

ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

E. COSSERAT **Sur les formes bilinéaires**

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 1^{re} série, tome 3 (1889), p. M1-M12

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1889_1_3_M1_0

© Université Paul Sabatier, 1889, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

SUR LES
FORMES BILINÉAIRES,

PAR M. E. COSSEURAT.

MM. Jordan (¹) et Kronecker ont considéré, en se bornant à l'étude du cas le plus général, le problème suivant :

Étant donné un polynôme bilinéaire

$$P = \sum a_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n, \beta = 1, 2, \dots, n),$$

le ramener à une forme canonique simple par des substitutions orthogonales opérées, les unes sur les variables x_1, x_2, \dots, x_n , les autres sur les variables y_1, y_2, \dots, y_n .

M. Sylvester (²) a repris tout récemment l'étude de la même question.

Nous nous proposons actuellement d'établir quelques-unes des propositions que nous n'avons fait qu'indiquer dans un travail antérieur publié au tome III de ce Recueil.

Rappelons tout d'abord le résultat obtenu par M. Jordan.

Considérons l'équation

$$D = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & \dots & a_{11} & a_{12} & \dots \\ 0 & -\lambda & 0 & \dots & a_{21} & a_{22} & \dots \\ \cdot & \dots & \cdot & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{11} & a_{21} & \cdot & \dots & -\lambda & 0 & \dots \\ a_{12} & a_{22} & \cdot & \dots & 0 & -\lambda & \dots \\ \dots & \dots & \cdot & \dots & \cdot & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0,$$

(¹) C. JORDAN, *Mémoire sur les formes bilinéaires* (*Journal de Liouville*, 2^e série, t. XIX, p. 35-54).

(²) SYLVESTER, *Sur la réduction biorthogonale d'une forme linéo-linéaire à sa forme canonique* (*Comptes rendus*, t. CVIII, p. 651).

qui ne contient que des puissances paires de λ et dont les coefficients restent invariables, quelque substitution orthogonale que l'on opère sur les x ou sur les y . Supposons que toutes les racines soient distinctes et désignons-les par

$$\lambda_1, -\lambda_1, \lambda_2, -\lambda_2, \dots, \lambda_n, -\lambda_n.$$

Les équations suivantes

$$(I) \quad x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \equiv 1,$$

$$(I') \quad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \dots + \gamma_n^2 \equiv 1;$$

$$(2) \quad \begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n = \lambda_1 x_1, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots, \\ a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n = \lambda_n x_n; \end{cases}$$

$$(2') \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{n1}x_n = \lambda_1 y_1, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots, \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = \lambda_n y_n, \end{array} \right.$$

résolues par rapport aux x et aux y , donnent pour les valeurs correspondantes de $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$ (le signe étant choisi à volonté)

$$x_1 = \pm c_{1\rho} \dots x_n = \pm c_{n\rho}, \quad y_1 = \pm d_{1\rho} \dots y_n = \pm d_{n\rho}.$$

Si l'on considère la substitution

$$\xi_2 = c_{12}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{n2}x_n, \quad \eta_2 = d_{12}\gamma_1 + \dots + d_{n2}\gamma_n.$$

on opère la réduction à la forme canonique

$$P = \lambda_1 \xi_1 \eta_1 + \dots + \lambda_n \xi_n \eta_n$$

Le résultat de M. Jordan peut être présenté sous une forme qui en rend la démonstration presque intuitive et qui facilite l'étude du cas où l'équation $D = 0$ a des racines multiples.

