

P. APPELL

Sur les équations différentielles homogènes du second degré à coefficients constants

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 1^{re} série, tome 3 (1889), p. K1-K12

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1889_1_3_K1_0

© Université Paul Sabatier, 1889, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES
ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES HOMOGÈNES DU SECOND ORDRE
A COEFFICIENTS CONSTANTS,

PAR M. P. APPELL.



1. Soit une équation différentielle

$$(1) \quad \psi(y'', y', y) = 0,$$

dont le premier membre est un polynôme homogène irréductible par rapport à une fonction y de la variable x et à ses dérivées y' , y'' : les coefficients de ce polynôme sont supposés *constants*, c'est-à-dire indépendants de x . L'intégration de l'équation se ramène immédiatement aux quadratures : il suffit, en effet, de poser

$$y = e^{\int u dx}, \quad y' = uy, \quad y'' = (u^2 + u')y$$

pour obtenir une équation du premier ordre

$$(2) \quad \psi(u^2 + u', u, 1) = 0$$

donnant x en fonction de u par une intégrale abélienne.

Ainsi qu'on le fait pour les équations linéaires et homogènes, on peut trouver des solutions de l'équation (1) ayant la forme spéciale

$$y = Ce^{rx},$$

C désignant une constante arbitraire et r une constante, racine de l'équation

$$(3) \quad \varphi_n(r) = \psi(r^2, r, 1) = 0.$$

Dans le cas des équations linéaires, les solutions ainsi obtenues sont toutes *particulières* : on peut se demander s'il en est encore ainsi lorsque l'équation différentielle homogène n'est plus linéaire.

Nous allons montrer que certaines de ces intégrales peuvent être *particulières*, d'autres *singulières*, en donnant en même temps le moyen de reconnaître si une de ces intégrales est particulière ou singulière. On verra que, dans des cas limites, toutes les intégrales de la forme

$$y = Ce^{rx}$$

peuvent être particulières, ou toutes singulières ⁽¹⁾.

2. L'équation (2) obtenue en faisant

$$y = e^{\int u dx}$$

est de la forme

$$(3) \quad u'^n \varphi_0(u) + u'^{n-1} \varphi_1(u) + \dots + u' \varphi_{n-1}(u) + \varphi_n(u) = 0,$$

où $\varphi_0(u)$, $\varphi_1(u)$, ..., $\varphi_n(u)$ sont des polynômes, dont le dernier $\varphi_n(u)$ a pour racines les constantes r donnant les solutions

$$y = Ce^{rx}.$$

Soit r une racine de $\varphi_n(u)$: il est évident que

$$u = r$$

sera une intégrale de l'équation (3); il s'agit de voir si cette intégrale doit être regardée comme particulière ou comme singulière.

Lorsque l'on fait $u = r$, l'équation (3) en u' a au moins une racine nulle. Supposons d'abord qu'elle n'en ait qu'une, c'est-à-dire que la valeur $u = r$ n'annule pas $\varphi_{n-1}(u)$: alors l'intégrale $u = r$ est *particulière* par rapport à la branche de la fonction intégrale dont la dérivée s'annule pour $u = r$. En effet, comme pour $u = r$ une seule valeur de u' s'annule, cette valeur est, pour des valeurs de u voisines de r , développable en une série de la forme ⁽²⁾

$$u' = a(u - r)^p [1 + a_1(u - r) + a_2(u - r)^2 + \dots],$$

⁽¹⁾ Pour la théorie des intégrales singulières des équations du premier ordre, consulter les travaux de MM. Darboux (*Comptes rendus*, 1870) et Cayley (*Messenger of Mathematics*, 1872, 1876) et une Note de M. Kapteyn (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1888). Pour les intégrales singulières des équations du second ordre, nous signalerons un travail de M. Goursat (*American Journal*, t. XII).

