THEORIE DES NOMBRES
BESANCON

Années 1981-1982
et 1982-1983

SUR LES EXTENSIONS A GROUPE DE GALOIS A_4

Jean COUGNARD

SUR LES EXTENSIONS A GROUPE DE GALOIS A_4

par J. COUGNARD

Le but de ce travail est de mettre en évidence, une fois de plus, des liens entre sommes de Gauss galoisiennes et résolvantes d'anneaux d'entiers. Ces liens sont bien connus dans le cas des extensions modérément ramifiées [F1], c'est pourquoi nous supposons toujours que les extensions que nous étudions sont sauvagement ramifiées.

§ 1. Le groupe A_4 et ses représentations.

Le groupe A_4 est produit semi-direct d'un sous-groupe distingué d'ordre 4 isomorphe au groupe de Klein par un sous-groupe cyclique d'ordre 3. On peut le décrire par générateurs et relations de la façon suivante :

$$\tau^3 = \sigma^2 = \nu^2 = 1 \ ; \ \sigma\nu = \nu\sigma \ ; \ \tau\sigma\tau^{-1} = \nu \ .$$

Les représentations absolument irréductibles de A_4 sont données par :

a) la représentation triviale, qui correspond au facteur simple $\mathbb{Q}$ de $\mathbb{Q}[A_4]$;

b) la représentation de degré un qui envoie τ sur j ($1+j+j^2 = 0$) et sa conjuguée qui correspondent au facteur simple $\mathbb{Q}[j]$ de $\mathbb{Q}[A_4]$

c) la représentation $\tilde{\psi}$ de degré trois induite par une représentation de degré un du sous-groupe distingué :

$$\sigma \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \tau \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On note ψ le caractère de cette représentation .

La comparaison des dimensions montre que l'on a :

$$\mathbb{Q}[G] \simeq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}(j) \times M_3(\mathbb{Q}) .$$

Pour chaque représentation $\tilde{\varphi}$ de caractère φ du groupe de Galois G d'une extension N/K et chaque entier a de N , A. Fröhlich utilise une résolvante $\langle a, \varphi \rangle_{N/K} = \det\Big(\sum_{g \in G} g(a)\, \tilde{\varphi}(g^{-1}) \Big)$.

Si , au noyau A de $\tilde{\varphi}$ correspond un sous-corps L de N , différent de N , on constate que :

$$\langle a , \varphi \rangle_{N/K} = \langle Tr_{N/L}(a) , \varphi \rangle_{L/K} .$$

Si de plus l'extension N/L est sauvagement ramifiée , l'ensemble des $\langle a , \varphi \rangle_{N/K}$ diffère de l'ensemble des $\langle b , \varphi \rangle_{L/K}$, ce qui rend improbable une propriété se conservant par " inflation " d'une représentation . C'est pourquoi nous n'envisageons que des représentations fidèles irréductibles de A_4 . La résolvante étant inchangée si on remplace une représentation par une représentation équivalente , on ne considère que la représentation $\tilde{\psi}$ définie ci-dessus .

Si on se donne une extension $N/\varkappa$ de groupe de Galois A_4 , on note k_σ (resp. k_ν , $k_{\sigma\nu}$) le sous-corps de N formé des éléments invariants par σ (resp. ν , $\sigma\nu$) et k la sous-extension de N cyclique de degré 3 sur $\varkappa$. On constate aisément que si $a \in k$, on a l'égalité :

$$\sum_{g \in A_4} g(a)\, \tilde{\psi}(g^{-1}) = 0$$

et que l'application qui à $x \in N$ associe $\sum_{g \in A_4} g(x)\, \tilde{\psi}(g^{-1})$ définit un homomorphisme injectif de $\varkappa[A_4]$-modules entre N/k et $M_3(N)$.