Remplaçons dans les équations (2) y_1, y_2, \dots, y_n par leurs valeurs tirées des équations (2'), il vient

$$a_{11}(a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{n1}x_n) + a_{12}(a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{n2}x_n) + \dots = \lambda_1^2 x_1, \\ a_{21}(a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{n1}x_n) + \dots = \lambda_2^2 x_2, \\ \dots$$

Considérons la forme quadratique

$$\sum \left(\frac{\partial P}{\partial y_i} \right)^2 = (a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{n1}x_n)^2 + (a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{n2}x_n)^2 + \dots$$

et proposons-nous de la réduire à une somme de carrés par le moyen d'une substitution orthogonale. L'équation en s relative à cette forme s'obtiendra manifestement en remplaçant λ^2 par s dans l'équation $D = 0$, et la substitution sera

$$\xi_\rho = c_{1\rho}x_1 + c_{2\rho}x_2 + \dots + c_{n\rho}x_n;$$

de plus, si la forme canonique du polynôme bilinéaire P est

$$\lambda_1 \xi_1 \eta_1 + \dots + \lambda_n \xi_n \eta_n,$$

la forme $\sum \left(\frac{\partial P}{\partial y_i} \right)^2$ deviendra

$$\lambda_1^2 \xi_1^2 + \dots + \lambda_n^2 \xi_n^2.$$

De même, si l'on considère la forme quadratique $\sum \left(\frac{\partial P}{\partial x_i} \right)^2$, elle deviendra

$$\lambda_1^2 \eta_1^2 + \dots + \lambda_n^2 \eta_n^2;$$

par la substitution,

$$\eta_\rho = d_{1\rho}y_1 + \dots + d_{n\rho}y_n.$$

Le résultat de M. Jordan peut donc s'énoncer de la façon suivante :

Le problème de la réduction de la forme bilinéaire $P = \sum a_{\alpha\beta}x_\alpha y_\beta$ à la forme canonique $\lambda_1 \xi_1 \eta_1 + \dots + \lambda_n \xi_n \eta_n$ par des substitutions orthogonales opérées, les unes sur les variables x_1, x_2, \dots, x_n , les autres sur les variables y_1, \dots, y_n , est identique au suivant :

Déterminer deux substitutions orthogonales qui, appliquées respectivement aux deux formes $\sum \left(\frac{\partial P}{\partial y_i} \right)^2$ et $\sum \left(\frac{\partial P}{\partial x_i} \right)^2$, les réduisent à des sommes de carrés.

Sous cette forme, le résultat peut être établi immédiatement.

En effet, nous nous proposons de déterminer deux substitutions orthogonales

$$(3) \quad \xi_\rho = c_{1\rho}x_1 + \dots + c_{n\rho}x_n, \quad \eta_\rho = d_{1\rho}y_1 + \dots + d_{n\rho}y_n$$

telles que la forme P devienne

$$\lambda_1 \xi_1 \eta_1 + \dots + \lambda_n \xi_n \eta_n.$$

Or, si l'on considère $\sum \left(\frac{\partial P}{\partial y_i} \right)^2$, on aura identiquement

$$\sum \left(\frac{\partial P}{\partial y_i} \right)^2 = \lambda_1^2 \xi_1^2 + \dots + \lambda_n^2 \xi_n^2,$$

en supposant les relations (3); cela résulte de ce que la forme du paramètre différentiel du premier ordre d'une fonction n'est pas altérée par une substitution orthogonale effectuée sur les variables.

Si nous remarquons que $\sum \left(\frac{\partial P}{\partial y_i} \right)^2$ ne dépend que de x_1, x_2, \dots, x_n , nous avons cette conclusion que la substitution $\xi_p = c_{1p}x_1 + \dots + c_{np}x_n$ est la substitution orthogonale qui réduit la forme quadratique $\sum \left(\frac{\partial P}{\partial y_i} \right)^2$ à une somme de carrés; on arrive à une conclusion semblable en considérant $\sum \left(\frac{\partial P}{\partial x_i} \right)^2$, et d'ailleurs les équations en s relatives aux deux formes $\sum \left(\frac{\partial P}{\partial y_i} \right)^2$ et $\sum \left(\frac{\partial P}{\partial x_i} \right)^2$ sont identiques.