⁽²⁾ Voir BRIOT et BOUQUET, *Théorie des fonctions elliptiques*, Livre V.

p étant un entier positif. On tire de là

$$a dx = \frac{du}{(u-r)^p} [1 + A_1(u-r) + A_2(u-r)^2 + \dots]$$

et, en cherchant l'intégrale qui se réduit à u_0 pour $x = 0$,

$$(4) \quad ax = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{A_s}{s-p+1} [(u-r)^{s-p+1} - (u_0-r)^{s-p+1}],$$

où $A_0 = 1$ et où le terme correspondant à $s = p-1$ doit être remplacé par

$$A_{p-1} \log \frac{u-r}{u_0-r}.$$

En écrivant cette intégrale

$$\begin{aligned} & ax(u-r)^{p-1}(u_0-r)^{p-1} \\ &= \frac{(u-r)^{p-1} - (u_0-r)^{p-1}}{p-1} \\ &+ \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{A_s}{s-p+1} [(u-r)^s(u_0-r)^{p-1} - (u_0-r)^s(u-r)^{p-1}], \end{aligned}$$

on voit que, lorsque u_0 tend vers r , tous les termes s'annulent, excepté $(u-r)^{p-1}$: on trouve donc, en faisant tendre u_0 vers r ,

$$(u-r)^{p-1} = 0, \quad u = r;$$

ce qui montre que $u = r$ est bien une intégrale *particulière* pour la branche considérée de l'intégrale générale. On verra sans peine comment il faudra modifier le calcul précédent dans le cas particulier où $p = 1$; les premiers termes du développement (4) sont alors des logarithmes; la conclusion subsiste, $u = r$ est intégrale *particulière*.

Supposons maintenant que la valeur considérée $u = r$ annule non seulement $\varphi_n(u)$, mais aussi $\varphi_{n-1}(u)$, $\varphi_{n-2}(u)$, Alors, quand u tend vers r , plusieurs des valeurs de u' définies par l'équation

$$u'^n \varphi_0(u) + u'^{n-1} \varphi_1(u) + \dots + u' \varphi_{n-1}(u) + \varphi_n(u) = 0$$

tendent vers zéro. Ces valeurs se partagent en systèmes circulaires composés de racines qui se permutent dans le voisinage de $u = r$. Pour l'un de

ces systèmes circulaires, on aura

$$(5) \quad u' = a(u-r)^{\frac{p}{q}} \left[1 + a_1(u-r)^{\frac{1}{q}} + a_2(u-r)^{\frac{2}{q}} + \dots \right],$$

p et q étant des entiers positifs. On vérifiera par un calcul identique au précédent que, si

$$\frac{p}{q} \geq 1,$$

la solution

$$u = r$$

doit être regardée comme une intégrale *particulière*, pour la branche de la fonction intégrale satisfaisant à l'équation (5).

Mais, si

$$\frac{p}{q} < 1,$$

cette solution $u = r$ devra être regardée comme une intégrale *singulière*. En effet, cherchons, comme plus haut, l'intégrale u qui se réduit à u_0 pour $x = 0$; nous verrons que cette intégrale ne tend pas vers $u = r$ quand u_0 tend vers r . Pour cela nous pouvons procéder comme plus haut : écrivons l'équation

$$a dx = \frac{du}{(u-r)^{\frac{p}{q}}} \left[1 + A_1(u-r)^{\frac{1}{q}} + A_2(u-r)^{\frac{2}{q}} + \dots \right];$$

d'où, en intégrant,

$$ax = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{q A_s}{s-p+q} \left[(u-r)^{\frac{s-p+q}{q}} - (u_0-r)^{\frac{s-p+q}{q}} \right],$$

la constante A_0 ayant la valeur 1. Actuellement tous les exposants du second membre sont *positifs*, puisque $\frac{p}{q} < 1$: si donc on fait tendre u_0 vers r , l'intégrale précédente tend vers la fonction u définie par l'équation

$$ax = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{q A_s}{s-p+q} (u-r)^{\frac{s-p+q}{q}},$$

fonction qui n'est pas du tout $u = r$. L'intégrale $u = r$ est donc *singulière*. On arriverait également à cette conclusion en faisant dans l'équation (5) la

substitution

$$u - r = v^q.$$

Il peut, d'après cela, arriver qu'une même solution $u = r$ doit être envisagée comme particulière ou comme singulière, suivant qu'on la compare à l'une ou à l'autre des branches de la fonction intégrale.

