COHOMOLOGIE DES VARIÉTÉS DE SIEGEL ET REPRÉSENTATIONS GALOISIENNES ASSOCIÉES AUX REPRÉSENTATIONS CUSPIDALES COHOMOLOGIQUES DE $GSp_4(\mathbb{Q})$

par

J. Tilouine

Ce texte reprend le contenu de deux exposés qui présentent, avec commentaires (mais sans résultat nouveau), une idée de R. Taylor [11] pour construire la représentation galoisienne associée à une forme cuspidale π sur $GSp(4)$ dont la composante à l'infini est dans la série discrète. Cette idée n'utilise pas la formule des traces pour GSp_4 mais seulement : la théorie de Hodge (et de Hodge-Tate), les relations de congruences à la Eichler-Shimura et la dualité de Poincaré. Cette méthode montre qu'on peut associer à π une représentation galoisienne qui est, soit de la forme voulue, soit d'une forme étrange. Le théorème dans sa version finale, qui consiste à exclure la forme étrange, nécessite le recours à la formule des traces. Il est dû à Laumon [8] et à Weissauer [12]). Nous nous concentrons sur la contribution de R. Taylor, en ajoutant quelques commentaires sur les progrès de [8] et [12]. La forme finale est la suivante (les notations sont expliquées dans le texte).

Soit $G = GSp_4$, $\mathbf{A} = \mathbb{Q}_f \times \mathbb{Q}_\infty$ l'anneau des adèles rationnelles et $G(\mathbb{A}) = G_f \times G_\infty$, avec $G_f = GSp_4(\mathbb{Q}_f)$ et $G_\infty = GSp_4(\mathbb{R})$. Soit T le tore de G des $t = \mathrm{diag}(t_1, t_2, \nu t_2^{-1}, \nu t_1^{-1})$. Soit $\lambda : t \mapsto t_1^a t_2^b$ $(a \geq b \geq 0)$ un poids dominant pour (G, B, T) ; soit $\widehat{\lambda}$ le poids dominant dual et $\Pi_{\widehat{\lambda}+\rho}$ le paquet des séries discrètes de G_∞ de caractère infinitésimal $\widehat{\lambda} + \rho$ (ρ demi-somme des racines positives). Ce paquet comprend deux éléments $\pi^H_{\widehat{\lambda}+\rho}$ et $\pi^W_{\widehat{\lambda}+\rho}$.

Théorème 0.1. — *Soit π_f une représentation lisse admissible de G_f pour laquelle il existe des représentations lisses admissibles de G_f, π_1 et π_2, équivalentes à π_f en presque toute place, et telles que $\pi_1 \otimes \pi^H_{\widehat{\lambda}+\rho}$ et $\pi_2 \otimes \pi^W_{\widehat{\lambda}+\rho}$ soient automorphes cuspidales.*

Alors, pour tout nombre premier ℓ, il existe une représentation galoisienne continue

$$\rho_{\pi,\ell} : \mathrm{Gal}\,(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to GL_4(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

non-ramifiée hors de $\mathrm{Ram}(\pi) \cup \{\ell, \infty\}$ *et telle que pour tout nombre premier* q *en-dehors de cet ensemble fini,*

$$\det(1_4 - X \cdot \rho_{\pi,\ell}(Fr_q)) = P^*_{\pi,q}(q^{a+b+3}X),$$

où $P^*_{\pi,q}(q^{-s})^{-1}$ *est le facteur d'Euler en* q *de la fonction* L *automorphe de degré* 4 *associée à* π.
On définit ainsi un système strictement compatible de représentations galoisiennes, pures de poids $a+b+3$. *Ces représentations sont de Hodge-Tate de poids* $0, b+1, a+2, a+b+3$.

La précaution concernant π_1 et π_2 au lieu de π_f vient de ce que la multiplicité un pour $\pi_f \otimes \pi^H_\infty$, conjecturée, n'est pas établie. Elle le sera dès que le transfert global de $GSp(4)$ à GL_4 sera établi [1].
Nous concluons ce texte par une description conjecturale de toutes les représentations galoisiennes associées à une représentation cuspidale cohomologique de $GSp(4,\mathbb{Q})$ (mais dont la composante à l'infini n'est pas nécessairement dans la série discrète). Dans cette partie, nous suivons et développons légèrement l'approche suivie par T. Itô dans la dernière section de [7].