Réiproquement, si les formes $\sum \left(\frac{\partial P}{\partial y_i} \right)^2$ et $\sum \left(\frac{\partial P}{\partial x_i} \right)^2$ sont réduites respectivement à $\lambda_1^2 \xi_1^2 + \dots + \lambda_n^2 \xi_n^2$ et à $\lambda_1^2 \eta_1^2 + \dots + \lambda_n^2 \eta_n^2$, la forme bilinéaire P sera réduite à $\lambda_1 \xi_1 \eta_1 + \dots + \lambda_n \xi_n \eta_n$.

On rencontre en Géométrie des formes bilinéaires particulièrement remarquables : elles correspondent au cas où l'on a, pour toutes les valeurs des indices i et j ,

$$a_{ii} = 0, \quad a_{ij} = -a_{ji}.$$

Le polynôme bilinéaire considéré est de la forme

$$P = \frac{1}{2} \sum a_{ik} p_{ik},$$

en posant

$$p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i.$$

On peut écrire

$$\sum \left(\frac{\partial P}{\partial y_i} \right)^2 = - \sum A_{ij} x_i x_j,$$

en posant

$$A_{ij} = a_{i1}a_{1j} + a_{i2}a_{2j} + \dots + a_{in}a_{nj},$$

et l'on a l'identité suivante :

$$\begin{aligned}
 & \left| \begin{array}{ccccc} A_{11} - x^2 & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} - x^2 & A_{23} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \dots & A_{nn} - x^2 \end{array} \right| \\
 = & \left| \begin{array}{ccccc} a_{11} - x & a_{12} & \dots & a_{1n} & \\ a_{21} & a_{22} - x & \dots & a_{2n} & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - x & \end{array} \right| \times \left| \begin{array}{ccccc} a_{11} + x & a_{21} & \dots & a_{n1} & \\ a_{12} & a_{22} + x & \dots & a_{n2} & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} + x & \end{array} \right|.
 \end{aligned}$$

Le second membre de cette identité est le carré d'un polynôme entier en x . Or, si dans le premier membre on remplace x^2 par $-\lambda^2$ et si l'on égale à zéro le résultat, on a l'équation $D = 0$ considérée au début. Donc, dans le cas particulier que nous considérons, le premier membre de cette équation est un carré parfait, et l'on peut énoncer la proposition suivante :

Le premier membre de l'équation en s relative à la forme bilinéaire $\frac{1}{2} \sum a_{ik} p_{ik}$, considérée comme forme quadratique des $2n$ variables $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$, est un carré parfait. Cette équation ne contient que des puissances paires de la variable, et l'équation transformée en $-s^2$ est l'équation en s relative à la forme quadratique $\sum \left(\frac{\partial P}{\partial y_i} \right)^2$ des n variables x_1, \dots, x_n .

Les formes quadratiques $\sum \left(\frac{\partial P}{\partial x_i} \right)^2$ et $\sum \left(\frac{\partial P}{\partial y_i} \right)^2$ deviennent identiques si l'on remplace x_i et y_i par une même lettre z_i . Le problème proposé revient donc à la réduction d'une seule forme quadratique à une somme de carrés par le moyen d'une substitution orthogonale.

De plus, on conçoit la possibilité d'opérer sur les x et sur les y la même substitution, en sorte que le polynôme bilinéaire $\frac{1}{2} \sum a_{ik} p_{ik}$ conserve la même forme et devienne $\frac{1}{2} \sum \lambda_{ik} \varphi_{ik}$.

Plaçons-nous à ce dernier point de vue et, afin d'étudier de plus près la question, cherchons à lui appliquer les principes utilisés par M. Jordan dans le cas général.

Nous nous bornerons à considérer le cas où $n = 5$; le cas où $n = 4$ sera

également traité; car, si n est impair, l'équation en s relative à la forme quadratique $\sum \left(\frac{\partial P}{\partial y_i} \right)^2$ admet la racine simple $s = 0$; on peut, par suite, ramener immédiatement ce cas à celui où n est pair. Les résultats que nous obtiendrons pourront facilement se généraliser. Ajoutons que, dans le cas que nous considérons, où $n = 5$, ils ont une interprétation géométrique intéressante dans la théorie des systèmes linéaires de cercles, qui, inversement, permet de les établir géométriquement.