Les règles précédentes permettront de reconnaître facilement si une solution $u = r$ est particulière ou singulière. Par exemple, si l'équation

$$u'^n \varphi_0(u) + u'^{n-1} \varphi_1(u) + \dots + u' \varphi_{n-1}(u) + \varphi_n(u) = 0$$

est telle que l'intégrale abélienne

$$x = \int \frac{du}{u'}$$

soit de première espèce, c'est-à-dire reste partout finie, toutes les solutions de la forme $u = r$ seront *singulières*.

3. Si nous revenons aux équations algébriques homogènes à coefficients constants en y, y', y'' ,

$$\psi(y'', y', y) = 0,$$

nous sommes maintenant en mesure de reconnaître, parmi les intégrales de la forme

$$y = Ce^{rx},$$

celles qui sont particulières et celles qui sont singulières. Nous allons traiter comme exemple le cas le plus simple, à savoir le cas d'une équation homogène du second ordre et du second degré

$$(6) \quad \psi(y'', y', y) = a_0 y''^2 + a_2 y'^2 + a_4 y^2 + 2b_1 y' y'' + 2b_2 y'' y + 2b_3 y y' = 0,$$

les coefficients $a_0, a_2, a_4, b_1, b_2, b_3$ étant supposés constants. Cette équation admet des intégrales de la forme

$$y = Ce^{rx},$$

r étant racine de l'équation de quatrième degré

$$\varphi_2(r) = a_0 r^4 + 2b_1 r^3 + (a_2 + 2b_2) r^2 + 2b_3 r + a_4 = 0.$$

Si nous faisons

$$y = e^{\int u dx}, \quad y' = uy, \quad y'' = (u' + u^2)y,$$

l'équation différentielle devient

$$a_0 u'^2 + 2 u' (a_0 u^2 + b_1 u + b_2) + \varphi_2(u) = 0.$$

Dans le cas particulier où $a_0 = 0$, cette équation est du premier degré en u' ; les trois valeurs de u qui annulent $\varphi_2(u)$ donnent alors des intégrales *particulières*.

Supposons maintenant a_0 différent de zéro. Si aucune des racines du polynôme du quatrième degré $\varphi_2(u)$ n'annule le trinôme

$$\varphi_1(u) = a_0 u^2 + b_1 u + b_2,$$

les quatre intégrales obtenues en égalant u à l'une des racines de $\varphi_2(u)$ sont *particulières*; les solutions de la forme

$$y = C e^{rx}$$

de l'équation (6) sont donc toutes *particulières*. Si une racine simple de $\varphi_2(u)$ annule le trinôme $\varphi_1(u)$, la solution correspondante est *singulière*; les autres sont *particulières*.

Si deux racines simples de $\varphi_2(u)$ annulent le trinôme $\varphi_1(u)$, les deux intégrales correspondantes sont *singulières*; les deux autres sont *particulières*.

4. Ce dernier cas est remarquable en ce que l'intégrale générale peut se mettre, dans ce cas, sous une forme particulièrement simple. En effet, puisque $\varphi_2(u)$ est divisible par $\varphi_1(u)$, on peut écrire

$$\varphi_2(u) = \varphi_1(u) (u^2 + 2\alpha u + \beta)$$

ou, en développant et identifiant,

$$b_1 = 2\alpha a_0, \quad a_2 = \beta b_2, \quad \dots$$

Cela posé, l'équation en u

$$a_0 u'^2 + 2 u' \varphi_1(u) + \varphi_2(u) = 0$$

s'écrit en divisant tous les termes par a_0 , remplaçant $\varphi_2(u)$ par sa valeur

$$\varphi_1(u) (u^2 + 2\alpha u + \beta),$$

et posant $\frac{b_2}{a_0} = \gamma$,

$$(7) \quad u'^2 + 2 u' (u^2 + 2\alpha u + \gamma) + (u^2 + 2\alpha u + \beta) (u^2 + 2\alpha u + \gamma) = 0.$$

