevé que l'on voudra par rapport à ces mêmes quantités, considérées comme petites du premier ordre.

Il va sans dire que ce principe peut tomber en défaut, si les circonstances sont telles que les approximations successives soient divergentes; mais alors des solutions de la forme précédente sont impossibles.

3. Nous allons maintenant examiner séparément les problèmes principaux que l'on rencontre dans la recherche du mouvement du Soleil, des planètes et de leurs satellites, supposés solides et soustraits à toute influence extérieure. Il serait plus général d'embrasser ce problème tout d'un coup, et l'on n'y rencontrerait guère plus de difficultés: il est préférable, pour la simplicité et la facilité de l'exposition, de le diviser, ainsi qu'on le fait d'habitude, en un certain nombre de problèmes particuliers, et de s'aider de la solution de ces problèmes pour compléter ensuite celle de la question générale. Ce sont les principaux de ces problèmes particuliers que nous nous proposons de passer en revue.

Le premier qui s'offre est la recherche du mouvement relatif autour du Soleil, supposé réduit à son centre de gravité (toute la masse étant concentrée en ce point), des centres de gravité des huit grands systèmes planétaires (les masses de ces systèmes étant de même supposées concentrées en ces points), sous l'action du Soleil et sous leur action réciproque. Pour simplifier le langage, nous dirons le Soleil ou les planètes, en parlant des points que nous venons de définir.

M_0 sera la masse du Soleil; $M_1, M_2, \ldots, M_i, \ldots, M_8$ seront les masses des planètes Mercure, Vénus, ..., Neptune (en réalité des systèmes planétaires correspondants); (M_i) désignera le point de masse M_i. Nous rapporterons les coordonnées des planètes à trois axes rectangulaires de directions fixes, passant par (M_0): $(M_0)x$, $(M_0)y$, $(M_0)z$; le plan des xy étant le plan de l'écliptique moyen de 1850,0, par exemple, et l'axe des x étant dirigé vers l'équinoxe de printemps moyen correspondant. Si x_i, y_i, z_i sont les coordonnées de (M_i), nous ferons

$$x_i = r_i \cos v_i \sqrt{1 - s_i^2},$$
$$y_i = r_i \sin v_i \sqrt{1 - s_i^2},$$
$$z_i = r_i s_i,$$

r_i, v_i, s_i étant le rayon vecteur, la longitude et le sinus de la latitude de (M_i).

En désignant par $\mathbf{f}$ le coefficient d'attraction, les équations relatives à (M_i) seront

$$\frac{1}{2}\frac{d^2(r_i^2)}{dt^2} - \frac{\mathbf{f}(M_0+M_i)}{r_i} - 2\int(dR_i) - r_i\frac{\partial R_i}{\partial r_i} = 0,$$

$$(1-s_i^2)\frac{dv_i^2}{dt^2} - \frac{1}{r_i}\frac{d^2 r_i}{dt^2} - \frac{\mathbf{f}(M_0+M_i)}{r_i^3} + \frac{1}{1-s_i^2}\frac{ds_i^2}{dt^2} + \frac{1}{r_i}\frac{\partial R_i}{\partial r_i} = 0,$$

$$\frac{1}{1-s_i^2}\frac{d^2 s_i}{dt^2} + s_i\frac{dv_i^2}{dt^2} + \frac{2}{r_i(1-s_i^2)}\frac{dr_i}{dt}\frac{ds_i}{dt} + \frac{s_i}{(1-s_i^2)^2}\frac{ds_i^2}{dt^2} - \frac{1}{r_i^2}\frac{\partial R_i}{\partial s_i} = 0,$$

où

$$(dR_i) = \frac{\partial R_i}{\partial r_i}dr_i + \frac{\partial R_i}{\partial v_i}dv_i + \frac{\partial R_i}{\partial s_i}ds_i$$

et

$$R_i = \sum_j R_{ij},$$

$$R_{ij} = \mathbf{f}M_j\left\{[(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2+(z_i-z_j)^2]^{-\frac{1}{2}} - \frac{x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j}{r_j^3}\right\}.$$

La première équation a été écrite sous la forme qui nous servira dans la pratique; tant qu'il s'agira, au contraire, d'exposer la théorie, nous la supposerons différentiée, afin de faire disparaître le signe $\int$ qui y figure.

L'observation nous apprend que chaque planète (M_i) tourne autour du Soleil dans le sens direct, avec une vitesse angulaire moyenne constante n_i, et que si l'on définit une nouvelle constante a_i par la relation $n_i^2 a_i^3 = \mathbf{f}(M_0+M_i)$, la distance de (M_i) au Soleil reste toujours voisine de a_i.

Faisons donc $r_i = a_i(1+\rho_i)$, $v_i = N_i + \lambda_i$ où $N_i = n_i t + \varepsilon_i$, ε_i étant une constante. Les équations deviennent

$$(A)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{d^2}{dt^2}\left(\rho_i + \frac{1}{2}\rho_i^2\right) - \frac{n_i^2}{1+\rho_i} - \frac{2}{a_i^2}\int(dR_i) - \frac{r_i}{a_i^2}\frac{\partial R_i}{\partial r_i} = 0,\\
&(1-s_i^2)\left(n_i + \frac{d\lambda_i}{dt}\right)^2 - \frac{1}{1+\rho_i}\frac{d^2\rho_i}{dt^2} - \frac{n_i^2}{(1+\rho_i)^3} + \frac{1}{1-s_i^2}\frac{ds_i^2}{dt^2} + \frac{1}{r_i}\frac{\partial R_i}{\partial r_i} = 0,\\
&\frac{1}{1-s_i^2}\frac{d^2 s_i}{dt^2} + s_i\left(n_i + \frac{d\lambda_i}{dt}\right)^2 + \frac{2}{(1+\rho_i)(1-s_i^2)}\frac{d\rho_i}{dt}\frac{ds_i}{dt} + \frac{s_i}{(1-s_i^2)^2}\frac{ds_i^2}{dt^2} - \frac{1}{r_i^2}\frac{\partial R_i}{\partial s_i} = 0.
\end{aligned}\right.$$

Les premiers membres de ces équations (la première étant supposée différentiée, ainsi que nous l'avons dit) peuvent être aisément développés suivant les puissances des inconnues (qui sont petites par rapport aux coefficients) et de leurs dérivées, en se servant du développement des fonctions perturbatrices R_{ij} que nous donnerons plus loin. Alors, comme les parties périodiques des coefficients ne dépendent que des différences des arguments N_i deux à deux, que la troisième équation ne contient aucun terme indépendant des s_i ou de leurs dérivées, et qu'enfin les équations ne changent pas en changeant les signes de t, des N_i et en même temps des λ_i, on aperçoit aisément que l'on peut déterminer, par la méthode des coefficients indéterminés combinée avec celle des approximations successives, et sans introduction de nouvelles constantes arbitraires, des valeurs de ρ_i et λ_i qui, avec l'hypothèse $s_i = 0$, vérifient les équations, et dépendent des constantes arbitraires n_i et ε_i.

Appelons ρ'_i et λ'_i ces valeurs; elles seront de la forme

$$\rho'_i = \sum \rho_i'^{(p_1, p_2, \ldots)} \cos(p_1 N_1 + p_2 N_2 + \ldots),$$

$$\lambda'_i = \sum \lambda_i'^{(p_1, p_2, \ldots)} \sin(p_1 N_1 + p_2 N_2 + \ldots),$$

les p étant des entiers quelconques, mais vérifiant la relation $\sum p = 0$, en raison de la forme des parties périodiques des coefficients.

On obtiendra aisément les coefficients ordonnés par rapport aux masses perturbatrices M_j, ..., et l'on voit immédiatement que la partie principale de $\rho_i'^{(p_1, p_2, \ldots)}$ ou $\lambda_i'^{(p_1, p_2, \ldots)}$ est de l'ordre du produit $M_j M_{j'} \ldots$, où M_j, $M_{j'}$, ... désignent les masses, autres que M_i, telles que les indices correspondants p_j, $p_{j'}$, ... soient non nuls. Quant à $\rho_i'^{(0, 0, \ldots)}$, c'est un coefficient du premier ordre.

Revenons maintenant à nos équations, dont nous n'avons que des solutions incomplètes, et faisons-y la substitution

$$\rho_i = \rho''_i + \sum \rho_i'^{(p_1, p_2, \ldots)} \cos(p_1 N_1 + p_2 N_2 + \ldots + p_1 \lambda''_1 + p_2 \lambda''_2 + \ldots),$$

$$\lambda_i = \lambda''_i + \sum \lambda_i'^{(p_1, p_2, \ldots)} \sin(p_1 N_1 + p_2 N_2 + \ldots + p_1 \lambda''_1 + p_2 \lambda''_2 + \ldots).$$

Développons alors les premiers membres comme précédemment. Il est clair qu'ils ne renferment plus aucun terme indépendant des inconnues, ni aucun terme ne dépendant que des λ''_i (leurs dérivées non comprises), puisque, d'après ce qui précède, $\rho''_i = 0$, $\lambda''_i = \text{const.}$, $s_i = 0$, sont des valeurs des inconnues vérifiant nos nouvelles équations.

On voit alors que l'on peut appliquer à ce nouveau système le principe énoncé plus haut. Notons seulement que les parties périodiques des coefficients ne dépendent que des différences des arguments N_i deux à deux, et que les équations ne changent pas si l'on change les signes de t, des N_i, et en même temps des λ''_i et des s_i. Si alors nous réduisons le système à la forme linéaire à coefficients constants, on voit immédiatement qu'il se subdivise en deux : l'un qui correspond aux s_i, et qui donne des racines caractéristiques ne différant de $\pm n_i\sqrt{-1}$ que de quantités du premier ordre (¹); l'autre, qui correspond aux ρ''_i et λ''_i, dont les racines caractéristiques non nulles ne diffèrent aussi de $\pm n_i\sqrt{-1}$ que de quantités du premier ordre. Comme, d'ailleurs, à chaque racine caractéristique correspondent deux nouvelles constantes arbitraires, et que nous avons déjà comme constantes les n_i et les ε_i, on voit qu'en procédant comme il a été expliqué on obtiendra des solutions renfermant le nombre total de constantes arbitraires nécessaire.

Remarquons encore que les deux premières équations ne renferment que des termes de degré pair par rapport aux s_i, tandis que la troisième ne renferme que des termes de degré impair par rapport aux mêmes quantités. En vertu de cette remarque et de ce que nous avons dit plus haut, on voit que les arguments, introduits par l'intégration, pourront se partager en deux groupes : l'un, G'_1, G'_2, ..., correspondant aux ρ''_i et λ''_i ; l'autre, H'_1, H'_2, ..., correspondant aux s_i ; et tels que si l'on pose, comme nous devons le faire,

$$\rho''_i = \sum \rho''^{(p_1,p_2,\ldots;q'_1,q'_2,\ldots;r'_1,r'_2,\ldots)}_i \cos(p_1 N_1 + p_2 N_2 + \ldots + q'_1 G'_1 + \ldots + r'_1 H'_1 + \ldots),$$

$$\lambda''_i = \sum \lambda''^{(p_1,p_2,\ldots;q'_1,q'_2,\ldots;r'_1,r'_2,\ldots)}_i \sin(p_1 N_1 + p_2 N_2 + \ldots + q'_1 G'_1 + \ldots + r'_1 H'_1 + \ldots),$$

$$s_i = \sum s^{(p_1,p_2,\ldots;q'_1,q'_2,\ldots;r'_1,r'_2,\ldots)}_i \sin(p_1 N_1 + p_2 N_2 + \ldots + q'_1 G'_1 + \ldots + r'_1 H'_1 + \ldots),$$

$\sum r'$ soit pair dans les arguments des deux premières formules, et impair dans ceux de la troisième. D'ailleurs, en vertu de la forme des coefficients périodiques des équations, on a $\sum p = 0$.

Les arguments G'_i, H'_i peuvent être mis respectivement sous la forme

(¹) Remarquons, une fois pour toutes, que le mot *ordre* se rapportera toujours aux masses perturbatrices, tandis que le mot *degré* s'appliquera aux constantes (telles que plus haut ε_1, ε_2, ...) introduites par l'intégration.

$(n_i - g_i)t + \varepsilon_i - \varpi_i$, $(n_i - h_i)t + \varepsilon_i - \vartheta_i$, les ϖ_i, ϑ_i étant des constantes arbitraires, et les g_i, h_i des quantités du premier ordre. Si alors nous faisons $G_i = g_i t + \varpi_i$, $H_i = h_i t + \vartheta_i$, on pourra substituer ces nouveaux arguments aux précédents, et écrire

$$\rho''_i = \sum \rho''^{(p_1, p_2, \ldots; q_1, \ldots; r_1, \ldots)}_i \cos(p_1 N_1 + \ldots + q_1 G_1 + \ldots r_1 H_1),$$

$$\lambda''_i = \sum \lambda''^{(p_1, p_2, \ldots; q_1, \ldots; r_1, \ldots)}_i \sin(p_1 N_1 + \ldots + q_1 G_1 + \ldots r_1 H_1),$$

$$s_i = \sum s^{(p_1, p_2, \ldots; q_1, \ldots; r_1, \ldots)}_i \sin(p_1 N_1 + \ldots + q_1 G_1 + \ldots r_1 H_1).$$

Dans ces arguments on aura évidemment la relation $\sum(p+q+r) = 0$, en vertu de la relation $\sum p = 0$ qui existait dans les formules précédentes. D'ailleurs, dans les deux premières formules, on a toujours $\sum r$ pair et impair dans la troisième.

