

X. STOUFF

**Sur de nouvelles fonctions harmoniques à trois variables  
analogues aux fonctions thêtafuchsiennes**

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 1<sup>re</sup> série*, tome 4, n° 1 (1890), p. A5-A19

[<http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_1890\\_1\\_4\\_1\\_A5\\_0>](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1890_1_4_1_A5_0)

© Université Paul Sabatier, 1890, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# ANNALES

DE LA

FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE.

---

SUR DE

## NOUVELLES FONCTIONS HARMONIQUES

A TROIS VARIABLES

ANALOGUES AUX FONCTIONS THÊTAFUCHSIENNES;

PAR M. X. STOUËFF,

Professeur au Lycée de Grenoble.

---

### I.

Dans son Mémoire sur les groupes kleinéens, M. Poincaré indique la formation de groupes de substitutions à trois variables, analogues aux groupes fuchsiens. On est naturellement conduit à chercher des fonctions satisfaisant à l'équation  $\Delta V = 0$  et subissant des transformations simples quand on y soumet les variables aux substitutions de ces groupes. Nous désignerons la conjuguée d'une quantité imaginaire par la lettre qui désigne cette quantité affectée de l'indice  $\sigma$ . Posons

$$u = x + y\sqrt{-1}, \quad \mu = au + b, \quad \lambda = cu + d,$$

$a, b, c, d$  étant quatre nombres complexes satisfaisant à l'équation

$$bc - ad = 1;$$

l'expression générale d'une substitution transformant en lui-même le plan

des  $xy$  est

$$\left( u, \frac{\lambda\mu_0 + ca_0z^2}{\mu\mu_0 + aa_0z^2}, \frac{z}{\mu\mu_0 + aa_0z^2} \right).$$

Les substitutions de cette forme dans lesquelles  $a, b, c, d$  sont des entiers complexes, c'est-à-dire des quantités dans lesquelles la partie réelle et le multiplicateur de  $i$  sont entiers, constituent un groupe important étudié par M. Poincaré et par M. Picard. Je m'occuperai d'abord de celui-ci.

Soit  $S_i$  une quelconque des substitutions de ce groupe. Posons

$$\begin{aligned} r_i &= \sqrt{\mu_i\mu_{i0} + a_i a_{i0} z^2}, \\ \varphi_{n0i} &= \frac{\mu_i^n}{r_i^{2n+1}}, \\ \varphi_{n1i} &= \frac{\mu_i^{n-1}(u_0\mu_i + a_i z^2)}{r_i^{2n+1}}, \\ \varphi_{n2i} &= \frac{\mu_i^{n-2}(u_0\mu_i - a_i z^2)^2}{r_i^{2n+1}}, \\ &\dots\dots\dots, \\ \varphi_{nki} &= \frac{\mu_i^{n-k}(u_0\mu_i + a_i z^2)^k}{r_i^{2n+1}}, \\ &\dots\dots\dots, \\ \varphi_{nni} &= \frac{(u_0\mu_i + a_i z^2)^n}{r_i^{2n+1}}. \end{aligned}$$

Ces fonctions satisfont à l'équation  $\Delta V = 0$ . Pour le démontrer, je décompose la fonction  $\varphi_{nki}$  en éléments simples. On a

$$\begin{aligned} r_i^2 &= \mu_i(a_{i0}u_0 + b_{i0}) + a_i a_{i0} z^2, \\ u_0\mu_i + a_i z^2 &= \frac{r_i^2 - b_{i0}\mu_i}{a_{i0}}, \\ \varphi_{nki} &= \frac{\mu_i^{n-k}(r_i^2 - b_{i0}\mu_i)^k}{a_{i0}^k r_i^{2n+1}} = \sum_{h=0}^{h=k} C_k^h (-1)^h \frac{b_{i0}^h}{a_{i0}^k} \frac{\mu_i^{n-k+h}}{r_i^{2n-2k+2h+1}}, \end{aligned}$$

où  $C_k^h$  désigne le nombre des combinaisons de  $k$  objets  $h$  à  $h$ . Les numérateurs des diverses fractions qui forment le second membre ne contiennent que  $x$  et  $y$  et satisfont évidemment à l'équation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

ou, ce qui revient au même, à

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0;$$

$\mu_i^{n-k+h}$  est une fonction homogène, de degré  $n - k + h$ , de  $x + \frac{b_i a_{i0} + a_i b_{i0}}{2 a_i a_{i0}}$

et de  $y + \frac{b_i a_{i0} - a_i b_{i0}}{2 i a_i a_{i0}}$ , et l'on a

$$r_i = \sqrt{a_i a_{i0} \left[ \left( x + \frac{b_i a_{i0} + a_i b_{i0}}{2 a_i a_{i0}} \right)^2 + \left( y + \frac{b_i a_{i0} - a_i b_{i0}}{2 i a_i a_{i0}} \right)^2 + z^2 \right]};$$

$\frac{\mu_i^{n-k+h}}{r_i^{2n-2k+2h+1}}$  est donc, par rapport à  $x + \frac{b_i a_{i0} + a_i b_{i0}}{2 a_i a_{i0}}$ ,  $y + \frac{b_i a_{i0} - a_i b_{i0}}{2 a_i a_{i0}}$ ,  $z$ , une fonction  $V_n$  à indice négatif.

