Séminaire de Théorie des Nombres.

- Besançon -

Année 1975 - 1976

2, 4 ET 8-RANG DU GROUPE DES CLASSES D'IDEAUX DE $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{d})$, $|d| \leqslant 1000$

Bernard ORIAT

Faculté des Sciences. Mathématiques

25030 BESANCON CEDEX

2,4 ET 8-RANG DU GROUPE DES CLASSES D'IDEAUX DE $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{d})$; $|d|\leqslant 1000$

Bernard Oriat

Soit a un entier sans facteur carré, compris entre 3 et 1000, impair.

La table 1 donne les 2-rang, 4-rang et 8-rang du groupe des classes d'idéaux de $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{-a})$ et l'exposant de 2 dans la décomposition en facteurs premiers du nombre de classes de ce corps. Les valeurs de a, telles que le 4-rang du groupe des classes d'idéaux de $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{-a})$ soit nul, ont été omises.

La table 2 donne les 2-rang, 4-rang et 8-rang du groupe des classes au sens restreint de $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{a})$. De même qu'à la table précédente, les valeurs de a telles que le 4-rang soit nul, ont été omises.

La méthode employée a été développée par G. Gras dans [1] . Précisons que si t est le nombre d'idéaux premiers de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ramifiés dans $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{d})$, le 2-rang du groupe des classes (au sens restreint) de ce corps est t-1 ; ([1] Th IV). D'autre part, il existe des formules liant le nombre de classes d'un corps biquadratique bicyclique aux nombres de classes de ses trois sous-corps quadratiques [2] . En particulier, le nombre de classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{-a})$ est égal au demi-produit des nombres de classes des corps $Q(\sqrt{-a})$

et $\mathbb{Q}(\sqrt{-2a})$. C'est ainsi qu'a été calculé l'exposant de 2 dans la décomposition en facteurs premiers du nombre de classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{-a})$.

Signalons enfin que les 4-rangs et 8-rangs des groupes des classes d'idéaux de $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{a})$ et $Q(\sqrt{2},\sqrt{-a})$ sont liés par les relations:

$$0 \leqslant \dim_m \mathcal{H}_{\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{-a})} - \dim_m \mathcal{H}_{\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{a})} \leqslant 2 \text{ , (m=4 ou 8).}$$

On trouvera une démonstration de ces inégalités dans [3].

[1] Gras (G.), Sur les ℓ-classes d'idéaux dans les extensions cycliques relatives de degré premier ℓ , Ann. Inst. Fourier , 23 (1973).

[2] Hasse (H.), Über die Klassenzahl abelscher Zahlkorpern, Berlin, (1952).

[3] Oriat (B.), Relations entre les 2-groupes des classes d'idéaux des extensions quadratiques $k(\sqrt{d})$ et $k(\sqrt{-d})$, Ann. Inst. Fourier, 27 (1977).

Table 1 (Corps imaginaires)

15	1 1 0	2	201	2 1 1	5	335	1 1 0	2
17	2 1 0	3	203	2 1 1	5	337	2 2 1	5
31	1 1 0	2	205	3 1 1	6	345	4 1 1	6
33	2 1 1	4	209	2 1 1	4	353	2 2 1	6
39	1 1 1	3	213	3 2 0	5	355	2 1 1	6
41	2 1 1	4	215	1 1 0	2	367	1 1 0	2
47	1 1 0	2	217	4 1 0	5	371	2 1 1	5
55	1 1 1	3	219	2 2 0	4	377	2 1 1	5
57	2 1 1	4	221	3 1 1	6	383	1 1 0	2
65	2 1 1	4	223	1 1 1	4	385	4 1 1	7
69	3 2 0	5	231	3 1 0	4	393	2 1 1	5
73	2 1 1	5	233	2 1 1	4	395	2 2 2	6
77	3 2 0	5	239	1 1 0	2	399	3 2 1	7
79	1 1 0	2	241	2 1 0	3	401	2 1 0	3
87	1 1 0	2	247	1 1 0	2	407	1 1 1	5
89	2 1 1	4	249	2 1 1	4	409	2 1 1	5
95	1 1 1	4	255	3 1 1	5	415	1 1 0	2
97	2 1 0	3	257	2 2 2	7	417	2 1 1	5
105	4 1 0	5	259	2 1 1	5	429	3 2 2	7
111	1 1 1	4	265	2 1 1	4	431	1 1 0	2
113	2 2 1	5	271	1 1 0	2	433	2 1 0	3
127	1 1 1	3	273	4 1 0	5	435	2 2 1	5
129	2 1 1	4	281	2 1 1	4	445	3 2 0	5
137	2 1 1	4	285	3 2 2	7	447	1 1 0	2
141	3 2 0	5	287	3 1 0	4	449	2 1 0	3
143	1 1 0	2	291	2 1 1	5	455	3 1 1	5
145	2 1 1	4	295	1 1 1	4	457	2 1 1	4
155	2 2 0	4	299	2 1 1	5	463	1 1 0	2
159	1 1 0	2	301	3 2 0	5	465	4 1 1	6
161	4 1 1	6	303	1 1 0	2	469	3 2 2	7
165	3 2 0	5	305	2 1 1	5	471	1 1 1	5
177	2 1 1	5	313	2 1 1	4	473	2 1 1	5
183	1 1 1	4	319	1 1 0	2	479	1 1 1	3
185	2 1 1	5	321	2 1 1	5	481	2 1 1	5
191	1 1 0	2	323	2 1 1	5	489	2 1 1	4
193	2 1 0	3	327	1 1 1	3	497	4 1 1	6
195	2 2 1	5	329	4 1 0	5	501	3 2 2	7