On suppose désormais que $\varkappa = \mathbb{Q}$. Pour tout corps L , on note O_L l'anneau des entiers de L . Il résulte de ce qui précède que O_N/O_k est un module de rang 1 sur l'ordre Λ , image de $\mathbb{Z}[A_4]$

par ψ, dans $M_3[\mathbb{Q}]$. Le choix fait pour ψ implique que les éléments de Λ sont les matrices de $M_3(\mathbb{Z})$:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ b_3 & c_3 & a_3 \end{pmatrix}$$

vériifant en outre $a_i \equiv a_j \pmod 2$ $b_i \equiv b_j \pmod 2$ $c_i \equiv c_j \pmod 2$. On constate qu'une base de Λ est formée par les images des éléments τ^i, $\sigma\tau^i$, $\nu\tau^i$ ($i = 0, 1, 2$) ; par conséquent $[M_3(\mathbb{Z}) : \Lambda] = 64$. L'ordre Λ est donc localement maximal sauf pour 2. L'idéal bilatère de Λ engendré par les images de $1+\sigma$, $1+\nu$, $1+\sigma\nu$ est égal à $2M_3[\mathbb{Z}]$. L'ordre à gauche de cet idéal bilatère est égal à $M_3[\mathbb{Z}]$; cet idéal n'est donc pas Λ-projectif ce qui montre que Λ n'est pas un ordre héréditaire.

Si on localise en 2, l'idéal bilatère $\mathfrak{J}$ de Λ_2 engendré par les images de $1+\sigma$, $1+\nu$, $1+\sigma\nu$ est égal à $2M_3[\mathbb{Z}_2]$ qui est le radical de $M_3[\mathbb{Z}_2]$. Si on applique le résultat de [R], section 39 exercice 3, on en déduit que le radical de Λ_2 contient celui de $M_3[\mathbb{Z}_2]$. Or $\Lambda_2/\mathrm{rad}(M_3[\mathbb{Z}_2])$ est isomorphe à $\mathbf{F}_3[C_2]$ qui est semi-simple, donc le radical Λ_2 est égal à $2M_3(\mathbb{Z}_2)$ c'est donc l'idéal bilatère $\mathfrak{J}$.

Par application du lemme de Nakayama, on en déduit :

Proposition 1. Un Λ-module M de rang un est localement libre si et seulement si $\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} M / \mathrm{rad}(\Lambda_2)\, \mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} M$ est $\mathbf{F}_2[C_3]$-libre.

§ 2. Ramification dans $N/\mathbb{Q}$. On a supposé l'extension sauvagement ramifiée. Les seuls idéaux premiers pouvant fournir une telle ramification sont 2 et 3. Si 3 est sauvagement ramifié, on note $\mathfrak{P}$ un idéal premier au-dessus de 3 dans O_N, le groupe de décomposition $D_{\mathfrak{P}}$

contient le groupe d'inertie $T_{\mathfrak{P}}$ d'ordre au moins égal à 3 . Comme $T_{\mathfrak{P}}$ est distingué dans $D_{\mathfrak{P}}$ on doit avoir $T_{\mathfrak{P}} = D_{\mathfrak{P}}$, le premier groupe de ramification est d'ordre 3 , distingué dans $D_{\mathfrak{P}}$, c'est donc que tous ces sous-groupes de A_4 sont égaux à un des sous-groupes d'ordre 3 . L'idéal (3) est donc ramifié dans $k/\mathbb{Q}$ et décomposé dans N/k .

Si 2 est sauvagement ramifié , on constate tout d'abord qu'il ne peut être ramifié dans $k/\mathbb{Q}$, sinon $k/\mathbb{Q}$ serait modérément ramifiée en 2 et $\mathbb{Q}_2$ contiendrait les racines cubiques de l'unité . L'idéal (2) est donc soit inerte , soit décomposé dans $k/\mathbb{Q}$.

Lorsque 2 est décomposé dans $k/\mathbb{Q}$, le complété de N pour un idéal $\mathfrak{p}$ au-dessus de 2 est une extension abélienne de $\mathbb{Q}_2$. On connait alors les liens entre les résolvantes locales et les sommes de Gauss galoisiennes ([F 2]) . On peut établir un rapport entre ces résolvantes locales et les résolvantes globales en utilisant le travail de J. Queyrut ([Q]) . Nous ne le ferons pas ici .

Nous supposons dans ce qui suit que l'idéal (2) est inerte dans $k/\mathbb{Q}$. Le groupe de décomposition est donc égal à A_4 et le groupe d'inertie qui en est un sous-groupe distingué est engendré par σ et ν , notons le H .