1. Variétés de Siegel-Shimura, systèmes locaux

Soit $J = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & -1 & & \\ -1 & & & \end{pmatrix}$ et $G = GSp_4 = \{X \in GL_4; {}^tXJX = \nu J\}$ le schéma en groupes réductifs déployés sur $\mathbb{Z}$ associé à J. On note $s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $1_2 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$.
On introduit le diagramme des sous-groupes paraboliques standard

$$\begin{array}{ccccc} & & G & & \\ & / & & \backslash & \\ P & & & & Q \\ & \backslash & & / & \\ & & B & & \end{array}$$

où B désigne le sous-groupe de Borel constitué des matrices triangulaires supérieures de G, P désigne le groupe des matrices triangulaires supérieures par blocs $(1,2,1)$ de G, et Q celui des matrices triangulaires par blocs $(2,2)$ de G. On introduit les décompositions de Levi $Q = MU$ et $B = TN$, où M est isomorphe à $GL(2)\times\mathbb{G}_m$ par $(A,\nu)\mapsto diag(A,\nu s^tAs)$, et T est le tore de rang 3 des $t=diag(t_1,,t_2,\nu t_2^{-1},\nu t_1^{-1})$. U consiste en les matrices $\begin{pmatrix} 1_2 & u \\ 0 & 1_2 \end{pmatrix}$ où $u=\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}$.

Soit $\mathbf{A}=\mathbb{Q}_f\times\mathbb{Q}_\infty$ l'anneau des adèles rationnelles ; on note $G_{\mathbf{A}}=G_f\times G_\infty$ la décomposition du groupe des $\mathbf{A}$-points de G.

Soit $h : Res_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mathbb{C}^\times\to G_{/\mathbb{R}}$ le morphisme envoyant $x+iy$ sur $\begin{pmatrix} x1_2 & ys \\ -ys & x1_2 \end{pmatrix}$

Soit X l'orbite de h par conjugaison sous G_∞ et $C_\infty=Stab_{G_\infty}(h)$.

Soit $K\subset G_f$ un sous-groupe compact ouvert. La variété de Siegel-Shimura (de genre 2) de niveau K est définie comme

$$S_K=G_{\mathbb{Q}}\backslash G_{\mathbf{A}}/KC_\infty=G_{\mathbb{Q}}\backslash(X\times G_f/K)$$

Si K est net (le sous-groupe de $\mathbb{C}^\times$ engendré par les valeurs propres des éléments de $KG_\infty\cap G_{\mathbb{Q}}$ ne contient pas de racine de l'unité autre que 1), S_K est une variété analytique complexe lisse de dimension 3, et aussi une variété algébrique complexe quasi-projective lisse (non projective). Si $K'\subset K$, on a un morphisme fini $S_{K'}\to S_K$. Si $g\in G_f$, la multiplication à droite $r_g : G_{\mathbf{A}}\to G_{\mathbf{A}}$ par g induit une correspondance algébrique $T_K(g)$ (dont les deux projections sont finies)

$$\begin{array}{ccccc} & S_{K\cap gKg^{-1}} & \to & S_{K\cap g^{-1}Kg} & \\ \swarrow & & & & \searrow \\ S_K & & & & S_K \end{array}$$

On munit ces variétés de systèmes locaux comme suit. Soit $X^*(T)$ le groupe des caractères de T. On paramétrise ce groupe par le réseau L de $\mathbb{Z}^3$ des triplets $(a,b;c)$ tels que $c\equiv a+b \pmod 2$; $L\to X^*(T)$, $(a,b;c)\mapsto(t\mapsto t_1^at_2^b\nu^{\frac{c-a-b}{2}})$. La restriction de ce caractère au centre est $z\mapsto z^c$. On prend $c=a+b$ dans la suite.

Soit $\lambda\in X^*(T)$ dominant pour (G,B,T) ; on a donc $a\geq b\geq 0$. 'Soit V_λ la représentation de Weyl de G de plus haut poids λ. On définit le système local $V_{\lambda,K}$ sur S_K comme le faisceau des sections localement constantes du fibré $G_{\mathbb{Q}}\backslash(G_{\mathbf{A}}\times V_\lambda)/KC_\infty\to G_{\mathbb{Q}}\backslash G_{\mathbf{A}}/KC_\infty$, l'action sur $G_{\mathbf{A}}\times V_\lambda$ étant donnée par $\gamma(g,v)kc_\infty=(\gamma gkc_\infty,\gamma v)$.

Les faisceaux $V_{\lambda,K}$ sont compatibles aux morphismes $S_{K'}\to S_K$.

En faisant agir la multiplication à droite par $g\in G_f$ trivialement sur V_λ, on définit une action de la correspondance algébrique $T_K(g)$ sur $(S_K,V_{\lambda,K})$.