Je dis maintenant que la série

$$\sum_i \varphi_{nki},$$

où la somme est étendue à toutes les substitutions du groupe, est convergente pour  $n \geq 4$ . En effet, on a évidemment

$$\text{mod } \mu_i < r_i, \quad \text{mod } (a_i z) < r_i;$$

par suite

$$\text{mod } (u_0 \mu_i + a_i z^2) < \text{mod } u_0 \text{ mod } \mu_i + \text{mod } a_i z^2,$$

$$\text{mod } (u_0 \mu_i + a_i z^2) < r_i (\text{mod } u_0 + \text{mod } z),$$

$$\text{mod } \varphi_{nki} < \frac{(\text{mod } u_0 + \text{mod } z)^k}{r_i^{n+1}}.$$

Or on a

$$r_i = \sqrt{\text{mod}^2(a_i u + b_i) + \text{mod}^2(a_i z)},$$

$$\text{mod}^2(a_i u + b_i) > (\text{mod } b_i - \text{mod } u \text{ mod } a_i)^2,$$

$$r_i > \sqrt{\text{mod}^2 b_i - 2 \text{mod } b_i \text{ mod } a_i \text{ mod } u + \text{mod}^2 a_i (\text{mod}^2 u + \text{mod}^2 z)};$$

en écrivant que la moyenne géométrique est plus petite que la moyenne arithmétique, on a

$$\text{mod}^2 b_i + \text{mod}^2 a_i (\text{mod}^2 u + \text{mod}^2 z) > 2 \sqrt{\text{mod}^2 u + \text{mod}^2 z} \text{ mod } b_i \text{ mod } a_i,$$

$$r_i > \lambda \sqrt{\text{mod } b_i \text{ mod } a_i},$$

$\lambda$  désignant une quantité positive indépendante de  $i$ . Il suffit donc de

prouver la convergence de la série

$$\sum \frac{1}{(\text{mod } b_i \text{ mod } a_i)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

Considérons d'abord les substitutions où  $a_i$  a la même valeur; dans la série précédente, l'ensemble des termes qui correspondent à ces substitutions peut se mettre sous la forme

$$\frac{1}{(\text{mod } a_i)^{\frac{n+1}{2}}} \sum \frac{1}{(\text{mod } b_j)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

Formons un premier groupe des termes où la partie réelle et la partie imaginaire de  $b_j$  sont moindres que 2, un second groupe de ceux où ces deux quantités ne sont pas inférieures à 2 et sont moindres que  $2^2, \dots$ ; les sommes des termes des différents groupes sont respectivement moindres que

$$\frac{1}{(\text{mod } a_i)^{\frac{2n+1}{2}}} \frac{2^2}{1^{\frac{n+1}{2}}}, \quad \frac{1}{(\text{mod } a_i)^{\frac{n+1}{2}}} \frac{(2^2)^2}{2^{\frac{n+1}{2}}}, \quad \dots$$

Nous voyons que ces derniers termes forment une progression géométrique dont la raison est  $2^{\frac{n+1}{2}}$ ; elle est convergente si

$$\frac{n+1}{2} > 2,$$

et, comme  $n$  est entier, si  $n$  est  $\geq 4$ . La somme des termes où  $a_i$  a la même valeur est, par suite, moindre que

$$\frac{\theta}{(\text{mod } a_i)^{\frac{n+1}{2}}},$$

$\theta$  ne dépendant que de  $n$ . Le même procédé montre que, pour  $n \geq 4$ ,

$$\sum \frac{\theta}{(\text{mod } a_i)^{\frac{n+1}{2}}}$$

est convergente. Nous en concluons que

$$\sum \varphi_{nhi}$$

représente une fonction de  $x, y, z$  satisfaisant à l'équation  $\Delta V = 0$ . Nous la

représenterons par

$$Z_{nk}.$$

Soit  $S_j$  une substitution quelconque du groupe, et

$$S_i S_j = S_g,$$

$S_i S_j$  est la substitution obtenue en remplaçant dans  $S_i$  les valeurs de  $x, y, z$  par les expressions que fournit la substitution  $S_j$ .