Les groupes de ramification supérieure étant distingués dans le groupe de décomposition , il ne peut y avoir qu'un saut de ramification :

$$G_o = H = G_1 = \ldots = G_t \supset G_{t+1} = \{1\} .$$

Comme l'indice de ramification est égal à 4 , on a $t \leq \frac{e}{p-1} = 4$ (cf. [S] ch. IV § 2 ex 3-C) ; si $t = 4$, G_4 doit être cyclique (d° ex 3-e) donc $G_4 = \{1\}$, on sait de plus que si $i \equiv 0\ (p)$ alors $G_i = G_{i+1}$, donc $G_2 = G_3$. Un calcul élémentaire montre alors que si $t = 3$, l'unique saut de ramification dans les extensions quadratiques

de k_2 contenues dans N_2 est trop grand . La seule possibilité est donc $t = 1$.

Notons $\mathfrak{p}$ (resp. $\mathfrak{p}_\sigma$, $\mathfrak{p}_\nu$, $\mathfrak{p}_{\sigma\nu}$, $\mathfrak{P}$) l'idéal premier de N_2 (resp. $k_{\sigma,2}$, $k_{\nu,2}$, $k_{\sigma\nu,2}$, k_2) . Les formules classiques nous permettent de calculer les discriminants , les différentes , ainsi que l'image de la trace dans les extensions intermédiaires de $N_2/\mathbb{Q}_2$.

Proposition 2 . Si 2 est inerte dans $k/\mathbb{Q}$ et ramifié dans N/k , les différentes des extensions intermédiaires sont données par :

$$\mathfrak{D}(N_2/k_{\sigma,2}) = \mathfrak{p}^2 \ , \ \mathfrak{D}(k_{\sigma,2}/k_2) = \mathfrak{p}_\sigma^2 \ , \ \mathfrak{D}(N_2/k_2) = \mathfrak{p}^6 \ .$$

Corollaire . Sous les mêmes hypothèses , on a :

$$\mathrm{Tr}_{N_2/k_{\sigma,2}}\left(O_{N_2}\right) = \mathfrak{p}_\sigma \ , \ \mathrm{Tr}_{N_2/k_2}\left(O_{N,2}\right) = \mathfrak{P} \ .$$

§ 3 . Etude en 2 du localisé de O_N/O_k lorsque 2 est inerte dans $k/\mathbb{Q}$.

Théorème 1 . Le Λ-module O_N/O_k est localement libre de rang un.

Démonstration . Puisque Λ est localement un ordre maximal pour les places différentes de 2 , il suffit d'étudier $O_{N_2}\Big/_{\mathrm{rad}(\Lambda_2)O_{N_2}+O_{k_2}}$.

Etant donnée la description du radical de Λ_2 ce module est égal à :

$$O_{N_2}\Big/_{O_{k_2}+(1+\sigma)O_{N_2}+(1+\nu)O_{N_2}+(1+\sigma\nu)O_{N_2}}$$

ce qui d'après le corollaire de la proposition précédente est encore égal à :

$$O_{N_2}\Big/_{O_{k_2}+\mathfrak{p}_\sigma+\mathfrak{p}_\nu+\mathfrak{p}_{\sigma\nu}} \ .$$

Les extensions k_σ/k , k_ν/k , $k_{\sigma\nu}/k$ étant ramifiées en 2 , ce quotient est égal à $O_{N_2}\Big/_{O_{k_{\sigma,2}}+O_{k_{\nu,2}}+O_{k_{\sigma\nu,2}}}$.

Lemme 1 . L'extension k_σ/k est engendrée par un élément $\sqrt{\alpha}$ où α est une unité de O_k .

Démonstration . Si $\sqrt{\alpha}$ engendre k_σ/k alors $\sqrt{\tau(\alpha)}$ (resp. $\sqrt{\tau^2\,\alpha}$) engendre k_ν/k (resp. $k_{\sigma\nu}/k$) mais $\alpha\,\tau(\alpha)\,\tau^2(\alpha)$ est un carré dans k_2 donc appartient à $\mathfrak{Q}_2^{*2}$. On en déduit que la valuation de α est paire. En divisant éventuellement α par un carré on se ramène au cas où α est une unité .

