ÉCOLE POLYTECHNIQUE
INSTITUT POLYTECHNIQUE DE PARIS
CENTRE DE MATHÉMATIQUES LAURENT SCHWARTZ

Journées mathématiques X-UPS

Année 1991

Séries divergentes et procédés de resommation

Jean-Pierre RAMIS

Séries divergentes et théories asymptotiques

Journées mathématiques X-UPS (1991), p. 1-73.
https://doi.org/10.5802/xups.1991-01

Les Éditions de l'École polytechnique
Route de Saclay
F-91128 PALAISEAU CEDEX
https://www.editions.polytechnique.fr

Centre de mathématiques Laurent Schwartz
CMLS, École polytechnique, CNRS,
Institut polytechnique de Paris
F-91128 PALAISEAU CEDEX
https://portail.polytechnique.edu/cmls/

CENTRE MERSENNE

Publication membre du
Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte
www.centre-mersenne.org

Journées mathématiques X-UPS
1991, p. 1–73 doi: 10.5802/xups.1991-01

SÉRIES DIVERGENTES ET THÉORIES ASYMPTOTIQUES

par

Jean-Pierre Ramis

Break on through to the other side.
Jim Morrison.
...all prohibitions are made only to be broken, must be broken
A. S. Byatt, Possession.

Table des matières

Publication originelle dans Journées X-UPS 1991. Séries divergentes et procédés de resommation. Prépublication du Centre de mathématique de l'École polytechnique, 1991.

Introduction

Ces deux exposés sont consacrés à un très vieux sujet et à quelques uns de ses nombreux développements récents. Dans une première partie nous dégagerons l'efficacité théorique et pratique de l'utilisation des séries divergentes sur quelques exemples historiques. La seconde partie sera consacrée aux fondements rigoureux de la théorie des séries divergentes, dont on dispose aujourd'hui grâce à des progrès très récents[1], et à ses relations avec la théorie des développements asymptotiques. Nous terminerons, dans la troisième partie, par quelques applications aux systèmes dynamiques algébriques (ou analytiques).

1. Petite histoire des séries divergentes

Il ne s'agit pas de développer un historique complet de l'utilisation des séries divergentes en Mathématiques (ce travail reste à faire...), mais d'expliquer sur quelques exemples l'intérêt du sujet, de constater l'efficacité de cette utilisation, tout en dégageant quelques méthodes et en préparant les éclaircissements théoriques qui viendront en 2. J'ai choisi pour cela de décrire quelques étapes décisives : chez Leibniz, Euler, Cauchy, Stokes, Stieltjes, Poincaré, Borel, Hardy. (Je reviendrai plus loin sur l'évolution récente.)

[1] L'exposé de cette théorie est (depuis peu...) possible avec des outils mathématiques élémentaires et classiques. Les démonstrations restent souvent longues, techniques et délicates et nécessitent quelques instruments récents ; il est impossible de les exposer ici.

1.1. La sommation des séries divergentes : que peut-on rêver ?

Pour la rédaction de ce paragraphe j'ai utilisé la très agréable présentation du livre de D. Dumont (voir note 19).

Je commencerai par citer quelques phrases du mathématicien anglais J. E. Littlewood extraites de la préface au livre posthume de son ami G. H. Hardy *Divergent series* [34] :

The title holds curious echoes of the past, and of Hardy's past. Abel wrote in 1828 : « Divergent series are the invention of the devil and it is shameful to base on them any demonstration whatsoever ». In the ensuing period of critical revision they were simply rejected. Then came a time when it was found that something after all could be done about them. This is now a matter of course, but in the early years of the century the subject, while in no way mystical or unrigorous, was regarded as sensational, and about the present title, now colourless there hung an aroma of paradox and audacity.

Si l'on manipule des séries convergentes et leurs sommes, c'est en général pour démontrer des égalités numériques ou fonctionnelles. Par exemple :

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots$$

ou

$$\log 2 = -\log\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2\,2} + \frac{1}{2^3\,3} + \cdots$$

Il est intéressant de disposer de plusieurs égalités de ce type : l'égalité ci-dessus est évidemment meilleure que la précédente pour un calcul numérique approché de $\log 2$ (la convergence est plus rapide). D'où l'intérêt d'étendre les manipulations aux séries divergentes et à leurs « sommes » éventuelles pour augmenter l'arsenal des identités disponibles. C'est dans cet esprit qu'ont travaillé les mathématiciens du xviii[e] siècle et en particulier L. Euler. Il est clair que pour fonder un tel calcul la sommation des séries divergentes doit respecter certaines règles : en gros on doit pouvoir remplacer dans les calculs utilisant les opérations usuelles une série par sa somme sans contradiction.

Soit $\mathcal{D}$ la C-algèbre des séries numériques à termes complexes (convergentes ou non) : les opérations sont l'addition, la multiplication par les scalaires et le produit de Cauchy. On désigne par $\mathcal{C}$

la sous-algèbre des séries *absolument* convergentes. On dispose d'un homomorphisme de C-algèbres

$$S : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{C}$$

qui associe à une série convergente $\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sa somme $S(\sigma)$.

On veut définir un opérateur S^* de sommation pour « des » séries divergentes. Voici les premières règles qui paraissent raisonnables pour S^* (on peut donner les variantes sur les suites) :

(s_1) Règle de « régularité » : si σ converge, $S(\sigma) = S^*(\sigma)$ (i.e. S^* prolonge S) ;

(s_2) Règle « d'invariance par translation » :

$$S^*(\sum_{n=0}^{\infty} a_n) \ = a_0 + S^*(\sum_{n=1}^{\infty} a_n)$$

(s_3) S^* est C-linéaire ;

(s_4) S^* est un homomorphisme pour la multiplication.

Pratiquement, il est naturel de définir *des* procédés de sommation S_1^* s'appliquant à des ensembles $\mathcal{D}_1$ de séries : $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}$. On distinguera les cas où $\mathcal{D}_1$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}$ et où S_1^* satisfait les règles 1, 2, et 3, et ceux où $\mathcal{D}_1$ est une sous-algèbre de $\mathcal{D}$ et où S_1^* satisfait les règles 1, 2, 3 et 4. Ce dernier cas, évidemment beaucoup plus utile pour générer des identités intéressantes, va se révéler le plus difficile à fonder théoriquement (la condition 4 n'est pas facile à assurer...).

Une idée naturelle est de remplacer « séries numériques » $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ par « séries formelles » $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et de tenter ensuite de « faire $x = 1$ ».

On dispose alors d'un opérateur de sommation S défini sur la C-algèbre différentielle[(2)] des séries convergentes $(\mathbf{C}\{x\}; x^2 d/dx)$, et à valeurs dans la C-algèbre différentielle $(\mathcal{O}_0; x^2 d/dx)$ des germes de fonctions holomorphes à l'origine. Le problème est de définir des algèbres différentielles $\mathcal{A}_1$ de séries formelles divergentes : $\mathbf{C}\{x\} \subset \mathcal{A}_1 \subset \mathbf{C}[\![x]\!]$ et des opérateurs $S_1^* :\ \mathcal{A}_1 \ \to ?$ vérifiant des règles « raisonnables » :

(S_1) Règle de « régularité » : S_1^* prolonge S ;

[(2)]Une C-algèbre différentielle est une C-algèbre munie d'un endomorphisme C-linéaire δ qui est une dérivation : $\delta(ab) = a\delta(b) + \delta(a)b$.

(S$_2$) S_1^* est un homomorphisme d'algèbres différentielles ;

(S$_3$) Si J est l'opérateur « développement asymptotique » (voir plus loin § 1.7), JS_1^* est l'identité de $\mathcal{A}_1$.

Il reste à décider où l'application

$$S_1^* : \ \mathcal{A}_1 \longrightarrow ?$$

prend ses valeurs. Cela ne peut être $\mathcal{O}_0$: la condition 3 imposerait alors $\mathcal{A}_1 = \mathrm{C}\{x\}$. En fait nous verrons qu'il faut « polariser » en choisissant une direction d issue de l'origine. On prendra ensuite $? = \mathcal{A}_d$, la C-algèbre différentielle des fonctions holomorphes sur des germes de secteurs bissectés par d (d'ouverture et rayons arbitrairement petits). Pour un direction d fixée on verra qu'il y a *deux* opérateurs « naturels » de sommation S_d^+ et S_d^- (sommations latérales). Pour des séries à termes réels on a envie de prendre pour ? les germes de fonctions analytiques réelles sur les germes de $\mathrm{R}^+ - \{0\}$ ou $\mathrm{R}^- - \{0\}$ à l'origine. Ce point de vue se rapproche de celui d'Euler. Nous verrons qu'il conduit à certaines difficultés.

Revenons aux séries numériques et considérons les deux exemples suivants :

$$\sigma_0 : \ 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

et

$$\sigma_1 : \ 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \cdots$$

Supposons que ces séries appartiennent à un ensemble de séries $\mathcal{D}_1$ muni d'un opérateur de sommation S^* satisfaisant les conditions (s$_2$), et (s$_3$), et notons respectivement S_0 et S_1 les sommes de nos deux séries. On a $S_0 = 1 - S_0$, d'où $S_0 = 1/2$, et

$$S_1 = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \cdots$$

$$S_1 = 0 + 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \cdots ,$$

d'où

$$2S_1 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots ,$$

et $S_1 = 1/4$. Ainsi

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \frac{1}{2}$$

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \cdots = \frac{1}{4}.$$

Il semble que Leibniz ait été le premier à attribuer la valeur $1/2$ à la somme de $1-1+1-1+1-1+\cdots$.

Toujours en considérant nos deux exemples on peut deviner deux procédés de sommation qui paraissent raisonnables et permettent de justifier le raisonnement purement formel que l'on vient de faire. Ces deux procédés qui donnent lieu à de larges généralisations sont la *sommation par moyennes* et la *sommation d'Abel*.

L'idée de la sommation par moyennes est d'essayer de construire une « mesure » positive dl de *masse totale un* sur des parties de N et de définir la somme de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

par

$$\int s_n \; dl(n)$$

où s_n désigne la somme partielle

$$s_n = \sum_{p=0}^{n} a_p.$$

Le résultat doit être indépendant des premiers termes de la série. La « mesure » doit donc être nulle sur toute partie finie de N, ce qui conduit à une contradiction si on la suppose σ-additive ! Il faut donc être moins exigeant et remplacer la notion de mesure part celle de « densité » [25]. Si l est une telle densité on notera $l(E)$ la masse d'un sous-ensemble E de N (si elle existe). La plus simple façon de construire une telle densité est d'utiliser la moyenne arithmétique de Cesaro :

On répartit la masse un sur les $n+1$ points 0, 1,. . .,n,[(3)] et on « passe à la limite en n » :

Les moyennes

$$t_n = \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n+1}$$

correspondant à la série $1-1+1-1+1-1+\cdots$ tendent vers $1/2$ quand $n \to +\infty$ (s_n prend alternativement les valeurs 1 ou 0).

---

(3) La mesure correspondante est $\mu_n = \frac{1}{n+1}(\delta_0 + \cdots + \delta_n)$.

Si on note E l'ensemble des nombres pairs, $l(E) = \lim \mu_n(E) = 1/2$.

Ce procédé ne somme pas la série $1-2+3-4+5-6+\cdots$. Il faut le faire opérer deux fois : on trouve bien alors $1/4$ pour somme.

Plus généralement on peut répartir, pour chaque entier n la masse un sur un sous-ensemble *fini* de N et supposer que si E est fini, $l(E) = 0$.

Si on suppose de plus que μ_n est porté par $[1, n]$, cela revient à se donner une *matrice de Toeplitz régulière*, c'est-à-dire une matrice triangulaire infinie :

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ a_{10} & a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n0} & a_{n1} & \cdot & \cdot & \cdots & a_{nn} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

dont les coe□cients sont des réels positifs, la somme des lignes étant constamment égale à un et les colonnes étant des suites convergeant vers zéro.

La matrice colonne des t_n s'obtient alors en multipliant A par la matrice colonne des sommes partielles s_n.

La composition de deux procédés de moyenne correspond évidemment au produit des matrices. Par exemple

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \\ 1/2 & 1/2 & 0 & \cdots & \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & \cdots & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \end{pmatrix}$$

correspond à la méthode de Cesaro et

$$C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \\ 3/4 & 1/4 & 0 & \cdots & \\ 11/18 & 5/18 & 2/18 & \cdots & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \end{pmatrix}$$

a son itération utilisée plus haut.

À la matrice de Toeplitz

$$T = \begin{pmatrix} C_0^0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 1/2C_1^0 & 1/2C_1^1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ (1/2)^n C_n^0 & (1/2)^n C_n^1 & . & . & \cdots & (1/2)^n C_n^n & \cdots \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

correspond la *transformation d'Euler*. Cette transformation se traduit au niveau des séries par la transformation

$$b_n = \frac{1}{2^{n+1}}\ (C_n^0 a_0 + C_n^1 a_1 + \cdots + C_n^n a_n),$$

qui s'interprète au niveau de séries formelles associées par une transformation homographique (admettant 1 pour point fixe) :

$$\widehat{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$\widehat{g}(y) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n y^n$$

$$\widehat{g}(y) = \widehat{f}(\frac{y/2}{1-y/2}).$$

Cette transformation a été introduite par Euler comme *accélération de convergence*. Par exemple, appliquée à

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots$$

elle donne

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2\ 2} + \frac{1}{2^3\ 3} + \cdots ,$$

ce qui accélère le calcul de $\log 2$.

Au lieu d'utiliser des mesures μ_n paramétrées par $n \in$ N et à support fini, on peut utiliser des mesures μ_t paramétrées par $t > 0$ et à support quelconque. Un exemple fondamental est la « densité de Borel » associée à la famille de mesures de Poisson

$$\mu_t = e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \delta_n.$$

Cette méthode, due à E. Borel (1899) fournit pour somme de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

la limite (si elle existe)

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-t} S(t),$$

où

$$S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n \frac{t^n}{n!}.$$

Nous reviendrons plus loin sur cette méthode qui est *fondamentale*. Si on l'applique à la « série de Leibniz »

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

on trouve encore

$$\lim\ e^{-t}\mathrm{ch}t = 1/2.$$

Après la description des méthodes de moyennes passons à celle des méthodes *abéliennes*. La plus simple est basée sur le théorème d'Abel :

Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est convergente, sa somme est donnée par

$$\lim_{x\to 1; x<1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n\ x^n.$$

D'où l'idée, que l'on trouve chez Euler, de prendre dans certains cas de séries divergentes, comme *définition* de la somme de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

la limite

$$\lim_{x\to 1; x<1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n\ x^n$$

si elle existe.

Si l'on applique cette méthode à la série de Leibniz, on trouve

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\ x^n\ =\ \frac{1}{1+x} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 1; x<1} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}$$

comme on s'y attendait...

Pour la série

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \cdots$$

on trouve

$$1 - 2x + 3x^2 + \cdots = \frac{1}{(1+x)^2}$$

dont la limite est $1/4$.

Cette méthode se généralise de la façon suivante : On pose $x = e^{-t}$. Alors $x^n = e^{-tn}$.

Soit $\{\lambda_n\}$ une suite strictement croissante de réels strictement positifs tendant vers $+\infty$ *donnée*. À la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

on associe (si elle existe pour tout $t > 0$ assez petit) la fonction

$$f_t(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \ e^{-t\lambda_n},$$

et (toujours sous réserve d'existence) on *définit* la somme par

$$\lim_{t \to 0; t>0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \ e^{-t\lambda_n}.$$

Nous reviendrons plus loin sur les exemples suivants :

- $\lambda_n = n \log n$ si $n > 0$, et $\lambda_0 = 0$ dû à Lindelöf,
- $\lambda_n = n \log n \log(\log n)$ si $n > 2$, et $\lambda_n = 0$, si $n = 0, 1, \ 2$, dû à Hardy [33] (1941).

1.2. Euler : l'équation fonctionnelle de la fonction ζ et la « série d'Euler ». On trouvera plus de détails sur les questions évoquées ci-dessous dans [34], [4].

Le mémoire [21] de L. Euler commence par

Le rapport que je me propose de développer ici regarde les sommes de ces deux séries infinies générales

$$1^m - 2^m + 3^m - 4^m + 5^m - 6^m + 7^m - 8^m + \cdots ,$$

$$\frac{1}{1^m} - \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} - \frac{1}{4^m} + \frac{1}{5^m} - \frac{1}{6^m} + \frac{1}{7^m} - \frac{1}{8^m} + \cdots ,$$

Le but d'Euler est d'étudier l'égalité

$$\frac{1^{s-1} - 2^{s-1} + 3^{s-1} - \cdots}{1/1^s - 1/2^s + 1/3^s - \cdots} = -\frac{(s-1)!(2^s-1)}{(2^{s-1}-1)\pi^s} \cos(\tfrac{1}{2}s\pi).$$

Plus précisément il se propose de « vérifier » cette égalité pour tout s entier, et pour $s = 1/2$, $s = 3/2$.

Il a besoin pour cela de sommer les séries divergentes

$$1^m - 2^m + 3^m - 4^m + 5^m - 6^m + 7^m - 8^m + \cdots$$

Il emploie la méthode d'Abel. Pour $m = 0$ et 1 on retrouve les deux séries étudiées plus haut et leurs sommes respectives ($1/2$ et $1/4$). Plus généralement il obtient (pour $k > 1$) :

$$1^{2k} - 2^{2k} + 3^{2k} - \cdots = 0$$

$$1^{2k-1} - 2^{2k-1} + 3^{2k-1} - \cdots = (-1)^{k-1} \frac{2^{2k}-1}{2k} B_k.$$

La fonction ζ de Riemann est définie par

$$\zeta(s) = 1^{-s} + 2^{-s} + 3^{-s} + \cdots$$

pour $\mathrm{Ré}\, s > 0$. On lui associe la fonction

$$\eta(s) = 1^{-s} - 2^{-s} + 3^{-s} - \cdots$$

On a

$$\eta(s) = (1 - 2^{1-s})\zeta(s)$$

et la célèbre équation fonctionnelle de la fonction ζ due à B. Riemann s'écrit

$$(2^{s-1} - 1)\eta(1-s) = -(2^s - 1)\pi^{-s} \cos(\frac{1}{2}s\pi)\Gamma(s)\ \eta(s).$$

On reconnaît l'identité devinée par Euler 100 ans avant Riemann...

Notons qu'un calcul théoriquement fondé des sommes de séries divergentes utilisées fournit une *preuve rigoureuse* de la formule pour s entier. (Euler ne prétendait pas donner une telle démonstration...)

La façon dont Euler concevait la justification du calcul avec les séries divergentes est bien dégagée dans son étude de la « série d'Euler »

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\ n!.$$

Cette justification était en grande partie « expérimentale » mais très soigneuse. On trouvera beaucoup de détails sur cet exemple dans [4]. On peut décrire en termes modernes l'idée générale d'Euler de la façon suivante : il s'agit, étant donnée la série de terme général a_n, de trouver un (ou des) *programme(s)* engendrant les a_n. Citons Euler (1749) :

Mais j'ai déjà remarqué dans une autre occasion qu'il faut donner au mot de somme *une signification plus étendue et entendre par là une fraction ou une autre expression analytique, laquelle étant développée suivant les principes de l'analyse produise la même série dont on cherche la somme.*

Il écrit ailleurs

...summa cujusque seriei est valor expressionis illius finitae, ex cujus evolutione illa series oritur.

Euler décrit (dans [22]) quatre procédés (heuristiques) pour sommer

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\ n!.$$

Il vérifie par des calculs numériques l'accord entre ces diverses approches. Nous ne décrirons pas ces procédés (ceci est très bien fait dans [4]). Celui qui nous intéresse le plus pour la suite est basé sur le fait que la série formelle correspondante

$$\widehat{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\ n!\ x^{n+1}$$

est une *solution formelle* de l'équation différentielle d'Euler

$$x^2y' + y = x.$$

Parmi les autres méthodes il y a la transformation en la fraction continue convergente $(1/1+1/1+1/1+2/1+2/1+3/1+3/1+\cdots)$ et l'itération de la transformation d'Euler suivie de la sommation au plus petit terme décrite ci-dessous. (Cette méthode est très bien expliquée dans le traité d'Analyse de Lacroix.) La méthode basée sur l'équation différentielle d'Euler, liée à la *sommation de Borel-Laplace*, va jouer un rôle fondamental dans la suite. (La sommation de Borel-Laplace est elle-même liée à la densité de Borel décrite plus haut [34]...)