On a

$$(\mu_i)S_j = a_i \frac{\lambda_j \mu_{j0} + c_j a_{j0} z^2}{\mu_j \mu_{j0} + a_j a_{j0} z^2} + b_i = \frac{(a_i \lambda_j + b_i \mu_j) \mu_{j0} + (a_i c_j + b_i a_j) z^2 a_{j0}}{\mu_j \mu_{j0} + a_j a_{j0} z^2},$$

$$(\mu_i)S_j = \frac{\mu_g \mu_{j0} + a_g z^2 a_{j0}}{\mu_j \mu_{j0} + a_j a_{j0} z^2} = \frac{(u_0 \mu_g + a_g z^2) a_{j0} + \mu_g b_{j0}}{\mu_j \mu_{j0} + a_j a_{j0} z^2},$$

La relation

$$b_j c_j - a_j d_j = 1$$

peut s'écrire

$$\mu_j c_j - \lambda_j a_j = 1.$$

On voit donc que la substitution  $S_j$  transforme  $uu_0 + z^2$  en

$$\frac{(\lambda_j \mu_{j0} + c_j a_{j0} z^2)(\lambda_{j0} \mu_j + c_{j0} a_j z^2) + (\mu_j c_j - \lambda_j a_j)(\mu_{j0} c_{j0} - \lambda_{j0} a_{j0}) z^2}{(\mu_j \mu_{j0} + a_j a_{j0} z^2)^2}$$

ou, en réduisant et en supprimant le facteur  $\mu_j \mu_{j0} + a_j a_{j0} z^2$  commun aux deux membres,

$$\frac{\lambda_j \lambda_{j0} + c_j c_{j0} z^2}{\mu_j \mu_{j0} + a_j a_{j0} z^2},$$

mais

$$u_0 \mu_i + a_i z^2 = a_i (uu_0 + z^2) + b_i u_0.$$

Cette quantité se transforme donc en

$$\frac{a_i (\lambda_j \lambda_{j0} + c_j c_{j0} z^2) + b_i (\lambda_{j0} \mu_j + c_{j0} a_j z^2)}{\mu_j \mu_{j0} + a_j a_{j0} z^2}$$

ou

$$\frac{\lambda_{j0} \mu_g + c_{j0} a_g z^2}{\mu_j \mu_{j0} + a_j a_{j0} z^2} = \frac{c_{j0} (u_0 \mu_g + a_g z^2) + d_{j0} \mu_g}{\mu_j \mu_{j0} + a_j a_{j0} z^2}.$$

Enfin des calculs analogues montrent que  $S_j$  transforme  $r_i$  en  $\frac{r_g}{r_j}$ . Par suite,

$\varphi_{nki}$  devient

$$r_j \frac{[(u_0 \mu_g + a_g z^2) a_{j0} + \mu_g b_{j0}]^{n-k} [(u_0 \mu_g + a_g z^2) c_{j0} + \mu_g d_{j0}]^k}{r_g^{2n+1}}.$$

Posons

$$A_{jnk} = \sum_{p \leq n} C_{n-k}^p C_k^{m-p} b_{j0}^p a_{j0}^{n-k-p} d_{j0}^{m-p} c_{j0}^{k-m+p},$$

nous aurons

$$(\varphi_{nki}) S_j = r_j \sum_{m=0}^{m=n} A_{jnk} \varphi_{nm}.$$

Si l'on fait varier  $i$  de manière à obtenir pour  $S_i$  une fois et une seule chaque substitution du groupe,  $S_g$  reproduit aussi une fois et une seule chaque substitution de ce groupe, et, en ajoutant membre à membre toutes les équations en nombre infini ainsi obtenues, il vient

$$(Z_{nk}) S_j = r_j \sum_{m=0}^{m=n} A_{jnk} Z_{nm}.$$

On voit que les  $n+1$  fonctions  $Z_{nk}$  ( $k=0, 1, \dots, n$ ) deviennent, lorsqu'on y fait la substitution  $S_j$ , abstraction faite du facteur  $r_j$ , des fonctions linéaires homogènes de leurs valeurs primitives. C'est à de pareilles fonctions que M. Poincaré a donné le nom de *fonctions zêtafuchsiennes*. On sait, d'ailleurs, que ce géomètre a appelé *fonction thêtafuchsienne*, une fonction  $\Theta(z)$ , telle que

$$\Theta\left(\frac{\alpha_j z + \beta_j}{\gamma_j z + \delta_j}\right) = (\gamma_j z + \delta_j)^n \Theta(z).$$

Notre système zêtafuchsien, obtenu dans le cas de trois variables, offre une analogie complète avec le système

$$\Theta(z), \quad z \Theta(z), \quad \dots, \quad z^n \Theta(z).$$

## II.

Les groupes de substitutions à trois variables qui laissent invariables le plan des  $xy$ , transformés par une substitution convenable, laisseront invariable une sphère de rayon 1 ayant pour centre l'origine. Nous nomme-

rons cette sphère *sphère fondamentale*. Voici d'abord l'expression générale des substitutions qui ne changent pas la sphère fondamentale.