Lemme 2 . L'ordre de $O_{N_2}/O_{k_{\sigma,2}} + O_{k_{\nu,2}} + O_{k_{\sigma\nu,2}}$ est égal à 8 .

Démonstration . On connait la différente de N/k , donc le discriminant de cette extension . Le discriminant du O_k-réseau engendré par 1 et $\sqrt{\alpha}$ a pour discriminant $4\,O_k$ c'est donc que 1 , $\sqrt{\alpha}$ est une O_k-base de O_{k_σ} et par conséquent , 1 , $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\tau(\alpha)}$, $\sqrt{\tau^2\,\alpha}$ est une base du O_k-module $O_{k_{\sigma,2}} + O_{k_{\nu,2}} + O_{k_{\sigma\nu,2}}$. Le discriminant de ce O_k-réseau est égal à 2^8 . On en déduit que l'invariant relatif des O_k-réseaux $O_{N,2}$ et $O_{k_{\sigma,2}} + O_{k_{\nu,2}} + O_{k_{\sigma\nu,2}}$ est égal à $2\,O_k$. L'ordre du quotient est donc bien égal à 8 .

Il suffit donc pour achever la démonstration du théorème 1 de prouver la :

Proposition 3 . Le $\mathbb{F}_2[C_3]$-module $O_{N_2}/O_{k_{\sigma,2}} + O_{k_{\nu,2}} + O_{k_{\sigma\nu,2}}$ est libre de rang un .

Démonstration . L'algèbre $\mathbb{F}_2[C_3]$ est somme directe de deux facteurs simples $\frac{1+\tau+\tau^2}{3}\,\mathbb{F}_2[C_3]$ et $\left(1-\frac{1+\tau+\tau^2}{3}\right)\mathbb{F}_2[C_3]$.

Le module est donc somme directe de modules d'ordre 2 ou 4 , il est

donc isomorphe soit à $\mathbb{F}_2[C_3]$, soit à $\mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{F}_2 \oplus \mathbb{F}_2$. Il suffit donc de prouver qu'il existe dans le quotient un élément qui n'est pas invariant par τ .

Puisque $k_2/\mathbb{Q}_2$ est non ramifiée , k_2 contient les racines 7-ièmes de l'unité et le sous-groupe engendré par τ opère sur elles en ayant deux orbites . Soient K_2 le sous-corps de N_2 invariant par τ , π une uniformisante de K_2 , ϵ une racine primitive septième de l'unité et considérons $x = \epsilon\pi$. L'élément x n'appartient pas à $O_{k_\sigma} + O_{k_\nu} + O_{k_{\sigma\nu}}$ puisque sa valuation est impaire . De plus $\tau(\epsilon) - \epsilon$ est congru à une racine primitive septième de l'unité modulo 2 donc $\tau(x) - x$ a également une valuation impaire . La classe de x n'est donc pas invariante par τ dans le quotient .

§ 4 . Résolvantes et sommes de Gauss galoisiennes .

Puisque O_N/O_k est Λ- localement libre, on peut pour chaque place p trouver un élément a_p de O_N dont la classe est une Λ_p-base de $\mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} (O_N/O_k)$. On peut construire la résolvante $\langle a_p, \psi \rangle_{N/\mathbb{Q}}$. Il résulte des propriétés classiques des résolvantes et des sommes de Gauss que pour tout x de O_N $\langle x, \psi \rangle_{N/\mathbb{Q}}\, \tau(\psi)^{-1}$ est un élément de $\mathbb{Q}^*$ dont le quotient par $\langle a_p, \psi \rangle_{N/\mathbb{Q}}\, \tau(\psi)^{-1}$ dans $\mathbb{Q}_p^*$ appartient à $\mathbb{Z}_p$. Pour les places p différentes de 2 et de 3 l'extension $N/\mathbb{Q}$ est modérément ramifiée ; on sait alors ([F]) que $\langle a_p, \psi \rangle_{N/\mathbb{Q}}\, \tau(\psi)^{-1}$ est une unité .

a) Etude de $\langle a_2, \psi \rangle_{N/\mathbb{Q}}\, \tau(\psi)^{-1}$. On réutilise la méthode de calcul de [C]. Soit ρ (resp. ρ') la représentation régulière de A_4 (resp. A_4/H) . On a $\langle a_2, \psi \rangle\, \tau(\psi)^{-1} = \langle a_2, \rho \rangle_{N_2/\mathbb{Q}_2}\, \tau(\rho)\, \langle a_2, \rho' \rangle\, \tau(\rho')^{-1}$.