Cette substitution est d'autant plus avantageuse, que les valeurs des racines caractéristiques correspondant aux équations réduites à la forme linéaire à coefficients constants doivent subir, comme nous le verrons plus tard, des corrections du premier ordre (bien que le principe ne tombe pas en défaut), et que, par suite, les diverses quantités g_i sont inséparables les unes des autres, et qu'il en est de même des diverses quantités h_i.

Si maintenant nous considérons les valeurs de ρ_i, λ_i, nous voyons que nous pourrons les mettre aussi sous la forme

$$\rho_i = \sum \rho^{(p_1, p_2, \ldots; q_1, q_2, \ldots; r_1, r_2, \ldots)}_i \cos(p_1 N_1 + \ldots + q_1 G_1 + \ldots + r_1 H_1),$$

$$\lambda_i = \sum \lambda^{(p_1, p_2, \ldots; q_1, q_2, \ldots; r_1, r_2, \ldots)}_i \sin(p_1 N_1 + \ldots + q_1 G_1 + \ldots + r_1 H_1),$$

formules auxquelles il convient de joindre

$$s_i = \sum s^{(p_1, \ldots; q_1, \ldots; r_1, \ldots)}_i \sin(p_1 N_1 + \ldots + q_1 G_1 + \ldots + r_1 H_1),$$

et sur lesquelles on doit faire les mêmes remarques que ci-dessus, au sujet des arguments qui y figurent.

Nous sommes donc finalement en droit d'appliquer la méthode des coefficients indéterminés combinée avec celle des approximations successives à la recherche de quantités ρ_i, λ_i, s_i, ayant la forme précédente, et vérifiant les équations fondamentales (A). Les séries que l'on obtient ainsi ne sont peut-être pas convergentes, mais elles sont réellement ordonnées suivant les puissances positives de petites quantités, et certainement utilisables pendant une certaine période de temps, les erreurs dues à leur emploi tombant au-dessous de celles que peuvent nous révéler les observations.

La forme des coefficients peut d'ailleurs être facilement fixée en s'appuyant sur ce qui a été dit plus haut et en jetant un simple coup d'œil sur les équations que nous allons écrire maintenant : on y remarquera, en particulier, que dans les équations relatives à (M_i) les termes indépendants des masses perturbatrices ne dépendent que des coordonnées de (M_i); et aussi que les masses perturbatrices ne peuvent s'introduire en dénominateur dans les coefficients inconnus des coordonnées de (M_i), que si ces coefficients correspondent à des arguments dans lesquels le coefficient du temps est du premier ordre ou ne diffère de n_i que d'une quantité du premier ordre, ou bien encore si ces coefficients dépendent d'autres coefficients tels que ceux dont nous venons de parler.

Cela étant, nous pouvons prendre pour les constantes arbitraires les coefficients des $\cos(N_3 - G_i)$ dans ρ_3 [(M_3) est la Terre], ainsi que les coefficients des $\sin(N_3 - H_i)$ dans s_3; soient $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \eta_1, \eta_2, \ldots$ ces deux groupes de constantes. Alors, on se convainc aisément qu'un coefficient tel que $\rho_i^{(p_1, p_2, \ldots; q_1, q_2, \ldots; r_1, r_2, \ldots)}$ sera de la forme

$$\varepsilon_1^{|q_1|}\varepsilon_2^{|q_2|}\ldots\eta_1^{|r_1|}\eta_2^{|r_2|}\ldots M_j M_{j'}\ldots\sum \varepsilon_1^{2q'_1}\varepsilon_2^{2q'_2}\ldots\eta_1^{2r'_1}\eta_2^{2r'_2}\ldots\rho_{i(2q'_1, 2q'_2, \ldots; 2r'_1, 2r'_2, \ldots)}^{(p_1, p_2, \ldots; q_1, \ldots; r_1, \ldots)},$$

$M_j, M_{j'}, \ldots$ étant les masses autres que M_i, telles que les indices correspondants $p_j, p_{j'}, \ldots$ soient non nuls, et $q'_1, q'_2, \ldots$ étant des entiers positifs ou nuls; les nouveaux coefficients ρ_i ne dépendent plus des constantes ε_i, η_i, et ils sont ordonnés par rapport aux masses perturbatrices, leurs parties principales étant d'ordre zéro. Il en est de même pour les coefficients de λ_i et de s_i.

Cette règle est générale, mais certains coefficients peuvent être nuls ou d'un ordre supérieur à celui indiqué. Ainsi, $\rho_{i(0,\ldots)}^{(0,\ldots;0,\ldots;0,\ldots)}$ sera du premier ordre.

Enfin, les g_i (et de même les h_i) auront une forme analogue

$$\sum \varepsilon_1^{2q'_1}\varepsilon_2^{2q'_2}\ldots\eta_1^{2r'_1}\eta_2^{2r'_2}\ldots g_{i(2q'_1, 2q'_2, \ldots; 2r'_1, \ldots)},$$

les nouveaux coefficients ainsi introduits étant ordonnés par rapport aux masses perturbatrices, et leurs parties principales étant du premier ordre.

4. Développons actuellement les premiers membres des équations (A) en séries trigonométriques procédant suivant les cosinus ou sinus des arguments qui figurent dans les valeurs de ρ_i, λ_i, s_i, valeurs que nous supposons connues, à l'exception des coefficients qui sont à déterminer. En égalant ensuite à zéro, dans chacun de ces premiers membres, le coefficient du cosinus ou du sinus d'un même argument, nous obtiendrons une série d'équations qui, résolues par la méthode des approximations successives, nous fourniront les valeurs des coefficients inconnus, et aussi des quantités g_i et h_i.

Pour abréger l'écriture, nous remplacerons l'ensemble d'indices $(p_1, p_2, \ldots; q_1, q_2, \ldots; r_1, r_2, \ldots)$ par le seul indice (p), toutes les fois qu'aucune ambiguïté n'en résultera; si l'un des indices, p_i par exemple, a besoin d'être désigné plus particulièrement, les autres restant indéterminés, nous écrirons (p, p_i) pour remplacer l'ensemble d'indices.

L'argument $p_1 N_1 + p_2 N_2 + \ldots + q_1 G_1 + \ldots + r_1 H_1 + \ldots$ sera représenté en abrégé par $V^{(p)}$; le coefficient du temps, dans cet argument, sera désigné par $k_p = p_1 h_1 + \ldots + q_1 g_1 + \ldots + r_1 h_1 + \ldots$.

Soit alors

$$c = \sum c^{(p)} \cos V^{(p)}, \qquad c' = \sum c'^{(p)} \cos V^{(p)};$$

$$s = \sum s^{(p)} \sin V^{(p)}, \qquad s' = \sum s'^{(p)} \sin V^{(p)};$$

si l'on suppose, ainsi que nous l'avons dit, que $c^{(p)} = c^{(-p)}, \ldots, s^{(p)} = -s^{(-p)}, \ldots,$ on pourra écrire

$$\begin{aligned} cc' &= \sum c'^{(p')} c^{(p-p')} \cos V^{(p)}, \\ cs &= \sum c^{(p')} s^{(p-p')} \sin V^{(p)}, \\ ss' &= -\sum s'^{(p')} s^{(p-p')} \cos V^{(p)}, \end{aligned}$$

les nouvelles séries étant soumises à la même condition, que nous supposons toujours remplie, et le signe $\sum$ s'étendant à toutes les combinaisons des indices (p) et (p').

Il nous est facile maintenant d'effectuer le développement proposé. Bornons-nous d'abord aux parties des premiers membres indépendantes des forces perturbatrices. La première des équations (A) nous donne (à une constante près qu'il est inutile d'écrire, à cause de la constante additive contenue dans $\int(d\mathrm{R}_i)$, de sorte que l'on ne devra pas, dans cette équation, se préoccuper de ce qui correspond à l'hypothèse $\mathrm{V}^{(p)} = 0$),

$$\sum \cos \mathrm{V}^{(p)}[(n_i^2 - k_p^2)\rho_i^{(p)} - (n_i^2 + \tfrac{1}{2}k_p^2)\rho_i^{(p')}\rho_i^{(p-p')} + n_i^2\rho_i^{(p'')}\rho_i^{(p'-p'')}\rho_i^{(p-p')} + \ldots].$$

La seconde donne

$$\sum \cos \mathrm{V}^{(p)} \left\{ \begin{array}{l} 2n_i k_p \lambda_i^{(p)} + k_{p'}k_{p-p'}\lambda_i^{(p')}\lambda_i^{(p-p')} + (10n_i^2 + k_{p''}^2)\rho_i^{(p'')}\rho_i^{(p'-p'')}\rho_i^{(p-p')} + \ldots \\ + (3n_i^2 + k_p^2)\rho_i^{(p)} - (6n_i^2 + k_{p'}^2)\rho_i^{(p')}\rho_i^{(p-p')} + 2n_i k_{p''}\lambda_i^{(p'')}s_i^{(p'-p'')}s_i^{(p-p')} \\ \qquad + (n_i^2 + k_{p'}k_{p-p'})s_i^{(p')}s_i^{(p-p')} \end{array} \right\},$$

et la troisième

$$\sum \sin \mathrm{V}^{(p)} \left\{ \begin{array}{l} (n_i^2 - k_p^2)s_i^{(p)} + 2n_i k_{p'}\lambda_i^{(p')}s_i^{(p-p')} + k_{p''}k_{p'-p''}\lambda_i^{(p'')}\lambda_i^{(p'-p'')}s_i^{(p-p')} + \ldots \\ \qquad - 2k_{p'}k_{p-p'}\rho_i^{(p')}s_i^{(p-p')} + 2k_{p'-p''}k_{p-p'}\rho_i^{(p'')}\rho_i^{(p'-p'')}s_i^{(p-p')} \\ \qquad\qquad + (k_{p''}^2 + k_{p'-p''}k_{p-p'})s_i^{(p'')}s_i^{(p'-p'')}s_i^{(p-p')} \end{array} \right\}.$$

Arrivons maintenant au développement des expressions qui dépendent des fonctions perturbatrices R_{ij}.

R_{ij} peut aisément se développer en série trigonométrique procédant suivant les cosinus des multiples de $(v_i - v_j)$; les coefficients sont eux-mêmes des séries ordonnées suivant les puissances de s_i et s_j, avec cette remarque que tous les termes sont de degré pair par rapport à l'ensemble de ces deux quantités, qui figurent d'ailleurs symétriquement dans ces séries; quant aux coefficients de ces séries, ce sont des fonctions de r_i et r_j faciles à calculer. Nous pouvons donc écrire, en désignant par μ un entier quelconque,

$$\mathrm{R}_{ij} = \sum \cos\mu(v_i - v_j)[\mathcal{A}_{ij}^{(\mu)} + \tfrac{1}{2}\mathcal{B}_{ij}^{(\mu)}(s_i^2 + s_j^2) + \mathcal{C}_{ij}^{(\mu)}s_i s_j + \ldots],$$

où les $\mathcal{A}$, ... ne dépendent que de r_i et r_j.