2. Cohomologie

Pour tout $g_f \in G_f$ et tout compact ouvert $K \subset G_f$, on a donc une action de $T_K(g)$ sur $H^\bullet(S_K, V_{\lambda,K})$. Ces actions sont compatibles aux morphismes de transition $S_{K'} \to S_K$. En passant à la limite inductive on obtient une action de G_f sur

$$H^\bullet(S, V_\lambda) = \mathrm{indlim}_K H^\bullet(S_K, V_{\lambda,K})$$

C'est un G_f-module admissible, *i.e.* les K-invariants sont de dimension finie : $H^\bullet(S, V_\lambda)^K = H^\bullet(S_K, V_{\lambda,K})$. Par le théorème de comparaison de de Rham, et en tirant les faisceaux par $G_{\mathbf{A}} \to S = G_{\mathbb{Q}} \backslash (G_{\mathbf{A}}/C_\infty)$

$$H^\bullet(S, V_\lambda) = H^\bullet(\mathcal{E}^\bullet(S, V_\lambda))) = H^\bullet(\mathcal{E}^\bullet(G_{\mathbf{A}}, V_\lambda)^{G_{\mathbb{Q}}-equiv, C_\infty-inv.})$$

Grâce à l'isomorphisme $G_{\mathbf{A}} \times V_\lambda \to G_{\mathbf{A}} \times V_\lambda$, $(g, v) \mapsto (g, g_\infty^{-1} v)$, on a

$$H^\bullet(\mathcal{E}^\bullet(G_{\mathbf{A}}, V_\lambda)^{G_{\mathbb{Q}}-equiv, C_\infty-inv.}) = H^\bullet(\mathcal{E}^\bullet(G_{\mathbf{A}}, V_\lambda)^{G_{\mathbb{Q}}-inv, C_\infty-equiv})$$

et on reconnaît dans le membre de droite la cohomologie d'algèbre de Lie relative, qu'on calcule par le complexe de Koszul relatif. On peut donc exprimer le membre de droite en termes de groupes de $(\mathfrak{g}, C_\infty)$-cohomologie :

$$H^\bullet(\mathcal{E}^\bullet(G_{\mathbf{A}}, V_\lambda))^{G_{\mathbb{Q}}-inv, C_\infty-equiv}) = H^\bullet(\mathfrak{g}, C_\infty, \mathcal{C}^\infty(G_{\mathbb{Q}} \backslash G_{\mathbf{A}}) \otimes V_\lambda).$$

Ceci permet d'introduire en plus de $H_c^\bullet(S, V)$ et $H_!^\bullet = \mathrm{Im}(H_c^\bullet \to H^\bullet)$ la cohomologie L^2 et la cohomologie cuspidale.
On définit des inclusions

$$\mathcal{C}^\infty_{cusp} \subset \mathcal{C}^\infty_{c/centre} \subset \mathcal{C}^\infty_{(2)} \subset \mathcal{C}^\infty$$

où la condition de cuspidalité est définie par $\int_{\mathcal{N}_{\mathbb{Q}} \backslash \mathcal{N}_{\mathbf{A}}} f(gn)dn = 0$, $\mathcal{N}$ désignant le radical unipotent d'un des paraboliques P, Q, B. La première inclusion est donnée par un système inductif de troncatures lisses par des compacts mod. centre de plus en plus grands, les autres inclusions étant naturelles. Les $(\mathfrak{g}, C_\infty)$-modules correspondent définissent les cohomolologies cuspidales, à support compact, L^2, resp. classique. Ces inclusions induisent des morphismes

$$H^\bullet_{\mathrm{cusp}}(S, V_\lambda) \to H_c^\bullet(S, V_\lambda) \to H^\bullet_{(2)}(S, V_\lambda) \to H^\bullet(S, V_\lambda)$$

Rappelons que Borel a démontré que l"application induite

$$H^\bullet_{\mathrm{cusp}}(S, V_\lambda) \to H_!^\bullet(S, V_\lambda)$$

est injective.

3. Cohomologie cuspidale

On rappelle que le module de Harish-Chandra $(\mathcal{C}^\infty_{cusp})^{(C_\infty)}$ de $\mathcal{C}^\infty_{cusp}$ est le sous-$(\mathfrak{g}, C_\infty)$-module (admissible) constitué des vecteurs C_∞-finis (dont la C_∞-orbite engendre un sous-espace de dimension finie).
On démontre (livre de Borel-Wallach) que l'inclusion $(\mathcal{C}^\infty_{cusp})^{(C_\infty)} \otimes V_\lambda \subset \mathcal{C}^\infty_{cusp} \otimes V_\lambda$ de $(\mathfrak{g}, C_\infty)$-modules induit un isomorphisme de $(\mathfrak{g}, C_\infty)$-cohomologie. On peut décomposer le $(\mathfrak{g}, C_\infty)$-module de Harish-Chandra de $\mathcal{C}^\infty_{cusp}$ en constituants simples :