Plus tard Hardy [33] a sommé la série d'Euler en utilisant le procédé abélien décrit plus haut :

$$\lim_{t\to 0; t>0}\left(x - 1!\, x^2 + 2!\, x^3 + \sum_{n=3}^{+\infty}(-1)^n n!\, x^{n+1} e^{-tn \log n \log(\log n)}\right).$$

1.3. Euler, Cauchy, Poincaré et la sommation au plus petit terme. Au début du chapitre VIII du tome II des *Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste* [59] H. Poincaré écrit :

Il y a entre les géomètres et les astronomes une sorte de malentendu au sujet de la signification du mot convergence. *Les géomètres, préoccupés de la parfaite rigueur et souvent trop indi érents à la longueur de calculs inextricables dont ils conçoivent la possibilité, sans songer à les entreprendre e ectivement, disent qu'une série est convergente quand la somme des termes tend vers une limite déterminée, quand même les premiers termes diminueraient très lentement. Les astronomes, au contraire, ont coutume de dire qu'une série converge quand les vingt premiers termes, par exemple, diminuent très rapidement, quand même les termes suivants devraient croître indéfiniment. Ainsi, pour prendre un exemple simple, considérons les deux séries qui ont pour terme général* $\frac{1000^n}{1.2.3...n}$ *et* $\frac{1.2.3....n}{1000^n}$.

Les géomètres diront que la première série converge, et même qu'elle converge rapidement,... ; mais il regarderont la seconde comme divergente...

Les astronomes, au contraire, regarderont la première comme divergente,... ; et la seconde comme convergente.

Les deux règles sont légitimes : la première dans les recherches théoriques ; la seconde dans les applications numériques....

On peut ainsi parler de séries convergentes « au sens des géomètres » ou « au sens des astronomes ». Notons que pratiquement, dans les applications, on constate que, presque toujours, les séries convergentes « au sens des astronomes » ont un terme général qui croît très vite après avoir d'abord diminué. Ainsi, ce que Poincaré envisageait comme *possibilité* est en fait la règle. Il n'a pas tenu compte de ce phénomène, qu'il connaissait pourtant très bien, dans sa définition des développements asymptotiques. Les défauts majeurs de la théorie de Poincaré sont liés à cette remarque. Pour les surmonter il faut se tourner vers les travaux d'autres mathématiciens. La « série d'Euler » (voisine de celle citée par Poincaré), dont nous avons déjà parlé, $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\ n!\ x^{n+1}$ va nous permettre de commencer à comprendre ce qu'il faut faire. À la fin nous disposerons d'une théorie, la *théorie asymptotique exacte* où l'antinomie entre les deux notions de convergence distinguées par Poincaré disparaîtra.

L'analyse de la série d'Euler qui va suivre est classique (cf. par exemple Olver [56]).

Soit
$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t/x}}{1+t}\ dt.$$
On note
$$f_n(x) = x - 1!\ x^2 + 2!\ x^3 - \cdots + (-1)^{n-1}(n-1)!\ x^n$$
et
$$R_n(x) = (-1)^n \int_0^{+\infty} \frac{t^n\ e^{-t/x}}{1+t}\ dt.$$
On vérifie facilement que
$$f(x) = f_n(x) + R_n(x)$$
et que
$$|R_n(x)| < \int_0^{+\infty} t^n\ e^{-t/x}\ dt = n!\ x^{n+1}.$$
Ainsi le reste $R_n(x)$ est du même signe que le premier terme omis $(-1)^n\ n!\ x^n$ et majoré en valeur absolue par la valeur absolue de celui-ci. En raisonnant comme dans le cas d'une série alternée vérifiant le « critère spécial », on en déduit les encadrements :
$$f_{2p}(x) < f(x) < f_{2p+1}(x)$$
pour tout entier $p > 1$.

À $x > 0$ fixé cela ne permet pas (comme dans le cas d'une série vérifiant le critère spécial et dont le terme général tend vers zéro) d'obtenir un encadrement arbitrairement précis de $f(x)$ (ici le terme général tend rapidement vers $+\infty$...). Mais on obtient un encadrement *dont la qualité dépend de* x. On va voir plus précisément qu'elle est exponentiellement bonne quand x est « petit ».

Il est clair qu'à $x > 0$ *fixé* la meilleure approximation de $f(x)$ par $f_n(x)$ est obtenue (par cette méthode) quand l'écart

$$|f_{2p+1}(x) - f_{2p}(x)| = (2p)!\ x^{2p}$$

est le plus petit possible, c'est-à-dire quand le terme général de la série d'Euler

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n!\ x^{n+1}$$

est en valeur absolue *le plus petit possible*. On a donc intérêt à *arrêter* la sommation à l'indice correspondant : c'est la *sommation au plus petit terme*.

Ici le rapport de deux termes consécutifs est en valeur absolue nx. À $x > 0$ fixé et n variable, il est inférieur à un pour $x < n$ et supérieur à un pour $x > n$. Ainsi le terme général décroît jusqu'à $n = N \simeq 1/x$, puis croît ensuite indéfiniment. Pour x « petit » on a une série « convergente au sens des astronomes ».

La qualité de l'approximation est $N!\ x^N \simeq N!\, N^{-N}$. En utilisant la formule de Stirling

$$N! \sim \sqrt{2\pi N}\, N^N e^{-N},$$

on voit que l'approximation est de l'ordre de

$$\sqrt{2\pi N}\, e^{-N} \simeq \sqrt{2\pi/x}\, e^{-1/x},$$

c'est-à-dire *exponentiellement bonne*.

Suivant un concept dégagé par H. Poincaré en 1886 (cf. ci-dessous § 1.7), on dira que la série d'Euler

$$\widehat{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n!\ x^{n+1}$$

est le *développement asymptotique* de la fonction

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t/x}}{1+t}\, dt$$

à l'origine.

En pratique, dans de très nombreux cas où le développement asymptotique a des coefficients *réels de signes alternés*, l'erreur est de même signe que le premier terme omis et majorée en valeur absolue par la valeur absolue de celui-ci. L'analyse que nous venons de faire s'étend. On constate également que, très souvent, l'erreur est exponentiellement petite d'un certain ordre (de l'ordre de e^{-1/x^k}, pour un entier k convenable). C'est par exemple le cas pour la *série de Stirling*

$$\sum_{r=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{r-1}B_r}{2r(2r-1)z^{2r-1}}$$

comme l'a montré Cauchy [14].

Il est plus étonnant de constater que l'essentiel du résultat précédent, c'est-à-dire le fait que *la sommation au plus petit terme fournit une précision exponentielle* (éventuellement d'un certain ordre k) s'applique pratiquement à des développements asymptotiques à termes complexes beaucoup plus généraux que les développements alternés. Ce fait constaté expérimentalement depuis plusieurs siècles et utilisé largement par les mathématiciens, physiciens et astronomes n'a reçu une explication satisfaisante que très récemment avec l'étude systématique des *développements asymptotiques Gevrey* (cf. ci-dessous § 2.1). En pratique on constate que le plus petit terme est souvent obtenu pour $N \simeq a/x$ (ou $N \simeq a/x^k$), $a > 0$ dépendant du problème. Dans les problèmes délicats il peut être di□cile de prévoir la place précise du plus petit terme (ou le plus petit terme ne convient plus) on prend alors un « pseudo plus petit terme », à $x \in$ C fixé, en *choisissant* pour N la partie entière de $a/|x|^k$ (k et a étant donnés par la structure du problème étudié).

1.4. Stokes et les caustiques ; le phénomène de Stokes

Le physicien anglais Stokes connaissait bien (dès le début du xix^{e} siècle...) la distinction entre séries convergentes « au sens des géomètres » et « au sens des astronomes ». Il disait des premières qu'elles étaient souvent d'abord divergentes puis convergentes et des secondes qu'elles étaient d'abord convergentes puis divergentes. De plus il avait observé un point essentiel dont nous avons parlé plus haut (qui semble avoir complètement échappé à Poincaré) : la « sommation au plus petit terme » est en général *« exponentiellement précise »*. Ainsi les calculs numériques avec les séries divergentes sont paradoxalement beaucoup plus précis et rapides que ceux utilisant les séries convergentes ! Stokes a donné une très belle illustration de ce principe en calculant (avec des séries divergentes) les franges des caustiques en optique ondulatoire.

Les caustiques sont les enveloppes des rayons lumineux en optique géométrique. En optique ondulatoire on se place sur une petite transversale à la caustique et il s'agit de déterminer où sont les franges, c'est-à-dire où la fonction *intensité lumineuse* s'annule.

La théorie (due à l'astronome anglais Airy) permet de montrer qu'avec des unités convenables l'intensité lumineuse sur la transversale est proportionnelle au carré de l'intégrale (d'Airy)

$$Ai(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \cos(\frac{1}{3}t^3 + zt)\ dt$$

où z est le paramètre de déplacement sur la transversale et s'annule sur la caustique.

On disposait pour ce problème d'excellentes expérimentations physiques : Miller avait mesuré la position des 25 premières franges avec pratiquement quatre décimales exactes. Il s'agissait de confronter les valeurs théoriques (i.e., les zéros de la fonction Ai) avec l'expérience. Le premier résultat est dû à Airy : en utilisant formules de quadrature et tables de logarithmes à dix décimales il obtient une valeur correcte (avec quatre décimales) de la position de la première frange. Il fait ensuite la remarque que la « fonction d'Airy » Ai est solution de « l'équation différentielle d'Airy »

$$y'' - zy = 0.$$

Cela lui permet d'obtenir un développement en série convergent de $Ai(z)$ à l'origine (i.e., suivant les puissances croissantes de z) :

$$Ai(z) = 3^{-2/3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{3n}}{9^n n!\ \Gamma(n+2/3)} - 3^{-4/3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{3n+1}}{9^n n!\ \Gamma(n+4/3)}.$$

La fonction Ai est entière, i.e., le rayon de convergence de cette série est infini. Elle converge « au sens des géomètres » ! En utilisant cette série Airy obtient la position de la deuxième frange. Les calculs sont laborieux : la série est bien convergente mais « d'abord divergente »... On est toujours loin des succès expérimentaux quand arrive Stokes. Ce dernier a l'idée tout à fait remarquable de chercher pour la fonction Ai un développement *à l'infini* au lieu de l'origine (i.e., en puissances croissantes de $1/z$). Il obtient ce développement en utilisant l'équation différentielle d'Airy. Notons que ce développement est un peu plus compliqué qu'une série et aussi qu'il fait intervenir non pas la variable z mais une *ramification* $z^{1/4}$ de celle-ci. Ce dernier fait va poser un problème à Stokes qu'il mettra de nombreuses années à résoudre. (La solution sera la découverte du *phénomène de Stokes* qu'il fera à 3 heures du matin une nuit de mars 1857 [76](4)). La fonction $Ai(z)$ admet pour développement asymptotique à l'infini l'expression

$$\frac{1}{\pi^{3/2}}\, z^{-1/4}\, e^{-2/3t^{3/2}} 3^{-2/3} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(n+5/6)\Gamma(n+1/6)}{n!}\, (3/4)^n (-z)^{-3n/2}.$$

La série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(n+5/6)\Gamma(n+1/6)}{n!}\, (3/4)^n (-z)^{-3n/2}$$

est divergente (au sens des géomètres !) mais convergente au sens des astronomes dès que z n'est pas trop petit. Cela permet à Stokes de calculer *très facilement* la position de *toutes* les franges avec quatre décimales exactes, sauf pour la première où il n'a que trois décimales et perd par rapport à Airy (z est trop petit...). L'accord avec l'expérience est complet, mais la théorie, extrêmement efficace numériquement, reste infondée théoriquement...

1.5. La sommation des séries convergentes en dehors de leur disque de convergence : Borel, Lindelöf, Hardy,... Soit $\widehat{f}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série *convergente* de rayon de convergence $R > 0$.

(4) *London, March 19/57. When the cat's away the mice can play. You are the cat and I am the poor little mouse. I have been doing what I guess you won't let me do when we are married, sitting up till 3 o'clock in the morning fighting hard against a mathematical difficulty. Some years ago I attacked an integral of Airy's, and after a severe trial reduced it to a readily calculable form. But there was a difficulty about it which, though I tried till I almost made myself ill, I could not get over and at last I have to give it up and profess myself unable to master it. I took it up again a few days ago, and after a two or three days' fight, the last of which I sat up till 3, I at last mastered it...*

Soit $x_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|x_0| > R$. On souhaite sommer la série divergente $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_0^n$.

On peut essayer d'utiliser pour cela le *prolongement analytique* de la somme f de $\widehat{f}$ en dehors du disque de convergence. Cela fournira un « bon » procédé de sommation au sens indiqué plus haut puisque le prolongement analytique respecte sommes, produits et dérivations et est injectif. Si l'on essaie de préciser cette méthode on rencontre immédiatement des problèmes d'existence (il n'y a peut-être pas de chemin continu γ joignant l'origine à x_0 et tel que l'on puisse prolonger analytiquement f le long de γ, et dans le pire des cas on ne peut même pas prolonger f en dehors de son disque de convergence) et d'unicité (des prolongements analytiques le long de chemins différents peuvent donner des prolongements différents). Dans cette partie nous nous limiterons aux seuls prolongements le long du segment $\gamma = [O, x_0]$ joignant l'origine à x_0. En utilisant de tels prolongements on prolonge analytiquement la fonction f à un ouvert étoilé (par rapport à l'origine) maximal (contenant le disque de convergence) appelé « étoile de Mittag-Leffler » de $\widehat{f}$. Nous noterons $\mathrm{Et}(\widehat{f})$ ce domaine. Désignons par $(f, \mathrm{Et}(\widehat{f}))$ le prolongement analytique de f (défini sur $\{|x| < R\}$) à $\mathrm{Et}(\widehat{f})$. On vérifie immédiatement que (en un sens que l'on laisse préciser au lecteur), l'opérateur de « sommation »

$$\widehat{f} \longrightarrow (f, \mathrm{Et}(\widehat{f}))$$

est un homomorphisme injectif d'algèbres différentielles.

Ce qui précède fournit (dans certains cas) un bon procédé théorique de sommation de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_0^n$, mais on aimerait évidemment disposer d'un procédé « explicite » de calcul de la somme correspondante $f(x_0)$ (i.e., d'un ou plusieurs algorithmes de calcul de celle-ci, de préférence programmables sur machine et conduisant à un résultat raisonnablement précis en un temps raisonnable...). Je vais expliquer quelques uns de ces procédés (sans me préoccuper ici de leur efficacité numérique).

Il faut d'abord remarquer que le prolongement analytique lui-même (en revenant à la définition) fournit un algorithme de calcul explicite (que l'on peut exploiter sur ordinateur [15]). On est ramené à un nombre fini d'étapes du type suivant :

La série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_1)^n$ est convergente, de rayon de convergence $R_1 > 0$. Soit alors x_2 avec $|x_2 - x_1| < R_1$. On a, au voisinage de x_2 :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_1)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n(x - x_2)^n$$

et il s'agit de calculer les b_n en fonction des a_n. Il est clair que c'est possible, mais en utilisant des séries convergentes. (Il s'agit donc d'un procédé transcendant.)

Passons à d'autres méthodes. Il semble raisonnable d'utiliser les procédés abéliens de sommation dont nous avons parlé plus haut.

Soit $\Lambda = \{\lambda_n\}$ une suite strictement croissante de réels strictement positifs tendant vers $+\infty$ donnée. À la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

on associe (si elle existe pour $t > 0$ assez petit) la fonction

$$f_t(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\ e^{-t\lambda_n}.$$

Il s'agit donc d'abord de choisir la suite $\{\lambda_n\}$ de telle sorte que la série définissant $f_t(x)$ converge. Compte tenu de la convergence de la série donnée $\widehat{f}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ on a des inégalités du type

$$|a_n| < CA^n,$$

pour $C > 0$ et $A > 0$ convenables ; on trouve immédiatement une suite simple Λ telle que la série définissant $f_t(x_0)$ converge pour tout $t > 0$ et tout $x_0 \in \mathbf{C}$:

- $\lambda_n = n \log n$ si $n > 0$, et $\lambda_0 = 0$ (Lindelöf).

Il y a des variantes de ce procédé :

- $\lim_{\delta\to 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x_0^n}{\Gamma(1+\delta n)}$ (Mittag-Leffler) ;
- $\lim_{\zeta\to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\zeta n)}{\Gamma(1+n)} a_n x_0^n$ (Leroy).

On a les résultats suivants :

***Théorème* (cf. [34, 4.11, p. 77–79]).** *Soit $\widehat{f} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ une série convergente. Soit x_0 un point de l'étoile de Mittag-Le er de $\widehat{f}$. On note*

$f(x_0)$ la valeur en ce point du prolongement analytique de la somme (ordinaire) de $\widehat{f}$. On a :

(1) *soit $\lambda_n = n \log n$ si $n > 0$, et $\lambda_0 = 0$. Alors la limite $\lim_{t\to 0; t>0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n \, e^{-t\lambda_n}$ existe et est égale à $f(x_0)$;*

(2) *la limite $\lim_{\delta\to 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x_0^n}{\Gamma(1+\delta n)}$ existe et est égale à $f(x_0)$;*

(3) *la limite $\lim_{\zeta\to 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\zeta n)}{\Gamma(1+n)} a_n x_0^n$ existe et est égale à $f(x_0)$.*

En d'autres termes les procédés de Lindelöf, Mittag-Leffler, Leroy permettent de sommer la série convergente $\widehat{f}$ dans son étoile de Mittag-Le□er.

Il est clair que ces procédés sont adaptés à la croissance au plus géométrique des a_n. Ils ne s'appliquent pas par exemple à la série d'Euler $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \, n! \, x^{n+1}$. Pour essayer de sommer une série divergente de ce type par une méthode abélienne, il faut choisir une suite Λ croissant « beaucoup plus vite ». Le choix suivant (dû à G. H. Hardy [33] (1941)) est bien adapté à la série d'Euler et aux séries ayant un type analogue de croissance des coe□cients (séries « Gevrey » : cf. § 2.1 ci-dessous[(5)]) :

- $\lambda_n = n \log n \, \log(\log n))$ si $n > 2$, et $\lambda_n = 0$, si $n = 0, 1, 2$.

Avant de tester l'e□cacité du procédé correspondant sur des séries divergentes, il est naturel de le tester sur les séries convergentes ! Le résultat suivant (dû à Hardy) permet de se rassurer :

***Théorème* (cf. [33]).** *Soit $\widehat{f} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ une série convergente. Soit x_0 un point de l'étoile de Mittag-Le er de $\widehat{f}$. On note $f(x_0)$ la valeur en ce point du prolongement analytique de la somme (ordinaire) de $\widehat{f}$. Soit $\lambda_n = n \log n \, \log(\log n))$ si $n > 2$, et $\lambda_n = 0$, si $n = 0, 1, 2$. Alors la limite*

$$\lim_{t\to 0; t>0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n \, e^{-t\lambda_n}$$

existe et est égale à $f(x_0)$.

---

(5)Croissance du type $|a_n| < C(n!)^s A^n$; $C, A, s > 0$

Nous verrons plus loin que ce procédé de sommation de Hardy (récemment redécouvert et généralisé par Jurkat) est très efficace : il somme les séries « multisommables » dans leur « étoile de Mittag-Leffler généralisée » [35].

Les deux théorèmes précédents sont démontrés d'abord pour le cas de la série géométrique $\widehat{f}(x) = 1 + x + x^2 + \cdots$ de somme $1/(1-x)$. On passe ensuite aisément au cas général en utilisant le théorème de Cauchy.