Faisons $r_i = a_i$, $r_j = a_j$; les $\mathcal{A}$, ... deviendront des fonctions A, ... de a_i et a_j. Faisons, en outre,

$$\mathrm{A}_{ik',jk''} = a_i^{k'-2}a_j^{k''}\frac{\partial^{k'+k''}\mathrm{A}_{ij}}{\partial a_i^{k'}\partial a_j^{k''}}, \qquad \ldots;$$

nous pourrons écrire

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{a_i^2}\mathrm{R}_{ij} = \sum \cos\mu(\mathrm{N}_i-\mathrm{N}_j)\Big\{ & \mathrm{A}^{(\mu)}_{i_0,j_0} \\
& + \mathrm{A}^{(\mu)}_{i_1,j_0}\rho_i + \mathrm{A}^{(\mu)}_{i_0,j_1}\rho_j \\
& + \tfrac{1}{2}\mathrm{A}^{(\mu)}_{i_2,j_0}\rho_i^2 + \mathrm{A}^{(\mu)}_{i_1,j_1}\rho_i\rho_j + \tfrac{1}{2}\mathrm{A}^{(\mu)}_{i_0,j_2}\rho_j^2 - \frac{\mu^2}{2}\mathrm{A}^{(\mu)}_{i_0,j_0}(\lambda_i-\lambda_j)^2 \\
& \qquad + \tfrac{1}{2}\mathrm{B}^{(\mu)}_{i_0,j_0}(s_i^2+s_j^2) + \mathrm{C}^{(\mu)}_{i_0,j_0}s_is_j \\
& + \tfrac{1}{6}\mathrm{A}^{(\mu)}_{i_3,j_0}\rho_i^3 + \tfrac{1}{2}\mathrm{A}^{(\mu)}_{i_2,j_1}\rho_i^2\rho_j + \tfrac{1}{2}\mathrm{A}^{(\mu)}_{i_1,j_2}\rho_i\rho_j^2 + \tfrac{1}{6}\mathrm{A}^{(\mu)}_{i_0,j_3}\rho_j^3 \\
& \qquad - \frac{\mu^2}{2}(\lambda_i-\lambda_j)^2\big(\mathrm{A}^{(\mu)}_{i_1,j_0}\rho_i + \mathrm{A}^{(\mu)}_{i_0,j_1}\rho_j\big) \\
& \qquad + \tfrac{1}{2}(s_i^2+s_j^2)\big(\mathrm{B}^{(\mu)}_{i_1,j_0}\rho_i + \mathrm{B}^{(\mu)}_{i_0,j_1}\rho_j\big) + s_is_j\big(\mathrm{C}^{(\mu)}_{i_1,j_0}\rho_i + \mathrm{C}^{(\mu)}_{i_0,j_1}\rho_j\big) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Big\} \\
- \sum \sin\mu(\mathrm{N}_i-\mathrm{N}_j)\Big\{ & \mu\mathrm{A}^{(\mu)}_{i_0,j_0}(\lambda_i-\lambda_j) \\
& + \mu(\lambda_i-\lambda_j)\big(\mathrm{A}^{(\mu)}_{i_1,j_0}\rho_i + \mathrm{A}^{(\mu)}_{i_0,j_1}\rho_j\big) \\
& - \frac{\mu^3}{6}\mathrm{A}^{(\mu)}_{i_0,j_0}(\lambda_i-\lambda_j)^3 + \mu(\lambda_i-\lambda_j)\big(\tfrac{1}{2}\mathrm{A}^{(\mu)}_{i_2,j_0}\rho_i^2 + \mathrm{A}^{(\mu)}_{i_1,j_1}\rho_i\rho_j + \tfrac{1}{2}\mathrm{A}^{(\mu)}_{i_0,j_2}\rho_j^2\big) \\
& \qquad + \mu(\lambda_i-\lambda_j)\big(\tfrac{1}{2}\mathrm{B}^{(\mu)}_{i_0,j_0}(s_i^2+s_j^2) + \mathrm{C}^{(\mu)}_{i_0,j_0}s_is_j\big) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Big\}.
\end{aligned}
$$

$\dfrac{r_i}{a_i^2}\dfrac{\partial \mathrm{R}_{ij}}{\partial r_i}$ aura un développement tout pareil, sauf que F, G, H, ... remplaceront A, B, C, ..., en posant

$$\mathrm{F}_{ij} = a_i\frac{\partial \mathrm{A}_{ij}}{\partial a_i}, \qquad \ldots, \qquad \text{et} \qquad \mathrm{F}_{ik',jk''} = a_i^{k'-2}a_j^{k''}\frac{\partial^{k'+k''}\mathrm{F}_{ij}}{\partial a_i^{k'}\partial a_j^{k''}}, \qquad \ldots.$$

De même pour $\frac{1}{r_i}\frac{\partial \mathrm{R}_{ij}}{\partial r_i}$; cette fois, les lettres L, M, N, ... remplacent A, B, C, ..., en posant

$$\mathrm{L}_{ij} = \frac{1}{a_i}\frac{\partial \mathrm{A}_{ij}}{\partial a_i}, \qquad \ldots, \qquad \text{et} \qquad \mathrm{L}_{ik',jk''} = a_i^{k'}a_j^{k''}\frac{\partial^{k'+k''}\mathrm{L}_{ij}}{\partial a_i^{k'}\partial a_j^{k''}}, \qquad \ldots.$$

Enfin, en remplaçant encore B, C, ... par Q, R, ..., et posant

$$\mathrm{Q}_{ij} = \frac{1}{a_i^2}\mathrm{B}_{ij}, \qquad \ldots, \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Q}_{ik',jk''} = a_i^{k'}a_j^{k''}\frac{\partial^{k'+k''}\mathrm{Q}_{ij}}{\partial a_i^{k'}\partial a_j^{k''}}, \qquad \ldots,$$

on aura (en se bornant aux termes du second ordre, très faciles à compléter d'ailleurs)

$$\frac{1}{r_i^2}\frac{\partial \mathrm{R}_i}{\partial s_i} = \sum \cos\mu(\mathrm{N}_i-\mathrm{N}_j)\left\{\begin{array}{l} s_i\left(\mathrm{Q}^{(\mu)}_{i_0,j_0}+\mathrm{Q}^{(\mu)}_{i_1,j_0}\rho_i+\mathrm{Q}^{(\mu)}_{i_0,j_1}\rho_j\right) \\ +\, s_j\left(\mathrm{R}^{(\mu)}_{i_0,j_0}+\mathrm{R}^{(\mu)}_{i_1,j_0}\rho_i+\mathrm{R}^{(\mu)}_{i_0,j_1}\rho_j\right)+\ldots \end{array}\right\}$$
$$-\sum \sin\mu(\mathrm{N}_i-\mathrm{N}_j)\left\{\mu(\lambda_i-\lambda_j)\left(\mathrm{Q}^{(\mu)}_{i_0,j_0}s_i+\mathrm{R}^{(\mu)}_{i_0,j_0}s_j\right)+\ldots\right\}.$$

Introduisons maintenant dans ces fonctions les valeurs de ρ_i, λ_i, s_i, ρ_j, λ_j, s_j sous la forme que nous leur avons donnée, et nous aurons finalement

$$\frac{1}{a_i^2}\mathrm{R}_{ij} = \sum \mathrm{A}^{(\mu)}_{i_0,j_0}\cos\mu(\mathrm{N}_i-\mathrm{N}_j)+\sum \mathrm{H}_p\cos\mathrm{V}^{(p)},$$

où

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}_p = {} & \mathrm{A}^{(\mu)}_{i_1,j_0}\rho_i^{(p,\,p_i-\mu,\,p_j+\mu)} \\
& + \mathrm{A}^{(\mu)}_{i_0,j_1}\rho_j^{(p,\,p_i-\mu,\,p_j+\mu)} \\
& + \mu\mathrm{A}^{(\mu)}_{i_0,j_0}(\lambda_i-\lambda_j)^{(p,\,p_i-\mu,\,p_j+\mu} \\
& + \tfrac{1}{2}\mathrm{A}^{(\mu)}_{i_2,j_0}\rho_i^{(p')}\rho_i^{(p-p',\,p_i-p'_i-\mu,\,p_j-p'_j+\mu)} \\
& + \mathrm{A}^{(\mu)}_{i_1,j_1}\rho_i^{(p')}\rho_j^{\,(\text{»})} \\
& + \tfrac{1}{2}\mathrm{A}^{(\mu)}_{i_0,j_2}\rho_j^{(p')}\rho_j^{\,(\text{»})} \\
& + \mu\mathrm{A}^{(\mu)}_{i_1,j_0}\rho_i^{(p')}(\lambda_i-\lambda_j)^{(\text{»})} \\
& + \mu\mathrm{A}^{(\mu)}_{i_0,j_1}\rho_j^{(p')}(\lambda_i-\lambda_j)^{(\text{»})} \\
& + \frac{\mu^2}{2}\mathrm{A}^{(\mu)}_{i_0,j_0}(\lambda_i-\lambda_j)^{(p')}(\lambda_i-\lambda_j)^{(\text{»})} \\
& - \tfrac{1}{2}\mathrm{B}^{(\mu)}_{i_0,j_0}s_i^{(p')}s_i^{\,(\text{»})} \\
& - \mathrm{C}^{(\mu)}_{i_0,j_0}s_i^{(p')}s_j^{\,(\text{»})} \\
& - \tfrac{1}{2}\mathrm{B}^{(\mu)}_{i_0,j_0}s_j^{(p')}s_j^{\,(\text{»})} \\
& + \tfrac{1}{6}\mathrm{A}^{(\mu)}_{i_3,j_0}\rho_i^{(p'')}\rho_i^{(p'-p'')}\rho_i^{(p-p',\,p_i-p'_i-\mu,\,p_j-p'_j+\mu)} \\
& + \tfrac{1}{2}\mathrm{A}^{(\mu)}_{i_2,j_1}\rho_i^{(p'')}\rho_i^{(p'-p'')}\rho_j^{\,(\text{»})} \\
& + \tfrac{1}{2}\mathrm{A}^{(\mu)}_{i_1,j_2}\rho_i^{(p'')}\rho_j^{(p'-p'')}\rho_j^{\,(\text{»})} \\
& + \tfrac{1}{6}\mathrm{A}^{(\mu)}_{i_0,j_3}\rho_j^{(p'')}\rho_j^{(p'-p'')}\rho_j^{\,(\text{»})} \\
& + \tfrac{1}{2}\mu\mathrm{A}^{(\mu)}_{i_2,j_0}\rho_i^{(p'')}\rho_i^{(p'-p'')}(\lambda_i-\lambda_j)^{(\text{»})} \\
& + \mu\mathrm{A}^{(\mu)}_{i_1,j_1}\rho_i^{(p'')}\rho_j^{(p'-p'')}(\lambda_i-\lambda_j)^{(\text{»})} \\
& + \tfrac{1}{2}\mu\mathrm{A}^{(\mu)}_{i_0,j_2}\rho_j^{(p'')}\rho_j^{(p'-p'')}(\lambda_i-\lambda_j)^{(\text{»})} \\
& + \tfrac{1}{2}\mu^2\mathrm{A}^{(\mu)}_{i_1,j_0}\rho_i^{(p'')}(\lambda_i-\lambda_j)^{(p'-p'')}(\lambda_i-\lambda_j)^{(\text{»})} \\
& + \tfrac{1}{2}\mu^2\mathrm{A}^{(\mu)}_{i_0,j_1}\rho_j^{(p'')}(\lambda_i-\lambda_j)^{(p'-p'')}(\lambda_i-\lambda_j)^{(\text{»})} \\
& + \tfrac{1}{6}\mu^3\mathrm{A}^{(\mu)}_{i_0,j_0}(\lambda_i-\lambda_j)^{(p'')}(\lambda_i-\lambda_j)^{(p'-p'')}(\lambda_i-\lambda_j)^{(\text{»})} \\
& - \tfrac{1}{2}\mathrm{B}^{(\mu)}_{i_1,j_0}\rho_i^{(p'')}s_i^{(p'-p'')}s_i^{\,(\text{»})} \\
& - \tfrac{1}{2}\mathrm{B}^{(\mu)}_{i_0,j_1}\rho_j^{(p'')}s_i^{(p'-p'')}s_i^{\,(\text{»})} \\
& - \tfrac{1}{2}\mu\mathrm{B}^{(\mu)}_{i_0,j_0}(\lambda_i-\lambda_j)^{(p'')}s_i^{(p'-p'')}s_i^{\,(\text{»})} \\
& - \mathrm{C}^{(\mu)}_{i_1,j_0}\rho_i^{(p'')}s_i^{(p'-p'')}s_j^{\,(\text{»})} \\
& - \mathrm{C}^{(\mu)}_{i_0,j_1}\rho_j^{(p'')}s_i^{(p'-p'')}s_j^{\,(\text{»})} \\
& - \mu\mathrm{C}^{(\mu)}_{i_0,j_0}(\lambda_i-\lambda_j)^{(p'')}s_i^{(p'-p'')}s_j^{\,(\text{»})} \\
& - \tfrac{1}{2}\mathrm{B}^{(\mu)}_{i_1,j_0}\rho_i^{(p'')}s_j^{(p'-p'')}s_j^{\,(\text{»})} \\
& - \tfrac{1}{2}\mathrm{B}^{(\mu)}_{i_0,j_1}\rho_j^{(p'')}s_j^{(p'-p'')}s_j^{\,(\text{»})} \\
& - \tfrac{1}{2}\mu\mathrm{B}^{(\mu)}_{i_0,j_0}(\lambda_i-\lambda_j)^{(p'')}s_j^{(p'-p'')}s_j^{\,(\text{»})} \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ (1).}
\end{aligned}$$

(1) Le signe (») indique que l'indice est le même que celui du facteur correspondant de la première ligne.

Le développement de $\frac{r_i}{a_i^2}\frac{\partial R_{ij}}{\partial r_i}$ est le même avec les lettres F, G, H, ...; celui de $\frac{1}{r_i}\frac{\partial R_{ij}}{\partial r_i}$ est le même avec les lettres L, M, N, ...