Soient  $a, b, c, d, a', b', c', d'$  huit nombres réels satisfaisant à l'équation

$$aa' + bb' + cc' + dd' = 0.$$

Soient  $x, y, z$  les trois coordonnées d'un point, et

$$\begin{aligned} X &= bx + dy + cz - a', \\ Y &= -ax + cy - dz - b', \\ Z &= dx - by - az - c', \\ U &= -cx - ay + bz - d'; \\ X' &= b'x + d'y + c'z + a, \\ Y' &= -a'x + c'y - d'z + b, \\ Z' &= d'x - b'y - a'z + c, \\ U' &= -c'x - a'y + b'z + d. \end{aligned}$$

La substitution aura pour expression

$$\begin{aligned} x &\text{ in } \frac{XY' - YX' - ZU' + UZ'}{X^2 + Y^2 + Z^2 + U^2}, \\ y &\text{ in } \frac{XU' - YZ' + ZY' - UX'}{X^2 + Y^2 + Z^2 + U^2}, \\ z &\text{ in } \frac{XZ' + YU' - ZX' - UY'}{X^2 + Y^2 + Z^2 + U^2}. \end{aligned}$$

On vérifie aisément l'identité

$$(1) \quad XX' + YY' + ZZ' + UU' = 0,$$

et l'on voit, à l'aide de cette identité, que  $x^2 + y^2 + z^2$  se transforme en

$$\frac{X'^2 + Y'^2 + Z'^2 + U'^2}{X^2 + Y^2 + Z^2 + U^2},$$

Si, dans cette fraction, on développe le numérateur et le dénominateur et si l'on suppose  $x^2 + y^2 + z^2$  égal à 1, on voit qu'elle se réduit à l'unité. Notre substitution laisse donc bien invariable la sphère de rayon qui a l'origine pour centre. Je me propose maintenant de former la substitution T produit d'une substitution donnée S par une autre substitution donnée S<sub>1</sub>.