Nous verrons plus loin que beaucoup de solutions séries formelles d'équations fonctionnelles analytiques sont multisommables (c'est par exemple le cas des solutions d'équations différentielles analytiques). Malheureusement les solutions séries formelles d'équations aux q-différences analytiques (même linéaires) ne sont pas Gevrey mais seulement q-Gevrey (cf. 3.4 ci-dessous). (On a des estimations du type $|a_n| < Cq^{n^2}A^n$, avec $q > 1$, $A > 0$.) Ainsi ces séries ne sont pas multisommables. De plus il est clair que l'on ne peut pas leur appliquer le procédé de sommation de Hardy. On peut alors essayer de choisir une suite Λ croissant encore plus vite, par exemple : $\lambda_n = \mu n^2$ ou, plus généralement, $\lambda_n = \mu n^a$ $(\mu > 0, a > 1)$. Les procédés de sommation abélienne correspondants ont été étudiés récemment par A. Fruchard [24]. Malheureusement (et conformément à une mise en garde de G. H. Hardy à propos des sommations abéliennes définies par des suites Λ croissant « trop vite ») les procédés de sommation correspondants ne permettent plus de sommer une série convergente dans son étoile de Mittag-Leffler, mais seulement en général dans un domaine strictement plus petit. Cela se voit déjà sur la série géométrique : on n'obtient pas toute l'étoile (ici $\mathbf{C} - [1, +\infty]$) mais seulement le domaine image par la fonction exponentielle de la partie gauche de la bande $\{0 < \operatorname{Im} z < 2\pi\}$ délimitée par les deux droites $\mathbf{R}\, e^{i\pi/2a}$ et $i + \mathbf{R}\, e^{-i\pi/2a}$. (On peut récupérer toute l'étoile de Mittag-Leffler en faisant tendre, à x_0 fixé dans l'étoile, le paramètre a vers 1).

Revenons maintenant à la méthode de sommation par « densité de Borel » (cf. 1.1) en l'appliquant à une série entière convergente

$\widehat{f}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$. Soit $x \in \mathbb{C}$, avec $|x| < R$. Posons $S_n = \sum_{p=0}^{n} a_p x^p$. On a $S_{n+1} - S_n = a_{n+1} x^{n+1}$.

Soient, pour $t > 0$, $S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} S_n$ et $F(t) = e^{-t} S(t)$. On a

$$F'(t) = e^{-t}(S'(t) - S(t)) = e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} x^{n+1} \frac{t^n}{n!}.$$

D'où

$$\begin{aligned} F(t) = a_0 + \int_0^t F'(t) = a_0 + \int_0^t \ e^{-u} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} \frac{x^{n+1} u^n}{n!} \ du \\ = a_0 + \int_0^t \ e^{-u} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} \frac{(xu)^n}{n!} \ d(xu) \\ = a_0 + \int_0^{t\xi} \ e^{-\xi/x} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} \frac{\xi^n}{n!} \ d\xi. \end{aligned}$$

On en déduit aisément que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \lim_{t \to +\infty} F(t) = a_0 + \int_0^{+\infty} \ e^{-\xi/x} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} \frac{\xi^n}{n!} \ d\xi.$$

Pour faciliter la suite de l'exposition on suppose que $a_0 = 0$ (on revient aisément au cas général). Compte tenu du calcul qui précède, on est conduit à introduire la série « transformée de Borel formelle » $\widehat{\mathcal{B}}\widehat{f} = \widehat{\phi}$ de $\widehat{f}$:

$$\widehat{\phi}(\xi) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{\xi^{n-1}}{(n-1)!}.$$

La série $\widehat{\phi}$ a un rayon de convergence infini. Sa somme ϕ est donc une *fonction entière*. On vérifie qu'elle a une *croissance exponentielle* au plus *d'ordre un*. On a

$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = \mathcal{L}(\phi)(x) = \int_0^{+\infty} \ \phi(\xi) e^{-\xi/x} d\xi.$$

On retrouve ainsi la somme f de $\widehat{f}$ dans son disque de convergence comme « transformée de Laplace » de la fonction entière ϕ.

On peut plus généralement remplacer le « contour d'intégration » R$^+ = [0, +\infty]$ dans l'intégrale de Laplace par n'importe quelle demi-droite d issue de l'origine. On obtient :

$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = \mathcal{L}_d(\phi)(x) = \int_d \phi(\xi) e^{-\xi/x} d\xi.$$

Nous allons voir que l'on peut souvent exploiter ce formalisme pour obtenir aussi la somme de $\widehat{f}$ dans une partie de son étoile de Mittag-Le□er, en dehors du disque de convergence.

Pour $x \in$ C nous appellerons « disque de Borel associé à x » et noterons D_x le disque fermé de diamètre $[O, x]$. On a le

Théorème ([8])***.*** *Soit $\widehat{f}$ une série convergente. Si x_0 est un point de l'étoile de Mittag-Le er de $\widehat{f}$ (di érent de 0) tel que le disque de Borel D_{x_0} soit contenu dans l'étoile $\mathrm{Et}(\widehat{f})$, alors l'intégrale*

$$\mathcal{L}_d(\phi)(x) = \int_d \phi(\xi) e^{-\xi/x} d\xi$$

(où ϕ est la somme de la transformée de Borel formelle de $\widehat{f}$ et d la demi-droite issue de l'origine contenant x_0) converge et est égale à $f(x_0)$.

Malheureusement le procédé de sommation par la méthode de Borel-Laplace ne permet pas en général de calculer $f(x_0)$ en tout point x_0 de l'étoile de Mittag-Le□er de $\widehat{f}$, mais seulement dans une région ouverte convexe convenable incluse dans l'étoile et contenant le disque de convergence. Dans les cas les plus simples on obtient un polygone convexe (borné ou non). Par exemple pour la série géométrique on trouve le demi-plan $\{\mathrm{Re}\, x < 1\}$.

Il est en fait facile de sommer $\widehat{f}$ dans toute son étoile de Mittag-Le□er en introduisant une variante à paramètre de la méthode de sommation de Borel-Laplace, la méthode de sommation de Borel-Laplace de niveau k :

Soit $k > 0$. On introduit l'opérateur de ramification en considérant les fonctions (définies sur la surface de Riemann du Logarithme) $\rho_k(f)(x) = f(x^{1/k})$. On pose

$$\widehat{\mathcal{B}}_k = (\rho_k)^{-1} \widehat{\mathcal{B}}\, \rho_k \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_{k;d} = (\rho_k)^{-1} \mathcal{L}_{d^k} \rho_k$$

(où la direction d^k correspond à d par la ramification ρ_k).

On désigne par D_k l'image du disque de Borel D par la représentation conforme $x \to x^{1/k}$; (si $0 < k < 1/2$, D_k est dessiné sur la surface de Riemann du Logarithme). Pour $k = 2$, par exemple, D_2 est limité par une demi lemniscate de Bernouilli. On dira que D_k est un k-disque de Borel. On note D_{k,x_0} le k-disque de Borel de « diamètre » $[O, x_0]$.

Théorème ([8]). *Soit $k > 0$. Soit $\widehat{f}$ une série convergente. Si x_0 est un point de l'étoile de Mittag-Leffler de $\widehat{f}$ (différent de 0) tel que le k-disque de Borel D_{x_0} soit contenu dans l'étoile $\mathrm{Et}(\widehat{f})$, alors l'intégrale*

$$\mathcal{L}_{k;d}(\phi)(x)$$

(où ϕ est la somme de la transformée de Borel formelle $\widehat{\mathcal{B}}_k(\widehat{f})$ de $\widehat{f}$ et d la demi-droite issue de l'origine contenant x_0) converge et est égale à $f(x_0)$.

Pour $1/2 < k$ l'angle à l'origine d'un k-disque de Borel est π/k. Plus k est grand plus les k-disques de Borel sont « effilés ». On voit facilement que si x_0 est un point fixé de l'étoile $\mathrm{Et}(\widehat{f})$, il existe toujours un réel $k_0 > 0$ tel que, pour tout $k > k_0$ le k-disque de Borel D_{x_0} soit contenu dans l'étoile. On peut alors calculer $f(x_0)$ en utilisant la méthode intégrale de Borel-Laplace de n'importe quel niveau $k > k_0$.

Si l'on note S l'opérateur de sommation d'une série convergente dans son disque de convergence les méthodes de sommation que nous venons de décrire se symbolisent par les opérateurs de sommation (dans la direction d) :

- $S_d = \mathcal{L}_d \; S \; \widehat{\mathcal{B}}$ (Borel-Laplace) ;
- $S_{k;d} = \mathcal{L}_{k;d} \; S \; \widehat{\mathcal{B}}_k$ (Borel-Laplace de niveau k).

1.6. Borel et Stieltjes. En 1886, dans [74] Stieltjes étudie la sommation de la série d'Euler pour les valeurs négatives de la variable. C'est beaucoup plus difficile que pour les valeurs positives, car il s'agit maintenant de sommer une série divergente à termes tous positifs. Stieltjes propose le résultat suivant :

$$a^{-1} + a^{-2} + 2!\; a^{-3} + 3!\; a^{-4} + \cdots = 0,0455055614585...,$$

où $e^a = 10^{10}$ ($a \simeq 23,025851$), et montre que la qualité de l'approximation est exponentielle (de l'ordre de $e^{-a}\sqrt{2\pi/a}$, c'est-à-dire de 10^{-10}).

La méthode de Stieltjes a le mérite de fournir une somme *réelle* pour une série à termes réels. Ce n'est pas le cas de la méthode de sommation de Borel : l'axe réel négatif est une direction singulière pour celle-ci et on a donc deux opérateurs de sommation distincts $S^+_{\mathbb{R}^-}$ et $S^-_{\mathbb{R}^-}$. On vérifie que la somme de Stieltjes n'est rien d'autre que la moyenne arithmétique des deux sommes de Borel. Les sommes de Borel diffèrent de la somme de Stieltjes par un imaginaire pur de l'ordre de $10^{-10}\ i$. On a vu que les sommes de Borel fournissent des homomorphismes injectifs d'algèbres différentielles et se prêtent donc parfaitement au calcul avec des séries divergentes. On peut montrer qu'il en est de même de la somme de Stieltjes (et l'idée correspondante a été récemment considérablement généralisée par J. Ecalle sous le nom de « sommation de Borel-Laplace médiane » ; cf. aussi [17, Ch. 1, E, p. 8][(6)] et [52, p. 358]). Ce résultat est plus étonnant qu'il n'y parait à première vue. Regardons en effet ce qui se passe avec la série convergente (développement à l'origine de $\sqrt{1+x}$) :

$$1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \cdots$$

Si on veut sommer cette série en $x = -2$, soit

$$1 - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{5}{8} - \cdots$$

l'un des moyens naturels est d'utiliser le prolongement analytique en évitant la singularité en $x = -1$. Mais il y a alors *deux* solutions naturelles correspondant aux deux « branches » de la fonction $\sqrt{1+x}$. On obtient $\pm i$. Il est clair qu'ici il n'y a *pas* de solution naturelle réelle. (Si $f(x)$ était une somme naturelle réelle pour $x < -1$, on aurait $f(x)^2 = 1 + x < 0$, ce qui est impossible...)

Dans le premier cas, les deux sommes de Borel correspondent aussi en un certain sens (sur lequel nous reviendrons en 3.5) à deux

(6) Half the discontinuity in form occurs on reaching the Stokes ray, and half on leaving it the other side.

« branches » d'une fonction (cette idée est déjà chez Stokes : *analogous to a change of sign in a radical* [75]), mais le changement de branche (phénomène de Stokes) est naturellement dans un groupe à un paramètre. (L'automorphisme d'algèbre différentielle correspondant au phénomène de Stokes est l'exponentielle d'une dérivation qui commute à la dérivation de l'algèbre : cette dérivation est la *dérivation étrangère pointée* de J. Ecalle.) Cette situation n'existe plus pour le changement de branche usuel (algébrique) du deuxième cas (cf. 3.5 ci-dessous).

1.7. Poincaré et la théorie asymptotique. La théorie asymptotique classique est due à Poincaré. Ce dernier l'a élaborée avec l'idée de l'appliquer aux équations différentielles analytiques : sa principale motivation était de donner un sens à une solution série formelle divergente d'une telle équation différentielle, c'est-à-dire d'« incarner » une solution *formelle* en une *vraie solution*. Il faut noter que la définition de Poincaré que nous allons donner ci-dessous ne tient aucun compte de ses propres remarques sur le caractère d'abord « convergent » puis « divergent » des séries asymptotiques (qu'il appelle convergence au sens des astronomes) que l'on rencontre usuellement (et qui conduit à la « sommation au plus petit terme »), voir ci-dessus. On sait aujourd'hui que ce caractère est en fait général pour les solutions formelles d'équations différentielles analytiques.

Définition. Soit V un secteur ouvert du plan complexe (ou de la surface de Riemann du Logarithme) de sommet 0. Soient f une fonction holomorphe sur V et $\widehat{f} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \in \mathbb{C}[\![x]\!]$. On dit que f est asymptotique à $\widehat{f}$ sur V si pour tout sous-secteur compact W de $V \cup \{0\}$ et tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un réel $M_{W,n} > 0$ tel que

$$|x|^{-n}\left|f(x) - \sum_{p=0}^{n-1} a_p x^p\right| < M_{W,n},$$

pour tout $x \in W$.

On note $f \sim \widehat{f}$ ou $\widehat{f} = J(f)$. L'ensemble des fonctions holomorphes sur V admettant un développement asymptotique à l'origine (muni de $+, \cdot, x^2 d/dx$) est une C-algèbre différentielle notée $A(V)$. On a une suite exacte d'algèbres différentielles :

$$0 \longrightarrow A^{<0}(V) \longrightarrow A(V) \xrightarrow{J} \mathbb{C}[\![x]\!] \longrightarrow 0.$$

La surjectivité de l'application J est le théorème de Borel-Ritt : on peut « incarner » toute série formelle $\widehat{f}$ par une « vraie » fonction f holomorphe sur V. Malheureusement cette incarnation n'est *pas unique*, il y a un *choix* pour f (modulo l'espace « d'erreurs » $A^{<0}(V)$, qui est formé des fonctions holomorphes sur V infiniment plates à l'origine). En d'autres termes on ne dispose pas d'une application « naturelle » $\widehat{f} \to f$, avec $J(f) = \widehat{f}$, on n'a pas de théorie de sommation au sens défini plus haut. C'est là l'un des défauts majeurs de la théorie de Poincaré (*the central deficiency of Poincaré's spécification* [17], *the lack of uniqueness of the function represented by an asymptotic expansion contrasts with the sum of a convergent series* [56]).

Pour appliquer la théorie de Poincaré aux équations différentielles analytiques, il faut partir d'une solution série formelle $\widehat{f}$ d'une équation analytique

$$G(x, y, \ldots, y^{(n)}) = 0$$

($G(x, Y_0, \ldots, Y_n)$ est une fonction analytique de $n+2$ variables et $G(x, \widehat{f}, \ldots, \widehat{f}^{(n)}) = 0$) et « incarner » $\widehat{f}$ par une vraie solution f ($G(x, f, \ldots, f^{(n)}) = 0$). L'ensemble « d'erreurs » (incertitudes sur f) possibles est alors considérablement réduit (pour une équation linéaire il est évidemment de dimension finie alors que $A^{<0}(V)$ est de dimension infinie), mais il n'est malheureusement pas trivial en général. Faute d'unicité on a en tout cas un résultat très satisfaisant d'existence. C'est le « théorème fondamental des développements asymptotiques » :

Théorème. *Soient $G(x, Y, \ldots, Y_n)$ une fonction analytique de $n+2$ variables et $\widehat{f} \in \mathbb{C}[\![x]\!]$ une solution série formelle de l'équation di é-rentielle :*

$$(1) \qquad G(x, y, \ldots, y^n) = 0 \qquad \textit{(i.e., } G(x, \widehat{f}, \ldots, \widehat{f}^{(n)}) = 0\textit{).}$$

Alors il existe un réel $k > 0$ tel que pour tout secteur ouvert V de sommet l'origine, d'ouverture $< \pi/k$, de rayon assez petit, il existe *une fonction f solution de l'équation di érentielle (1), asymptotique sur V à $\widehat{f}$.*

Sous cette forme (i.e., sans aucune hypothèse restrictive) ce résultat est assez récent et dû à Ramis et Sibuya [70]. Entre les premiers cas particuliers établis par Poincaré et [70] de nombreux auteurs ont apporté progressivement des améliorations.

Nous allons brièvement indiquer ci-dessous comment il est possible de surmonter les défauts de la théorie asymptotique de Poincaré pour parvenir à une *« théorie asymptotique exacte »*. Les étapes sont : les développements asymptotiques Gevrey, la k-sommabilité, la multisommabilité(7).

2. Développements asymptotiques et sommabilité

2.1. Les développements asymptotiques Gevrey. Commençons par quelques remarques sur des phénomènes que l'on rencontre systématiquement en utilisant « pratiquement » des développements asymptotiques et qui ne sont pas pris en compte par la théorie de Poincaré :

(a) On constate que la plupart des séries formelles $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ que l'on rencontre explicitement satisfont à une condition du type

$$|a_n| < C\ (n!)^{1/k} A^n,$$

où $C, A, k > 0$ sont des réels convenables ; on peut par exemple ouvrir une des « bibles » de fonctions spéciales » [1], [43], [42] et vérifier expérimentalement cette observation ;

(b) On constate que, en pratique, l'incertitude qui porte sur une fonction f cherchée, de développement asymptotique connu(8) n'est pas seulement une fonction holomorphe infiniment plate sur un secteur, mais plus précisément une fonction holomorphe *à décroissance*

---

(7) De nombreux courants de recherche actuels vont dans le même sens : Théories de la résurgence et de l'accélération d'Ecalle [18, 19, 20], travaux de l'école Russe : Il'yashenko..., Hyperasymptotics [6],...

(8) Incertitude qui peut venir d'une marge d'erreur ou du fait qu'il y a plusieurs solutions « naturelles » au problème (ambiguïtés).

exponentielle (d'un certain ordre $k > 0$) :

$$|f(x)| < C\ e^{-a/x^k},$$

pour des réels convenables $C, a > 0$;

(c) Quand x varie le rang du plus petit terme est en général proche du rang $N =$ Partie entière de b/x^k (pour $b, k > 0$ convenablement choisis : par exemple $k = 1,\ b = 1$ pour la série d'Euler). Cela conduit à définir une « quasi-sommation au plus petit terme » : on prend pour « somme » de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ le nombre $\sum_{n=0}^{N} a_n x^n$, avec $N =$ partie entière de b/x^k ; b et k étant « bien choisis ». On observe expérimentalement que si ce choix est bon le procédé est numériquement très eﬃcace.

Il existe une modification simple de la théorie asymptotique de Poincaré qui explique parfaitement ces trois observations. C'est la théorie asymptotique Gevrey[(9)].

Définition. Soit $k > 0$ un réel. Soit V un secteur ouvert du plan complexe (ou de la surface de Riemann du Logarithme) de sommet 0. Soient f une fonction holomorphe sur V et $\widehat{f} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \in \mathbb{C}[\![x]\!]$. On dit que f est asymptotique Gevrey d'ordre $s = 1/k$ à $\widehat{f}$ sur V si pour tout sous-secteur compact W de $V \cup \{0\}$ et tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe des réels $C_W, A_W > 0$ tels que

$$|x|^{-n} \left| f(x) - \sum_{p=0}^{n-1} a_p x^p \right| < C\ (n!)^{1/k}\ A^n,$$

pour tout $x \in W$.

L'ensemble des fonctions holomorphes sur V admettant un développement asymptotique Gevrey d'ordre $s = 1/k > 0$ à l'origine (muni de $+, \cdot, x^2 d/dx$) est une $\mathbb{C}$-algèbre diﬀérentielle notée $A_{1/k}(V)$.

(9) On montre l'équivalence entre les trois propriétés (a), (b), (c) convenablement formulées. J'ai remarqué l'équivalence entre (a) et (b) en 1978 ; celle entre (a) et (c) m'a été signalée un peu plus tard par B. Malgrange.

Si V est un secteur ouvert d'ouverture $< \pi/k$ (« petit secteur ») on a une suite exacte d'algèbres différentielles :

$$0 \longrightarrow A^{<-k}(V) \longrightarrow A_{1/k}(V) \xrightarrow{J} \mathbb{C}[\![x]\!]_{1/k} \longrightarrow 0.$$

La surjectivité de l'application J est le théorème de Borel-Ritt-Gevrey (que l'on prouve en utilisant une « transformation de Laplace incomplète »).

On a l'analogue du théorème fondamental des développements asymptotiques, le *Théorème fondamental des développements asymptotiques Gevrey* [70] :

Théorème. *Soient $G(x, Y, \dots, Y_n)$ une fonction analytique de $n+2$ variables et $\widehat{f} \in \mathbb{C}[\![x]\!]_{1/k}$ une solution série formelle Gevrey d'ordre $1/k$ de l'équation différentielle :*

(1) $\quad G(x, y, \dots, y^{(n)}) = 0 \qquad$ *(i.e., $G(x, \widehat{f}, \dots, \widehat{f}^{(n)}) = 0$).*

Alors il existe un réel $k' > 0$ tel que pour tout secteur ouvert V de sommet l'origine, d'ouverture $< \inf(\pi/k, \pi/k')$, de rayon assez petit, il existe une fonction f solution de l'équation différentielle (1), asymptotique sur V à $\widehat{f}$ au sens Gevrey d'ordre $1/k$.