Quant au développement de $\frac{1}{a_i^2}\int (dR_{ij})$, il se déduit de celui de $\frac{1}{a_i^2}R_{ij}$ de la façon suivante, que l'on justifie immédiatement en remarquant que (dR_{ij}) est la différentielle de R_{ij} obtenue en ne faisant varier que les coordonnées de (M_i) : soit $\alpha K^{(\mu)} \rho_i^{(p_1)} \ldots \lambda_i^{(p_2)} \ldots s_i^{(p_3)} \ldots \cos V^{(p)}$ un terme de $\frac{1}{a_i^2}R_{ij}$, dans lequel on met en évidence l'indice μ, et les coefficients de ρ_i, λ_i, s_i; la fonction $\frac{1}{a_i^2}\int (dR_{ij})$ renfermera un terme correspondant, obtenu en multipliant le précédent par le facteur

$$\frac{\mu n_i + k_{p_1} + \ldots + k_{p_2} + \ldots + k_{p_3} + \ldots}{k_p}.$$

Quant au développement de $\frac{1}{r_i^2}\frac{\partial R_i}{\partial s_i}$, ce sera (limité aux termes du second ordre)

$$\begin{aligned}\frac{1}{r_i^2}\frac{\partial R_i}{\partial s_i} = \sum \sin V^{(p)} \Big\{ & Q^{(\mu)}_{i_0,j_0} s_i^{(p,\,p_i-\mu,\,p_j+\mu)} + Q^{(\mu)}_{i_1,j_0} s_i^{(p')} \rho_i^{(p-p',\,p_i-p'_i-\mu,\,p_j-p'_j+\mu)} \\ & + R^{(\mu)}_{i_0,j_0} s_j{}^{(\text{»})} \qquad + Q^{(\mu)}_{i_0,j_1} s_i^{(p')} \rho_j{}^{(\text{»})} \\ & \qquad\qquad + \mu Q^{(\mu)}_{i_0,j_0} s_i^{(p')} (\lambda_i - \lambda_j)^{(\text{»})} \\ & \qquad\qquad + R^{(\mu)}_{i_1,j_0} s_j^{(p')} \rho_i{}^{(\text{»})} \\ & \qquad\qquad + R^{(\mu)}_{i_0,j_1} s_j^{(p')} \rho_j{}^{(\text{»})} \\ & \qquad\qquad + \mu R^{(\mu)}_{i_0,j_0} s_j^{(p')} (\lambda_i - \lambda_j)^{(\text{»})} \\ & \qquad\qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots \Big\}.\end{aligned}$$

Les premiers membres des équations fondamentales (A) se trouvent ainsi développés et mis sous la forme $\sum^{(1)} A_i^{(p)} \cos V^{(p)}$, $\sum^{(2)} A_i^{(p)} \cos V^{(p)}$, $\sum^{(3)} A_i^{(p)} \sin V^{(p)}$. Les équations que l'on obtient en égalant à zéro les divers coefficients $A_i^{(p)}$ nous fourniront les valeurs de tous les coefficients inconnus qui figurent dans les expressions des ρ_i, λ_i, s_i, ainsi que des quantités g_i, h_i.

L'étude de ces équations fera l'objet d'un travail ultérieur.

5. Il peut être avantageux de représenter les coordonnées (M_i) sous la forme qui convient au mouvement elliptique

$$\begin{aligned}
v_i &= \sigma_i + 2e_i\sin(\sigma_i-\varphi_i) + \tfrac{5}{4}e_i^2 \quad \sin 2(\sigma_i-\varphi_i) + \ldots \\
&\qquad - \tfrac{1}{4}\sin^2 i_i \sin 2(\sigma_i-\psi_i) + \ldots, \\
r_i &= \alpha_i\left[1 + \frac{e_i^2}{2} - e_i\cos(\sigma_i-\varphi_i) - \tfrac{1}{2}e_i^2\cos 2(\sigma_i-\varphi_i) + \ldots\right], \\
s_i &= \sin i_i\,[\sin(\sigma_i-\psi_i) + e_i\sin(2\sigma_i-\varphi_i-\psi_i) + e_i\sin(\psi_i-\varphi_i) + \ldots],
\end{aligned}$$

où α_i, e_i, φ_i, i_i, ψ_i sont des constantes dont la signification est bien connue et où σ_i désigne la longitude moyenne $\nu_i t + \beta_i$, β_i étant une constante, et ν_i étant liée à α_i par la relation $\nu_i^2\alpha_i^3 = \mathbf{f}(M_0+M_i)$.

Ces mêmes coordonnées continueront, ainsi que leurs dérivées premières, à s'exprimer comme dans le mouvement elliptique, si l'on détermine α_i, σ_i, e_i, φ_i, i_i, ψ_i de la façon bien connue que nous allons rappeler.

Supprimons, pour un instant, l'indice (i), et faisons

$$\begin{aligned}
h &= e\sin\varphi, & p &= \sin i\sin\psi, \\
l &= e\cos\varphi, & q &= \sin i\cos\psi;
\end{aligned}$$

les équations qui déterminent α, σ, h, l, p, q seront

$$(\mathrm{B})\left\{\begin{aligned}
\frac{d\alpha}{dt} &= \frac{2}{\nu\alpha}\frac{\partial R}{\partial\sigma}, \\
\frac{d\sigma}{dt} &= \nu - \frac{2}{\nu\alpha}\frac{\partial R}{\partial\alpha} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{\nu\alpha^2(1+\sqrt{1-e^2})}\left(h\frac{\partial R}{\partial h} + l\frac{\partial R}{\partial l}\right) + \frac{\tang\frac{i}{2}\cot i}{\nu\alpha^2\sqrt{1-e^2}}\left(p\frac{\partial R}{\partial p} + q\frac{\partial R}{\partial q}\right), \\
\frac{dh}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{\nu\alpha^2}\frac{\partial R}{\partial l} - \frac{h\sqrt{1-e^2}}{\nu\alpha^2(1+\sqrt{1-e^2})}\frac{\partial R}{\partial\sigma} + \frac{l\tang\frac{i}{2}\cot i}{\nu\alpha^2\sqrt{1-e^2}}\left(p\frac{\partial R}{\partial p} + q\frac{\partial R}{\partial q}\right), \\
\frac{dl}{dt} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{\nu\alpha^2}\frac{\partial R}{\partial h} - \frac{l\sqrt{1-e^2}}{\nu\alpha^2(1+\sqrt{1-e^2})}\frac{\partial R}{\partial\sigma} - \frac{h\tang\frac{i}{2}\cot i}{\nu\alpha^2\sqrt{1-e^2}}\left(p\frac{\partial R}{\partial p} + q\frac{\partial R}{\partial q}\right), \\
\frac{dp}{dt} &= \frac{\cos i}{\nu\alpha^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial q} - \frac{p\tang\frac{i}{2}\cot i}{\nu\alpha^2\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{\partial R}{\partial\sigma} + l\frac{\partial R}{\partial h} - h\frac{\partial R}{\partial l}\right), \\
\frac{dq}{dt} &= -\frac{\cos i}{\nu\alpha^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial p} - \frac{q\tang\frac{i}{2}\cot i}{\nu\alpha^2\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{\partial R}{\partial\sigma} + l\frac{\partial R}{\partial h} - h\frac{\partial R}{\partial l}\right),
\end{aligned}\right.$$

R étant exprimée à l'aide des α, σ, h, l, p, q et ν étant pour $\alpha^{-\frac{3}{2}}\sqrt{\mathbf{f}(M_0+M)}$.

D'autre part, ces mêmes quantités α, σ, h, l, p, q peuvent être facilement exprimées à l'aide de r, v, s et de leurs dérivées r', v', s'. On trouve d'abord

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{2}{r} - \frac{r'^2 + \frac{r^2}{1-s^2}[(1-s^2)^2 v'^2 + s'^2]}{\mathbf{f}(M_0+M)}.$$

Puis, en posant

$$P = \frac{s'}{\sqrt{(1-s^2)^2 v'^2 + s'^2}}, \qquad Q = \frac{s(1-s^2)v'}{\sqrt{(1-s^2)^2 v'^2 + s'^2}},$$

nous aurons

$$\begin{aligned} p &= P\sin v - Q\cos v, & \sin^2 i &= P^2 + Q^2, & \sin i \sin(v-\psi) &= Q, \\ q &= P\cos v + Q\sin v, & & & \sin i\cos(v-\psi) &= P, \end{aligned}$$

et, grâce à ces dernières formules, on exprimera aisément $\sin^n i\cos n(v-\psi)$, et $\sin^n i\sin n(v-\psi)$ en fonction entière de P et Q.

Posant encore

$$A = \frac{1}{\mathbf{f}(M_0+M)}\left(r^2 r' v'\sqrt{1-s^2}\right),$$

$$B = \frac{1}{\mathbf{f}(M_0+M)}\left\{r^2 r' \frac{ss'}{\sqrt{1-s^2}} + \frac{r^3}{\sqrt{1-s^2}}[(1-s^2)^2 v'^2 + s'^2] - \mathbf{f}(M_0+M)\sqrt{1-s^2}\right\},$$

$$C = \frac{1}{\mathbf{f}(M_0+M)}\left\{r^2 r' s' - \frac{r^3 s}{1-s^2}[(1-s^2)^2 v'^2 + s'^2] + \mathbf{f}(M_0+M)s\right\} = \frac{AP - BQ}{\cos i},$$

$$H = B - \frac{CQ}{1+\cos i}, \qquad L = A + \frac{CP}{1+\cos i},$$

nous aurons

$$\begin{aligned} h &= H\sin v - L\cos v, & e^2 &= H^2 + L^2 = A^2 + B^2 + C^2, & e\sin(v-\varphi) &= L, \\ l &= H\cos v + L\sin v, & & & e\cos(v-\varphi) &= H, \end{aligned}$$

et, grâce à ces dernières formules, on exprimera aisément $e^n\cos n(v-\varphi)$ et $e^n\sin n(v-\varphi)$ en fonction entière de H et L.

Enfin une formule connue permet d'exprimer σ_i; en voici les premiers termes

$$\begin{aligned} \sigma = v - 2e\sin(v-\varphi) + \tfrac{3}{4}e^2 & \sin 2(v-\varphi) + \ldots, \\ + \tfrac{1}{4}\sin^2 i & \sin 2(v-\psi) + \ldots. \end{aligned}$$

Par l'examen de ces formules et leur comparaison avec celles qui fournissent les coordonnées, on voit que nous pouvons poser

$$\sigma_i = n_i t + \varepsilon_i + \sum \sigma_i^{(p)} \sin V^{(p)},$$
$$\alpha_i = a_i \qquad + \sum \alpha_i^{(p)} \cos V^{(p)},$$

les arguments $V^{(p)}$ étant les mêmes que ceux qui figurent dans ρ_i et λ_i.

Nous aurons ensuite

$$h_i = \sum h_i^{(p)} \sin(N_i + V^{(p)}),$$
$$l_i = \sum l_i^{(p)} \cos(N_i + V^{(p)}),$$

les $V^{(p)}$ étant les mêmes arguments que précédemment. En outre $h_i^{(p)} = l_i^{(p)}$.

De même, enfin,

$$p_i = \sum p_i^{(p)} \sin(N_i + V^{(p)}),$$
$$q_i = \sum q_i^{(p)} \cos(N_i + V^{(p)}),$$

les $V^{(p)}$ étant les mêmes arguments que ceux qui figurent dans s_i. En outre, $p_i^{(p)} = q_i^{(p)}$.

D'ailleurs, d'une façon générale, les coefficients qui figurent dans ces formules seront, quant à la forme, soumis aux mêmes lois générales que les coefficients des arguments correspondants dans ρ_i, λ_i, s_i.

Mais, plus particulièrement, les équations (B) nous montrent, par leur forme, que dans h_i, l_i, p_i, q_i les seuls termes d'ordre zéro correspondront aux arguments $V^{(p)}$ de la forme $V^{(p)} = -N_i + \sum (q_k G_k + r_m H_m)$, la condition $\sum (q + r) = 1$ étant toujours remplie, et en remarquant que, dans h_i et l_i, $\sum r$ est pair, et impair au contraire dans p_i et q_i.

Si l'on veut intégrer les équations (B) indépendamment des équations (A), ce qui pourra se faire d'une façon tout à fait semblable à celle que nous avons exposée plus haut, on pourra prendre comme constantes arbitraires les coefficients des cosinus ou sinus des angles G_k ou H_m dans les valeurs de h_3, l_3, p_3, q_3, par exemple. Tout ce que nous avons dit au sujet de la forme des coefficients subsistera en substituant ces constantes à celles précédemment adoptées.

Les équations nous montrent encore que dans α_i et σ_i les termes d'ordre zéro ne peuvent correspondre qu'aux arguments $V^{(p)}$ que nous appellerons *à longue période,* c'est-à-dire tels que le coefficient k_p du temps dans ces arguments soit du premier ordre; ces arguments seront par conséquent de la forme $\sum(q_k G_k + r_m H_m)$, avec $\sum(q+r) = 0$ et $\sum r$ pair.