Soit donc

$$P = \sum a_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4, 5, \quad \beta = 1, 2, 3, 4, 5),$$

avec

$$a_{\alpha\alpha} = 0, \quad a_{\alpha\beta} = -a_{\beta\alpha}.$$

La réduction de P à une forme plus simple dépend de la solution du problème suivant :

Trouver les maxima et minima de P , lorsque les variables x et y restent assujetties aux relations

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 1, \quad y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 + y_5^2 = 1.$$

Les valeurs des variables correspondant au maximum (ou au minimum) sont données par le système

$$(1) \quad x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_5^2 = 1,$$

$$(1)' \quad y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_5^2 = 1,$$

$$\begin{aligned}
 &= \lambda x_1, & a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 &= -\lambda y_1, \\
 &= \lambda x_2, & a_{21}x_1 &+ a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 = -\lambda y_2, \\
 &\dots, & \dots &\dots, \\
 &= \lambda x_5, & x_{51}x_1 + a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 &= -\lambda y_5.
 \end{aligned}
 \quad (2)'$$

Le maximum est égal à λ , inconnue déterminée par l'équation

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{12} & \dots \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & a_{21} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & \dots & \cdot & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda & \cdots & \cdot & \cdots \\ 0 & a_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda & 0 & \cdots \\ a_{12} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \lambda & \cdots \\ \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \end{vmatrix} = 0.$$

L'équation $D = o$ a ses coefficients invariables pour toute substitution

orthogonale effectuée sur l'une ou l'autre des deux séries de lettres x_1, x_2, \dots, x_5 et y_1, y_2, \dots, y_5 . Elle est identique à l'équation en s relative à la forme bilinéaire considérée comme forme quadratique des dix variables $x_1, x_5, y_1, \dots, y_5$.

Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ les cinq premiers nombres écrits dans l'ordre de permutation naturelle 1, 2, 3, 4, 5 à partir de l'un d'eux que nous appellerons α , et posons

$$\mathbf{I} = \sum_{ij} a_{ij}^2, \quad \mathbf{J} = \sum_{\alpha} (a_{\beta\gamma} a_{\delta\varepsilon} + a_{\beta\delta} a_{\varepsilon\gamma} + a_{\beta\varepsilon} a_{\gamma\delta})^2.$$

L'équation $D = 0$ s'écrit

$$D = \lambda^2(\lambda^4 - I\lambda^2 + J)^2 = 0.$$

Soit λ , une racine de l'équation $\lambda^4 - I\lambda^2 + J = 0$. Les équations (2) et (2)' feront connaître en général les rapports des quantités correspondantes $x_1, \dots, x_5, y_1, \dots, y_5$. On achèvera de les déterminer, au signe près, en employant l'une ou l'autre des équations (1), (1)'. [On remarquera que l'on a

$$x_1^2 + \dots + x_5^2 = y_1^2 + \dots + y_5^2$$

en vertu de (2), (2)'].

Considérons donc un système de solutions

$$x_1 = \alpha_{11}, \quad x_2 = \alpha_{21}, \quad \dots, \quad x_5 = \alpha_{51}, \quad y_1 = \alpha_{12}, \quad y_2 = \alpha_{22}, \quad \dots, \quad y_5 = \alpha_{52}.$$

A la racine $-\lambda_1$, de $D = 0$, correspond manifestement le système de solutions suivant :

$$x_1 = \alpha_{12}, \quad x_2 = \alpha_{22}, \quad \dots, \quad x_5 = \alpha_{52}, \quad y_1 = \alpha_{11}, \quad y_2 = \alpha_{21}, \quad \dots, \quad y_5 = \alpha_{51}.$$