Si l'on appelle r' et r'' les racines du trinôme $u^2 + \alpha u + \beta$ supposées distinctes, et ρ' et ρ'' celles du trinôme $u^2 + \alpha u + \gamma$ supposées également distinctes, les solutions

$$C e^{r'x}, \quad C e^{r''x}$$

seront *particulières*, les solutions

$$C e^{\rho'x}, \quad C e^{\rho''x}$$

seront *singulières*. Pour obtenir d'une façon simple l'intégrale générale, posons

$$u + \alpha = v, \quad u = \frac{y'}{y}, \quad v = \frac{z'}{z},$$

d'où

$$\frac{y'}{y} + \alpha = \frac{z'}{z}, \quad y = z e^{-\alpha x};$$

l'équation deviendra

$$v'^2 + 2 v'(v^2 + \gamma - \alpha^2) + (v^2 + \beta - \alpha^2)(v^2 + \gamma - \alpha^2) = 0$$

ou, en écrivant β' et γ' à la place des constantes $\beta - \alpha^2$, $\gamma - \alpha^2$,

$$(v' + v^2)^2 + \gamma'(2 v' + v^2) + \beta'(v^2 + \gamma') = 0$$

et, en revenant à la fonction z par les formules

$$v = \frac{z'}{z}, \quad v' = \frac{z''}{z} - \left(\frac{z'}{z}\right)^2,$$

$$(8) \quad \chi(z'', z', z) = z''^2 + \gamma'(2 z z'' - z'^2) + \beta'(z'^2 + \gamma' z^2) = 0.$$

Différentiant enfin cette équation par rapport à x , on trouve

$$(9) \quad \frac{d\chi}{dx} = 2(z''' + \beta' z')(z'' + \gamma' z) = 0.$$

Donc toute solution de l'équation (9) annule l'un des deux facteurs linéaires

$$z''' + \beta' z', \quad z'' + \gamma' z.$$

Intégrons d'abord l'équation

$$z''' + \beta' z' = 0,$$

linéaire et à coefficients constants. Son intégrale générale est

$$(10) \quad z = C + C' e^{x\sqrt{-\beta'}} + C'' e^{-x\sqrt{-\beta'}},$$

ou encore

$$(10') \quad z = C + C' e^{(r'+\alpha)x} + C'' e^{(r''+\alpha)x},$$

puisque r' et r'' sont les racines de l'équation

$$r^2 + 2\alpha r + \beta = 0, \quad (r + \alpha)^2 + \beta' = 0.$$

Si l'on substitue cette intégrale dans le premier membre de l'équation différentielle (8), ce premier membre $\chi(z'', z', z)$ prendra une valeur constante, puisque sa dérivée deviendra nulle. Cette valeur constante sera évidemment une forme quadratique de C, C', C'' : en égalant cette forme à zéro, on aura une relation déterminant une des constantes C, C', C'' en fonction des deux autres; sous cette condition, l'expression (10) sera l'intégrale générale de l'équation en z . Ainsi l'intégrale générale de l'équation (8) en z est de la forme remarquable

$$(10') \quad z = C + C' e^{(r'+\alpha)x} + C'' e^{(r''+\alpha)x},$$

C, C', C'' étant liés par une certaine relation algébrique obtenue en égalant à zéro une forme quadratique de C, C', C'' . L'intégrale générale de l'équation en y sera, puisque $y = z e^{-\alpha x}$,

$$y = C e^{-\alpha x} + C' e^{r'x} + C'' e^{r''x}.$$

Pour former la relation qui lie C, C', C'' , remplaçons z par l'expression (10) dans le premier membre $\chi(z'', z', z)$ de l'équation (8). Comme l'expression (10) donne

$$z'' = \beta'(C - z),$$

nous aurons d'abord

$$\chi(z'', z', z) = (\beta' - \gamma') [\beta'(C - z)^2 + z'^2] + C^2 \beta' \gamma',$$