Nous avons admis implicitement, malgré la forme de la seconde des équations (B),

$$\frac{d\sigma_i}{dt} = \nu_i + \ldots,$$

que σ_i ne contenait pas de termes d'ordre négatif; sans quoi nos approximations successives deviendraient manifestement divergentes, et nous ne pourrions trouver des solutions de la forme que nous nous sommes proposée.

Cette hypothèse est légitime; en effet, la fonction $\frac{2}{\nu_i \alpha_i} \frac{\partial R_i}{\partial \sigma_i} = \frac{d\alpha_i}{dt}$, exprimée en fonction des α, σ, ... ne contient que des termes périodiques où figure σ_i. Si donc on y substitue, à la place des α, σ, ..., leurs parties d'ordre zéro qui, dans notre hypothèse, ont la forme indiquée précédemment, cette fonction ne contiendra encore que des termes périodiques dans les arguments desquels figurera N_i. Nous en concluons qu'en réalité α_i ne contient aucun terme périodique d'ordre zéro; $\nu_i = \alpha_i^{-\frac{3}{2}} \sqrt{\mathbf{f}(M_0 + M_i)}$ n'en contiendra pas davantage, et par suite n'introduira pas dans σ_i de termes d'ordre négatif.

Que α_i ne contienne pas de termes à longue période d'ordre zéro, c'est le théorème de l'invariabilité des grands axes, limité à la première puissance des masses.

Une remarque analogue doit être faite à propos de l'intégration des équations (A). Il suffit de les examiner un instant pour voir qu'*a priori* la fonction $\int (dR_i)$ semble devoir introduire dans λ_i des termes d'ordre négatif. Il n'en est rien cependant, et pour la même raison que précédemment. En effet, d'après le principe même de la méthode de la variation des constantes, la définition de (dR_i), et la façon dont t figure dans les formules du mouvement elliptique, on a $(dR_i) = \nu_i \frac{\partial R_i}{\partial \sigma_i} dt$. Le raisonnement fait plus haut s'applique alors sans modification, et montre qu'il n'y a pas de termes à longue période du premier ordre dans (dR_i).

Voici encore quelques formules qui nous serviront plus loin. Soient [en supprimant l'indice (i)], α_0, ν_0, σ_0, ... les ensembles de termes à longue période qui figurent dans α, ν, σ, ..., y compris pour α_0 et ν_0 les parties constantes de α et ν, et pour σ_0 les deux termes $nt+\varepsilon$. Substituons dans R, à la place des différents α, σ, ... qui y entrent, les α_0, σ_0, ... correspondants, et soit R_0 la fonction ainsi obtenue. Appelons, d'autre part, α_1, ν_1, σ_1, ... les parties du premier ordre des différences $\alpha-\alpha_0$, $\nu-\nu_0$, $\sigma-\sigma_0$, ... (différences qui ne renferment que des termes périodiques et non à longue période), nous aurons, d'après les équations (B), à des termes près du second ordre,

$$\alpha_1 = \int dt \left[\left[\frac{2}{\nu_0\alpha_0}\frac{\partial R_0}{\partial\sigma_0}\right]\right],$$

$$\begin{aligned}\sigma_1 = \int \nu_1\,dt + \int dt \Bigg[\Bigg[&-\frac{2}{\nu_0\alpha_0}\frac{\partial R_0}{\partial\alpha_0} + \frac{\sqrt{1-e_0^2}}{\nu_0\alpha_0^2(1+\sqrt{1-e_0^2})}\left(h_0\frac{\partial R_0}{\partial h_0} + l_0\frac{\partial R_0}{\partial l_0}\right) \\ &+ \frac{\tan\frac{i_0}{2}\cot i_0}{\nu_0\alpha_0^2\sqrt{1-e_0^2}}\left(p_0\frac{\partial R_0}{\partial p_0} + q_0\frac{\partial R_0}{\partial q_0}\right)\Bigg]\Bigg],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}h_1 = \int dt \Bigg[\Bigg[&\frac{\sqrt{1-e_0^2}}{\nu_0\alpha_0^2}\frac{\partial R_0}{\partial l_0} - \frac{h_0\sqrt{1-e_0^2}}{\nu_0\alpha_0^2(1+\sqrt{1-e_0^2})}\frac{\partial R_0}{\partial\sigma_0} \\ &+ \frac{l_0\tan\frac{i_0}{2}\cot i_0}{\nu_0\alpha_0^2\sqrt{1-e_0^2}}\left(p_0\frac{\partial R_0}{\partial p_0} + q_0\frac{\partial R_0}{\partial q_0}\right)\Bigg]\Bigg],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}l_1 = \int dt \Bigg[\Bigg[&-\frac{\sqrt{1-e_0^2}}{\nu_0\alpha_0^2}\frac{\partial R_0}{\partial h_0} - \frac{l_0\sqrt{1-e_0^2}}{\nu_0\alpha_0^2(1+\sqrt{1-e_0^2})}\frac{\partial R_0}{\partial\sigma_0} \\ &- \frac{h_0\tan\frac{i_0}{2}\cot i_0}{\nu_0\alpha_0^2\sqrt{1-e_0^2}}\left(p_0\frac{\partial R_0}{\partial p_0} + q_0\frac{\partial R_0}{\partial q_0}\right)\Bigg]\Bigg],\end{aligned}$$

$$p_1 = \int dt \Bigg[\Bigg[\frac{\cos i_0}{\nu_0\alpha_0^2\sqrt{1-e_0^2}}\frac{\partial R_0}{\partial q_0} - \frac{p_0\tan\frac{i_0}{2}\cot i_0}{\nu_0\alpha_0^2\sqrt{1-e_0^2}}\left(\frac{\partial R_0}{\partial\sigma_0} + l_0\frac{\partial R_0}{\partial h_0} - h_0\frac{\partial R_0}{\partial l_0}\right)\Bigg]\Bigg],$$

$$q_1 = \int dt \Bigg[\Bigg[-\frac{\cos i_0}{\nu_0\alpha_0^2\sqrt{1-e_0^2}}\frac{\partial R_0}{\partial p_0} - \frac{q_0\tan\frac{i_0}{2}\cot i_0}{\nu_0\alpha_0^2\sqrt{1-e_0^2}}\left(\frac{\partial R_0}{\partial\sigma_0} + l_0\frac{\partial R_0}{\partial h_0} - h_0\frac{\partial R_0}{\partial h_0}\right)\Bigg]\Bigg];$$

les doubles crochets indiquant que les quantités qui y sont renfermées doivent être réduites à leurs termes périodiques, et non à longue période.

D'ailleurs, au premier ordre près, $\alpha_0 = a$, $\nu_0 = n$; par suite, à des termes près du second ordre

$$\nu_1 = -\frac{3}{2}\frac{n}{a}\alpha_1,$$

et comme, à la même approximation,

$$\alpha_1 = \frac{2}{an}\int dt \left[\left[\frac{\partial R_0}{\partial \sigma_0}\right]\right],$$

on voit que l'on peut écrire le premier terme de σ_1 sous la forme suivante

$$-\frac{3}{a^2}\int\int dt^2 \left[\left[\frac{\partial R_0}{\partial \sigma_0}\right]\right].$$

6. Le théorème de l'invariabilité des grands axes subsiste, lorsque l'on porte l'approximation jusqu'à la seconde puissance des masses. Nous allons démontrer le théorème qui lui correspond dans notre théorie, c'est-à-dire que nous allons faire voir que α_i ne contient pas de termes à longue période d'ordre un. Nous montrerons, à cet effet, que la fonction $\frac{2}{\nu_i \alpha_i}\frac{\partial R_i}{\partial \sigma_i}$ ne contient pas de termes à longue période d'ordre deux. La fonction $(dR_i) = \nu_i \frac{\partial R_i}{\partial \sigma_i} dt$ jouit d'ailleurs de la même propriété; les deux démonstrations sont tout à fait analogues; nous nous contenterons de donner celle relative à cette dernière fonction $\nu_i \frac{\partial R_i}{\partial \sigma_i}$. Elle sera calquée sur la démonstration ordinaire du théorème de Poisson (Tisserand, *Mécanique céleste*, t. I).

Remarquons d'abord que tout ce que nous avons dit jusqu'ici s'applique aussi bien (quelle que soit d'ailleurs la méthode employée) au cas où l'on adopterait le système de coordonnées suivant :

$$\begin{array}{llll}
x_1 = \mathbf{x}_1; & x_2 = \mathbf{x}_2 + \frac{M_1}{\mu_1}\mathbf{x}_1; & x_3 = \mathbf{x}_3 + \frac{M_2}{\mu_2}\mathbf{x}_2 + \frac{M_1}{\mu_1}\mathbf{x}_1; & \ldots; \\
y_1 = \mathbf{y}_1; & y_2 = \mathbf{y}_2 + \frac{M_1}{\mu_1}\mathbf{y}_1; & y_3 = \mathbf{y}_3 + \frac{M_2}{\mu_2}\mathbf{y}_2 + \frac{M_1}{\mu_1}\mathbf{y}_1; & \ldots; \\
z_1 = \mathbf{z}_1; & z_2 = \mathbf{z}_2 + \frac{M_1}{\mu_1}\mathbf{z}_1; & z_3 = \mathbf{z}_3 + \frac{M_2}{\mu_2}\mathbf{z}_2 + \frac{M_1}{\mu_1}\mathbf{z}_1; & \ldots;
\end{array}$$

avec $\mu_i = M_0 + M_1 + \ldots + M_i$.

Si, en effet, $\mathbf{r}_i^2 = \mathbf{x}_i^2 + \mathbf{y}_i^2 + \mathbf{z}_i^2$, les équations qui déterminent $\mathbf{x}_i$, $\mathbf{y}_i$, $\mathbf{z}_i$

seront

$$\frac{d^2\mathbf{x}_i}{dt^2} + \mathbf{f}(\mathrm{M}_0 + \mathrm{M}_i)\,\frac{\mathbf{x}_i}{\mathbf{r}_i^3} = \frac{\mu_i}{\mathrm{M}_i\mu_{i-1}}\,\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathbf{x}_i},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

V étant une même fonction perturbatrice facile à former, quel que soit l'indice (i). Les arguments N, G, H restent les mêmes que ceux définis précédemment; les coordonnées $\mathbf{r}_i$, $\mathbf{v}_i$, $\mathbf{s}_i$ des points $(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i)$ s'expriment par des formules analogues, dont les coefficients sont soumis, quant à la forme, aux mêmes lois. Ceci résulte des expressions que l'on obtient pour les nouvelles coordonnées en fonction des anciennes, comme aussi de la forme de V.

D'autre part, si l'on choisit une planète donnée pour le point $(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{z}_1)$, les éléments des deux mouvements seront les mêmes dans les deux cas, ainsi que les composantes des forces perturbatrices. Donc, tout théorème démontré avec l'emploi du nouveau système, pour un point quelconque $(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i)$, et qui ne se rapportera qu'aux coordonnées ou éléments du mouvement de ce point, ou encore aux dérivées partielles de V par rapport aux coordonnées ou éléments de ce point, pourra être transporté tel quel dans l'ancien système à une planète quelconque, en introduisant les coordonnées ou éléments de cette planète, ou les dérivées partielles de la fonction perturbatrice R correspondant à cette planète par rapport aux coordonnées ou éléments de cette planète, à la place des quantités analogues qui figuraient dans l'énoncé du théorème obtenu tout d'abord.

En conséquence, et pour ne pas multiplier les notations, revenant au premier système, il nous suffit de démontrer que la fonction $\nu_i\,\dfrac{\partial \mathrm{R}_i}{\partial \sigma_i}$ ne contient pas de termes à longue période du second ordre, en supposant toutefois que la fonction perturbatrice R_i reste la même pour toutes les planètes. Nous supprimerons alors l'indice (i), et nous remplacerons les indices (j), ..., correspondant aux autres planètes, par un, deux, ..., accents. Nous reportant alors aux formules établies plus haut, nous voyons que, à des termes près du troisième ordre, on a

$$\begin{aligned}\nu\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial \sigma} = \nu_0\frac{\partial \mathrm{R}_0}{\partial \sigma_0} + \nu_1\frac{\partial \mathrm{R}_0}{\partial \sigma_0} + \nu_0\biggl(&\frac{\partial^2 \mathrm{R}_0}{\partial \sigma_0^2}\sigma_1 + \frac{\partial^2 \mathrm{R}_0}{\partial \sigma_0\,\partial \alpha_0}\alpha_1 + \frac{\partial^2 \mathrm{R}_0}{\partial \sigma_0\,\partial h_0}h_1 + \frac{\partial^2 \mathrm{R}_0}{\partial \sigma_0\,\partial l_0}l_1 + \frac{\partial^2 \mathrm{R}_0}{\partial \sigma_0\,\partial p_0}p_1 + \frac{\partial^2 \mathrm{R}_0}{\partial \sigma_0\,\partial q_0}q_1\\ &+ \frac{\partial^2 \mathrm{R}_0}{\partial \sigma_0\,\partial \sigma'_0}\sigma'_1 + \frac{\partial^2 \mathrm{R}_0}{\partial \sigma_0\,\partial \alpha'_0}\alpha'_1 + \dots\dots\dots\dots\\ &+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\biggr).\end{aligned}$$

Le premier terme $\nu_0 \frac{\partial R_0}{\partial \sigma_0}$ ne contient aucun terme à longue période, nous l'avons déjà vu.