Ce théorème prend tout son intérêt si l'on tient compte du théorème de Maillet [44] :

Théorème. *Soient $G(x, Y, \dots, Y_n)$ une fonction analytique de $n+2$ variables et $\widehat{f} \in \mathbb{C}[\![x]\!]$ une solution série formelle de l'équation différentielle :*

(1) $\quad G(x, y, \dots, y^{(n)}) = 0 \qquad$ *(i.e., $G(x, \widehat{f}, \dots, \widehat{f}^{(n)}) = 0$).*

Alors il existe un réel $k > 0$ tel que la série formelle $\widehat{f}$ soit Gevrey d'ordre $1/k$.

Maillet a démontré ce théorème en utilisant des estimations directes. Le résultat est en général loin d'être optimal (le réel k n'est pas le plus petit possible). Nous reviendrons plus loin sur cette question (cf. 3.1 ci-dessous).

Pour préparer la suite (et expliquer les relations entre les observations (a) et (b) ci-dessus) je vais traduire plus « géométriquement » le concept de série Gevrey en introduisant la notion de « quasi-fonction k-précise ». (Dans la littérature en référence on utilise en fait un peu de cohomologie des faisceaux, mais je souhaite ici communiquer les idées fondamentales en restant à un niveau technique élémentaire.)

On considère un secteur ouvert V de C (qui peut être un disque épointé D^*) ou de la surface de Riemann du Logarithme. On va utiliser des recouvrements $\{V_i\}_{i\in I}$ de V. Tous ces recouvrements seront supposés finis, les V_i ayant le même rayon que V, et les intersections 3 à 3 étant vides. On supposera aussi $I = [1, m]$ et on numérotera les V_i dans le sens des aiguilles d'une montre. On notera $V_{i,i+1} = V_i \cap V_{i+1}$ (si $V = D^*$, « $m + 1 = 0$ »). On considérera des « 0-cochaînes holomorphes » ; ce sont des suites $\{f_i\}$, avec f_i holomorphe sur V_i et les « 1-cobords » associés (1-cochaînes) : ce sont les suites $\{h_i\}$, avec $h_i = f_{i+1} - f_i$.

Soit $k > 0$. Par définition une quasi-fonction k-précise sur le secteur V est la donnée d'une 0-cochaîne holomorphe $\{f_i\}$ associée à un recouvrement $\{V_i\}_{i\in I}$, les $h_i = f_{i+1} - f_i$ étant à décroissance exponentielle d'ordre k sur $V_{i,i+1}$. De plus on « identifie » deux telles données $(\{f_i\}; \{V_i\}_{i\in I})$ et $(\{g_j\}; \{W_j\}_{j\in J})$ si chaque fois que l'intersection $V_i \cap W_j$ est non vide, $f_i - g_j$ est à décroissance exponentielle d'ordre k sur cette intersection.

En d'autres termes la notion de quasi-fonction k-précise formalise la notion de fonction holomorphe « connue à précision exponentielle d'ordre k près ». Une quasi-fonction k-précise est dite bornée si les f_i le sont.

En recouvrant un disque épointé D^* par des secteurs d'ouverture $< \pi/k$ et en utilisant le théorème de Borel-Ritt-Gevrey, on peut associer à toute série Gevrey $\widehat{f} \in \mathbb{C}[\![x]\!]_{1/k}$ une quasi-fonction k-précise *unique* (modulo l'identification faite) : sa quasi-somme (analogue à la fonction somme d'une série convergente) ; si $\{f_i\}$ représente la quasi-somme de $\widehat{f}$, $f_i \sim \widehat{f}$ sur V_i au sens Gevrey d'ordre $1/k$. Tout comme une fonction holomorphe bornée dans un disque épointé D^* est somme d'une série convergente (principe des singularités inexistantes de Riemann), une quasi-fonction k-précise bornée dans un disque épointé D^* est quasi-somme d'une série Gevrey d'ordre $1/k$.

Ce résultat (qui comme le résultat usuel est prouvé en utilisant l'intégrale de Cauchy [61], [72, 71], [73, Th. 3.2]) est *essentiel*. Grâce à lui nous disposons d'une méthode « cohomologique » pour prouver qu'une série est Gevrey : cela se vérifie sur des « corrections infiniment plates » dont il s'agit d'étudier la décroissance exponentielle. Cette méthode s'est révélée plus puissante que les méthodes usuelles (estimation directe des coefficients, théorèmes des fonctions implicites,...). Elle permet entre autres une linéarisation des problèmes (cf. 3).

Les bases de la théorie asymptotique Gevrey et de la théorie de la k-sommabilité (cf. 2.3, ci-dessous), que j'ai retrouvées et développées à partir de 1978, datent en fait du début de ce siècle et sont dues au mathématicien anglais G. Watson [80, 81]. Il ne semble pas que Watson ait eu beaucoup de succès avec ces travaux et ses idées ont été bien oubliées(10). On trouve encore aujourd'hui des échos des dures critiques qu'a du subir Watson dans deux des plus fameux (et des meilleurs...) livres sur les théories asymptotiques [17], [56] : Dingle écrit à propos des « développements asymptotiques Gevrey » et de la sommabilité associée introduits par Watson :

At the cost of considerable complication the central deficiency of Poincaré's spécification can be removed...

Enough has been said to exemplify the involved nature of this definition... Confirmation along these lines of a complete asymptotic expansions demands too much advance and advanced knowledge... to make the idea deceptively straightforward as it appears at root, a workable basis of definition except for simple asymptotic expansions derived by elementary means...

Olver est encore plus dur [56, p. 543] :

Unfortunately a satisfactory definition of complete validity is unavailable. Another drawback to Watson's theory is the need for properties of the remainder term which are likely to be available only when

(10)Il faut toutefois signaler que ces travaux ont motivé la théorie des classes de fonctions quasi-analytiques de Denjoy-Carleman [13] (via [55]), qui réapparaît dans les dernières recherches de J. Ecalle sur la sommabilité des séries divergentes : « fonctions cohésives ».

a realistic bound for the remainder term is known. The theory is then largely unnecessary.

Nous espérons que la suite de ces notes convaincra le lecteur de la totale inexactitude de ces jugements. (L'erreur d'appréciation est très surprenante dans le cas de Dingle qui a parfaitement compris l'importance des erreurs exponentiellement petites en théorie asymptotique et est donc passé très près du bon point de vue !)

2.2. La k-sommabilité. Soit $k > 0$. Si V est un secteur ouvert d'ouverture $< \pi/k$ (« petit secteur ») on a vu que l'on a une suite exacte d'algèbres différentielles :

$$0 \longrightarrow A^{<-k}(V) \longrightarrow A_{1/k}(V) \xrightarrow{J} \mathbb{C}[\![x]\!]_{1/k} \longrightarrow 0.$$

La situation est très différente si V est un secteur ouvert d'ouverture $> \pi/k$ (« grand secteur »). On a alors une suite exacte d'algèbres différentielles :

$$0 \longrightarrow A_{1/k}(V) \xrightarrow{J} \mathbb{C}[\![x]\!]_{1/k} \longrightarrow 0.$$

Dans ce cas l'application J n'est plus surjective. Elle est par contre injective, d'après un résultat de Watson [80] :

Théorème. *Soient un réel $k > 0$ et un secteur ouvert V, de sommet l'origine, d'ouverture $> \pi/k$. Soit f une fonction holomorphe sur V, à décroissance exponentielle d'ordre k sur V. Alors f est identiquement nulle.*

Ce théorème est une conséquence du théorème de Phragmèn-Lindelöf (qui est une variante du principe du maximum).

Ainsi, sur un « grand secteur », pour la somme d'une série formelle Gevrey, on perd l'existence, mais on gagne l'*unicité*. Cela conduit à la notion suivante de sommabilité :

Théorème. *Soient un réel $k > 0$ et une direction d fixés. Une série formelle $\widehat{f}$ est dite k-sommable dans la direction d, s'il existe une fonction f holomorphe sur un secteur V, de bissectrice d, d'ouverture $> \pi/k$, asymptote à $\widehat{f}$ au sens Gevrey d'ordre $1/k$ sur V.*

Dans ces conditions la fonction f est unique (au secteur de définition V près), d'après le théorème de Watson. On dira que f est la *somme* de $\widehat{f}$ dans la direction d au sens de la k-sommabilité.

On note $f = S_{k;d}\ \widehat{f}$, et on désigne par $\mathrm{C}\{x\}_{1/k;d}$ l'ensemble des séries k-sommables dans la direction d. On vérifie immédiatement que $\mathrm{C}\{x\}_{1/k;d}$ est une sous-algèbre différentielle de $\mathrm{C}[\![x]\!]_{1/k}$, et que l'application

$$S_{k;d} : \ \mathrm{C}\{x\}_{1/k;d} \longrightarrow A_d$$

est un homomorphisme injectif d'algèbres différentielles. (On a noté A_d l'algèbre des germes de fonctions holomorphes sur des secteurs ouverts bissectés par d, d'ouverture et rayons arbitraires.)

Cette définition de la k-sommabilité est agréable (et fort utile ; par exemple pour *vérifier* la k-sommabilité d'une série solution formelle d'une équation fonctionnelle analytique), mais elle ne permet pas de *calculer* explicitement la somme. On utilise pour cela une définition équivalente (l'équivalence est facile) :

Définition. Soient un réel $k > 0$ et une direction d fixés. Une série formelle $\widehat{f}$ est dite k-sommable dans la direction d, si sa transformée de Borel formelle de niveau k : $\widehat{\phi} = \widehat{\mathcal{B}}_k\ \widehat{f}$ est convergente et si sa somme (usuelle) $\phi = S\widehat{\phi}$ se prolonge analytiquement en une fonction (toujours notée) ϕ holomorphe et à croissance exponentielle d'ordre au plus k sur un secteur ouvert bissecté par d.

Dans ces conditions on dit que

$$f(x) = k \int_d \phi(\xi)\ e^{-\xi^k/x^k}\ \xi^{k-1}\ d\xi = \mathcal{L}_{k;d}\ \widehat{f}(x)$$

est la somme de $\widehat{f}$ dans la direction k, au sens de la k-sommabilité.

L'opérateur

$$\widehat{\mathcal{B}}_k : \mathrm{C}[\![x]\!] \longrightarrow \mathrm{C}[\![x]\!]$$

a été défini en 1.5. On notera que l'opérateur de Laplace de niveau k : $\mathcal{L}_{k;d}$, introduit dans cette définition, a un domaine de définition plus *large* que l'opérateur de même nom introduit en 1.5. On a

$$S_{k;d} = \mathcal{L}_{k;d} \cdot_d S\ \widehat{\mathcal{B}}_k.$$

Pour $k = 1$ on retrouve un procédé de sommation dû à E. Borel (sommation de Borel : en fait le procédé original de Borel est un peu plus général).

On peut aussi sommer une série k-sommable dans la direction d en utilisant une méthode abélienne, la sommation de Hardy-Jurkat (qui n'utilise pas explicitement le paramètre k) :

Théorème. *Soit $k > 0$. Soit d une direction issue de l'origine. Soit $\widehat{f} \in \mathbb{C}[\![x]\!] = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série formelle k-sommable dans la direction d. Sa somme f dans la direction d se prolonge analytiquement le long d'un intervalle ouvert maximal γ_d porté par d en une fonction toujours notée f. Alors, si x_0 est un point de γ_d :*

$$\lim_{t \to 0; t>0} \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \sum_{n=3}^{+\infty} a_n x^n e^{-tn \log n \, \log(\log n)}\right)$$

existe et est égale à $f(x_0)$.

On démontre ce résultat dû à Jurkat [35] (notre énoncé est légèrement plus précis que celui de [35]), en se ramenant (en utilisant des résultats de l'auteur de ces notes) au cas ou les coefficients a_n de la série k-sommable $\sum a_n x^n$ sont les « moments » d'une fonction ϕ définie sur $[0, a] \subset \mathbb{R}^+$ à décroissance exponentielle d'ordre k à l'origine[(11)] : $a_n = \int_0^a \phi(t)\, t^{-(n+1)}\, dt$.

Pour préparer l'étude de la multisommabilité on va reformuler la notion de série k-sommable de façon un peu plus « géométrique » en utilisant la notion de quasi-fonction :

Soient $k > 1/2$ et $\widehat{f} \in \mathbb{C}[\![x]\!]_{1/k}$. Par définition une k-suite associée à $\widehat{f}$, dans la direction d, est une suite (f_1, f_2), où f_2 est la quasi-fonction k-précise quasi-somme de $\widehat{f}$ et où f_1 est une fonction holomorphe sur un secteur V de $\mathbb{C}$, de bissectrice d et d'ouverture $> \pi/k$; f_1 étant égal comme quasi-fonction k-précise à la restriction de f_2 à V.

D'après le théorème de Watson, si une telle k-suite existe elle est unique. On vérifie immédiatement qu'une telle k-suite existe si et seulement si $\widehat{f}$ est k-sommable dans la direction d ; de plus f_1 est alors la somme de $\widehat{f}$, dans la direction d, au sens de la k-sommabilité.

---

(11) Dans le cas où $k = 1$ et où la fonction ϕ est à valeurs réelles positives la somme de Borel peut être calculée en transformant la série de puissances $\sum a_n x^n$ en une *fraction continue* convergente (Laguerre, Stieltjes, Borel [8, Chap. 2], Padé...).

2.3. La multisommabilité. Après la découverte par Émile Borel de la Borel-sommabilité, rapidement généralisée en « k-sommabilité » par Leroy [39] et Nevanlinna [55], de nombreux mathématiciens ont cherché à montrer que les solutions séries formelles des équations différentielles algébriques sont toujours k-sommables. C'était déjà le problème étudié par Maillet dans [44] en 1903. Malheureusement, comme je l'ai annoncé en 1979 dans [62], ceci est faux, pour une raison au fond assez évidente, et il est étonnant que cette remarque n'ait pas été faite antérieurement. Intuitivement, si $k \neq k'$, les procédés de k-sommabilité et k'-sommabilité sont « assez loin l'un de l'autre » et ne sont guère comparables : si $k < k'$, les estimations asymptotiques exigées pour la k'-sommabilité sont *plus* strictes ; par contre l'ouverture du secteur exigée (supérieure à π/k') est plus petite (on est *moins* strict sur l'ouverture du secteur). Cette intuition est confirmée par le théorème (« taubérien ») suivant [64] :

Théorème. *Soient k et k' deux réels, avec $k' > k > 0$. Alors*

$$\mathbb{C}[\![x]\!]_{1/k} \cap \mathbb{C}[\![x]\!]_{1/k'} = \mathbb{C}\{x\}.$$

Pour construire le contre-exemple cherché, on est alors conduit à considérer la somme $\widehat{f}$ d'une solution formelle $\widehat{f}_1$ k_1-sommable d'un opérateur différentiel linéaire algébrique D_1 et d'une solution formelle $\widehat{f}_2$ k_2-sommable d'un opérateur différentiel linéaire algébrique D_2. Cette somme est solution d'un opérateur différentiel linéaire algébrique D.

L'exemple le plus simple consiste à prendre pour $\widehat{f}_1$ la série d'Euler, et pour $\widehat{f}_2$ la série d'Euler où l'on a remplacé x par x^2. Ainsi $\widehat{f}_1$ est 1-sommable, $\widehat{f}_2$ est 2-sommable, mais

$$\widehat{f} = \widehat{f}_1 + \widehat{f}_2$$

$$\widehat{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \; n! x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \; n! x^{2n+2}$$

n'est k-sommable pour *aucun* réel $k > 0$. De plus $\widehat{f}$ est solution des équations différentielles linéaires algébriques suivantes[12] : $Dy = 0$, avec

$$D = \left(\frac{d}{dx}\right)^5 \left(x^5(2-x)\frac{d^2}{dx^2} - x^2(2x^3 - 5x^2 - 4)\frac{d}{dx} + 2(x^2 - x + 2)\right)$$

et

$$x^5(2-x)y'' - x^2(2x^3 - 5x^2 - 4)y' + 2(x^2 - x + 2)y = -3x^4 + 10x^3 + 2x^2 + 4x.$$

Si l'on veut un procédé de sommation apte à sommer les solutions formelles des équations différentielles algébriques (même seulement linéaires), on voit qu'il semble raisonnable de chercher un procédé permettant de sommer les *sommes* finies de séries k-sommables (dans une même direction d fixée) pour des k *différents*. On peut évidemment penser que si $\widehat{f} = \widehat{f}_1 + \widehat{f}_2$, on peut définir la somme de $\widehat{f}$ comme somme de celles de $\widehat{f}_1$ et $\widehat{f}_2$. Mais il apparaît immédiatement une difficulté : il faut montrer que la somme de $\widehat{f}$ ainsi obtenue est indépendante de la décomposition (i.e., du choix de $\widehat{f}_1$ et $\widehat{f}_2$). De plus nous voulons travailler avec une algèbre et il faudra donc étudier la décomposition en somme d'un produit. Enfin si l'on veut appliquer tout cela aux équations différentielles (linéaires ou non), il faudra étudier la décomposition en somme de séries k-sommables (dans une même direction) d'une solution série formelle d'une telle équation. Après de nombreuses années et grâce aux efforts de plusieurs mathématiciens toutes ces questions ont reçu des réponses satisfaisantes. La façon la plus simple de définir la « multisommabilité » est d'utiliser le

Théorème. *Soit d une direction issue de l'origine. La somme*

$$\sum_{k>1/2} \mathbb{C}\{x\}_{1/k;d}$$

de sous-espaces vectoriels complexes de $\mathbb{C}[\![x]\!]$ est une sous-algèbre différentielle de $(\mathbb{C}[\![x]\!], x^2 d/dx)$. De plus, il existe un homomorphisme

---

[12]N.d.E. : une référence était faite au livre à paraître *Asymptotic expansions with Gevrey estimates and cohomological methods* par Ramis et Sibuya ; ce livre n'est jamais paru.

injectif d'algèbres différentielles unique

$$S_d : \sum_{k>1/2} \mathrm{C}\{x\}_{1/k;d} \longrightarrow A_d$$

tel que la restriction de S_d à chaque espace $\mathrm{C}\{x\}_{1/k;d}$ ($k > 1/2$) coïncide avec l'opérateur de k-sommation dans la direction d :

$$S_{k;d} : \mathrm{C}\{x\}_{1/k;d} \longrightarrow A_d.$$

En remplaçant dans l'énoncé du théorème la variable x par une ramification variable $x^{1/m}$ $(m \in \mathrm{N}^*)$, on obtient un homomorphisme injectif d'algèbres différentielles (toujours noté $S_{k;d}$)

$$S_{k;d} : \bigcup_{m\in\mathrm{N}^*} \sum_{k>1/2} \mathrm{C}\{x^{1/m}\}_{1/k;d} \longrightarrow A_d.$$

On note

$$\mathrm{C}\{x\}_{.;d} = \bigcup_{m\in\mathrm{N}^*} \sum_{k>1/2} \mathrm{C}\{x^{1/m}\}_{1/k;d} \cap \mathrm{C}[\![x]\!];$$

$\mathrm{C}\{x\}_{.;d}$ est une sous-algèbre différentielle de

$$\bigcup_{m\in\mathrm{N}^*} \sum_{k>1/2} \mathrm{C}\{x^{1/m}\}_{1/k;d},$$

contenant l'algèbre $\mathrm{C}\{x\}_{1/k;d}$, pour tout $k > 0$, car

$$\mathrm{C}\{x^{1/m}\}_{1/k;d} \cap \mathrm{C}[\![x]\!] = \mathrm{C}\{x\}_{1/mk;d},$$

et on obtient un homomorphisme injectif d'algèbres différentielles

$$S_{k;d} : \mathrm{C}\{x\}_{.;d} \longrightarrow A_d.$$

dont la restriction à chaque algèbre $\mathrm{C}\{x\}_{1/k;d}$ ($k > 0$) coïncide avec l'opérateur de k-sommation dans la direction d.

On dit qu'une série formelle $\widehat{f} \in \mathrm{C}\{x\}_{.;d}$ est *multisommable dans la direction* d.