Posons, pour abréger,

$$R_1^2 = X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2 + U_1^2,$$

$$M_1 = -aX'_1 + bY'_1 + cZ'_1 + dU'_1,$$

$$N_1 = -bX'_1 - aY'_1 - dZ'_1 + cU'_1,$$

$$P_1 = -cX'_1 + dY'_1 - aZ'_1 - bU'_1,$$

$$Q_1 = -dX'_1 - cY'_1 + bZ'_1 - aU'_1.$$

On trouve que X, Y, Z, U se transforment respectivement en

$$\frac{1}{R_1^2} (M_1 X_1 + N_1 Y_1 + P_1 Z_1 + Q_1 U_1 - a' R_1^2),$$

$$\frac{1}{R_1^2} (N_1 X_1 - M_1 Y_1 - Q_1 Z_1 + P_1 U_1 - b' R_1^2),$$

$$\frac{1}{R_1^2} (P_1 X_1 + Q_1 Y_1 - M_1 Z_1 - N_1 U_1 - c' R_1^2),$$

$$\frac{1}{R_1^2} (Q_1 X_1 - P_1 Y_1 + N_1 Z_1 - M_1 U_1 - d' R_1^2).$$

Soient

$$M = -a'X_1 + b'Y_1 + c'Z_1 + d'U_1,$$

$$N = -b'X_1 - a'Y_1 - d'Z_1 + c'U_1,$$

$$P = -c'X_1 + d'Y_1 - a'Z_1 - b'U_1,$$

$$Q = -d'X_1 - c'Y_1 + b'Z_1 - a'U_1$$

$X^2 + Y^2 + Z^2 + U^2$  devient

$$\frac{1}{R_1^2} [(M_1 + M)^2 + (N_1 + N)^2 + (P_1 + P)^2 + (Q_1 + Q)^2].$$

Posons

$$M'_1 = -a'X'_1 + b'Y'_1 + c'Z'_1 + d'U'_1,$$

$$N'_1 = -b'X'_1 - a'Y'_1 - d'Z'_1 + c'U'_1,$$

$$P'_1 = -c'X'_1 + d'Y'_1 - a'Z'_1 - b'U'_1,$$

$$Q'_1 = -d'X'_1 - c'Y'_1 + b'Z'_1 - a'U'_1.$$

$X', Y', Z'$  se transforment en

$$\begin{aligned} & \frac{1}{R_1^2} (M'_1 X_1 + N'_1 Y_1 + P'_1 Z_1 + Q'_1 U_1 + a R_1^2), \\ & \frac{1}{R_1^2} (N'_1 X_1 - M'_1 Y_1 - Q'_1 Z_1 + P'_1 U_1 + b R_1^2), \\ & \frac{1}{R_1^2} (P'_1 X_1 + Q'_1 Y_1 - M'_1 Z_1 - N'_1 U_1 + c R_1^2), \\ & \frac{1}{R_1^2} (Q'_1 X_1 - P'_1 Y_1 + N'_1 Z_1 - M'_1 U_1 + d R_1^2). \end{aligned}$$

Posons aussi

$$\begin{aligned} M' &= -a X_1 + b Y_1 + c Z_1 + d U_1, \\ N' &= -b X_1 - a Y_1 - d Z_1 + c U_1, \\ P' &= -c X_1 + d Y_1 - a Z_1 - b U_1, \\ Q' &= -d X_1 - c Y_1 + b Z_1 - a U_1, \end{aligned}$$

$X'^2 + Y'^2 + Z'^2 + U'^2$  devient

$$(M'_1 - M')^2 + (N'_1 - N')^2 + (P'_1 - P')^2 + (Q'_1 - Q')^2.$$

Enfin, en formant, à l'aide des résultats précédents, les expressions de  $x, y, z$ , on trouve que les quantités  $X, Y, Z, U; X', Y', Z', U'$  relatives à la substitution  $T$  sont respectivement

$$M_1 + M, \quad N_1 + N, \quad P_1 + P, \quad Q_1 + Q; \quad M'_1 - M', \quad N'_1 - N', \quad P'_1 - P', \quad Q'_1 - Q';$$

les huit entiers relatifs à cette même substitution s'expriment donc par les formules

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} A &= -a'a_1 + b'b_1 + c'c_1 + d'd_1 - aa'_1 + bb'_1 + cc'_1 + dd'_1, \\ B &= -b'a_1 - a'b_1 - d'c_1 + c'd_1 - ba'_1 - ab'_1 - dc'_1 + cd'_1, \\ C &= -c'a_1 + d'b_1 - a'c_1 - b'd_1 - ca'_1 + db'_1 - ac'_1 - bd'_1, \\ D &= -d'a_1 - c'b_1 + b'c_1 - a'd_1 - da'_1 - cb'_1 + bc'_1 - ad'_1, \\ A' &= aa_1 - bb_1 - cc_1 - dd_1 - a'a'_1 + b'b'_1 + c'c'_1 + d'd'_1, \\ B' &= ba_1 + ab_1 + dc_1 - cd_1 - b'a'_1 + a'b'_1 - d'c'_1 - c'd'_1, \\ C' &= ca_1 - db_1 + ac_1 + bd_1 - c'a'_1 + d'b'_1 - a'c'_1 - b'd'_1, \\ D' &= da_1 + cb_1 - bc_1 + ad_1 - d'a'_1 - c'b'_1 + b'c'_1 - a'd'_1. \end{aligned} \right.$$

Nous aurons encore besoin de la relation suivante; soit  $\delta s$  un élément

d'arc,  $\delta s'$  son transformé par une substitution  $S$ , on a

$$\delta s' = \frac{a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2 - a^2 - b^2 - c^2 - d^2}{X^2 + Y^2 + Z^2 + U^2} \delta s.$$

Nous supposons désormais, ce qui est permis,

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2 - a^2 - b^2 - c^2 - d^2 = 1.$$

Considérons un groupe discontinu de ces substitutions, et désignons par  $S_i$  une substitution quelconque du groupe. Soit

$$R_i = \sqrt{X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2 + U_i^2}.$$

La fonction  $\frac{1}{R_i}$ , et par conséquent l'une quelconque de ses dérivées partielles par rapport à  $a_i, b_i, c_i, d_i, a'_i, b'_i, c'_i, d'_i$  satisfait à l'équation  $\Delta V = 0$ . Je dis que la série

$$\sum_i \frac{\partial^n \left( \frac{1}{R_i} \right)}{\partial a_i^{\alpha} \partial b_i^{\beta} \partial c_i^{\gamma} \partial d_i^{\delta} \partial a_i^{\alpha'} \partial b_i^{\beta'} \partial c_i^{\gamma'} \partial d_i^{\delta'}}$$

est convergente pour  $n \geq 5$ .