Table 1 (suite)

505	2 1 1	4		673	2 1 0	3		831	1 1 1	3
511	3 1 1	5		681	2 1 1	4		849	2 1 1	5
519	1 1 0	2		687	1 1 1	3		857	2 1 1	6
521	2 1 1	6		689	2 1 1	4		863	1 1 0	2
527	3 1 0	4		695	1 1 1	4		865	2 1 1	5
535	1 1 0	2		697	4 1 1	6		869	3 2 1	8
537	2 1 1	6		703	1 1 0	2		871	1 1 0	2
543	1 1 1	3		705	4 1 1	7		879	1 1 0	2
545	2 1 1	6		713	4 1 1	7		881	2 2 1	5
551	1 1 0	2		715	2 2 1	6		885	3 2 0	5
553	4 1 1	6		717	3 2 1	8		889	4 1 1	6
555	2 2 1	5		719	1 1 1	3		895	1 1 1	5
559	1 1 1	5		721	4 1 1	6		897	4 2 1	8
561	4 2 1	7		723	2 1 1	6		901	3 1 1	7
569	2 1 1	6		731	2 1 1	5		903	3 1 1	6
573	3 2 1	8		737	2 1 1	5		905	2 1 1	4
577	2 2 1	5		741	3 2 0	5		911	1 1 1	3
579	2 1 1	5		745	2 1 1	5		913	2 1 1	4
583	1 1 1	4		749	3 2 1	8		915	2 2 1	5
589	3 2 2	7		751	1 1 0	2		921	2 1 1	5
591	1 1 0	2		753	2 1 1	4		929	2 1 0	3
593	2 2 1	5		755	2 1 1	5		933	3 2 1	8
601	2 1 1	4		759	3 1 1	5		935	3 1 1	5
607	1 1 0	2		761	2 1 1	4		937	2 1 1	4
609	4 1 1	6		763	2 1 1	5		939	2 1 1	5
615	3 1 0	4		767	1 1 0	2		943	3 2 2	9
617	2 1 1	4		769	2 1 0	3		951	1 1 0	2
623	3 1 0	4		777	4 1 1	6		953	2 1 1	6
627	2 2 0	4		785	2 1 1	5		955	2 2 0	4
633	2 1 1	6		789	3 2 1	8		957	3 2 2	7
641	2 1 0	3		791	3 1 1	8		959	3 1 1	5
645	3 2 2	7		793	2 1 1	4		969	4 1 1	7
649	2 1 1	6		795	2 2 2	6		977	2 1 0	3
651	4 2 0	6		799	3 2 1	8		979	2 2 1	7
655	1 1 1	3		805	5 1 1	8		985	2 1 1	4
663	3 1 1	6		807	1 1 0	2		987	4 1 1	7
665	4 1 0	5		809	2 1 1	6		991	1 1 0	2
667	2 1 1	6		815	1 1 0	2		993	2 1 1	5
671	1 1 0	2		817	2 1 1	7		995	2 1 1	5

Table 2 (Corps réels)

65	1 1 0	435	3 1 1	745	1 1 0
113	1 1 0	445	2 1 0	777	3 1 1
145	1 1 1	455	4 1 0	785	1 1 0
165	2 1 0	465	3 1 0	791	4 1 0
185	1 1 0	481	1 1 0	793	1 1 1
195	3 1 0	497	3 1 0	795	3 1 1
205	2 1 0	505	1 1 1	799	4 1 1
219	3 2 0	545	1 1 0	865	1 1 0
221	2 1 0	555	3 1 0	881	1 1 0
255	4 1 0	561	3 1 0	885	2 1 0
257	1 1 0	577	1 1 0	897	3 1 0
265	1 1 0	579	3 1 0	901	2 1 0
285	2 1 0	593	1 1 0	905	1 1 1
291	3 1 0	609	3 1 0	915	3 1 0
305	1 1 0	627	3 2 0	935	4 1 0
323	3 1 1	645	2 1 1	939	3 1 0
337	1 1 0	689	1 1 1	943	4 1 0
353	1 1 0	715	3 1 0	957	2 1 1
377	1 1 0	723	3 1 1	959	4 1 0
399	4 1 0	731	3 1 0	979	3 2 0
429	2 1 0	741	2 1 0	985	1 1 0