Soient $k_1, \ldots, k_r$ des réels, avec $k_1 > \cdots > k_r > 0$ et d une direction issue de l'origine. Si $\widehat{f} \in \sum_{i=1}^{r} \mathrm{C}\{x\}_{1/k_i;d}$, on dit que $\widehat{f}$ est $(k_1, \ldots, k_r)$-sommable dans la direction d, et on note $\widehat{f} \in \mathrm{C}\{x\}_{1/k_1,\ldots,1/k_r;d}$.

Il existe deux preuves assez différentes du théorème que nous venons d'énoncer. La première utilise la théorie de l'accélération de Jean Ecalle[13], et généralise l'approche par formule intégrale et prolongement analytique (Borel-Laplace) de la k-sommabilité. Elle est détaillée dans [52]. La seconde, due à B. Malgrange et J.-P. Ramis [48], plus « géométrique », utilise essentiellement la notion de *correction exponentiellement petite*. En gros on procède ainsi :

On *définit* la notion de multisommabilité de la façon suivante : Soient $k_1, \dots, k_r$ des réels, avec $k_1 > \cdots > k_r > 0$ et une direction d issue de l'origine. Soit $\widehat{f} \in \mathbb{C}[\![x]\!]_{1/k_r}$. Soient $V_1, \dots, V_r$ des secteurs ouverts de même rayon et de même bissectrice d, emboîtés : $V_1 \subset \cdots \subset V_r$. On suppose $ouvV_i > \pi/k_i$. Une $(k_1, \dots, k_r)$-suite associée à $\widehat{f}$ est la donnée d'une suite $(f_1, \dots, f_r, f_{r+1})$, où f_1 est une fonction holomorphe sur le secteur V_1, f_{r+1} est la quasi-fonction k_r-précise définie par $\widehat{f}$, et f_2,...,f_r sont des quasi-fonctions respectivement k_1,...,k_{r-1}-précises définies respectivement sur les secteurs V_2,...,V_{r-1} ; la restriction de f_{i+1} à V_i coïncidant avec la quasi-fonction k_i-précise associée à la quasi-fonction k_{i-1}-précise f_i, pour $i = 1, \dots, r$ (par convention $k_0 = +\infty$).

Le théorème « de quasi-analyticité relative » que nous énoncerons plus loin permet de voir que, s'il existe une $(k_1, \dots, k_r)$-suite associée à $\widehat{f}$, elle est *unique*. Dans ces conditions on dira que $\widehat{f}$ est multisommable dans la direction d et que f_1 est sa *somme* dans la direction d. Il est alors facile de vérifier que $\widehat{f} \to f_1$ est un homomorphisme injectif d'algèbres différentielles (f_1 admet $\widehat{f}$ pour développement asymptotique à l'origine). En travaillant un peu plus on obtient les propriétés de décomposition en sommes de séries k-sommables décrites plus haut.

Théorème. *Soient $k' > k > 0$. Soit V un secteur ouvert du plan complexe (ou de la surface de Riemann du Logarithme) de sommet l'origine, d'ouverture $> \pi/k$. Soit f une quasi-fonction sur V, k'-précise et à décroissance exponentielle d'ordre k sur V (i.e., f est représentée par une 0-cochaîne $\{f_i\}$, avec f_i à décroissance exponentielle*

[13] N.d.E. : une référence est donnée au livre *Introduction à l'accélération et à ses applications* de J. Ecalle, qui n'est jamais paru.

d'ordre k sur V_i et $f_{i,i+1}$ à décroissance exponentielle d'ordre k' sur $V_{i,i+1}$). Alors f est une quasi-fonction k'-précise nulle sur V (i.e., les f_i sont à décroissance exponentielle d'ordre k' sur V_i).

Ce théorème est dû à B. Malgrange [47]. Il généralise le théorème de Watson énoncé en 2.3 (l'énoncé est similaire, les quasi-fonctions remplaçant les fonctions).

Le théorème de quasi-analyticité relative de Malgrange est équivalent à un théorème « taubérien » de Martinet et Ramis [69, Chap. 2, Prop. 4.3] :

Théorème. *Soient $0 < k' < k$, $\kappa = kk'/(k-k')$, et d une direction issue de l'origine. Si la série formelle $\widehat{f} \in \mathbb{C}[\![x]\!]_{1/k}$ est k'-sommable dans la direction d, alors elle est k-sommable dans toute direction du secteur de bissectrice d et d'ouverture π/κ.*

Une forme très voisine de ce théorème avait déjà été obtenue par G. H. Hardy (avec $k'/k = 2$) [32] et son élève Good [31].

G. H. Hardy ([34, 6.1, p. 121]) écrivait à propos de la nature des « théorèmes taubériens » :

« There is another limit, of a less obvious kind, to the e ectiveness of these methods, and of all that have proved useful. Every method will fail to sum series which diverge too rapidly ; and it will also fail to sum divergent series whose divergence is too slow(14). *The theorems which embody this principle belong to the class which... are called « Tauberian ». They assert that if a series is summable (P), and satisfies some further condition K_P (which will vary with the method P, but will in any case imply a certain slowness of possible divergence), then it is convergent. »*

Ce principe a été en un certain sens généralisé plus tard, suivant des idées de Hardy et Littlewood. Citons Good ([31, p. 145]), qui compare deux méthodes de sommabilité *f* et *g* :

« Quite often then we have The Hardy-Littlewood principle of summability : if f is more widely applicable than g, and if g is applicable and f e ective, then g is e ective.

---

(14)C'est Hardy qui souligne.

Le théorème taubérien énoncé plus haut illustre bien ce dernier principe.

L'inconvénient de l'approche de la multisommabilité que nous venons d'esquisser est qu'elle ne fournit pas de procédé explicite commode pour calculer la somme. Pour obtenir un tel procédé on peut utiliser l'accélération, que nous ne décrirons pas ici (on pourra se reporter à l'article introductif [40]). On peut aussi employer une méthode d'itération de transformées de Laplace (de niveaux différents) due à Balser [2]. On procède ainsi :

Soient $k_1 > \cdots > k_r > 0$. On définit des réels strictement positifs $\kappa_1, \ldots, \kappa_r$: $1/\kappa_i = 1/k_i - 1/k_{i-1}$ ($i = 2, \ldots, r$) et $1/\kappa_1 = 1/k_1$. On a alors

$$\frac{1}{k_i} = \frac{1}{\kappa_1} + \cdots + \frac{1}{\kappa_i},$$

pour $i = 1, \ldots, r$.

Désignons par $\cdot_d$ le prolongement analytique le long de la direction d.

Théorème. *Soit d une direction issue de l'origine. Soient $k_1 > \cdots > k_r > 0$ et $\kappa_1, \ldots, \kappa_r$ comme ci-dessus. Pour $\widehat{f} \in \mathbb{C}[\![x]\!]$ les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *$\widehat{f}$ est $(k_1, \ldots, k_r)$-sommable dans la direction d ;*

(ii) *$\widehat{\mathcal{B}}_{\kappa_r} \ldots \widehat{\mathcal{B}}_{\kappa_1} \widehat{f}$ est une série convergente et, pour tout $i = r, \ldots, 2$, la fonction*

$$\cdot_d\, \mathcal{L}_{\kappa_i} \cdot_d \ldots \mathcal{L}_{\kappa_r} \cdot_d S\, \widehat{\mathcal{B}}_{\kappa_r} \ldots \widehat{\mathcal{B}}_{\kappa_1} \widehat{f}$$

est holomorphe et à croissance exponentielle d'ordre κ_{i-1} dans un secteur convenable bissecté par d.

Si ces conditions sont réalisées

$$\mathcal{L}_{\kappa_1} \cdot_d \ldots\, \mathcal{L}_{\kappa_r} \cdot_d S\, \widehat{\mathcal{B}}_{\kappa_r} \cdots \widehat{\mathcal{B}}_{\kappa_1} \widehat{f}$$

existe et est la somme (au sens de la multisommabilité) de $\widehat{f}$ dans la direction d.

Cette méthode est susceptible d'application numérique[(15)]. Une autre méthode de sommation explicite d'une série multisommable (élégante, mais peu exploitable numériquement...) est donnée par le résultat suivant, dû à Jurkat [35][(16)] :

Théorème. *Soit d une direction issue de l'origine. Soit $\widehat{f} \in \mathbb{C}[\![x]\!] = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série formelle multisommable dans la direction d. Sa somme f dans la direction d se prolonge analytiquement le long d'un intervalle ouvert maximal γ_d porté par d en une fonction toujours notée f. Alors, si x_0 est un point de γ_d :*

$$\lim_{t\to 0; t>0} \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \sum_{n=3}^{+\infty} a_n x^n e^{-tn \log n \, \log(\log n)}\right)$$

existe et est égale à $f(x_0)$.

En d'autre termes la multisommabilité implique la sommabilité par la méthode abélienne de Hardy-Jurkat.

On remarque que la mise en œuvre des procédés « explicites » de sommation basés sur la multisommabilité (sommation par accélération ou itération de transformées de Laplace) nécessite la connaissance des *« niveaux critiques »* $k_1, \dots, k_r$. Par contre la sommation par la méthode abélienne de Hardy-Jurkat ne nécessite pas cette connaissance : cette dernière méthode est « plus puissante » (elle somme plus de séries divergentes). (On a rencontré une situation analogue en sommant une série convergente dans son étoile de Mittag-Leffler : tandis que la méthode abélienne de Lindelöf permet de sommer dans toute l'étoile, la méthode $(\widehat{\mathcal{B}}_k, \mathcal{L}_k)$ de Borel-Laplace exige de choisir le paramètre k en fonction du point de l'étoile où l'on veut sommer.) On paye cette puissance par l'inefficacité numérique.

Ceci est une illustration d'un phénomène général découvert par Hardy et Littlewood : plus une méthode de sommation est puissante, moins elle est « fine ». Citons à nouveau Hardy [32, p. 153] :

[(15)] N.d.E. : la référence à l'article *Problèmes algorithmiques posés par la resommation* de J. Thomann (1990) n'est pas accessible.

[(16)] Le résultat prouvé par Jurkat est en fait un peu moins précis. Il faut reprendre sa démonstration et utiliser [48].

Littlewood and I have often emphasized a general principle which it is difficult to formulate precisely, but which may be indicated roughly as follows : the delicacy of a method of summation tends to be inversely proportional to its power.

3. Séries divergentes et systèmes dynamiques

3.1. Solutions formelles des équations différentielles. Je ne parlerai pas particulièrement ici du cas *linéaire*. (On se reportera à l'exposé [41] de M. Loday-Richaud à ces journées, et à [77] pour les aspects numériques.)

Je vais maintenant revenir sur la théorème de Maillet énoncé en 2.1. Le but de Maillet était en fait de sommer les solutions séries formelles d'équations différentielles algébriques. Il pensait que l'on pouvait y parvenir en utilisant la « k-sommabilité » et la propriété « Gevrey » qu'il a établie était une condition nécessaire pour cela. Nous avons vu qu'en fait ce programme n'était pas raisonnable tel quel et qu'il était nécessaire de recourir à la multisommabilité. Nous allons voir maintenant que c'est suffisant : toute série formelle solution d'une équation différentielle analytique (linéaire ou non) est multisommable dans toutes les directions sauf peut-être un nombre fini.

On commence par améliorer les estimations Gevrey dans le théorème de Maillet. Le cas le plus simple est le cas linéaire par lequel nous allons commencer.

Nous dirons qu'une série formelle $\widehat{f}$ est Gevrey d'ordre *exactement* $1/k$ si elle est d'ordre $1/k$ et s'il n'existe pas de réel $k' > k$ tel qu'elle soit d'ordre $1/k'$.

À tout germe à l'origine d'équation différentielle linéaire analytique

$$Dy = a_n\, y^{(n)} + \cdots + a_0\, y = 0$$

on associe un polygone de Newton $N(D)$ [61]. On a le résultat suivant :

Théorème. *Soit $Dy = 0$ un germe d'équation différentielle analytique à l'origine du plan complexe. Alors si $\widehat{f} \in \mathbb{C}[\![x]\!]$ est une solution formelle de cette équation, $\widehat{f}$ est convergente ou Gevrey d'ordre exactement $1/k$, k étant l'une des pentes strictement positives du polygone de Newton $N(D)$ de D.*

Ce résultat est dû à O. Perron dans le cas d'une équation différentielle linéaire algébrique et à moi-même dans le cas analytique [57], [61, 63]. (Dans le cas linéaire analytique les estimations de Maillet avaient été améliorées par Gingold [30].)

Passons au cas non linéaire. Considérons l'équation différentielle analytique

$$G(x, y, \dots, y^{(n)}) = 0. \tag{1}$$

Supposons que cette équation admette une solution formelle $\widehat{f} \in \mathbb{C}[\![x]\!]$. Au couple $(G, \widehat{f})$ on associe un polygone de Newton $N(G, \widehat{f})$ (« polygone de Newton de G le long de $\widehat{f}$ »). On peut obtenir des estimations précise dans le théorème de Maillet :

Théorème. *Soient $G(x, Y, \dots, Y_n)$ une fonction analytique de $n+2$ variables et $\widehat{f} \in \mathbb{C}[\![x]\!]$ une solution série formelle de l'équation différentielle :*

$$G(x, y, \dots, y^{(n)}) = 0. \tag{1}$$

Alors $\widehat{f}$ est convergente ou Gevrey d'ordre exactement $1/k$, k étant l'une des pentes strictement positives du polygone de Newton $N(G, \widehat{f})$.

B. Malgrange a d'abord montré qu'une solution formelle est toujours Gevrey d'ordre $1/k'$, k' étant la plus petite pente de $N(G, \widehat{f})$ [46]. Le résultat ci-dessus est dû à Y. Sibuya, qui l'a prouvé par voie cohomologique (i.e., en estimant, par linéarisation, la 1-cochaîne des erreurs exponentielles associée à la quasi-fonction définie par $\widehat{f}$) [72].

Les résultats ci-dessus s'améliorent en des résultats de multisommabilité.

Soient $k_1 > \dots > k_r > 0$ des nombres réels. Nous dirons que $\widehat{f} \in \mathbb{C}[\![x]\!]$ est $(k_1, \dots, k_r)$-sommable si elle l'est dans toutes les directions sauf peut-être un nombre fini.

Théorème. *Soient $G(x, Y, \dots, Y_n)$ une fonction analytique de $n+2$ variables et $\widehat{f} \in \mathbb{C}[\![x]\!]$ une solution série formelle de l'équation différentielle :*

$$G(x, y, \dots, y^{(n)}) = 0. \tag{1}$$

On désigne par $k_1 > \cdots > k_r > 0$ les pentes strictement positives du polygone de Newton $N(G, \widehat{f})$. Alors $\widehat{f}$ est $(k_1, \ldots, k_r)$-sommable.

Dans le cas linéaire une première démonstration de ce résultat est due à l'auteur de ces notes [62], [52] ; on trouve d'autres démonstrations dans [3] et [48]. Dans le cas non-linéaire le résultat vient d'être prouvé par Braaksma en utilisant une approche de J. Ecalle, une preuve due à Ramis et Sibuya, dans le style de [70], est en cours de rédaction.

3.2. Formes normales d'équations différentielles et de difféomorphismes. Considérons d'abord le cas des difféomorphismes holomorphes locaux à l'origine du plan complexe. Un tel difféomorphisme

$$f : (\mathbf{C}, 0) \longrightarrow (\mathbf{C}, 0)$$

est défini par une série convergente

$$f(x) = \lambda x + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n \in x\mathbf{C}\{x\},$$

avec $\lambda \in \mathbf{C}^*$.

Pour $|\lambda| \neq 1$, Poincaré a démontré qu'un tel difféomorphisme est *analytiquement conjugué* à son application linéaire tangente $f_0 : x \mapsto \lambda x$ à l'origine. En d'autres termes il existe un changement de coordonnées analytique $x = \psi(t)$ ($\psi'(0) \neq 0$) tel que $f = \psi \circ f_0 \circ \psi^{-1}$ ou $f \circ \psi = \psi \circ f_0$. Si $\lambda \neq 1$, on dit que λ est dans le domaine de Poincaré. Sinon il est dans le domaine de Siegel. Si λ est une racine de l'unité, on dit que l'on a un difféomorphisme résonnant. Si $\lambda = 1$ et si λ n'est pas une racine de l'unité, on montre que f est formellement linéarisable (il existe un changement de variables formel $\widehat{\psi}$ conjuguant f à f_0), mais n'est pas toujours analytiquement linéarisable ($\widehat{\psi}$ ne converge pas nécessairement). Nous ne parlerons pas plus ici de ce cas difficile dont l'étude met en jeu des problèmes d'approximation de réels par des rationnels. Le cas qui relève de notre étude est le cas résonnant. Dans ce dernier cas f n'est plus en général formellement linéarisable et le premier problème qui se pose est le problème de *classification formelle* des difféomorphismes analytiques résonnants. Pour simplifier l'exposé nous nous limiterons à partir de maintenant aux difféomorphismes f tangents à l'identité :

$$f(x) = x + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n \in x\mathsf{C}\{x\}.$$

Chaque classe d'équivalence formelle (i.e., modulo changement de variables formel) est représentée par une « forme normale » (convergente) dont le choix est arbitraire (on cherche la forme « la plus simple possible »). Il est commode de choisir pour formes normales l'ensemble paramétré par $(\beta, k, \lambda) \in \mathsf{C} \times \mathsf{N}^* \times \mathsf{C}$ des $f_{\beta,k,\lambda} = \exp(X_{\beta,k,\lambda})$, où $X_{\beta,k,\lambda}$ est le champ de vecteurs

$$X_{\beta,k,\lambda} = \beta \ \frac{x^k}{1 + \lambda x^k}.$$

On se ramène aisément au cas où $\beta = 2i\pi$ et on note $X_{2i\pi,k,\lambda} = X_{k,\lambda}$. Toujours pour simplifier l'exposition nous nous limiterons au cas où la forme normale est $f_{1,0}(x) = x/(1 - 2i\pi x)$ ($X_{1,0} = 2i\pi \ x^2 d/dx$). Par le changement de coordonnées homographique $x = 1/z$ sur la sphère de Riemann, la forme normale $f_{1,0}$ est conjuguée à la translation $T(z) = z - 2i\pi$. On remarque que la fonction $e^{1/x}$ est constante sur les orbites de $f_{1,0}$. Elle permet d'identifier l'espace des orbites de $f_{1,0}$ (« orbitfoil ») à la sphère de Riemann privée de 0 et ∞, c'est-à-dire à C^* (topologiquement c'est un cylindre $S^1 \times \mathsf{R}$). On notera dorénavant $f_{1,0} = f_0$. On a

$$f_0(x) = x - 2i\pi \ x^2 - 4\pi^2 \ x^3 + \cdots$$

Tout difféomorphisme local holomorphe de la forme

$$f(x) = x - 2i\pi \ x^2 - 4\pi^2 \ x^3 + O(x^4)$$

est *formellement* conjugué à f_0 (mais pas analytiquement en général). Plus précisément il existe alors un difféomorphisme formel tangent à l'identité *unique* $\widehat{\psi}$ tel que $f \circ \widehat{\psi} = \widehat{\psi} \circ f_0$. Ce difféomorphisme est « en général » divergent mais le point important est qu'il est 1-sommable dans toutes les directions sauf les demi-axes réels R^+ et R^-. Les sommes ψ_d de $\widehat{\psi}$, dans différentes directions d, se recollent quand d varie sans rencontrer un demi-axe réel. On obtient donc finalement *deux* sommes ψ^+ et ψ^- de $\widehat{\psi}$ (par en-dessus et par en-dessous) définies respectivement dans des « secteurs » d'ouverture 3π. L'intersection de ces « secteurs » est formée de deux « secteurs » d'ouverture π respectivement contenus dans $\text{Ré}\ x > 0$ et $\text{Ré}\ x < 0$. Sur chacun de ces deux secteurs il y a *deux* déterminations pour la somme, donc un *phénomène de Stokes*.

Nous nous proposons maintenant de classifier les difféomorphismes locaux holomorphes formellement conjugués à f_0, modulo équivalence analytique (deux tels difféomorphismes sont équivalent s'ils sont analytiquement conjugués). Le phénomène surprenant est que l'espace quotient est « énorme » : il est de dimension infinie. Essentiellement il est paramétré par les couples $(\varphi_0, \varphi_\infty)$ où φ_0 et φ_∞ sont des difféomorphismes locaux de la sphère de Riemann tangents à l'identité, respectivement en 0 et ∞, et par ailleurs *complètement arbitraires*.