En effet, M. Poincaré a indiqué, dans son Mémoire sur les groupes kleinéens, comment on peut partager la sphère fondamentale en polyèdres par des surfaces sphériques orthogonales à cette sphère, de sorte que chacun de ces polyèdres contienne un représentant de chaque point donné. Imaginons dans l'intérieur d'un de ces polyèdres une petite sphère n'ayant aucun point commun avec la sphère fondamentale, et dont nous désignerons le volume par  $V$ ; soit  $V_i$  le volume de la transformée de cette sphère par la substitution  $S_i$ . La somme de tous les volumes  $V_i$  est moindre que le volume de la sphère fondamentale, et par conséquent finie. La série

$$\sum_i V_i,$$

étendue à toutes les substitutions du groupe, est donc convergente. Or on a

$$V_i = \iiint \frac{dx dy dz}{R_i^3},$$

l'intégration étant étendue à tous les points de la première sphère. Dési-

gnons par  $\xi_i, \eta_i, \zeta_i$  le point que la substitution  $S_i$  transforme dans le point infini. On a

$$R_i^2 = (a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 + d_i^2)[(x_0 - \xi_i)^2 + (y_0 - \eta_i)^2 + (z_0 - \zeta_i)^2],$$

Le point  $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$  est extérieur à la sphère fondamentale. Soit  $(x_0, y_0, z_0)$  un point pris à l'intérieur de la petite sphère considérée. Il résulte de la forme précédente de  $R_i^2$  que

$$\frac{R_i^2}{R_{i0}^2} \leq \frac{\varrho'^2}{\varrho^2},$$

$\varrho$  désignant la plus petite, et  $\varrho'$  la plus grande des normales communes à la petite sphère et à la sphère fondamentale; donc

$$\iiint \frac{dx dy dz}{R_i^6} > \frac{\varrho^6}{\varrho'^6} \iiint \frac{dx dy dz}{R_{i0}^6},$$

$$V_i > \frac{\varrho}{\varrho'^6} \frac{V}{R_{i0}^6}.$$

Si donc la série

$$\sum_i V_i$$

est convergente, la série

$$\sum \frac{\varrho^6}{\varrho'^6} \frac{V}{R_{i0}^6},$$

ou, puisque  $\varrho, \varrho', V$  ne contiennent pas  $i$ , la série

$$\sum \frac{1}{R_{i0}^6},$$

est convergente. La série  $\sum \frac{1}{R_{i0}^n}$  l'est *a fortiori* pour  $n > 6$ .

On reconnaît aisément, en formant les dérivées partielles successives de  $\frac{1}{R_i}$  par rapport à  $a_i, b_i, c_i, \dots$ , qu'une dérivée d'ordre  $n$  a pour numérateur un polynôme de degré  $n$ , soit par rapport à  $x, y, z$  entrant explicitement, soit par rapport à  $X_i, Y_i, Z_i, U_i$ , et pour dénominateur  $R_i^{2n+1}$ ; cette dérivée peut donc se mettre sous la forme

$$\frac{\Sigma A_{pqrs} X_i^p Y_i^q Z_i^r U_i^s}{R_i^{2n+1}} \quad (p + q + r + s = 2n + 1),$$

$A_{pqrs}$  étant un polynôme en  $x, y, z$ , par suite indépendant de  $i$ . Or

$X_i^p Y_i^q Z_i^r U_i^s$  est évidemment moindre en valeur absolue que  $R_i^n$ . La valeur absolue de la dérivée partielle considérée est donc moindre que

$$\frac{1}{R_i^{q+1}} \sum \text{mod} A_{pqrs}.$$

Or, pour  $n + 1 \geq 6$ , c'est-à-dire pour  $n \geq 5$ , la série

$$\sum \frac{1}{R_i^{q+1}}$$

est convergente. Il en est donc de même de la série que nous avons en vue.

Nous pouvons donc poser, sous cette condition,

$$\varphi_{\alpha\beta\gamma\delta\alpha'\beta'\gamma'\delta'} = \sum_i \frac{\partial^n \left( \frac{1}{R_i} \right)}{\partial a_i^\alpha \partial b_i^\beta \partial c_i^\gamma \partial d_i^\delta \partial a_i^{\alpha'} \partial b_i^{\beta'} \partial c_i^{\gamma'} \partial d_i^{\delta'}},$$

où  $\varphi$  désigne une fonction de  $x, y, z$  satisfaisant à l'équation  $\delta\varphi = 0$ .