$\nu_1 \frac{\partial R_0}{\partial \sigma_0}$ est, à un facteur près,

$$\frac{\partial R_0}{\partial \sigma_0} \int dt \left[\left[\frac{\partial R_0}{\partial \sigma_0}\right]\right].$$

Devant la parenthèse, on peut faire (toujours en négligeant le troisième ordre) $\nu_0 = n$, et à des facteurs près les termes peuvent être écrits de la façon suivante. Les termes de la première colonne fournissent d'abord les termes suivants :

$$\frac{\partial^2 R_0}{\partial \sigma_0^2} \int\int dt^2 \left[\left[\frac{\partial R_0}{\partial \sigma_0}\right]\right], \quad \frac{\partial^2 R_0}{\partial \sigma_0 \partial \sigma'_0} \int\int dt^2 \left[\left[\frac{\partial R_0}{\partial \sigma'_0}\right]\right], \quad \ldots.$$

Tous les termes qui restent forment ensuite, ainsi que le montre la forme des équations (B), des couples tels que celui-ci :

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_0}\left(\frac{\partial R_0}{\partial b_0}\right) \int \left[\left[P_0 \frac{\partial R_0}{\partial c_0}\right]\right] dt - \frac{\partial}{\partial \sigma_0}\left(\frac{\partial R_0}{\partial c_0}\right) \int \left[\left[P_0 \frac{\partial R_0}{\partial b_0}\right]\right] dt,$$

b_0, c_0 étant deux quelconques des quantités α_0, σ_0, ..., ou bien deux des quantités α'_0, σ'_0, ... et P_0 étant une fonction de α_0, h_0, ..., α'_0, h'_0, ..., et ne renfermant, par suite, que des termes à longue période, ce qui montre que l'on peut écrire, au lieu de l'expression précédente, et à la même approximation,

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_0} \left[\left[\frac{\partial R_0}{\partial b_0}\right]\right] \int P_0 \left[\left[\frac{\partial R_0}{\partial c_0}\right]\right] dt - \frac{\partial}{\partial \sigma_0} \left[\left[\frac{\partial R_0}{\partial c_0}\right]\right] \int P_0 \left[\left[\frac{\partial R_0}{\partial b_0}\right]\right] dt.$$

Enfin remarquons que, F_0 étant une fonction des diverses quantités α_0, σ_0, ..., α'_0, σ'_0, ..., si cette fonction est mise sous la forme $\sum F^{(p)} {\sin \atop \cos} V^{(p)}$, pour obtenir $\frac{\partial F_0}{\partial \sigma_0}$, il suffira de prendre la dérivée de $\sum F^{(p)} {\sin \atop \cos} V^{(p)}$ par rapport à N; puisque, à part N, N', ... qui sont les premiers termes de σ_0, σ'_0, ..., les quantités α_0, σ_0, ..., α'_0, σ'_0, ... ne contiennent que des termes à longue période, indépendants par conséquent des arguments N.

Cela étant, examinons de plus près les différents termes que nous avons mis de côté, et montrons qu'au degré d'approximation fixé ils ne contiennent aucun terme à longue période.

1° $\frac{\partial R_0}{\partial \sigma_0} \int dt \left[\left[\frac{\partial R_0}{\partial \sigma_0}\right]\right]$ ou, puisque $\frac{\partial R_0}{\partial \sigma_0}$ ne contient pas de termes à longue période, $\frac{\partial R_0}{\partial \sigma_0} \int \frac{\partial R_0}{\partial \sigma_0} dt$.

Soit $\frac{\partial R_0}{\partial \sigma_0} = \sum S^{(p)} \sin V^{(p)}$. Le terme considéré devient

$$-\sum \frac{1}{k_{p'}} S^{(p')} S^{(p-p')} \sin V^{(p)}.$$

Si k_p est d'ordre un, $k_{p'}$ étant nécessairement d'ordre zéro, les indices (p') et $(p-p')$ sont nécessairement distincts. Alors, au terme

$$-\frac{1}{k_{p'}} S^{(p')} S^{(p-p')} \sin V^{(p)}$$

on peut accoupler le terme $-\frac{1}{k_{p-p'}} S^{(p')} S^{(p-p')} \sin V^{(p)}$. Leur somme contient le facteur $\frac{1}{k_{p'}} + \frac{1}{k_{p-p'}} = \frac{k_p}{k_{p'} k_{p-p'}}$: elle est donc d'ordre trois, puisque k_p et les coefficients S sont du premier ordre. Le terme considéré ne peut donc contenir de termes à longue période du second ordre.

2° $\frac{\partial^2 R_0}{\partial \sigma_0^2} \int\int dt^2 \left[\left[\frac{\partial R_0}{\partial \sigma_0}\right]\right]$ ou $\frac{\partial^2 R_0}{\partial \sigma_0^2} \int\int dt^2 \frac{\partial R_0}{\partial \sigma_0}$, comme plus haut.

Appelons q le coefficient de N dans $V^{(p)}$. Le terme considéré devient, à un facteur près,

$$\sum \frac{q'}{k_{p-p'}^2} S^{(p')} S^{(p-p')} \sin V^{(p)}.$$

Si k_p est d'ordre un, (p') et $(p-p')$ sont distincts, et q est nul; on peut alors accoupler les termes comme plus haut : $\left(\frac{q'}{k_{p-p'}^2} + \frac{-q'}{k_{p'}^2}\right) S^{(p')} S^{(p-p')} \sin V^{(p)}$ sera un de ces couples; il contient encore en facteur k_p, d'où la même conclusion que plus haut.

Une démonstration identique s'applique aux termes

$$\frac{\partial^2 R_0}{\partial \sigma_0 \, \partial \sigma'_0} \int\int dt^2 \left[\left[\frac{\partial R_0}{\partial \sigma'_0}\right]\right].$$

3° Arrivons enfin aux groupes dont nous avons donné le type plus haut. Soient, par exemple,

$$\left[\left[\frac{\partial R_0}{\partial b_0}\right]\right] = \sum B^{(p)} \cos V^{(p)}, \quad \left[\left[\frac{\partial R_0}{\partial c_0}\right]\right] = \sum C^{(p)} \sin V^{(p)}, \quad P_0 = \sum P^{(p)} \cos V^{(p)}.$$

Nous pourrons écrire, à un facteur numérique près, l'expression considérée sous la forme

$$\sum P^{(p'')} C^{(p'-p'')} B^{(p-p')} \left(\frac{q-q'}{k_{p'}} - \frac{q'-q''}{k_{p-p'+p''}}\right) \sin V^{(p)}.$$

Si nous avons affaire à un terme à longue période, k_p est d'ordre un; q est nul; en outre, q'' est toujours nul, et le terme écrit a en facteur $k_{p'} + k_{p-p'+p''} = k_p + k_{p''}$. Or $k_{p''}$ est aussi d'ordre un; donc le terme devient du troisième ordre comme plus haut.

Les théorèmes annoncés sont ainsi complètement démontrés.

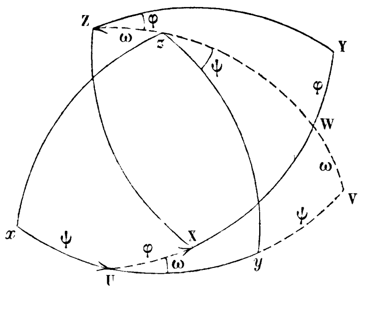
7. Les problèmes qui nous restent à traiter sont l'étude du mouvement des petites planètes, l'étude du système de Jupiter et l'étude du système de la Terre.

Du premier, nous n'avons que quelques mots à dire. On supposera nulles les masses des petites planètes, et l'on cherchera leur mouvement sous l'action du Soleil et des centres (M_i). Ce sera donc un problème en tout semblable à celui que nous venons de traiter, mais plus simple : tous les résultats sont intuitifs après les développements que nous venons de donner.

Avant d'aborder les deux autres questions, il convient de parler d'une façon générale du mouvement d'un corps autour de son centre de gravité.

Soient G le centre de gravité d'un corps solide de masse m, GX, GY, GZ ses axes d'inertie principaux; appelons A, B, C les moments d'inertie

Fig. 1.



correspondants, et nous supposerons $A \leqq B \leqq C$. Soient φ, ψ, ω les angles d'Euler définissant la position de (GXYZ) par rapport aux axes fixes, et comptés à la façon ordinaire, que précise la figure sphérique ci-dessus. Nous emploierons les variables suivantes :

$$u = \varphi + \psi,$$
$$b = \sin\omega \sin\psi, \qquad c = \sin\omega \cos\psi,$$

de sorte que nous aurons

$$
\begin{aligned}
\cos(\widehat{x\mathbf{X}}) &= \cos\varphi\cos\psi - \cos\omega\sin\varphi\sin\psi = \cos u + \frac{b}{1+\cos\omega}(c\sin u - b\cos u),\\
\cos(\widehat{y\mathbf{X}}) &= \cos\varphi\sin\psi + \cos\omega\sin\varphi\cos\psi = \sin u - \frac{c}{1+\cos\omega}(c\sin u - b\cos u),\\
\cos(\widehat{z\mathbf{X}}) &= \sin\omega\sin\varphi = c\sin u - b\cos u,\\
\cos(\widehat{x\mathbf{Y}}) &= -\sin\varphi\cos\psi - \cos\omega\cos\varphi\sin\psi = -\sin u + \frac{b}{1+\cos\omega}(c\cos u + b\sin u),\\
\cos(\widehat{y\mathbf{Y}}) &= -\sin\varphi\sin\psi + \cos\omega\cos\varphi\cos\psi = \cos u - \frac{c}{1+\cos\omega}(c\cos u + b\sin u),\\
\cos(\widehat{z\mathbf{Y}}) &= \sin\omega\cos\varphi = c\cos u + b\sin u,\\
\cos(\widehat{x\mathbf{Z}}) &= \sin\omega\sin\psi = b,\\
\cos(\widehat{y\mathbf{Z}}) &= -\sin\omega\cos\psi = -c,\\
\cos(\widehat{z\mathbf{Z}}) &= \cos\omega = \sqrt{1-b^2-c^2}.
\end{aligned}
$$

Si alors on fait

$$
\begin{aligned}
\mathbf{p} &= \sin\omega\sin\varphi\frac{d\psi}{dt} + \cos\varphi\frac{d\omega}{dt},\\
\mathbf{q} &= \sin\omega\cos\varphi\frac{d\psi}{dt} - \sin\varphi\frac{d\omega}{dt},\\
\mathbf{r} &= \cos\omega\frac{d\psi}{dt} + \frac{d\varphi}{dt},
\end{aligned}
$$

la force vive du corps sera

$$2\mathrm{T} = \mathrm{A}\mathbf{p}^2 + \mathrm{B}\mathbf{q}^2 + \mathrm{C}\mathbf{r}^2 = \frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}(\mathbf{p}^2+\mathbf{q}^2) + \frac{\mathrm{B}-\mathrm{A}}{2}(\mathbf{q}^2-\mathbf{p}^2) + \mathrm{C}\mathbf{r}^2,$$

et l'on a

$$\mathbf{p}^2+\mathbf{q}^2 = \sin^2\omega\frac{d\psi^2}{dt^2} + \frac{d\omega^2}{dt^2} = \frac{\dfrac{db^2}{dt^2} + \dfrac{dc^2}{dt^2} - \left(b\dfrac{dc}{dt} - c\dfrac{db}{dt}\right)^2}{1-b^2-c^2},$$

$$\mathbf{q}^2-\mathbf{p}^2 = \left(\sin^2\omega\frac{d\psi^2}{dt^2} - \frac{d\omega^2}{dt^2}\right)\cos 2\varphi - 2\sin\omega\frac{d\omega}{dt}\frac{d\psi}{dt}\sin 2\varphi = \mathrm{Q}\cos 2u - \mathrm{P}\sin 2u,$$

$$\mathbf{r} = \cos\omega\frac{d\psi}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} = \frac{du}{dt} + \frac{b\dfrac{dc}{dt} - c\dfrac{db}{dt}}{1+\sqrt{1-b^2-c^2}},$$

avec

$$Q = \frac{db^2}{dt^2} - \frac{dc^2}{dt^2} + 2\frac{\left(b\frac{db}{dt} - c\frac{dc}{dt}\right)\left(b\frac{db}{dt} + c\frac{dc}{dt}\right)}{\sqrt{1-b^2-c^2}\left(1+\sqrt{1-b^2-c^2}\right)} + \frac{(b^2-c^2)\left(b\frac{db}{dt} + c\frac{dc}{dt}\right)^2}{(1-b^2-c^2)\left(1+\sqrt{1-b^2-c^2}\right)^2},$$

$$P = 2\frac{db}{dt}\frac{dc}{dt} + 2\frac{\left(b\frac{dc}{dt} + c\frac{db}{dt}\right)\left(b\frac{db}{dt} + c\frac{dc}{dt}\right)}{\sqrt{1-b^2-c^2}\left(1+\sqrt{1-b^2-c^2}\right)} + \frac{2bc\left(b\frac{db}{dt} + c\frac{dc}{dt}\right)^2}{(1-b^2-c^2)\left(1+\sqrt{1-b^2-c^2}\right)^2}.$$

Soit maintenant (m') un autre corps, pour lequel les quantités correspondantes seront désignées par les mêmes lettres accentuées. Appelons δ la distance GG′, et soient X, Y, Z les coordonnées de G′ par rapport aux axes GX, GY, GZ; de même, X′, Y′, Z′ les coordonnées de G par rapport aux axes G′X′, G′Y′, G′Z′. Le potentiel d'attraction entre ces deux corps sera

$$\begin{aligned} V = \mathbf{f}\Big\{ & \frac{mm'}{\delta} + \frac{m'}{4\delta^3}(2C - A - B) - \frac{3m'}{2\delta^5}\left[\left(C - \frac{A+B}{2}\right)Z^2 + \frac{B-A}{2}(Y^2 - X^2)\right] \\ & + \frac{m}{4\delta^3}(2C' - A' - B') - \frac{3m}{2\delta^5}\left[\left(C' - \frac{A'+B'}{2}\right)Z'^2 + \frac{B'-A'}{2}(Y'^2 - X'^2)\right] \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Big\}. \end{aligned}$$

Les termes écrits sont suffisants : les parallaxes des corps l'un par rapport à l'autre sont, en effet, pratiquement petites, et elles ne figurent d'ailleurs dans V qu'à des puissances paires, si les corps sont constitués symétriquement autour de leurs centres de gravité, et l'on peut admettre qu'ils sont près de l'être.