En fait un difféomorphisme holomorphe local f formellement conjugué à f_0 est essentiellement classifié par son espace des orbites. Ce dernier se décrit aisément en utilisant le phénomène de Stokes :

Cet espace est une « courbe complexe non séparée » obtenue ainsi :

Chaque somme ψ^+ et ψ^- de $\widehat{\psi}$ conjuguant f et f_0 permet d'identifier un sous-ensemble de l'espace des orbites de f à l'espace des orbites de f_0, c'est-à-dire au « cylindre » $\mathsf{C}^* = P^1(\mathsf{C}) - \{0, \infty\}$. Si l'on compare ces deux identifications en utilisant les deux phénomènes de Stokes (dans les directions R^+ et R^-), on obtient deux copies de la sphère de Riemann $P^1(\mathsf{C})$ recollées en 0 et ∞ par des difféomorphismes analytiques tangents à l'identité φ_0 et φ_∞. On démontre (théorème « de synthèse ») qu'ils peuvent être choisis arbitrairement.

Les résultats qui précèdent sont dus à T. Kimura, J. Ecalle [19], B. Malgrange [45], Voronin.

Après avoir classifié les difféomorphismes résonnants, on peut se poser le problème analogue pour les germes, à l'origine $(0,0)$ de C^2, d'équations différentielles analytiques de la forme $\omega = Pdy + Qdx = 0$ (P et $Q \in \mathsf{C}\{x, y\}$. Le 1-jet à l'origine de ω est de la forme $J^1\omega = \lambda dy + \mu dx$. Si $\lambda, \mu \in \mathsf{C}^*$ et si $\lambda/\mu \in \mathsf{C} - \mathsf{R}$, on est dans le domaine de Poincaré et ω est analytiquement conjuguée à $J^1\omega$. Sinon la discussion est plus compliquée. Comme dans le cas des difféomorphismes nous

nous intéresserons seulement aux cas résonnants. Ce sont les cas où λ ou μ est nul, l'autre ne l'étant pas (cas dégénéré) et les cas où $\lambda, \mu \neq 0$ et $\lambda/\mu \in \mathsf{Q}^-$ (cas non dégénéré). Géométriquement (et par référence au cas réel), dans le cas dégénéré on a un *nœud-col* et dans l'autre un *col résonnant*.

Un nœud-col s'écrit

$$x^{k+1}dy + \lambda y dx + \cdots = 0,$$

avec $k \in \mathsf{N}^*$ et $\lambda \in \mathsf{C}$, et un col résonnant s'écrit

$$pdy + qdx + \cdots = 0,$$

avec $p, q \in \mathsf{N}^*$.

Comme dans le cas des difféomorphismes résonnants, les formes normales formelles sont paramétrées par un nombre fini de paramètres et les changements de coordonnées ramenant une équation résonnante à sa forme normale font intervenir des séries Gevrey. On prouve que ces séries sont k-sommables. Les équations différentielles résonnantes sont, à forme normale formelle fixée, essentiellement classifiées analytiquement par leur « espace de feuilles ». Cet espace est décrit en utilisant le phénomène de Stokes.

En fait la classification des équations est liée à celle des difféomorphismes via l'holonomie. Un nœud-col admet toujours une feuille analytique lisse pour solution à l'origine (variété forte). Un col résonnant admet toujours deux telles solutions (transverses). Bien sûr, il faut enlever l'origine : ces solutions sont donc au voisinage de l'origine des disques épointés. On dessine une transversale complexe à l'un de ces disques épointés, puis un lacet simple, d'origine celle de la transversale, dans le disque épointé. En relevant le lacet on obtient une permutation des feuilles qui se voit comme un difféomorphisme sur la transversale : c'est le difféomorphisme d'holonomie. Dans le cas d'un col résonnant la classification des équations s'identifie à celle de leurs holonomies. Dans le cas d'un nœud-col on n'obtient pas toutes les holonomies. Prenons par exemple la forme normale formelle de nœud-col

$$\omega_0 = x^2dy + ydx = 0.$$

Son holonomie est $f_0(x) = x/(1 - 2i\pi x)$.

Les nœuds-cols analytiques formellement conjugués à $\omega_0 = 0$ sont essentiellement classifiés par les paires de difféomorphismes locaux (analytiques et tangents à l'identité) $(\varphi_0, \varphi_\infty)$, en 0 et ∞, de la sphère de Riemann, où $(\varphi_0$ est arbitraire, mais où φ_∞ est une *translation*.

Ces résultats sont dus à J. Martinet et J.-P. Ramis [49, 50, 51], [45]. Ils jouent un rôle fondamental dans la réponse à certaines des conjectures de R. Thom sur les feuilletages holomorphes [54], et dans la résolution récente du « problème de Dulac » (finitude du nombre de cycles limites pour une équation différentielle algébrique $Pdy + Qdx = 0$ dans le plan réel)(17).

3.3. Perturbations singulières, retard à la bifurcation et canards. La théorie des développements asymptotiques Gevrey est, nous l'avons vu, très efficace pour étudier les singularités essentielles des équations différentielles. Il s'agit là de singularités de la *variable*. Cette théorie est également utilisable pour l'étude de certains problèmes faisant intervenir une singularités sur le *paramètre* : les problèmes de *perturbations singulières*.

Voici dans cette direction un résultat essentiel, dû à Y. Sibuya :

Théorème. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier fixé. On considère une équation différentielle de la forme*

$$\varepsilon^\sigma \frac{dy}{dx} = F(x, \varepsilon, y) = f(x, \varepsilon) + A(x, \varepsilon)y + \sum_{|p|>2} f_p(x, \varepsilon) y^p, \tag{1}$$

où $\sigma \in \mathbb{N}^*$, ε, $x \in \mathbb{C}$, $y \in \mathbb{C}^n$, f, F et les f_p prennent leurs valeurs dans $\mathbb{C}^n$, A prend ses valeurs dans $\mathrm{End}(n, \mathbb{C})$. On suppose que F est analytique en (x, ε, y) au voisinage de $(0, 0, 0)$, que $f(0, 0) = 0$ et que la matrice $A(0, 0)$ est inversible. Alors

(i) *l'équation* (1) *admet une solution formelle unique de la forme*

$$y = \widehat{f}(x) = \sum_{n>0} a_n(x)\ \varepsilon^n,$$

où les a_n sont des fonctions holomorphes dans un même disque D du plan des x ;

(17) Le problème de Dulac est un sous-problème de la deuxième partie du 16e problème de Hilbert.

(ii) *quitte à réduire le disque D, les a_n vérifient des estimations Gevrey d'ordre $1/\sigma$:*

$$\|a_n\| \; 6 \; C \, n!^{1/\sigma} \, A^n,$$

pour $C, A > 0$ convenables ($\|a_n\| = \sup_{x \in D} \|a_n(x)\|$).

Y. Sibuya a donné une preuve cohomologique de ce résultat dans [71]. (Il prouve en fait un résultat plus précis en construisant une 0-cochaîne f_i de solutions de (1), les f_i étant holomorphes en (x, ε), sur le produit de D et d'un secteur en ε, et asymptotiques Gevrey d'ordre $1/\sigma$ en ε, uniformément en x sur D, à $\widehat{f}$.) Dans le cas où $n = 1$ M. Canalis-Durand a donné une preuve du théorème par estimations directes [9]. Par ailleurs Schäffke a obtenu récemment une nouvelle preuve en se ramenant à une forme précisée du théorème de Maillet.

Suivant une idée de J. Martinet [68, 2], nous allons appliquer le résultat ci-dessus au problème du *retard à la bifurcation*. Il sera commode de se placer dans le cadre de l'Analyse Non Standard(18).

Une idée de base (due à J. Martinet [68, 1]) est de modéliser l'environnement classique de l'analyse numérique : une machine à calculer (pouvant être un mathématicien muni de papier et d'un crayon) *fournit une précision limitée dans le calcul numérique d'une fonction, et dispose d'une capacité limitée à maîtriser les grands nombres ; un nombre trop petit est déclaré nul, et un nombre trop grand est considéré comme infini* (overflow). On modélise cette situation par la donnée une fois pour toutes d'un nombre réel $\varepsilon' > 0$ infiniment petit : on ne « verra pas » pas un nombre complexe α de l'ordre de ε' (i.e., tel que α/ε' soit limité (non infiniment grand) ; par ailleurs un nombre α ne sera « a□ché » que s'il est en module infiniment petit devant $1/\varepsilon'$ (i.e., si $\alpha\varepsilon'$ est infiniment petit).

On peut alors recopier notre description antérieure des quasi-fonctions en remplaçant les corrections exponentiellement petites par des corrections de l'ordre de ε'. On obtient un « dictionnaire » entre

(18)On lira facilement ce qui suit au niveau heuristique. En fait ce discours est parfaitement rigoureux. Il est écrit avec le point de vue de Nelson sur l'A.N.S. [16], et la quantité d'A.N.S. nécessaire est...infinitésimale !

les deux points de vue dans une région (dans le plan (non standard) de la variable complexe ε) où la fonction e^{-a/ε^k} (avec a standard, ou limité) est de l'ordre de ε'.

L'origine du phénomène de retard à la bifurcation est le phénomène de compression-explosion exponentielle des trajectoires. La situation la plus simple où l'on observe ce phénomène est la suivante :

Soit

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu\, x \\ \dot{\mu} = \varepsilon \end{cases} \tag{1}$$

où $\varepsilon > 0$ est un réel infiniment petit fixé et μ, x des variables réelles.

À μ non nul fixé, on considère l'équation différentielle

$$\dot{x} = \mu x \tag{1_μ}$$

Le point $x = 0$ est un point stationnaire stable pour $\mu < 0$ et instable pour $\mu > 0$. Quand μ varie la stabilité change donc pour $\mu = 0$. Considérons maintenant la solution de (1) définie par les conditions initiales $x = x_0$ et $\mu = \mu_0 < 0$. Une intégration triviale montre que cette solution est

$$x = x_0\ e^{(\mu^2-\mu_0^2)/2\varepsilon}.$$

Elle est infiniment petite (exponentiellement en ε) pour $\mu \in]\mu_0, -\mu_0[$. Elle « descend presque verticalement » de (μ_0, x_0) à $(\mu_0, 0)$, longe « exponentiellement près » l'axe réel jusqu'à $(-\mu_0, 0)$, puis remonte « presque verticalement ». On a une « entrée » en $(\mu_0, 0)$ et une « sortie » en $(-\mu_0, 0)$ (à peu près...).

On considère maintenant un système (en dimension $p+1$) :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \dot{x} = F(x,\lambda) \\ \frac{d\lambda}{dt} &= \dot{\lambda} = \varepsilon \end{aligned} \tag{2}$$

où $\varepsilon > 0$ est un nombre complexe infiniment petit fixé (ou un « petit paramètre », au choix), x une variable dans $\mathbf{C}^p$, λ une variable complexe, F une fonction holomorphe à valeurs dans $\mathbf{C}^p$.

De (2) on déduit l'équation différentielle :

$$\varepsilon\,\frac{dx}{d\lambda} = F(x,\lambda). \tag{3}$$

Faisant $\varepsilon = 0$ on obtient la « courbe lente » $F(x, \lambda) = 0$. On suppose que cette courbe $\mathcal{C}_0$ est le graphe d'une fonction analytique $x = c_0(\lambda)$.

On fait maintenant les hypothèses suivantes :

(i) La matrice $\frac{\partial F}{\partial x}(0, 0)$ est inversible ;

(ii) La courbe lente $\mathcal{C}_0$ est transverse au champ

$$F(x, \lambda)\frac{\partial}{\partial x} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial \lambda}. \tag{$2'$}$$

Si la courbe lente est invariante par le champ, on est dans une situation très voisine de celle décrite avant. Il y a compression-explosion exponentielle. Le cas où la condition (ii) est vérifiée est plus délicat. On va montrer qu'il y a toujours compression-explosion exponentielle (dans un voisinage appréciable convenable de l'origine) en se « ramenant au cas précédent » en utilisant une quasi-courbe exponentiellement précise (quasi) invariante par le champ $(2')$.

Cette quasi-courbe est le « graphe » d'une quasi-fonction (quasi) solution de (3), que l'on obtient de la façon suivante :

D'après le théorème de Sibuya énoncé plus haut, l'équation (3) admet une solution formelle (formelle en ε, analytique en λ) :

$$\widehat{g}(\lambda, \varepsilon) = c_0(\lambda) + \sum_{n>1} c_n(\lambda)\ \varepsilon^n.$$

De plus les c_n sont tous holomorphes bornés sur un même disque D de rayon $r > 0$ (standard) du plan des λ, et satisfont des inégalités Gevrey d'ordre 1 :

$$\|c_n\| \ 6\ C\ n!\ A^n,$$

pour $C, A > 0$ convenables ($\|c_n\| = \sup_{x \in D} \|c_n(x)\|$).

La quasi-somme de cette série (obtenue par exemple par une transformation de Laplace incomplète) est 1-précise et est quasi-solution (i.e., solution à des corrections exponentielles d'ordre un près, du type $e^{-a/\varepsilon}$ (a positif limité)). (En fait on peut trouver un représentant $\{g_i\}$ de la quasi solution où les g_i sont des solutions exactes de (3).)

On conclut aisément (par exemple par un argument de « loupe exponentielle » [5]).

Les premiers résultats mathématiques sur le problème du retard à la bifurcation sont dus à Neishstadt. Sa méthode est une variante de la « quasi-sommation au plus petit terme » décrite plus haut : on fait un (grand) nombre N de changements de variables (N =partie entière de $1/\varepsilon$). Il existe aussi une approche très géométrique de problème due à J.-L. Callot (1991)).

Au lieu de faire dériver lentement un champ de vecteurs comme dans le problème que nous venons d'étudier, on peut faire dériver lentement une application d'itération :

Soit toujours $\varepsilon > 0$ un réel infiniment petit. On considère

$$\begin{aligned} F_\varepsilon : \mathrm{R} &\longrightarrow \mathrm{R} \\ (x, \lambda) &\longmapsto (f(x, \lambda), \lambda + \varepsilon). \end{aligned} \tag{4}$$

On suppose l'existence d'une courbe de points fixes analytique $c_0(\lambda)$.

Par exemple on peut faire dériver lentement l'application de Feigenbaum :

$$f(x, \lambda) = \lambda x(1 - x)$$

(qui fournit un exemple de chaos). On observe un retard à la bifurcation pour les « doublements de périodes ».

L'analyse de cette situation a été faite par A. Fruchard [23] et C. Baesens. La méthode de Fruchard suit les mêmes lignes que celle de Neishstadt ; celle de Baesens est une variante de l'argument de J. Martinet pour les champs :

Une courbe invariante pour (4) est le graphe d'une fonction $\lambda \mapsto U(\lambda, \varepsilon)$, avec $F(U(\lambda, \varepsilon), \lambda) = U(\lambda + \varepsilon, \varepsilon)$. Il existe (si $\partial_x F(\lambda, c_0(\lambda)) \neq 1$) une unique courbe invariante formelle :

$$\widehat{U}(\lambda, \varepsilon) = c_0(\lambda) + \sum_{n>1} c_n(\lambda)\ \varepsilon^n.$$

où les c_n sont holomorphes bornés sur un même disque. Cette série est en général divergente mais Gevrey 1 (Baesens). On conclut comme pour les champs (on a une quasi-courbe quasi-invariante).

Nous allons voir maintenant que si l'on supprime la condition d'inversibilité (i) dans l'analyse de J. Martinet, il peut se passer des phénomènes très intéressants : l'apparition de « canards ». Nous allons pour cela discuter l'équation de Van der Pol (sur laquelle le phénomène canard a été découvert [5]) du point de vue Gevrey. Nous suivons ici (après un rappel du point de vue original sur les canards) un travail récent de M. Canalis-Durand [10, 9].

On considère une forme singulièrement perturbée de l'équation de Van der Pol (1920) avec $\varepsilon > 0$ réel, infiniment petit :

$$\varepsilon\ddot{x} + (x^2 - 1)\dot{x} + x = 0. \tag{4}$$

On passe au « plan de Liénard », en posant $u = \varepsilon\dot{x} + x^3/3 - x$. On obtient

$$\begin{cases} \varepsilon\dot{x} = u - x^3/3 + x \\ \dot{u} = -x \end{cases} \tag{5}$$

Le champ de vecteurs $((u - x^3/3 + x)/\varepsilon, -x)$ est « lent-rapide » : sa composante horizontale est infiniment grande sauf sur la courbe lente (la cubique $u = x^3/3 - x$) où elle s'annule. La partie de la cubique entre les points $B(-1, 2/3)$ et $A(1, -2/3)$ est *répulsive*, le reste est *attractif*.

On montre que le système (5) a un cycle limite. Ce cycle est « lent-rapide ». Il est infiniment proche du cycle standard formé par deux arcs de la courbe lente (terminant en A et B) et deux segments horizontaux (partant de A et B), que l'on appelle son « ombre ». Par ailleurs le système a un point stationnaire $(0, 0)$. Ce point est *instable*.

Considérons maintenant l'équation de Van der Pol avec second membre :

$$\varepsilon\ddot{x} + (x^2 - 1)\dot{x} + x = a \tag{4}$$

où a est un paramètre réel.

Faisons varier le paramètre a entre 0 et 2 et observons la situation dans le plan de Liénard. Le point stationnaire $S(a)$ se déplace sur la cubique lente : on a $S(0) = (0, 0)$ et $S(1) = A$. Pour $0 < a < 1$ ce point est instable, pour $a > 1$ il est stable, mais le cycle limite a disparu : $a = 1$ est une *bifurcation de Hopf*. Le problème est de comprendre comment peut se passer cette bifurcation compte tenu du caractère lent-rapide du champ. En observant la variation de l'ombre du cycle limite au moment de sa disparition, on constate que pour certaines valeurs particulières cette ombre est obligée de longer un moment la partie répulsive de la courbe lente (entre A et B). Par définition ces valeurs du paramètre a correspondantes sont des « valeurs à canard » et les cycles correspondants sont des « canards » (avec ou sans tête selon que B est ou non dans leur ombre).

Pour avoir une valeur à canard il est évidemment nécessaire que a soit < 1 et infiniment proche de 1, mais on aimerait en savoir plus. On montre alors que toutes les valeurs à canard a_* ont un *même* « développement en ε-ombre »

$$1 + \sum_{n>1} c_n\ \varepsilon^n.$$

Cela conduit à penser que « les canards ont la vie brève ». En fait cette vie est exponentiellement courte : si a_1 et a_2 sont des valeurs à canard, on a $|a_1 - a_2| < e^{-b/\varepsilon}$ (pour b limité convenable).

Expérimentalement on constate que :

• Pour $\varepsilon = 1/20$ on observe les canards à peu près entre 0,993 490 9 et 0,993 491 5.

• Pour $\varepsilon = 1/100$ on observe les canards à peu près entre $0,9987404512$ et $0,998740\ 4513$, c'est-à-dire sur une plage de 10^{-10}... Il est donc très difficile d'attraper les canards, même si l'on connaît leur développement en ε-ombre.

Tout cela m'a conduit, vers 1980, à conjecturer que le développement en ε-ombre des valeurs à canard pour l'équation de Van der Pol est Gevrey 1. Outre les questions théoriques une réponse positive à cette conjecture avait pour moi l'intérêt de fournir une méthode numérique pour chasser le canard : si la série est Gevrey, en la « sommant » par une transformation de Laplace incomplète (ou une quasi-sommation au plus petit terme), on obtient une valeur définie à une correction exponentiellement petite en ε près. L'erreur est donc du même ordre de grandeur que la durée d'existence de la valeur à canard cherchée. Cette conjecture (avec son application numérique) a d'abord été vérifiée expérimentalement, puis elle a été prouvée récemment par M. Canalis-Durand [10, 9] (en utilisant entre autres l'amélioration du calcul par récurrence des coefficients c_n due à [82]).

M. Canalis-Durand montre aussi que le développement en ε-ombre de la trajectoire canard elle-même est aussi Gevrey 1 et reprouve ainsi l'existence des canards (par transformation de Laplace incomplète). Sa théorie s'applique à une famille de systèmes plus généraux que l'équation de Van der Pol (contenant des systèmes « classiques » : Brusselator...).