On sait par ailleurs que $\langle a_2, \rho \rangle^2$ est le discriminant du réseau engendré par a_2 et ses conjugués dans N_2 tandis que $\langle a_2, \rho' \rangle^2$ est le discriminant du réseau engendré dans k_2 par $T_{N_2/k_2}(a_2)$ et ses conjugués . D'où l'on déduit :

$$\langle a_2,\ \rho - \rho' \rangle^2 = D_{N_2/\mathbb{Q}_2} \times D_{k_2/\mathbb{Q}_2}^{-1} \times \left[O_{N_2} : O_2\, \mathbb{Z}_2[A_4] \right]^2 \times$$
$$\times \left[O_{k_2} : T_{N_2/k_2}(a_2)\, \mathbb{Z}_2[A_4/H] \right]^{-2}$$

mais le choix de a_2 conduit au diagramme :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & Tr_{N_2/k_2}(a_2)\, \mathbb{Z}_2[A_4/H] & \longrightarrow & a_2\, \mathbb{Z}_2[A_4] & \longrightarrow & O_{N_2}/O_{k_2} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & O_{k_2} & \longrightarrow & O_{N_2} & \longrightarrow & O_{N_2}/O_{k_2} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où les homomorphismes verticaux du centre et de gauche sont injectifs.

On en déduit que $\langle a_2,\ \rho - \rho' \rangle^2 = D_{N_2/\mathbb{Q}_2} \times D_{k_2/\mathbb{Q}_2}^{-1} = f_{N_2/\mathbb{Q}_2}(\psi)$

c'est-à-dire le conducteur d'Artin du caractère ψ. Comme ψ est à valeurs réelles $f_{N_2/\mathbb{Q}_2}(\psi) = \tau(\psi)^2$. On en déduit que :

$\langle a_2, \psi \rangle\, \tau(\psi)^{-1}$ est une unité en 2.

b) <u>Etude de</u> $\langle a_3, \psi \rangle_{N_3/\mathbb{Q}_3} \tau(\psi)^{-1}$. (Démonstration adaptée de celle du Th. 25 de [F1]). On note $\mathfrak{L}$ l'unique idéal au-dessus de 3 dans k.

Soit $O_{N_3} = \mathbb{Z}_3 \otimes_{\mathbb{Z}} O_N \simeq O_{k_{\mathfrak{L}}} \otimes_{O_k} O_N$. L'extension N/k étant non ramifiée en 3, O_{N_3} est un $O_{k_{\mathfrak{L}}}[H]$-module libre de rang un ; soit b une $O_{k_{\mathfrak{L}}}[H]$-base de O_{N_3} et c_i ($1 \le i \le 3$) une $\mathbb{Z}$-base de O_k alors O_{N_3} est $\mathbb{Z}_3[H]$-libre de rang 3 avec pour base les bc_i ($1 \le i \le 3$).

On pose $\theta = 1 + \sigma + \nu + \sigma\nu$. Alors :

$O_{N_3}/O_{k_{\mathfrak{L}}}$ est libre de rang 3 sur $\mathbb{Z}_3[H]/(\theta)$ avec

pour base les images des éléments bc_i. On peut mettre en évidence une autre base : en effet $\mathbb{Z}_3[H]/(\theta)$ est $\mathbb{Z}_3$-libre de rang 3 avec pour

base 1 , τ , τ^2 ; par conséquent si a_3 est un élément de O_{N_3} dont l'image dans $O_{N_3}/O_{k_\mathfrak{L}}$ est une Λ_3-base , les éléments $\tau^i(a_3)$ forment aussi une $\mathbb{Z}_3[H]/(\theta)$-base de $O_{N_3}/O_{k_\mathfrak{L}}$.