En outre, un quelconque des corps que nous considérerons est assimilable à un ellipsoïde admettant pour axes les axes d'inertie relatifs à son centre de gravité, et composé de couches ellipsoïdales, coaxiales, homogènes, les excentricités des couches allant en croissant du centre à la périphérie, et restant d'ailleurs fort petites; il est alors facile de voir que l'erreur commise sur V en se bornant aux termes écrits est de l'ordre du carré des excentricités; la vérification de ce fait n'offre aucune difficulté.

Les équations du mouvement de (m) autour de son centre de gravité, en tenant compte de la forme des deux corps (m) et (m'), sont alors

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial\left(\frac{du}{dt}\right)}\right] - \frac{\partial T}{\partial u} = \frac{\partial V}{\partial u} = -\frac{3\mathbf{f}m'}{2\delta^5}\left[\left(C - \frac{A+B}{2}\right)\frac{\partial(Z^2)}{\partial u} + \frac{B-A}{2}\frac{\partial}{\partial u}(Y^2 - X^2)\right],$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial\left(\frac{db}{dt}\right)}\right]-\frac{\partial T}{\partial b}=\frac{\partial V}{\partial b}=-\frac{3fm'}{2\delta^5}\left[\left(C-\frac{A+B}{2}\right)\frac{\partial(Z^2)}{\partial b}+\frac{B-A}{2}\frac{\partial}{\partial b}(Y^2-X^2)\right],$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial\left(\frac{dc}{dt}\right)}\right]-\frac{\partial T}{\partial c}=\frac{\partial V}{\partial c}=-\frac{3fm'}{2\delta^5}\left[\left(C-\frac{A+B}{2}\right)\frac{\partial(Z^2)}{\partial c}+\frac{B-A}{2}\frac{\partial}{\partial c}(Y^2-X^2)\right].$$

Supposons que les coordonnées de G′ par rapport à des axes parallèles aux axes fixes et passant par G soient

$$x=\delta\cos l\cos\theta,$$
$$y=\delta\sin l\cos\theta,$$
$$z=\delta\sin\theta,$$

on aura

$$Z=\delta\left(b\cos l\cos\theta-c\sin l\cos\theta+\sin\theta\sqrt{1-b^2-c^2}\right),$$
$$X=\delta\left[\cos\theta\cos(l-u)+(c\sin u-b\cos u)\left(\sin\theta+\frac{b\cos l-c\sin l}{1+\sqrt{1-b^2-c^2}}\cos\theta\right)\right],$$
$$Y=\delta\left[\cos\theta\sin(l-u)+(c\cos u+b\sin u)\left(\sin\theta+\frac{b\cos l-c\sin l}{1+\sqrt{1-b^2-c^2}}\cos\theta\right)\right]$$

d'où, en négligeant les termes du troisième ordre en b ou c,

$$\begin{aligned}Y^2-X^2=\delta^2\Big\{&-\cos^2\theta\left(1-\frac{b^2}{2}-\frac{c^2}{2}\right)\cos2(l-u)\\&+2\sin\theta\cos\theta[b\cos(l-2u)+c\sin(l-2u)]\\&+\frac{1-3\sin^2\theta}{2}[(b^2-c^2)\cos2u-2bc\sin2u]\Big\}\end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned}Z^2=\delta^2\Big\{&\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta(b\cos l-c\sin l)\\&+\frac{1-3\sin^2\theta}{2}(b^2+c^2)+\frac{\cos^2\theta}{2}[(b^2-c^2)\cos2l-2bc\sin2l]\Big\}.\end{aligned}$$

Les corps célestes tournent sur eux-mêmes avec une vitesse sensiblement constante; nous poserons $u=J+u_1$, où J sera un argument de la forme $jt+u_0$, j et u_0 étant des constantes. Si alors on développe les équations précédentes suivant les puissances des inconnues u_1, b, c et de leurs dérivées, et qu'on néglige les termes du deuxième ordre par rapport à ces quantités, elles prendront la forme

$$
(\mathrm{C})\quad\left\{
\begin{aligned}
&\mathrm{C}\frac{d^2u_1}{dt^2} = -\frac{3\mathbf{f}m'}{2\delta^3}\,\frac{\mathrm{B}-\mathrm{A}}{2}\Big\{-2\cos^2\theta\sin 2(l-u)\\
&\qquad\qquad\qquad + 4\sin\theta\cos\theta[b\sin(l-2u)-c\cos(l-2u)]\Big\},\\
&\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}\,\frac{d^2b}{dt^2} - \mathrm{C}j\frac{dc}{dt} + \frac{\mathrm{B}-\mathrm{A}}{2}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{db}{dt}\cos 2\mathrm{J} - \frac{dc}{dt}\sin 2\mathrm{J}\right)\\
&\quad = -\frac{3\mathbf{f}m'}{2\delta^3}\Big\{\left(\mathrm{C}-\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}\right)[2\sin\theta\cos\theta\cos l\\
&\qquad\qquad + b(1-3\sin^2\theta) + \cos^2\theta(b\cos 2l - c\sin 2l)]\\
&\qquad + \frac{\mathrm{B}-\mathrm{A}}{2}[2\sin\theta\cos\theta\cos(l-2u)\\
&\qquad\qquad + b\cos^2\theta\cos 2(l-u) + (1-3\sin^2\theta)(b\cos 2u - c\sin 2u)]\Big\},\\
&\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}\,\frac{d^2c}{dt^2} + \mathrm{C}j\frac{db}{dt} - \frac{\mathrm{B}-\mathrm{A}}{2}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{db}{dt}\sin 2\mathrm{J} + \frac{dc}{dt}\cos 2\mathrm{J}\right)\\
&\quad = -\frac{3\mathbf{f}m'}{2\delta^3}\Big\{\left(\mathrm{C}-\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{2}\right)[-2\sin\theta\cos\theta\sin l\\
&\qquad\qquad + c(1-3\sin^2\theta) - \cos^2\theta(b\sin 2l + c\cos 2l)]\\
&\qquad + \frac{\mathrm{B}-\mathrm{A}}{2}[2\sin\theta\cos\theta\sin(l-2u)\\
&\qquad\qquad + c\cos^2\theta\cos 2(l-u) - (1-3\sin^2\theta)(b\sin 2u + c\cos 2u)]\Big\},
\end{aligned}
\right.
$$

où il faut encore remplacer u par $\mathrm{J}+u_1$, dans les seconds membres.

Ces équations sont les mieux appropriées au problème qui nous occupe, puisqu'elles supposent l'existence d'un seul fait incontestable : la rotation des corps célestes sur eux-mêmes. Dans certains cas, elles pourront être remplacées cependant par un autre système plus avantageux en pratique. Si, en effet, par la considération même des équations (C) on peut assigner aux inconnues φ, ψ, ω une forme déterminée, savoir :

$$
\begin{aligned}
\psi &= \mathrm{F} + \psi_1,\\
\varphi &= \mathrm{J} - \mathrm{F} + \varphi_1,\\
\omega &= \omega_0 + \omega_1
\end{aligned}
$$

avec

$$\mathrm{F} = ft + \psi_0,$$

f, ψ_0, ω_0 désignant des constantes, et ψ_1, φ_1, ω_1 des séries purement trigonométriques, il y aura avantage, lorsque ω sera assez considérable, à déterminer directement les inconnues ψ, φ, ω, les équations convenant à ce cas, et que nous allons donner maintenant, ne demandant pas de développements en série suivant les puissances de ω.

Ces équations s'obtiennent immédiatement par la méthode de Lagrange en prenant pour variables ψ, φ, ω. On peut les écrire ainsi

$$\begin{aligned}&C\frac{d}{dt}\left(\frac{d\varphi}{dt}+\cos\omega\frac{d\psi}{dt}\right)\\&\quad+\frac{B-A}{2}\left[\sin2\varphi\left(\sin^2\omega\frac{d\psi^2}{dt^2}-\frac{d\omega^2}{dt^2}\right)+2\sin\omega\frac{d\psi}{dt}\frac{d\omega}{dt}\cos2\varphi\right]=\frac{\partial V}{\partial\varphi},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\frac{A+B}{2}\left(\sin\omega\frac{d^2\psi}{dt^2}+2\cos\omega\frac{d\omega}{dt}\frac{d\psi}{dt}\right)-C\frac{d\omega}{dt}\left(\frac{d\varphi}{dt}+\cos\omega\frac{d\psi}{dt}\right)\\&\quad+\frac{B-A}{2}\left[\frac{d}{dt}\left(\sin\omega\cos2\varphi\frac{d\psi}{dt}-\sin2\varphi\frac{d\omega}{dt}\right)\right.\\&\qquad\left.-\cos\omega\frac{d\psi}{dt}\left(\sin\omega\sin2\varphi\frac{d\psi}{dt}+\cos2\varphi\frac{d\omega}{dt}\right)\right]=\frac{1}{\sin\omega}\left(\frac{\partial V}{\partial\psi}-\cos\omega\frac{\partial V}{\partial\varphi}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\frac{A+B}{2}\left(\frac{d^2\omega}{dt^2}-\sin\omega\cos\omega\frac{d\psi^2}{dt^2}\right)+C\sin\omega\frac{d\psi}{dt}\left(\frac{d\varphi}{dt}+\cos\omega\frac{d\psi}{dt}\right)\\&\quad-\frac{B-A}{2}\left[\frac{d}{dt}\left(\sin\omega\sin2\varphi\frac{d\psi}{dt}+\cos2\varphi\frac{d\omega}{dt}\right)\right.\\&\qquad\left.+\cos\omega\frac{d\psi}{dt}\left(\sin\omega\cos2\varphi\frac{d\psi}{dt}-\sin2\varphi\frac{d\omega}{dt}\right)\right]=\frac{\partial V}{\partial\omega}.\end{aligned}$$

Ces équations ne nous serviront que dans le cas de la Terre; on peut alors, pour simplifier les formules, faire $A=B$. Cette hypothèse est d'autant plus acceptable que, dans ce cas, $B-A$ est certainement une très petite quantité par rapport à $C-A$, et que, en outre, tous les termes où figure $B-A$ en facteur sont des termes périodiques, dont la période est voisine d'un jour ou d'une fraction de jour; dans les formules finales, ces termes acquièrent de grands diviseurs et deviennent tout à fait négligeables.