puis, comme

$$\beta'(C - z)^2 + z'^2 = \beta' [(C' e^{x\sqrt{-\beta'}} + C'' e^{-x\sqrt{-\beta'}})^2 - (C' e^{x\sqrt{-\beta'}} - C'' e^{-x\sqrt{-\beta'}})^2] = 4\beta' C' C'',$$

nous aurons enfin

$$\chi(z'', z', z) = 4\beta'(\beta' - \gamma') C' C'' + C^2 \beta' \gamma',$$

valeur qui est bien constante. Si donc on établit entre C , C' , C'' la relation

$$4(\beta' - \gamma')C'C'' + \gamma' C^2 = 0,$$

l'expression (10) est l'intégrale générale de l'équation. Faisons, pour simplifier,

$$C' = \lambda^2, \quad C'' = \mu^2, \quad C = 2\sqrt{1 - \frac{\beta'}{\gamma'}}\lambda\mu,$$

nous verrons que l'intégrale générale de l'équation (8) en z est

$$z = 2\sqrt{1 - \frac{\beta'}{\gamma'}}\lambda\mu + \lambda^2 e^{(r' + \alpha)x} + \mu^2 e^{(r'' + \alpha)x},$$

et, par suite, celle de l'équation en y ,

$$(11) \quad y = 2\sqrt{1 - \frac{\beta'}{\gamma'}}\lambda\mu e^{-\alpha x} + \lambda^2 e^{r'x} + \mu^2 e^{r''x}$$

avec deux constantes arbitraires λ et μ . Sur cette forme de l'intégrale générale, on voit bien que $e^{r'x}$ et $e^{r''x}$ sont des intégrales particulières correspondant à $\mu = 0$ et $\lambda = 0$.

Nous avons obtenu cette intégrale générale en égalant à zéro le premier facteur de l'expression de $\frac{d\chi}{dx}$ (9). Si nous égalons à zéro l'autre facteur

$$z'' + \gamma' z = 0,$$

nous aurons une équation du second ordre ayant pour intégrale générale

$$(12) \quad z = g' e^{x\sqrt{-\gamma'}} + g'' e^{-x\sqrt{-\gamma'}}$$

ou encore

$$(12') \quad z = g' e^{(\rho' + \alpha)x} + g'' e^{(\rho'' + \alpha)x},$$

puisque nous avons appelé ρ' et ρ'' les racines de l'équation

$$r^2 + 2\alpha + \gamma = 0, \quad (r + \alpha)^2 + \gamma' = 0.$$

Si l'on substitue cette valeur de z dans l'expression $\chi(z'', z', z)$, cette expression deviendra encore une constante, puisque l'on aura encore

$$\frac{d\chi}{dx} = 0,$$

et cette constante sera une forme quadratique de g' et g'' . En égalant cette forme à zéro, on établira une relation entre g' et g'' : si cette relation est satisfaite, l'expression (12) sera une intégrale de l'équation différentielle $\chi = 0$, avec une constante arbitraire. Pour former cette relation, substituons l'expression

$$(12) \quad z = g' e^{x\sqrt{-\gamma'}} + g'' e^{-x\sqrt{-\gamma'}}$$

dans le premier membre $\chi(z'', z', z)$ de l'équation différentielle (8). Comme cette expression donne

$$z'' = -\gamma' z,$$

on a

$$\begin{aligned} \chi(z'', z', z) &= (\beta' - \gamma') (\gamma' z^2 + z'^2) \\ &= (\beta' - \gamma') \gamma' [(g' e^{x\sqrt{-\gamma'}} + g'' e^{-x\sqrt{-\gamma'}})^2 - (g' e^{x\sqrt{-\gamma'}} - g'' e^{-x\sqrt{-\gamma'}})^2] \\ &= 4(\beta' - \gamma') \gamma' g' g''. \end{aligned}$$