On a

Multiplions les deux membres de ces relations respectivement par $\alpha_{12}, \dots, \alpha_{ss}$, et ajoutons; il vient

$$\lambda_1(x_1, x_{12} + \dots) = 0.$$

c'est-à-dire, puisque λ_4 n'est pas nul,

$$\alpha_{11}\alpha_{12} + \dots = 0.$$

Cela posé, $\alpha_{11}, \dots, \alpha_{51}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{52}$ satisfaisant aux équations (1), (1)', on sait que l'on pourra déterminer deux substitutions orthogonales de la forme

$$\xi_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{21}x_2 + \alpha_{31}x_3 + \alpha_{41}x_4 + \alpha_{51}x_5,$$

$$\xi_2 = \alpha_{12}x_1 + \dots + \alpha_{52}x_5,$$

$$\xi_3 = A_{13}x_1 + \dots + A_{53}x_5,$$

$$\xi_4 = A_{14}x_1 + \dots + A_{54}x_5,$$

$$\xi_5 = A_{15}x_1 + \dots + A_{55}x_5,$$

$$\eta_1 = \alpha_{11}y_1 + \alpha_{21}y_2 + \alpha_{31}y_3 + \alpha_{41}y_4 + \alpha_{51}y_5,$$

$$\eta_2 = \alpha_{12}y_1 + \dots + \alpha_{52}y_5,$$

$$\eta_3 = A_{13}y_1 + \dots + A_{53}y_5,$$

$$\eta_4 = \dots,$$

$$\eta_5 = \dots,$$

A_{13}, \dots, A_{55} étant des coefficients convenablement choisis.

Substituant dans l'expression des nouvelles variables les valeurs

$$x_1 = \alpha_{11}, \dots, x_5 = \alpha_{51}, y_1 = \alpha_{12}, y = \alpha_{22}, \dots, y_5 = \alpha_{52},$$

on voit que P sera maximum pour

$$\xi_1 = \eta_2 = 1, \quad \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = \xi_5 = \eta_1 = \eta_3 = \eta_4 = \eta_5 = 0.$$

Or, soit $\sum \lambda_{\alpha\beta} \xi_\alpha \eta_\beta$ ce que devient P rapporté à ces nouvelles variables ; on aura, pour déterminer les valeurs de ces variables correspondant au maximum, les relations

$$\xi_1^2 + \dots + \xi_5^2 = 1, \quad \eta_1^2 + \dots + \eta_5^2 = 1,$$

$$\lambda_{12}\eta_2 + \dots = \lambda_1\xi_1, \quad \lambda_{21}\xi_2 + \dots = \lambda_1\eta_1,$$

$$\dots, \dots,$$

$$\lambda_{51}\eta_1 + \dots = \lambda_1\xi_5, \quad A_{15}\xi_1 + \dots = \lambda_1\eta_5,$$

analogues à (1), (1)', (2), (2)'. Et, pour qu'elles soient satisfaites pour $\xi_1 = \eta_2 = 1$ et $\xi_2 = \xi_3 = \dots = \eta_5 = 0$, il faudra que l'on ait

$$\lambda_{12} = \lambda_1, \quad \lambda_{13} = \lambda_{14} = \lambda_{15} = 0 :$$

donc P se réduira à la forme

$$\lambda_1(\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1) + P_1,$$

P_1 , étant indépendant de $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$ et de même forme que P .

Opérant sur P_1 , comme sur P , on pourra le mettre sous la forme

$$\lambda_2(\xi_3\eta_4 - \eta_3\xi_4) + P_2;$$

P_2 , ne dépendant pas de $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$, est nul; donc on est parvenu à mettre P sous la forme canonique

$$P = \lambda_1(\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1) + \lambda_2(\xi_3\eta_4 - \eta_3\xi_4).$$

Les coefficients de l'équation $D = 0$ sont invariables pour toute substitution orthogonale effectuée sur l'une ou l'autre des deux séries de lettres $x_1, \dots, x_5, y_1, \dots, y_5$. Or cette équation devient

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \cdot & \cdot & \cdot & -\lambda_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire

$$[\lambda(\lambda^2 - \lambda_1^2)(\lambda^2 - \lambda_2^2)]^2 = 0.$$

On peut donc calculer *a priori* les coefficients de la forme canonique en résolvant l'équation caractéristique $D = 0$.