3.4. Les équations aux q-différences. On appelle équation linéaire algébrique aux différences (finies) dans le champ complexe une équation fonctionnelle de la forme

$$a_n(x)f(x+n)+\cdots+a_1(x)f(x+1)+a_0(x)f(x)=0,$$

où les a_i sont des polynômes (à coefficients complexes) et f une fonction inconnue. Par exemple

$$f(x+1)-xf(x)=0$$

est une équation aux différences admettant la fonction $f(x)=\Gamma(x)$ pour solution.

Ainsi on passe d'une équation différentielle à une équation aux différences en remplaçant l'automorphisme infinitésimal d/dx par l'automorphisme de translation $x\to x+1$. Celle-ci est une homographie de la sphère de Riemann admettant ∞ pour seul point fixe. On peut utiliser une homographie plus « générique » admettant deux points fixes distincts, par exemple $x\to qx$, avec q complexe non nul, qui admet pour points fixes 0 et ∞. On obtient alors la notion d'équation aux q-différences (linéaire algébrique) :

$$a_n(x)f(q^nx)+\cdots+a_1(x)f(qx)+a_0(x)f(x)=0.$$

On montre que les solutions séries formelles des équations aux différences analytiques, même non-linéaires, sont Gevrey : on a l'analogue du théorème de Maillet [29]. Par contre la situation est très différente pour les équations aux q-différences. Dans ce cas on n'a plus en général d'estimations Gevrey, mais seulement des estimations « q-Gevrey » (selon la terminologie récemment introduite par J.-P. Bezivin). Nous nous limiterons dans ce qui suit au cas où $|q|\neq 1$. Quitte à remplacer q par q^{-1}, on peut supposer $|q|>1$.

Soit $\widehat{f}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ une série formelle. On dit que $\widehat{f}$ est q-Gevrey de type s, si

$$|a_n|<C\ |q|^{sn(n+1)/2}\ A^n,$$

pour $C,A,s>0$ convenables. On dit que le type s est optimal s'il n'existe pas d'estimation du même genre avec $s'<s$.

À tout opérateur linéaire algébrique aux q-différences T on associe un « polygone de Newton » $N(T)$, par analogie avec le cas des opérateurs différentiels. On a le résultat suivant dû à J.-P. Bezivin :

Théorème. *Soit*

$$(1) \qquad T(f) = a_n(x)f(q^n x) + \cdots + a_1(x)f(qx) + a_0(x)f(x) = 0$$

une équation linéaire algébrique aux q-différences, avec $|q| > 1$. Alors il existe un nombre fini de nombre réels positifs $s_1 < \cdots < s_r$ donnés par les pentes du polygone de Newton $N(T)$, tels que toute solution série formelle $\widehat{f}$ de (1) ait la propriété suivante :

$\widehat{f}$ est convergente ou est q-Gevrey de type optimal l'un des s_i.

Il existe des équations linéaires algébriques aux q-différences du second ordre dont les solutions séries formelles divergent (Adams). Il y a donc des solutions divergentes d'équations aux q-différences qui *n'admettent pas d'estimations Gevrey*. En voici un exemple simple :

On définit un opérateur σ_q par $\sigma_q\ f(x) = f(qx)$. On note

$$\widehat{\Omega}(x,q) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\ q^{n(n+1)/2}\ x^{n+1}.$$

On a

$$x\sigma_q\ (q^{n(n+1)/2}\ x^{n+1}) = q^{(n+1)(n+2)/2}\ x^{n+2},$$

d'où

$$(1) \qquad (x\sigma_q + 1)\ \widehat{\Omega}(x,q) = \sigma_q\ \widehat{\Omega}(x,q) + \widehat{\Omega}(x,q) = x.$$

L'opérateur $x\sigma_q$ est l'analogue de l'opérateur différentiel $x^2 d/dx$, l'équation (1) est la q-analogue de l'équation d'Euler

$$\Big(x^2\frac{d}{dx} + 1\Big)y = x^2y' + y = x,$$

et la série $\widehat{\Omega}(x,q)$ est la q-analogue de la série d'Euler

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\ n!\ x^{n+1}.$$

Pour $q < 1$, la série $\widehat{\Omega}(x,q)$ est liée à la fonction θ_1 de Jacobi.

De

$$(\sigma_q - q)(x\sigma_q + 1) = qx\sigma_q^2 - x\sigma_q + q - 1$$

on déduit que la série $\widehat{\Omega}(x,q)$ est solution de l'équation aux q-différences du second ordre

$$(qx\sigma_q^2 - x\sigma_q + q - 1)f(x) = qxf(q^2x) - xf(qx) + (q-1)f(x) = 0.$$

Du point de vue de la sommabilité le cas des équations aux différences est délicat : les solutions formelles ne sont pas en général multisommables [20]. Pour les équations aux q-différences il faut reprendre la théorie en remplaçant « développements asymptotiques Gevrey » par « développements asymptotiques q-Gevrey » (la décroissance exponentielle est alors remplacée par des estimations du type

$$|f(x)| < e^{-\mu(\log x/\log q)^2}).$$

Il y a aussi des « q-analogues » des transformations de Borel et Laplace, et de la k-sommabilité : les nombres $n!$ sont les *moments* de la fonction e^{-u} :

$$\Gamma(n+1) = n! = \int_0^{+\infty} u^n \; e^{-u} \; du.$$

On calcule les moments de la fonction $q^{-v(v+1)/2}$ (pour q réel, $q > 1$) :

$$\mu_n = \int_0^{+\infty} u^n \; q^{-v(v+1)/2} \; du,$$

avec $v = \log u/\log q$ ($u = q^v$). On trouve :

$$\mu_n = \sqrt{2\pi \log q} \; q^{-1/8} q^{n(n+1)/2}$$

Remplaçant u par ξ/x, on obtient :

$$\Gamma(n+1) \; x^{n+1} = n! \; x^{n+1} = \int_0^{+\infty} \xi^n \; e^{-\xi/x} \; d\xi = \mathcal{L}(\xi^n)(x),$$

où $\mathcal{L}$ est la transformation de Laplace, et

$$\sqrt{2\pi \log q} \; q^{-1/8} q^{n(n+1)/2} x^{n+1} = \int_0^{+\infty} \xi^n \; q^{-w(w+1)/2} \; d\xi,$$

avec $w = (\log \xi - \log x)/\log q = (\log \xi/x)/\log q$;

$$\mu_n x^{n+1} = \sqrt{2\pi \log q} \; q^{-1/8} q^{n(n+1)/2} \; x^{n+1}.$$

On obtient

$$q^{n(n+1)/2} = \frac{q^{1/8}}{\sqrt{2\pi \log q}} \int_0^{+\infty} \xi^n \; q^{-v(v+1)/2} \; d\xi.$$

Il est donc naturel de définir une transformation q-Laplace par :

$$ {}_q\mathcal{L}\ \phi(x) = \frac{q^{1/8}}{\sqrt{2\pi \log q}} \int_0^{+\infty} \phi(\xi)\ q^{-w(w+1)/2}\ d\xi, $$

avec $w = (\log \xi - \log x)/\log q$. On a

$$ q^{n(n+1)/2} x^{n+1} = {}_q\mathcal{L}(\xi^n)(x). $$

Tous ces problèmes sont en cours d'étude. (Je conjecture aussi la q-variante du théorème de Maillet dans le cas non-linéaire.)

3.5. La multiplicité des procédés « naturels » de sommation, les « branches » des fonctions et la dernière lettre d'Évariste Galois. Dans ce qui précède on a vu se dégager la possibilité d'attribuer une somme « naturelle » à une série divergente et d'améliorer radicalement la théorie asymptotique de Poincaré en la remplaçant par une théorie exacte. On a ainsi rempli le programme esquissé par E. Borel [7] :

Non seulement les séries divergentes peuvent rendre de grands services au point de vue formel (ce dont personne n'a jamais douté) et au point de vue du calcul approximatif (séries asymptotiques), mais encore elles peuvent dans certains cas être calculées exactement. Une série divergente numérique peut avoir une valeur déterminée.

Mais si l'on y regarde de plus près la situation parait moins idyllique. En effet dans certains cas on a vu apparaître non pas *une* mais *plusieurs* sommes naturelles différentes. D. Dumont cite dans l'introduction de son livre[19] le texte d'E. Borel ci-dessus et qualifie son attitude d'optimiste, comparée à celle de G. H. Hardy dans [34] :

Different methods may sum the same series to different sums....

Mon point de vue est que le phénomène de multiplicité des « sommes naturelles » est

(1) moins surprenant qu'il n'y paraît ;
(2) un avantage considérable plutôt qu'un inconvénient.

---

[19] N.d.E. : le livre n'est jamais paru.

E. Borel[20] et G. H. Hardy[21] avaient très bien compris ce qui est à mon avis l'une des raisons fondamentales du phénomène : la *multiplicité des prolongements analytiques*. Ils ont de plus tout les deux insisté sur le fait qu'une bonne théorie de la sommation devrait reposer sur l'étude du prolongement analytique :

G. H. Hardy appelle le procédé de sommation par prolongement analytique que nous avons évoqué en 1.5 $\mathfrak{S}$-*method* :

...then we call s the $\mathfrak{S}$ sum of Σa_n. The value of s may naturally depend on the region chosen.

Il écrit aussi (à propos des idées d'Euler sur la sommation dont nous avons parlé plus haut en 1.1) :

It is impossible to state Euler's principle accurately without clear ideas about functions of a complex variable and analytic continuation.

Le phénomène fondamental apparaît déjà quand on étudie le prolongement analytique d'une série *convergente* en dehors de son disque de convergence. Pour le voir revenons à l'exemple déjà étudié en 1.6 :

$$\widehat{f}(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

Pour $|x| < 1$ la somme de $\widehat{f}$ est

$$f(x) = \sqrt{1+x}.$$

Si l'on veut sommer la série

$$1 + \frac{1}{2}(-2) + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}(-2)^2 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}(-2)^3 + \cdots$$

on peut utiliser indifféremment le prolongement analytique le long d'une demi-droite issue de l'origine et d'argument $\pi - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ « petit ») suivi d'un arc « descendant » vers -2 ou le prolongement

[20] *Il importe ici de faire une remarque essentielle ; dans le cas où la fonction analytique $\phi(z)$ n'est pas uniforme la théorie précédente conduit à associer à la série divergente $\phi(z_0)$ plusieurs valeurs di érentes ou même une infinité* [8, Ch. 4, 6.3, p. 153].

[21] *If $\sum a_n x^n$ is convergent for small x, and defines a function $f(x)$ of the complex variable x, one-valued and regular in an open and connected region containing the origin and the point $x = 1$; and $f(x) = s$; then we call s the $\mathfrak{S}$-sum of $\sum a_n$. The value of s may naturally depend on the region chosen.*

analytique le long d'une demi-droite issue de l'origine et d'argument $\pi+\varepsilon$ suivi d'un arc « montant » vers -2 : il y a un choix de « branche » ou ambiguïté ; dans le premier cas on trouve i, dans le second $-i$. À la comparaison des deux procédés de sommation correspond pour la série $\widehat{f}$ la transformation $f \to -f$ (action de la monodromie autour de la singularité -1 portée par la « direction singulière » R$^-$ d'argument π).

Le phénomène de Stokes découvert par Stokes dans l'étude de l'équation d'Airy (cf. 1.4) est tout à fait analogue au phénomène de changement de branche que nous venons de décrire (et cette analogie se trouve déjà dans le mémoire de Stokes(22) comme nous l'avons signalé plus haut). De ce point de vue le phénomène de Stokes peut se décrire ainsi :

Soit $\widehat{f}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série formelle sommable (ou plus généralement multisommable) dans toute direction voisine de la direction α sauf dans la direction (singulière) α. En appliquant à la série $\widehat{f}$ les opérateurs de sommation « latérale » S_α^- et S_α^+, on obtient deux sommes *distinctes* f_α^- et f_α^+. Là aussi il y a un choix de « branche » ou ambiguïté. En travaillant dans une algèbre différentielle convenable on définit l'*automorphisme de Stokes* (associé à la direction singulière α) :

$$St_\alpha = (S_\alpha^+)^{-1} S_\alpha^-$$

Dans un formalisme convenable (cf. [69], [52]) cet automorphisme (d'algèbre différentielle) s'interprète comme une « monodromie » autour d'une « singularité infiniment proche de l'origine » portée par la direction singulière α.

La description du phénomène de Stokes donnée par Stokes pour les solutions formelles à l'infini de l'équation d'Airy est très voisine

(22)*Divergent series are usually divided into two classes, according as the terms are regularly positive, or alternately positive and negative..., series of the former kind appear as singularities of the general case of divergent series proceeding according to powers of an imaginary variable, as indeterminate forms in passing through which a discontinuity of analytical expression takes place analogous to a change of sign of a radical* [75, p. 78].

de celle que nous venons de détailler. En gros sa démarche est la suivante : il construit une base $\mathcal{B}$ de solutions de l'équation d'Airy en utilisant les développements *convergents* à *l'origine* (ascending series). Ensuite il resomme dans diverses directions les solutions formelles à *l'infini* (descending series) par un procédé numérique *exponentiellement précis* (variante de la sommation au plus petit terme). Cette méthode est assez précise pour lui permettre d'exprimer les sommes des solutions formelles à l'infini dans la base $\mathcal{B}$ par des « constantes arbitraires » (*arbitrary constants*) ; on dit aujourd'hui formules de connexion. C'est alors que surgit un problème : les développements à l'origine sont des fonctions entières (l'origine est un point régulier) et par suite la monodromie autour de l'origine est *triviale* tandis que les développements divergents à l'infini sont en $\sqrt{x}$ et leur « monodromie » (monodromie formelle) est non triviale, d'où apparemment une contradiction avec l'analyse que nous venons de faire. C'est cette contradiction qui a laissé Stokes perplexe pendant de longues années avant qu'il trouve la clef du mystère (cf. la lettre à sa fiancée citée plus haut) :

…inasmuch as the descending series contain radicals which do not appear in the ascending series, we may see, a priori that the arbitrary constants must be discontinuous.

Ainsi l'ambiguïté que nous avons décrite apparaît comme discontinuité dans les constantes de connexion quand on *traverse une ligne singulière* : pour une ligne singulière la précision de la méthode de sommation numérique de Stokes est insuffisante pour le calcul des constantes arbitraires (on en perd une... : il s'agit en effet de calculer avec précision une solution exponentiellement récessive et il faut disposer pour cela d'une précision exponentielle suffisante ; le long d'une ligne singulière la solution récessive est trop petite pour être vue numériquement par la méthode employée !). Pour reprendre l'analyse de Dingle [17, Ch. 1, p. 7] :

The Stokes rays for an asymptotic series are determined by those phases for which the series (including its multiplier) attains peak exponential dominance over its associated function.

(La discontinuité des constantes arbitraires apparaît au moment de la dominance maximale d'un symbole exponentiellement dominant sur un symbole exponentiellement récessif.)

Le point de vue que nous venons de développer diffère notablement de l'approche « traditionnelle » du phénomène de Stokes[23]. Selon cette approche le phénomène consiste en un *échange de dominance* entre deux exponentielles ; il se voit donc le long des lignes « oscillantes » ou *lignes de Stokes*. Au contraire dans notre description (et celle de Stokes lui-même) le phénomène se produit sur les lignes singulières (appelées parfois lignes « anti-Stokes »). L'origine de cette différence est dans l'opposition entre la vision traditionnelle des séries divergentes comme séries asymptotiques et la conception des séries divergentes comme « codant » des solutions exactes. Dans un cas on met l'accent sur l'asymptotique au sens de Poincaré (et on ne perçoit pas la nature fondamentale du phénomène...), dans l'autre on utilise l'asymptotique *exacte* (cf. aussi [12, 11]).

Revenons à la comparaison entre un « changement de branches algébriques » et un « changement de branches par phénomène de Stokes ». S'il y a une profonde analogie entre ces deux phénomènes (il s'agit dans les deux cas de « transformations galoisiennes » : automorphismes d'algèbres différentielles), il y a aussi des différences radicales. Par exemple la matrice du changement de branche pour $(\sqrt{1+x}, \sqrt{1+x^3})$ est $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ tandis que celle du phénomène de Stokes St_π pour l'équation d'Euler (resp. celles de l'équation d'Airy) est (sont) de la forme $\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec β complexe non nul.

La seconde matrice est *unipotente*. Cela est lié au fait que le phénomène de Stokes n'est pas décelable asymptotiquement quand on franchit une ligne singulière : après le passage les développements asymptotiques des solutions n'ont pas changé (ce qui n'est pas du tout le cas dans le cas des branches algébriques). On démontre que (essentiellement pour la même raison) les opérateurs de Stokes sont toujours unipotents. Ceci a une conséquence fondamentale : les opérateurs de Stokes St_α ont des *générateurs infinitésimaux* (logarithmes)

[23]Seul Dingle semble s'écarter de cette approche et perpétuer les idées originales de Stokes. Il appelle d'ailleurs lignes de Stokes ce que les autres auteurs appellent lignes anti-Stokes (nos lignes singulières). Cela va dans le sens de l'une de ses idées centrales : la recherche d'une théorie asymptotique exacte. Ses « complete asymptotic expansions » préfigurent les « développements transasymptotiques ».

notés $\dot{\Delta}_\alpha$:

$$St_\alpha = e^{\dot{\Delta}_\alpha}.$$

Ceci permet une étude *« infinitésimale »* du phénomène de Stokes. Ce point de vue a été découvert et étudié systématiquement par Jean Ecalle : « Fonctions résurgentes », « Calcul différentiel étranger » (l'opérateur $\dot{\Delta}_\alpha$ est une dérivation galoisienne, i.e., une dérivation commutant à la dérivation ordinaire, nommée dérivation étrangère pointée), « Accélération » [18], [19], [20], [13], [12, 11].

La veille du duel dans lequel il devait trouver la mort, Évariste Galois écrivait, dans sa dernière lettre, adressée à son ami Auguste Chevallier [28] :

Tu sais, mon cher Auguste, que ces sujets ne sont pas les seuls que j'ai explorés. Mes principales méditations depuis quelque temps étaient dirigées sur l'application à l'analyse transcendante de la théorie de l'ambiguïté. Il s'agissait de voir a priori dans une relation entre quantités ou fonctions transcendantes quels échanges on pouvait faire, quelles quantités on pouvait substituer aux quantités données sans que la relation pût cesser d'avoir lieu. Cela fait reconnaître tout de suite l'impossibilité de beaucoup d'expressions que l'on pourrait chercher. Mais je n'ai pas le temps et mes idées ne sont pas encore bien développées sur ce terrain qui est immense....

La signification de ce texte semble être restée longtemps assez mystérieuse. Mais il me semble possible aujourd'hui de l'éclaircir en grande partie.

Dans sa préface aux *Œuvres Complètes* de Galois [27], Jean Dieudonné écrit [27] :

...mais il y a lieu de penser qu'il devait être très proche de l'idée de la « surface de Riemann » attachée à une fonction algébrique et qu'une telle idée devait être fondamentale dans ses recherches sur ce qu'il appelle la « théorie de l'ambiguïté »...

Ceci éclaire un peu la question, mais si l'on relit soigneusement le texte de Galois il parait évident que l'idée de surface de Riemann ne devait concerner qu'*une partie* de sa « théorie de l'ambiguïté ». Je pense qu'Émile Picard et surtout Jules Drach ont deviné dans quelle direction allaient vraiment les dernières recherches de Galois.

Émile Picard écrivait dans sa préface aux œuvres complètes de Galois [26] :

…il…aurait édifié, dans ses parties essentielles, la théorie des fonctions algébriques d'une variable telle que nous la connaissons aujourd'hui. Les méditations de Galois portèrent encore plus loin ; il termine sa lettre en parlant de l'application à l'analyse transcendante de la théorie de l'ambiguïté. On devine à peu près ce qu'il entend par là, et sur ce terrain qui, comme il le dit est immense, il reste encore aujourd'hui bien des découvertes à faire…

Il nous reste évidemment à deviner ce que veut dire Picard ! Si l'on pense qu'Émile Picard est l'un des fondateurs de la théorie de Galois différentielle (théorie de Picard-Vessiot), il semble assez raisonnable de penser qu'il avait la conviction que Galois avait quelque idée de cette théorie. En tout c'était la conviction de Jules Drach qui écrivait à la fin de sa thèse :

Nous serions heureux si notre travail pouvait appeler l'attention sur les quelques lignes qui terminent la lettre de Galois, et s'il pouvait être regardé comme une première tentative d'éclaircissement de la pensée qu'elles expriment :…

De mon côté lisant voici quelques années la lettre de Galois il m'a immédiatement paru évident[24] que les idées de Galois sur la théorie de l'ambiguïté préfiguraient la théorie de Galois différentielle et même dans une certaine mesure la lecture que j'ai donnée récemment de cette théorie : il est impossible de savoir si Galois avait quelque idée du phénomène de Stokes et de sa nature Galoisienne, que j'ai mise en évidence dans [65]. (L'étude des fragments de calcul trouvés dans ses papiers [27] ne permet pas de conclure.) Par contre, comme Jules Drach, je suis certain qu'Évariste Galois avait compris la nature « Galoisienne » de certaines transformations en analyse complexe (ambiguïtés...), comme par exemple le « recalibrage » des exponentielles (dont le « prototype » est le remplacement dans toutes les formules de $e^{1/x}$ par $\lambda\ e^{1/x}$; λ étant un nombre complexe non nul fixé).