Si donc on suppose

$$g' g'' = 0,$$

l'expression (12) sera une intégrale de $\chi(z'', z', z) = 0$. On trouve ainsi les deux intégrales

$$z = g' e^{x\sqrt{-\gamma'}}, \quad z = g'' e^{-x\sqrt{-\gamma'}}$$

ou encore

$$z = g' e^{(\rho' + \alpha)x}, \quad z = g'' e^{(\rho'' + \alpha)x}.$$

Comme on a

$$y = z e^{-\alpha x},$$

on en déduit, pour l'équation différentielle proposée, les deux intégrales

$$y = g' e^{\rho' x}, \quad y = g'' e^{\rho'' x}$$

qui sont *singulières*, comme nous l'avons vu.

L'équation que nous venons d'étudier rentre dans une catégorie générale d'équations différentielles dont nous nous sommes occupés précédemment dans une Note insérée dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* (second semestre 1888) et dans un Mémoire *Sur les invariants de quelques équations différentielles*, publié dans le *Journal de Mathématiques* (4^e série, t. V, 1889).

Remarque I. — Nous avons supposé les racines r' et r'' de l'équation

$$r^2 + 2\alpha r + \beta = 0$$

distinctes, c'est-à-dire

$$\beta' = \beta - \alpha^2$$

différent de zéro. Si l'on avait $\beta' = 0$, l'équation $\chi(z'', z', z) = 0$ deviendrait

$$\chi(z'', z', z) = z''^2 + \gamma'(2zz'' - z'^2) = 0;$$

d'où

$$\frac{d\chi}{dx} = 2z'''(z'' + \gamma'z) = 0.$$

Prenant d'abord $z''' = 0$, on a

$$(13) \quad z = C + C'x + C''x^2$$

et, en portant dans $\chi(z'', z', z)$,

$$\chi(z'', z', z) = 4C''(C'' + \gamma'C) - \gamma'C'^2.$$

Si donc on fait

$$C'' = \gamma'\lambda^2, \quad C'' + \gamma'C = \mu^2, \quad C' = 2\lambda\mu,$$

l'expression (13), c'est-à-dire

$$z = \frac{\mu^2 - \gamma'\lambda^2}{\gamma'} + 2\lambda\mu x + \gamma'\lambda^2 x^2,$$

est l'intégrale générale de l'équation $\chi = 0$ avec deux constantes arbitraires λ et μ .

L'intégrale générale de l'équation en y est

$$y = ze^{-\alpha x}.$$

Comme plus haut, les solutions

$$z = g'e^{x\sqrt{-\gamma'}}, \quad z = g''e^{-x\sqrt{-\gamma'}}$$

sont *singulières*.

Remarque II. — Nous avons supposé les racines ρ' et ρ'' de l'équation

$$r^2 + 2\alpha r + \gamma = 0$$

distinctes, c'est-à-dire $\gamma' = \gamma - \alpha^2$ différent de zéro. Si γ' était nul, l'équation

$$\chi(z'', z', z) = z''^2 + \beta'z'^2 = 0$$

ne serait plus irréductible et se décomposerait en deux facteurs linéaires

$$(z'' + z'\sqrt{-\beta'})(z'' - z'\sqrt{-\beta'}) = 0;$$

il en serait de même de l'équation proposée en y .

Enfin nous avons supposé β' différent de γ' . Si l'on avait

$$\beta' = \gamma',$$

on aurait

$$\chi(z'', z', z) = z''^2 + 2\beta' z z'' + \beta'^2 z^2 = (z'' + \beta' z)^2 = 0,$$

et le premier membre de cette équation serait le carré d'une fonction linéaire.

En revenant à l'équation en u

$$a_0 u'^2 + 2u' \varphi_1(u) + \varphi_2(u) = 0,$$

il resterait à examiner quelques cas particuliers, par exemple le cas où une racine simple de $\varphi_1(u)$ serait double ou triple pour $\varphi_2(u)$. Mais l'examen de ce cas, qui, d'après la théorie générale, ne présente aucune difficulté, n'offre pas d'intérêt particulier.