On peut également, lorsque l'équation $\sqrt{D} = 0$ a ses racines inégales, calculer *a priori* les coefficients d'une des substitutions

$$(3) \quad \begin{cases} \xi_1 = C_{11}x_1 + \dots + C_{51}x_5, & \eta_1 = C_{11}y_1 + \dots + C_{51}y_5, \\ \xi_2 = C_{12}x_1 + \dots + C_{52}x_5, & \dots \dots \dots \dots \dots, \\ \dots \dots \dots \dots \dots, & \dots \dots \dots \dots \dots, \\ \xi_5 = C_{15}x_1 + \dots + C_{55}x_5, & \end{cases}$$

que l'on doit employer pour opérer la réduction à la forme canonique.

Considérons la racine λ_1 . On aura, pour déterminer les valeurs correspondantes de $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_5, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_5$ qui donnent le maximum, les relations

$$\begin{aligned} \lambda_1\eta_2 &= \lambda_1\xi_1, & \lambda_1\xi_2 &= -\lambda_1\eta_1, \\ -\lambda_1\eta_1 &= \lambda_1\xi_2, & -\lambda_1\xi_1 &= -\lambda_1\eta_2, \\ \lambda_2\eta_4 &= \lambda_1\xi_3, & \lambda_2\xi_4 &= -\lambda_1\eta_3, \\ -\lambda_2\eta_3 &= \lambda_1\xi_4, & -\lambda_2\xi_3 &= -\lambda_1\eta_4, \\ 0 &= \lambda_1\xi_5, & 0 &= -\lambda_1\eta_5, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\eta_2 &= \xi_1, & \xi_1^2 + \xi_2^2 &= 1, \\ \eta_1 &= -\xi_2, & \eta_1^2 + \eta_2^2 &= 1, \\ \xi_3 &= \xi_4 = \xi_5 = \eta_3 = \eta_4 = \eta_5 = 0.\end{aligned}$$

Les équations (3), résolues par rapport aux x et aux y , donneront les valeurs correspondantes de $x_1, \dots, x_5, y_1, \dots, y_5$, à savoir :

$$(4) \quad \begin{cases} x_1 = C_{11}\xi_1 + C_{12}\xi_2, & y_1 = -C_{11}\xi_2 + C_{12}\xi_1, \\ x_2 = C_{21}\xi_1 + C_{22}\xi_2, & y_2 = -C_{21}\xi_2 + C_{22}\xi_1, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots, & \dots \dots \dots \dots \dots \dots, \\ x_5 = C_{51}\xi_1 + C_{52}\xi_2, & y_5 = -C_{51}\xi_2 + C_{52}\xi_1, \end{cases}$$

avec

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 = 1.$$

Or revenons aux équations (1), (1)', (2), (2)'. Si les équations linéaires (2), (2)' admettent comme système de solutions

$$x_1 = \alpha_{11}, \dots, x_5 = \alpha_{51}, y_1 = \alpha_{12}, y_2 = \alpha_{22}, \dots, y_5 = \alpha_{52},$$

elles admettent aussi

$$x_1 = \alpha_{12}, \dots, x_5 = \alpha_{52}, y_1 = -\alpha_{11}, \dots, y_5 = -\alpha_{51}$$

et, par suite,

$$x_1 = \lambda\alpha_{11} + \mu\alpha_{12}, \dots, x_5 = \lambda\alpha_{51} + \mu\alpha_{52}, y_1 = \lambda\alpha_{12} - \mu\alpha_{11}, \dots$$

Donc le système des équations (1), (1)', (2), (2)' admet

$$(5) \quad x_1 = \xi_1\alpha_{11} + \xi_2\alpha_{12}, \dots, y_1 = -\xi_2\alpha_{11} + \xi_1\alpha_{12}, \dots,$$

en supposant la relation

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 = 1.$$

On voit que, si l'on a *un* système de solutions de (2), (2)'

$$\alpha_{11}, \dots, \alpha_{51}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{52},$$

on a la *solution générale* des (1) par ces dernières formules (5); cela résulte de la considération des formules (4), qui donnent la solution générale.