[24] Lors de cette lecture je ne connaissais ni le texte de Drach, que j'ai découvert par hasard quelques semaines plus tard à la suite d'une demande de référence de N. Kamran, ni celui de Picard qui m'a été signalé par D. Bennequin après l'exposé de mon interprétation de la dernière lettre de Galois dans mon séminaire à Strasbourg...

La théorie de Galois différentielle joue, pour les équations différentielles, le même rôle que, pour les équations algébriques, la théorie de Galois classique. Pour une bonne compréhension du sujet le mieux est de revenir à l'idée originale de Galois que celui-ci exprimait d'une façon particulièrement limpide [26, 27] :

Proposition I 3b. Théorème. Soit une équation donnée, dont $a, b, c, \ldots$ *sont les* m *racines. Il y aura toujours un groupe de permutations des lettres* $a, b, c, \ldots$ *qui jouira de la propriété suivante :*

1° que toute fonction des racines, invariante par les substitutions de ce groupe, soit rationnellement connue ;

2° réciproquement, que toute fonction des racines, déterminée rationnellement, soit invariante par ces substitutions.

La théorie de Galois différentielle a été découverte par Picard et Vessiot [58], [78]. Le lecteur intéressé pourra consulter l'excellente introduction [36], et pour en savoir plus sur les relations entre séries divergentes et théorie de Galois différentielle [69], [67], et les articles plus techniques [66], [53]. Nous nous contenterons ici de quelques indications, en nous limitant au cas linéaire. Soit (K, ∂) un corps différentiel de caractéristique nulle. Soit $C = \{c \in K \mid \partial c = 0\}$ son corps des constantes. (Par exemple $(\mathbb{C}(x), d/dx)$, $(\mathbb{C}\{x\}, x^2 d/dx)$, $(\mathbb{C}\{\{x\}\}, x^2 d/dx)$ ont $\mathbb{C}$ pour corps des constantes.)

Soit $D = a_n (d/dx)^n + \cdots + a_1 d/dx + a_0$ un opérateur différentiel à coefficients dans K. Une extension de Picard-Vessiot associée à D est un sur-corps différentiel L de K engendré différentiellement sur K par un système fondamental de solutions de D, le corps des constantes C restant le même. Si C est algébriquement clos une telle extension existe et est unique (à isomorphisme près). Par définition le groupe de Galois différentiel de D sur K est le groupe $\mathrm{Gal}_K(D) = \mathrm{Aut}_K L$ des K-automorphismes de corps différentiel de L. Un élément σ de $\mathrm{Gal}_K(D)$ le C-espace vectoriel des solutions de D dans L. On en déduit (en fixant une base de cet espace) une représentation de $\mathrm{Gal}_K(D)$ dans $\mathrm{GL}(n; C)$. Le sous-groupe obtenu de $\mathrm{GL}(n; C)$ est *algébrique* (i.e., défini par des polynômes à n^2 variables).

Les groupes de Galois différentiels peuvent se calculer à partir de la connaissance de la monodromie (formelle ou non), du « recalibrage » des exponentielles évoqué plus haut et du phénomène de Stokes.

Citons, pour terminer, dans cette direction, un résultat assez frappant obtenu par C. Mitschi en utilisant la sommation de séries divergentes [53][25]. On considère la fonction

$$K(t) = \int_0^{+\infty} x^{-1/2}\ e^{-x^7 - tx}\ dx.$$

Cette fonction est la transformée de Laplace de la fonction $x^{-1/2}\ e^{-x^7}$.

La fonction K vérifie une équation différentielle linéaire algébrique d'ordre 7

$$D_K\ K = 7K^{(7)} + tK' + \frac{1}{2}K = 0.$$

Si dans cette équation différentielle on fait le changement de variable $z = (t/7)^7$ (ramification), la transformée U de K vérifie l'équation différentielle hypergéométrique confluente généralisée

$$D_{7,1}\ U = 0$$

avec

$$D_{7,1} = z(\partial + 1/14) + \prod_{r=0}^{6}(\partial - r/7) \qquad (\partial = zd/dz).$$

On montre que le groupe de Galois différentiel de $D_{7,1}$ est[26]

$$\mathrm{Gal}_{\mathbf{C}(x)}(D_{7,1}) = G_2 \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}.$$

La monodromie de D_K est évidemment triviale, on en déduit que le groupe de Galois différentiel de D_K est

$$\mathrm{Gal}_{\mathbf{C}(x)} D_K = G_2.$$

La relation entre la « fonction spéciale » K et le groupe exceptionnel G_2 est semblable à celle entre les fonctions d'Airy A ou B et le groupe $\mathrm{SL}(2;\mathbf{C})$ [69].

---

[25] Peu de temps avant le même résultat avait été obtenu par voie algébrique par N. Katz [37, 38]

[26] Le groupe G_2 (ou plutôt sa représentation en dimension 7) est un sous-groupe algébrique de dimension complexe 14 du groupe spécial orthogonal $\mathrm{SO}(7;\mathbf{C})$. La version réelle de ce groupe a de belles propriétés : c'est le groupe des automorphismes de l'algèbre des octaves de Cayley, et topologiquement c'est un fibré de base la sphère S^6 dont les fibres sont des fibrés de base S^5 et de fibre S^3 [60].

À la fin de cette rédaction, il me reste à signaler que je n'ai pu parler de toutes les applications des séries divergentes ; même si on se limite aux cas où interviennent des estimations Gevrey et/ou des corrections exponentiellement petites. (Parmi les omissions notables je citerai les beaux travaux récents sur l'équation stationnaire de Schrödinger dans une perspective semi-classique « exacte » [79], [12], et la preuve due à Schäffke et Volkmer de la non existence d'ovales isocordes à deux « centres »...). D'autres domaines des Mathématiques ou de la Physique (invariants adiabatiques, théorie quantique des champs (instantons, renormalons, séries de perturbations,...), étude « thermodynamique » du « problème du voyageur de commerce », solitons,...) relèvent clairement de cette dernière problématique sans qu'il y ait pour l'instant beaucoup de résultats théoriques précis. Il reste énormément de travail !

Références

[1] M. Abramowitz & I. A. Stegun – *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*, 10e éd., National Bureau of Standards Applied Math. Series, vol. 55, U.S. Government Printing Oﬃce, Washington, D.C., 1972.

[2] W. Balser – « Summation of formal power series through iterated Laplace integrals », *Math. Scand.* **70** (1992), no. 2, p. 161–171.

[3] W. Balser, B.L.J. Braaksma, J.-P. Ramis & Y. Sibuya – « Multisummability of formal power series solutions of linear ordinary diﬀerential equations », *Asymptotic Anal.* **5** (1991), p. 27–45.

[4] E. J. Barbeau – « Euler subdues a very obstreperous series », *Amer. Math. Monthly* **86** (1979), no. 5, p. 356–372.

[5] E. Benoît & J.-L. Callot – « Chasse au canard I–IV », *Collect. Math.* **32** (1981), no. 2, p. 37–119.

[6] M. V. Berry & C. J. Howls – « Hyperasymptotics for integrals with saddles », *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* **434** (1991), no. 1892, p. 657–675.

[7] É. Borel – « Mémoire sur les séries divergentes », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)* **16** (1899), p. 9–131 & 132–136.

[8] ______, « Leçons sur les séries divergentes », 1928, 2. éd. revue et entièrement remaniée avec le concours de G. Bouligand.

[9] M. Canalis-Durand – « Caractère Gevrey du développement formel des solutions canard de l'équation de van der Pol », preprint no. 264, Université de Nice-Sophia Antipolis, 1990.

[10] ______, « Caractère Gevrey du développement formel des solutions canard de l'équation de van der Pol », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **311** (1990), no. 1, p. 27–30.

[11] B. Candelpergher, J.-C. Nosmas & F. Pham – *Approche de la résurgence*, Actualités Mathématiques, Hermann, Paris, 1993.

[12] ______, « Premiers pas en calcul étranger », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **43** (1993), no. 1, p. 201–224.

[13] T. Carleman – « Les fonctions quasi analytiques », 1926, Leçons professées au Collège de France.

[14] A.-L. Cauchy – « Sur les intégrales qui s'étendent à tous les points d'une courbe fermée », *Comptes Rendus Acad. Sc. Paris* **23** (1846), p. 251–255, https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k2980r/f255.item.
[15] D. V. Chudnovsky & G. V. Chudnovsky – « Computer assisted number theory with applications », in *Number theory (New York, 1984–1985)*, Lect. Notes in Math., vol. 1240, Springer, Berlin, 1987, p. 1–68.
[16] F. Diener & G. Reeb – *Analyse non standard*, Collection Enseignement des Sciences, vol. 40, Hermann, Paris, 1989.
[17] R. B. Dingle – *Asymptotic expansions : their derivation and interpretation*, Academic Press, London-New York, 1973.
[18] J. Ecalle – *Les fonctions résurgentes I. Les algèbres de fonctions résurgentes*, vol. 81-05, Publ. Math. Orsay, 1981.
[19] ______, *Les fonctions résurgentes II. Les fonctions résurgentes appliquees à l'itération*, vol. 81-06, Publ. Math. Orsay, 1981.
[20] ______, *Les fonctions résurgentes. III. L'équation du pont et la classification analytique des objets locaux*, vol. 85-05, Publ. Math. Orsay, 1985.
[21] L. Euler – « Remarques sur un beau rapport entre les séries des puissances tant directes que réciproques », *Mémoires de l'académie des sciences de Berlin* **17** (1761, 1768), p. 83–106, Commentatio 352 indicis Enestroemani.
[22] ______, « de seriebus divergentibus », in *Leonardi Euleri Opera Omnia 14*, Teubner, Leipzig-Berlin, 1925, Traduction anglaise par E.J. Barbeau et P.J. Leah, Historia Mathematica, 3, 1976, p. 141-160, p. 601–602.
[23] A. Fruchard – Thèse, Université Paris 7, 1991.
[24] ______, « Prolongement analytique et systèmes dynamiques discrets », *Collect. Math.* **43** (1992), no. 1, p. 71–82.
[25] A. Fuchs & R. Giuliano Antonini – « Théorie générale des densités », *Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. (5)* **14** (1990), no. 1, p. 253–294.
[26] E. Galois – *Œuvres mathématiques d'Évariste galois*, Gauthier-Villars, Paris, 1897.
[27] ______, *Écrits et mémoires mathématiques d'Évariste galois*, Gauthier-Villars, Paris, 1962.
[28] ______, « Lettre à Auguste Chevallier », in *Écrits et mémoires mathématiques d'Évariste Galois*, Gauthier-Villars, Paris, 1962.
[29] R. Gérard & D. A. Lutz – « Maillet type theorems for algebraic di□erence equations », *Kumamoto J. Math.* **3** (1990), p. 11–26.
[30] H. Gingold – « A necessary condition for a power series to be a formal solution of a singular linear di□erential equation of order k », *J. Math. Anal. Appl.* **52** (1975), no. 3, p. 546–552.
[31] I. J. Good – « Some relations between certain methods of summation of infinite series », *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **38** (1942), p. 144–165.
[32] G. H. Hardy – « On the summability of series by Borel's and Mittag-Le□er's methods », *J. London Math. Soc.* **9** (1934), no. 2, p. 153–157.
[33] ______, « Note on a divergent series », *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **37** (1941), p. 1–8.
[34] ______, *Divergent series*, Oxford, at the Clarendon Press, 1949.
[35] W. B. Jurkat – « Summability of asymptotic power series », *Asymptotic Anal.* **7** (1993), no. 4, p. 239–250.
[36] I. Kaplansky – *An introduction to di erential algebra*, 2e éd., Hermann, Paris, 1976.
[37] N. Katz – *Exponential sums and di erential equations*, Ann. of Math. studies, vol. 124, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1990.

[38] ______, « Exponential sums over finite fields and differential equations over the complex numbers : some interactions », *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **23** (1990), no. 2, p. 269–309.
[39] É. Le Roy – « Sur les séries divergentes et les fonctions définies par un développement de Taylor », *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (2)* **2** (1900), p. 317–430.
[40] M. Loday-Richaud – « Introduction à la multisommabilité », *Gaz. Math.* (1990), no. 44, p. 41–63.
[41] ______, « Sommation des séries provenant de systèmes différentiels linéaires », in *Séries divergentes et procédés de resommation*, Journées X-UPS, Éditions de l'École polytechnique, Palaiseau, 1991, p. 75–110.
[42] Y. L. Luke – *The special functions and their approximations. Vol. I*, Academic Press, New York-London, 1969.
[43] W. Magnus, F. Oberhettinger & R. P. Soni – *Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics*, enlarged éd., Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1966.
[44] E. Maillet – « Sur les séries divergentes et les équations différentielles », *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **20** (1903), p. 487–518.
[45] B. Malgrange – « Travaux d'Écalle et de Martinet-Ramis sur les systèmes dynamiques », in *Séminaire Bourbaki, Vol. 1981/1982*, Astérisque, vol. 92–93, Société Mathématique de France, Paris, 1982, p. 59–73.
[46] ______, « Sur le théorème de Maillet », *Asymptotic Anal.* **2** (1989), no. 1, p. 1–4.
[47] ______, *Équations différentielles à coefficients polynomiaux*, Progress in Math., vol. 96, Birkhäuser, Basel, Boston, 1991.
[48] B. Malgrange & J.-P. Ramis – « Fonctions multisommables », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **42** (1992), p. 353–368.
[49] J. Martinet & J.-P. Ramis – « Problèmes de modules pour des équations différentielles non linéaires du premier ordre », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* (1982), no. 55, p. 63–164.
[50] ______, « Classification analytique des équations différentielles non linéaires résonnantes du premier ordre », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **16** (1983), no. 4, p. 571–621.
[51] ______, « Analytic classification of resonant saddles and foci », in *Singularities and dynamical systems (Iráklion, 1983)*, North-Holland Math. Stud., vol. 103, North-Holland, Amsterdam, 1985, p. 109–135.
[52] ______, « Elementary acceleration and multisummability. I », *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.* **54** (1991), no. 4, p. 331–401.
[53] C. Mitschi – « Differential Galois groups and G-functions », in *Differential equations and computer algebra*, Comput. Math. Appl., Academic Press, London, 1991, p. 149–180.
[54] R. Moussu – « Les conjectures de R. Thom sur les singularités de feuilletages holomorphes », in *Équations différentielles dans le champ complexe, Vol. III (Strasbourg, 1985)*, Publ. Inst. Rech. Math. Av., Univ. Louis Pasteur, Strasbourg, 1988, p. 105–113.
[55] F. Nevanlinna – « Zur Theorie der asymptotischen Potenzreihen », *Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A* **12** (1916), p. 1–81.
[56] F. W. J. Olver – *Asymptotics and special functions*, AKP Classics, A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 1997.
[57] O. Perron – « Über lineare Differentialgleichungen mit rationalen Koeffizientezn », *Acta Math.* **34** (1910), p. 139–163.

[58] É. Picard – *Analogies entre la théorie des équations différentielles linéaires et la théorie des équations algébriques*, Gauthier-Villars, Paris, 1936.
[59] H. Poincaré – « Sur les groupes des équations linéaires », *Acta Math.* **4** (1884), p. 201–312.
[60] M. Postnikov – *Leçons de géométrie. Groupes et algèbres de Lie*, Éditions Mir, Moscou, 1985.
[61] J.-P. Ramis – « Dévissage Gevrey », in *Journées Singulières de Dijon (Univ. Dijon, Dijon, 1978)*, Astérisque, vol. 59-60, Société Mathématique de France, Paris, 1978, p. 173–204.
[62] ______, « Les séries k-sommables et leurs applications », in *Complex analysis, microlocal calculus and relativistic quantum theory (Proc. Internat. Colloq., Centre Phys., Les Houches, 1979)*, Lecture Notes in Phys., vol. 126, Springer, 1980, p. 178–199.
[63] ______, *Théorèmes d'indices Gevrey pour les équations différentielles ordinaires*, Mem. Amer. Math. Soc., vol. 48, no. 296, American Mathematical Society, Providence, RI, 1984.
[64] ______, « Filtration Gevrey sur le groupe de Picard-Vessiot d'une équation différentielle irrégulière », Preprint n° 45, Instituto de Matematica Pura e Aplicada, IMPA, Rio de Janeiro, 1985.
[65] ______, « Phénomène de Stokes et filtration Gevrey sur le groupe de Picard-Vessiot », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **301** (1985), no. 5, p. 165–167.
[66] ______, « Phénomène de Stokes et resommation », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **301** (1985), no. 4, p. 99–102.
[67] ______, « A short introduction to differential Galois theory », in *New trends in nonlinear control theory (Nantes, 1988)*, Lect. Notes Control Inf. Sci., vol. 122, Springer, Berlin, 1989, p. 143–159.
[68] ______, « Les derniers travaux de Jean Martinet », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **42** (1992), no. 1-2, p. 15–47.
[69] J.-P. Ramis & J. Martinet – « Théorie de Galois différentielle et resommation », in *Computer algebra and differential equations*, Comput. Math. Appl., Academic Press, London, 1990, p. 117–214.
[70] J.-P. Ramis & Y. Sibuya – « Hukuhara domains and fundamental existence and uniqueness theorems for asymptotic solutions of Gevrey type », *Asymptotic Anal.* **2** (1989), p. 39–94.
[71] Y. Sibuya – « Gevrey property of formal solutions in a parameter », in *Asymptotic and computational analysis (Winnipeg, MB, 1989)*, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. 124, Dekker, New York, 1990, p. 393–401.
[72] ______, *Linear differential equations in the complex domain : problems of analytic continuation*, Translations of Math. Monographs, vol. 82, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1990, (en japonais : 1976).
[73] ______, « Gevrey asymptotics and Stokes multipliers », in *Differential equations and computer algebra*, Comput. Math. Appl., Academic Press, London, 1991, p. 131–147.
[74] T. J. Stieltjes – « Recherches sur quelques séries semi-convergentes », *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **3** (1886), p. 201–258.
[75] G. G. Stokes – « On the discontinuity of arbitrary constants which appear in divergent developments », *Trans. Cambridge Phil. Soc.* **X** (1857), p. 105–128, `https://www.biodiversitylibrary.org/item/19852#page/119/mode/1up`.
[76] ______, « Early letters to Lady Stokes, London, March 17, 1857 », in *Memoirs and Scientific correspondance, vol. 1*, Cambridge University Press, 1907, p. 62.

[77] J. Thomann – « Resommation des series formelles. Solutions d'équations différentielles linéaires ordinaires du second ordre dans le champ complexe au voisinage de singularités irrégulières », *Numer. Math.* **58** (1990), no. 5, p. 503–535.
[78] E. Vessiot – « Sur l'intégration des équations différentielles linéaires », *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **9** (1892), p. 197–280.
[79] A. Voros – « The return of the quartic oscillator : the complex WKB method », *Ann. Inst. H. Poincaré Sect. A (N.S.)* **39** (1983), no. 3, p. 211–338.
[80] G. N. Watson – « A theory of asymptotic series », *Philos. Trans. R. Soc. Lond., Ser. A* **211** (1911), p. 279–313.
[81] ______, « The characteristics of asymptotic series », *Quart. J.* **43** (1912), p. 63–77.
[82] A. K. Zvonkin & M. A. Shubin – « Non-standard analysis and singular perturbations of ordinary differential equations », *Russ. Math. Surv.* **39** (1984), no. 2, p. 69–131.

Jean-Pierre Ramis, I.R.M.A., 7, rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cedex, France