Or, si dans  $\frac{1}{R_i}$  on fait la substitution  $S_j$ ,  $S_j$  appartenant au groupe,  $\frac{1}{R_i}$  se transforme en  $\frac{R_j}{R_g}$ ,  $S_g$  désignant le produit  $S_i S_j$ . On pourra donc poser

$$\frac{1}{R_i} = \frac{R_j}{R_g},$$

en sous-entendant que dans le premier membre  $R_i$  est exprimé en fonction des nouvelles coordonnées, et dans le second  $R_j$  et  $R_g$  en fonction des anciennes. Prenons les dérivées partielles des deux membres, en observant que les coefficients de la substitution  $S_g$  sont des coefficients linéaires, homogènes des coefficients de la substitution  $S_i$  données par les formules (2). On aura

$$\begin{aligned} & \frac{1}{R_j} \frac{\partial^n \left( \frac{1}{R_i} \right)}{\partial a_i^\alpha \partial b_i^\beta \partial c_i^\gamma \partial d_i^\delta \partial a_i^{\alpha'} \partial b_i^{\beta'} \partial c_i^{\gamma'} \partial d_i^{\delta'}} \\ &= \left[ -a'_j \frac{\partial \left( \frac{1}{R_g} \right)}{\partial a_g} - b'_j \frac{\partial \left( \frac{1}{R_g} \right)}{\partial b_g} - c'_j \frac{\partial \left( \frac{1}{R_g} \right)}{\partial c_g} - d'_j \frac{\partial \left( \frac{1}{R_g} \right)}{\partial d_g} \right. \\ & \quad \left. + a_j \frac{\partial \left( \frac{1}{R_g} \right)}{\partial a_g} + b_j \frac{\partial \left( \frac{1}{R_g} \right)}{\partial b_g} + c_j \frac{\partial \left( \frac{1}{R_g} \right)}{\partial c_g} + d_j \frac{\partial \left( \frac{1}{R_g} \right)}{\partial d_g} \right]^\alpha, \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

les puissances indiquées sont des puissances symboliques. Nous aurons donc

$$\frac{1}{R_j} (\varphi_{\alpha\beta\gamma\delta} \alpha' \beta' \gamma' \delta') S_j = \sum A_j \alpha\beta\gamma\delta \alpha' \beta' \gamma' \delta' \varphi_{\alpha\beta\gamma\delta} \alpha' \beta' \gamma' \delta'.$$

Les A étant des coefficients constants fonctions des coefficients de  $S_j$ , et la sommation étant étendue dans le second membre aux fonctions  $\varphi$  qui correspondent à toutes les dérivées partielles d'ordre  $n$  de  $\frac{1}{R_i}$ . Les fonctions  $\varphi$  forment donc un système zêtafuchsien.

### III.

La construction de fonctions subissant par les substitutions d'un groupe des transformations plus simples paraît présenter d'assez grandes difficultés. Il n'est possible de trouver d'expressions analytiques que dans certains cas particuliers. Si l'on considère, par exemple, la fonction elliptique  $\text{sn}(u, k)$ , la fonction  $\text{sn}\left(\frac{2K}{\pi i} \log z\right)$  est une fonction fuchsienne de  $z$  dont le groupe est engendré par la seule substitution  $z \text{ in } zq^2$ ,  $q$  étant égal à  $e^{-\pi \frac{K'}{K}}$ . La fonction

$$F(x, y, z) = \int_0^{2\pi} \text{sn}\left\{\frac{2K}{\pi i} \log[x + i(y \cos \omega + z \sin \omega)]\right\} d\omega$$

satisfait à l'équation  $\Delta F = 0$ , ne change pas de valeur par la substitution

$$(1) \quad \begin{cases} x & \text{in} & xq^2, \\ y & \text{in} & yq^2, \\ z & \text{in} & zq^2, \end{cases}$$

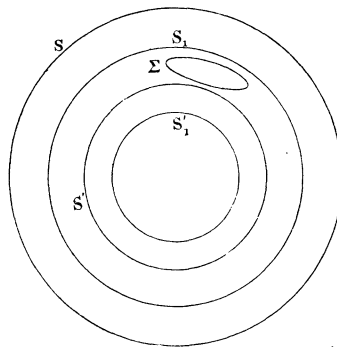
et enfin ne présente que des pôles simples.

Pour les groupes les plus généraux, il paraît nécessaire de recourir à des méthodes analogues à celles qui ont été données par MM. Schwarz et Neumann pour la démonstration du principe de Dirichlet.