La comparaison des formules (4) et (5) montre de plus qu'on a, pour C_{11}, \dots, C_{11} , le système le plus général de solutions par

$$C_{11} = \zeta_1 \alpha_{11} + \zeta_2 \alpha_{12}, \quad \dots, \quad C_{12} = -\zeta_2 \alpha_{11} + \zeta_1 \alpha_{12}, \quad \dots$$

avec

$$\zeta_1^2 + \zeta_2^2 = 1.$$

Répétant le raisonnement pour λ_2 , on aura de même la forme générale des C_{13}, \dots, C_{54} .

Arrivons à $C_{15}, C_{25}, C_{35}, C_{45}, C_{55}$.

Les équations (1) sont vérifiées par

$$x_1 = \alpha_{11}, \quad \dots, \quad x_5 = \alpha_{51}$$

et

$$y_1 = \alpha_{12}, \quad \dots, \quad y_5 = \alpha_{52}.$$

Le déterminant des coefficients des y étant nul, on obtient, en multipliant par les mineurs du premier ordre, ou par $\Omega_1, \dots, \Omega_5$,

$$\Omega_1 \alpha_{11} + \Omega_2 \alpha_{21} + \dots + \Omega_5 \alpha_{51} = 0,$$

$$\Omega_1 \alpha_{12} + \dots + \Omega_5 \alpha_{52} = 0,$$

.....;

donc

$$\Omega_1 C_{11} + \dots + \Omega_5 C_{51} = 0,$$

.....

Par suite,

$$C_{15} = \frac{1}{\sqrt{J}} \Omega_1, \quad C_{25} = \frac{1}{\sqrt{J}} \Omega_2, \quad \dots, \quad C_{55} = \frac{1}{\sqrt{J}} \Omega_5.$$

Ces dernières formules peuvent être écrites immédiatement : si l'on se reporte à la forme quadratique $\sum \left(\frac{\partial P}{\partial y_i} \right)^2$, ces coefficients correspondent à la racine $s = 0$ de l'équation en s .

Remarquons que, si l'on effectue une substitution orthogonale, telle que l'on ait

$$\xi_5 = C_{15} x_1 + \dots + C_{55} x_5, \quad \eta_5 = C_{15} y_1 + \dots + C_{55} y_5,$$

la forme bilinéaire devient

$$\frac{1}{2} \sum \lambda_{ik} \varphi_{ik}$$

et l'on a

$$\lambda_{15} = \lambda_{25} = \lambda_{35} = \lambda_{45} = 0.$$

Remarquons enfin que, dans le cas où $J = 0$, le problème est impossible. Le problème général de M. Jordan est lui-même impossible dans ce cas.

On ne peut pas réduire la forme quadratique $\sum \left(\frac{\partial P}{\partial y_i} \right)^2$ à une somme de carrés par l'emploi d'une substitution orthogonale; car, si l'on considère la racine $s = 0$ de l'équation en s , les coefficients de la substitution qui lui correspondent sont proportionnels à $\Omega_1, \dots, \Omega_5$, et l'on a par hypothèse $\sum \Omega_i^2 = 0$.

Il reste, pour compléter ce qui précède, à indiquer le mode de formation des équations en λ pour les différentes valeurs de n . Le premier membre de l'une quelconque de ces équations est un carré parfait; dans l'équation obtenue en annulant la racine carrée, on posera $\lambda = is$; les coefficients de l'équation obtenue s'expriment élégamment, ainsi qu'il est aisé de le voir, à l'aide des déterminants gauches symétriques de M. Cayley.