Pour calculer les seconds membres, il suffit ici de calculer Z^2; or on a

$$Z=\partial[\cos\theta\sin\omega\sin(\psi-l)+\sin\theta\cos\omega],$$

$$\begin{aligned}Z^2=\partial^2\Big[&\sin^2\theta+\frac{1-3\sin^2\theta}{2}\sin^2\omega\\&+2\sin\theta\cos\theta\sin\omega\cos\omega\sin(\psi-l)-\tfrac{1}{2}\cos^2\theta\sin^2\omega\cos2(\psi-l)\Big];\end{aligned}$$

les équations à employer pratiquement deviennent ainsi

$$
(\mathrm{C}')\quad\left\{
\begin{aligned}
&\mathbf{r} = \text{const.}, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \mathbf{r} - \cos\omega\frac{d\psi}{dt},\\
&\mathrm{A}\sin\omega\frac{d^2\psi}{dt^2} - \mathrm{C}\mathbf{r}\frac{d\omega}{dt} + 2\mathrm{A}\cos\omega\frac{d\omega}{dt}\frac{d\psi}{dt}\\
&\quad = -\frac{3\mathbf{f}m'}{2\delta^3}(\mathrm{C}-\mathrm{A})[2\sin\theta\cos\theta\cos\omega\cos(\psi - l)\\
&\qquad\qquad + \cos^2\theta\sin\omega\sin 2(\psi - l)],\\
&\mathrm{A}\frac{d^2\omega}{dt^2} + \mathrm{C}\mathbf{r}\sin\omega\frac{d\psi}{dt} - \mathrm{A}\sin\omega\cos\omega\frac{d\psi^2}{dt^2}\\
&\quad = -\frac{3\mathbf{f}m'}{2\delta^3}(\mathrm{C}-\mathrm{A})[(1 - 3\sin^2\theta)\sin\omega\cos\omega\\
&\qquad\qquad + 2\sin\theta\cos\theta(\cos^2\omega - \sin^2\omega)\sin(\psi - l)\\
&\qquad\qquad\qquad - \cos^2\theta\sin\omega\cos\omega\cos 2(\psi - l)].
\end{aligned}
\right.
$$

8. Occupons-nous maintenant de l'étude du système de Jupiter, en tenant compte de l'action du Soleil, de celle des centres (M_i), et de la forme même de Jupiter. Les satellites seront considérés comme des points, et la rapidité du mouvement de rotation de Jupiter sur lui-même nous permettra de supposer $\mathrm{A} = \mathrm{B}$, d'autant plus que les observations ne donnent pas de valeur appréciable pour cette quantité.

Nous appellerons m, $m^{(1)}$, $m^{(2)}$, $m^{(3)}$, $m^{(4)}$ les masses de Jupiter et de ses quatre satellites. Les axes de coordonnées gardant toujours des directions fixes, x, y, z seront les coordonnées du centre de gravité (m) de Jupiter par rapport au Soleil, et $x^{(i)}$, $y^{(i)}$, $z^{(i)}$ seront les coordonnées de $(m^{(i)})$ par rapport à (m). A chacun de ces corps correspondront d'ailleurs des quantités r ou $r^{(i)}$, définies comme les r_i par rapport aux (M_i).

On aura d'abord, par les propriétés du centre de gravité,

$$
x = x_5 - \sum\frac{m^{(i)}x^{(i)}}{\mathrm{M}_5},
$$
$$
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,
$$

ce qui permettra de calculer x, y, z aisément quand on connaîtra $x^{(i)}$, ...

Les équations du mouvement des satellites sont toutes pareilles à celles que nous avons données pour le mouvement des (M_i); mais la fonction perturbatrice $\mathrm{R}^{(i)}$ sera composée un peu autrement que R_i. Elle renfermera plusieurs parties; d'abord, les fonctions perturbatrices $\mathrm{R}^{(ij)}$ provenant de l'action des autres satellites, et en tout semblables aux R_{ij} considérées antérieurement; puis $R_0^{(i)}$ provenant de l'action du Soleil

$$R_0^{(i)} = \mathbf{f}M_0 \left\{ [(x + x^{(i)})^2 + \ldots]^{-\frac{1}{2}} + \frac{xx^{(i)} + yy^{(i)} + zz^{(i)}}{r^3} \right\};$$

puis $R_k^{(i)} (k \neq 5)$ provenant de l'action de (M_k)

$$R_k^{(i)} = \mathbf{f}M_k \left\{ [(x - x_k + x^{(i)})^2 + \ldots]^{-\frac{1}{2}} + \frac{(x - x_k)x^{(i)} + \ldots}{[(x - x_k)^2 + \ldots]^{\frac{3}{2}}} \right\};$$

enfin $R_5^{(i)}$, provenant de la forme de Jupiter et qui sera, en appliquant ici à Jupiter les notations du paragraphe précédent relatives au corps (m),

$$R_5^{(i)} = -\frac{3}{2} \frac{\mathbf{f}(m + m^{(i)})}{(r^{(i)})^5} \frac{C - A}{m} \left[\left(bx^{(i)} - cy^{(i)} + \sqrt{1 - b^2 - c^2} z^{(i)} \right)^2 - \frac{1}{3} (r^{(i)})^2 \right].$$

Aux équations ainsi obtenues, il faudra joindre celles du mouvement de Jupiter sur lui-même, qui deviennent ici

$$\mathbf{r} = \frac{du}{dt} + \frac{b\dfrac{dc}{dt} - c\dfrac{db}{dt}}{1 + \sqrt{1 - b^2 - c^2}} = \text{const.},$$

$$\begin{aligned} &A\frac{d^2 b}{dt^2} - C\mathbf{r}\frac{dc}{dt} + \ldots \\ &\quad = -\frac{3}{2}(C - A) \sum \frac{\mathbf{f}m^{(i)}}{(r^{(i)})^3} (\quad 2s^{(i)} \cos v^{(i)} + b + b \cos 2v^{(i)} - c \sin 2v^{(i)}) + \ldots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &A\frac{d^2 c}{dt^2} + C\mathbf{r}\frac{db}{dt} + \ldots \\ &\quad = -\frac{3}{2}(C - A) \sum \frac{\mathbf{f}m^{(i)}}{(r^{(i)})^3} (- 2s^{(i)} \sin v^{(i)} + c - b \sin 2v^{(i)} - c \cos 2v^{(i)}) + \ldots, \end{aligned}$$

en n'écrivant que les termes du premier ordre par rapport à b, c et aux $s^{(i)}$, et en supposant que l'indice (i) puisse être effacé, c'est-à-dire que le signe Σ s'applique non seulement aux satellites, mais aussi au Soleil.

Ce système d'équations sera intégré par un procédé identique à celui que nous avons exposé au nº 3. Posant $r^{(i)} = a^{(i)}(1 + \rho^{(i)})$, $v^{(i)} = N^{(i)} + \lambda^{(i)}$, on intégrera aisément sans introduire de nouvelles constantes. Soient $\rho'^{(i)}, \ldots,$ b', c' les valeurs ainsi trouvées, et, par exemple,

$$\rho'^{(i)} = \sum \rho'^{(i)}_{(\ldots, p^{(i)}, \ldots)} \cos(\ldots + p^{(i)} N^{(i)} + \ldots), \qquad \ldots.$$

Faisons maintenant

$$\rho^{(i)} = \rho''^{(i)} + \sum \rho'^{(i)}_{(\ldots, p^{(i)}, \ldots)} \cos[\ldots + p^{(i)}(\mathrm{N}^{(i)} + \lambda''^{(i)}) + \ldots], \qquad \ldots.$$

On obtiendra de nouvelles équations ne renfermant aucun terme indépendant des nouvelles inconnues, et auxquelles nous pourrons appliquer notre principe fondamental.

Il y aura toutefois une différence avec le cas du mouvement des (M_i). Les observations nous enseignent, en effet, que $\mathrm{N}^{(1)} - 3\mathrm{N}^{(2)} + 2\mathrm{N}^{(3)} - \pi$ est une quantité nulle, ou au moins qui tombe au-dessous de toute grandeur appréciable : nous introduirons donc cette hypothèse dans nos équations, en nous réservant de voir si les conséquences la justifient. Il en résulte clairement que les constantes arbitraires $\varepsilon^{(1)}$, $\varepsilon^{(2)}$, $\varepsilon^{(3)}$, qui figurent dans nos intégrales incomplètes $\rho'^{(i)}$, ..., vérifieront la relation $\varepsilon^{(1)} - 3\varepsilon^{(2)} + 2\varepsilon^{(3)} = \pi$.

Par suite, on ne pourra pas dire des nouvelles équations aux inconnues $\rho''^{(i)}$, ... qu'elles ne renferment aucun terme ne dépendant que des $\lambda''^{(i)}$, comme nous le disions au nº 3 : ces équations contiendront, au contraire, des termes ne dépendant que des $\lambda''^{(i)}$, mais qui ne dépendront toutefois que de la combinaison $\lambda''^{(1)} - 3\lambda''^{(2)} + 2\lambda''^{(3)}$. Le principe ne cesse pas d'être applicable, comme on le vérifie sans difficulté; mais on voit que, en réduisant le système à la forme linéaire à coefficients constants, il s'introduira un argument de plus que si la relation $\mathrm{N}^{(1)} - 3\mathrm{N}^{(2)} + 2\mathrm{N}^{(3)} = 0$ n'avait pas été supposée vérifiée : le nombre total de constantes arbitraires nécessaire se trouvera donc encore atteint, et la réalité du coefficient du temps dans cet argument de *libration* prouvera que l'hypothèse faite est légitime.

Nous ne nous étendrons pas davantage sur la forme des coefficients des séries trigonométriques qui représentent les inconnues, ni sur le développement des équations, ni sur les propriétés de la fonction $(d\mathrm{R}^{(i)})$ analogues à celles de $(d\mathrm{R}_i)$. Il n'y aurait qu'à suivre la voie tracée dans l'étude du mouvement des (M_i), et il vaut mieux réserver ces détails par une étude plus particulière. Disons seulement que b et les $\rho^{(i)}$ seront des séries de cosinus, tandis que c, les $\lambda^{(i)}$ et les $s^{(i)}$ seront des séries de sinus, et remarquons que b se change en c, et c en $-b$ quand on recule de $\frac{\pi}{2}$ l'origine des longitudes, de sorte que les coefficients des séries qui représentent b et c sont les mêmes, au signe près.

9. Il nous reste à dire quelques mots sur l'étude du système de la Terre,

en réservant aussi les détails pour une étude plus particulière. Nous tiendrons compte de l'action du Soleil, de celle des centres (M_i) et de la forme de la Terre et de la Lune.

m, m' désigneront les masses de la Terre et de la Lune; x, y, z seront les coordonnées du centre de gravité (m) de la Terre par rapport au Soleil, et x', y', z' seront les coordonnées du centre de gravité (m') de la Lune par rapport à (m). A chacun de ces corps correspondront, d'ailleurs, des quantités $r, r', \ldots, A, A', \ldots$ sur la définition desquelles il est inutile de revenir.

On aura d'abord

$$x = x_3 - \frac{m' x'}{M_3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Les équations du mouvement de (m') seront faciles à écrire. La fonction perturbatrice R' se composera de R'_0 provenant de l'action du Soleil

$$R'_0 = \mathbf{f} M_0 \left\{ [(x + x')^2 + \ldots]^{-\frac{1}{2}} + \frac{x x' + \ldots}{r^3} \right\};$$

puis de $R'_k (k \neq 3)$ provenant de l'action de (M_k)

$$R'_k = \mathbf{f} M_k \left\{ [(x - x_k + x')^2 + \ldots]^{-\frac{1}{2}} + \frac{(x - x_k) x' + \ldots}{[(x - x_k)^2 + \ldots]^{\frac{3}{2}}} \right\};$$

puis de R'_3 provenant de la forme de la Terre (pour laquelle on suppose $A = B$)

$$\begin{aligned} R'_3 &= -\frac{3}{2} \frac{\mathbf{f} M_3}{r'^5} \frac{C - A}{m} \left[\left(b x' - c y' + \sqrt{1 - b^2 - c^2}\, z' \right)^2 - \frac{1}{3} r'^2 \right] \\ &= -\frac{3}{2} \frac{\mathbf{f} M_3}{r'^5} \frac{C - A}{m} \left[(x' \sin\omega \sin\psi - y' \sin\omega \cos\psi + z' \cos\omega)^2 - \frac{1}{3} r'^2 \right]; \end{aligned}$$

enfin de R'' provenant de la forme de la Lune

$$R'' = -\frac{3}{2} \frac{\mathbf{f} M_3}{m' r'^5} \left[\left(C' - \frac{A' + B'}{2} \right) \left(Z'^2 - \frac{1}{3} r'^2 \right) + \frac{B' - A'}{2} (Y'^2 - X'^2) \right],$$

où X', Y', Z' sont les coordonnées de (m) par rapport aux axes principaux d'inertie de la Lune.

Les équations du mouvement de la Terre et de la Lune s'obtiennent aisément à l'aide des équations (C), en tenant compte pour la Terre de l'action du Soleil et de celle de la Lune; pour la Lune, de celle de la Terre seule (celle du Soleil est en effet beaucoup plus petite que celle de la Terre, qui ne donne elle-même directement que des inégalités extrêmement petites). D'ailleurs, les observations nous montrent que les constantes arbitraires entrant dans b et c ont des valeurs telles qu'elles permettent pour la Terre l'emploi des équations (C').

Le système d'équations ainsi formé sera intégré toujours suivant le même procédé ; remarquons seulement que dans ce cas, comme dans le précédent, il s'introduira un argument de *libration* (on s'en rend compte de la même façon) provenant de ce qu'on doit supposer dans les équations $N' = J'$, en vertu des observations.

N. B. — Page 22, ligne 26; lire : ..... reste la même pour toutes les planètes à un facteur constant près.