De l'origine des coordonnées comme centre, décrivons quatre sphères  $S, S', S_1, S'_1$  avec des rayons  $R, R', R_1, R'_1$  (*fig. 1*),  $R'$  et  $R'_1$  étant respectivement égaux à  $Rq^2$  et à  $R_1q^2$  et  $R_1$  étant compris entre  $R$  et  $R'$ . Soit  $\Sigma$  une surface comprise tout entière entre les deux sphères  $S'$  et  $S_1$ . Je suppose que l'on

sache résoudre le problème de Dirichlet pour les volumes  $V$  et  $V_1$  limités par  $\Sigma$ ,  $S$  et  $S'$ ;  $\Sigma$ ,  $S_1$  et  $S'_1$ . Je me propose de montrer comment on peut

Fig. 1.



former une fonction harmonique, finie et continue, prenant des valeurs données sur  $\Sigma$  et se transformant en elle-même par la substitution (1).

Je m'appuierai sur une proposition bien connue. Si la valeur d'une fonction harmonique et continue dans un volume donné est nulle sur une partie déterminée de la surface qui limite ce volume, le maximum de sa valeur absolue sur une surface contenue tout entière à l'intérieur de ce volume et n'atteignant en aucun point la surface, est moindre que le maximum de la valeur absolue de la fonction sur la surface limite multipliée par une constante positive  $\lambda$  inférieure à 1;  $\lambda$  dépend seulement de la surface limite, de la partie de cette surface sur laquelle la fonction est nulle et de la surface intérieure.

Formons une fonction  $\varphi_0$  prenant sur  $\Sigma$  les valeurs données, sur  $S$  des valeurs prises arbitrairement ( $\varphi_0$ ) et les mêmes valeurs aux points correspondants de  $S'$ ; soient ( $\varphi_1$ ) les valeurs que prend  $\varphi_0$  sur  $S_1$ . Formons une fonction  $\varphi_1$  prenant aux points correspondants de  $S_1$  et de  $S'_1$  les valeurs ( $\varphi_1$ ) et les valeurs données sur  $\Sigma$ . Soient ( $\varphi_2$ ) les valeurs que prend cette fonction sur  $S'$ ; nous formerons une fonction  $\varphi_2$  prenant sur  $S$  et  $S'$  les valeurs ( $\varphi_2$ ) et les valeurs données sur  $\Sigma$ , et ainsi de suite. Je dis que la fonction  $\varphi_{2k}$  a une limite quand  $k$  croît indéfiniment. Il suffit de prouver que la série

$$\varphi_0 + (\varphi_2 - \varphi_0) + (\varphi_4 - \varphi_2) + \dots + (\varphi_{2k} - \varphi_{2k-2}) + \dots$$

est convergente. En effet, le maximum de la valeur absolue de  $\varphi_{2k} - \varphi_{2k-2}$

est moindre que le maximum de la valeur absolue de  $(\varphi_{2k}) - (\varphi_{2k-2})$ . D'ailleurs, en remarquant que  $\varphi_{2k} - \varphi_{2k-2}$ ,  $\varphi_{2k-1} - \varphi_{2k-3}$  sont nuls sur  $\Sigma$ , on a

$$\max[(\varphi_{2k}) - (\varphi_{2k-2})] < \lambda_1 \max[(\varphi_{2k-1}) - (\varphi_{2k-3})],$$

$$\max[(\varphi_{2k-1}) - (\varphi_{2k-3})] < \lambda \max[(\varphi_{2k-2}) - (\varphi_{2k-4})],$$

$\lambda$  et  $\lambda_1$  étant des constantes positives moindres que 1 dépendant, la première des surfaces  $\Sigma$ ,  $S_1$ ,  $S'_1$ , la seconde des surfaces  $\Sigma$ ,  $S$ ,  $S'$ . La série converge donc comme une progression géométrique ayant pour raison  $\lambda\lambda_1$ .

On démontrerait de même que  $\varphi_{2k+1}$  a une limite. Enfin on voit immédiatement que les valeurs de la différence  $\varphi_{2k} - \varphi_{2k+1}$  sur  $S_1$  et sur  $S'$  tendent vers 0. Donc la fonction  $\varphi_{2k} - \varphi_{2k+1}$  tend vers 0 dans le volume limité par  $S_1$ , par  $S'$  et par  $\Sigma$ . Les limites de  $\varphi_{2k}$  et de  $\varphi_{2k+1}$  sont donc deux fonctions qui sont le prolongement l'une de l'autre. Désignons par  $\varphi$  la fonction ainsi obtenue; elle prend sur  $\Sigma$  les valeurs données et aux points correspondants de  $S$  et de  $S'$ , de  $S_1$  et de  $S'_1$  les mêmes valeurs. Il en résulte qu'elle se reproduit par la substitution (1). En effet, soit  $\varphi'$  ce que devient  $\varphi$  par la substitution (1), la fonction  $\varphi - \varphi'$  est nulle sur  $S'$  et sur  $S'_1$ ; donc elle est nulle dans le volume limité par ces deux sphères, et la fonction prolongée est nulle dans tout l'espace.