Soit maintenant χ le caractère de degré un de H dont la représentation induite est ψ . Pour chaque $\mathbb{Z}_3[H]/(\theta)$-base (e_i) $(1 \leq i \leq 3)$ de $O_{N_3}/O_{k_\mathfrak{L}}$ construisons la matrice 3×3 où les lignes (resp. les colonnes) sont indicées par j (resp. i) et le coefficient (j,i) vaut $\sum_{h \in H} \tau^j h(e_i)\, \chi(h^{-1})$.

Si on choisit $e_i = b c_i$ on obtient :

$$\tau^j h(b c_i)\, \chi(h^{-1}) = \tau^j h(b)\, \chi(h^{-1}).\, \tau^j(c_i) .$$

Le déterminant est égal à $\left[\prod_{j=1}^{3} \left(\sum_{h \in H} \tau^j h(b)\, \chi(h^{-1}) \right) \right] \det(\tau^j e_j)$.

Si on regarde la formule d'induction pour les sommes de Gauss ([M] th. 8-1) on constate que cette expression est égale à $\tau(\psi)$ multiplié par un élément qui est une unité en 3 .

Si on choisit $e_i = \tau^i(a_3)$, la matrice a pour coefficients :

$$\sum_{h \in H} \tau^j h\, \tau^{-i}(a_3)\, \chi(h^{-1}) = \sum_{h \in H} h(a_3)\, \chi(\tau^{-i} h^{-1} \tau^j).$$

Le déterminant est alors égal à $\langle a_3, \psi \rangle_{N_3/\mathbb{Q}_3}$.

Comme le passage d'une base à une autre se fait par une matrice 3×3 inversible à coefficients dans $\mathbb{Z}_3[H]/(\theta)$, on en conclut que :

$$\langle a_3, \psi \rangle\, \tau(\psi)^{-1} \text{ est une unité .}$$

Nous pouvons conclure :

Théorème 2 . Si $N/\mathbb{Q}$ est une extension galoisienne de $\mathbb{Q}$ à groupe de Galois A_4 , sauvagement ramifiée et telle que 2 soit inerte dans la sous-extension de N cyclique sur $\mathbb{Q}$, alors l'idéal engendré par les éléments $\langle x , \psi \rangle_{N/\mathbb{Q}} \tau(\psi)^{-1}$ est égal à $\mathbb{Z}$.

Remarque . Lorsque $N/\mathbb{Q}$ est sauvagement ramifiée en 2 et que 2 est décomposé dans $k/\mathbb{Q}$, on peut constater , en appliquant la méthode de A.M. Bergé [B] que O_N n'est pas localement libre en 2 sur son ordre associé , à l'inverse de ce qui se produit pour tous les groupes d'ordre inférieur à 12 .

[B] A.-M. BERGE Projectivité des anneaux d'entiers sur leurs ordres associés. Asterisque n° 61 (1979) p. 15-28 .

[C] J. COUGNARD Propriétés locales et globales de certaines extensions métacycliques .
Ann. Sci. Inst. Fourier Grenoble T.32 fasc. 2 , (1982) p. 1-12 .

[F1] A. FRÖHLICH Galois module structure of algebraic integers .
Springer-Verlag 1983 .

[F2] A. FRÖHLICH Some problems of Galois module structure for wild extensions .
Proc. London Math. Soc. 27 (1978) , 193-212 .

[M] J. MARTINET Character theory and Artin L-functions dans Algebraic Number Fields édité par A. Fröhlich Academic Press 1977 .

[Q] J. QUEYRUT Structure galoisienne des anneaux d'entiers d'extensions sauvagement ramifiées I .
Ann. Sci. Inst. Fourier Grenoble T. 31 fasc. 9 , (1981) p. 1-35 .

[R] J. REINER Maximal Orders . Academic Press 1975 .

[S] J.P. SERRE Corps locaux . Hermann 1968 .

Jean COUGNARD
Faculté des Sciences. Mathématiques
ERA CNRS 070 654
25030 BESANÇON CEDEX