$$\mathcal{C}^\infty_{cusp}(G_\mathbb{Q} \backslash G_\mathbf{A})^{(C_\infty)} = \bigoplus_{\pi \text{ cusp.}} m_\pi . \pi_f \otimes \pi_\infty^{(C_\infty)}$$

où $\pi = \pi_f \otimes \pi_\infty$ parcourt les classes d'isomorphisme de représentations cuspidales, m_π est la multiplicité de π et $\pi_\infty^{(C_\infty)}$ désigne le $(\mathfrak{g}, C_\infty)$-module des vecteurs lisses de π_∞. On a de plus la décomposition

$$H^\bullet_{\text{cusp}}(S, V_\lambda) = \bigoplus_{\pi \text{ cusp.}} m_\pi \cdot \pi_f \otimes H^\bullet(\mathfrak{g}, C_\infty, \pi_\infty^{(C_\infty)} \otimes V_\lambda)$$

Pour chaque $\pi = \pi_f \otimes \pi_\infty$ cuspidale, la $(\mathfrak{g}, C_\infty)$-cohomologie de $\pi_\infty^{(C_\infty)} \otimes V_\lambda$ est nulle à moins que le caractère infinitésimal du module coefficient ne soit trivial ; ceci équivaut à dire que le caractère infinitésimal de π_∞ est égal à celui de $V_\lambda^\vee = V_{\widehat{\lambda}}$, la représentation de Weyl de plus haut poids $\widehat{\lambda} = (a, b; -c)$. De plus on a la décomposition de Hodge :

$$H^m(\mathfrak{g}, C_\infty, \pi_\infty^{(C_\infty)} \otimes V_\lambda) = \bigoplus_{u+v=m} H^{u,v}(\mathfrak{g}, \mathfrak{q}, \pi_\infty^{(C_\infty)} \otimes V_\lambda)$$

(voir [2] ou [6]).
Soit $\mathfrak{t}$ l'algèbre de Lie réelle du tore T ; notons que par différentiation, $X^*(T)$ se plonge canoniquement comme réseau dans le dual linéaire de $\mathfrak{t}$. 'Soit $\rho = (2, 1; 0)$ la demi-somme des racines positives de (G, B, T). Par l'isomorphisme d'Harish-Chandra

$$\gamma : Z\mathfrak{g} \cong (\text{Sym}^\bullet \mathfrak{t})^W$$

on peut interpréter le caractère infinitésimal de $V_{\widehat{\lambda}}$ comme $\widehat{\lambda} + \rho$. La somme ne porte donc que sur les π tels que $\chi_{\pi_\infty} = \widehat{\lambda} + \rho$. La classification de Vogan-Zuckerman pour $G = GSp_4$ donne les modules de Harish-Chandra avec cette propriété :

– La série discrète contient deux telles représentations : $\pi^H_{\widehat{\lambda}+\rho}$ et $\pi^W_{\widehat{\lambda}+\rho}$; elles sont telles que

  -la $(\mathfrak{g}, \mathfrak{q})$-cohomologie de $\pi^H_{\widehat{\lambda}+\rho} \otimes V_\lambda$ est nulle sauf en bidegré $(3, 0)$ et $(0, 3)$, où elle est de dimension 1,

-la $(\mathfrak{g},\mathfrak{q})$-cohomologie de $\pi^W_{\widehat{\lambda+\rho}}\otimes V_\lambda$ est nulle sauf en bidegré $(2,1)$ et $(1,2)$, où elle est de dimension 1,

Si $a>b>0$, il n'y a pas d'autre représentations.

- Si $a>0, b=0$, il y a une représentation π^1_λ unitaire mais pas tempérée ; elle n'est donc pas dans la série discrète ; elle contribue aux $H^{2,0}$ et $H^{0,2}$ (chacun est de dimension 1), et aux $H^{3,1}$ et $H^{1,3}$ (chacun de dimension 1).
- Si $a=b>0$, il y a deux représentations $\pi^{2,\pm}_\lambda$, avec $\pi^{2,-}_\lambda=\pi^{2,+}_\lambda\otimes sgn$. Elles sont également non tempérées. Elle interviennent dans $H^{1,1}$ et $H^{2,2}$ (à chaque fois avec dimension 1)
- Si $a=b=0$, les représentations sont $\nu^{c/2}$ et $\nu^{c/2}\otimes sgn$; elles interviennent dans $H^{0,0}$, $H^{1,1}$, $H^{2,2}$ et $H^{3,3}$ (à chaque fois avec dimension 1).

On définit la composante π_f-isotypique du G_f-module $H^\bullet_{\text{cusp}}(S,V_\lambda)$ comme $H^\bullet_{\text{cusp}}[\pi_f]=\pi_f\otimes W_{\pi_f}$ où $W_{\pi_f}=\text{Hom}_{G_f}(\pi_f,H^\bullet_{\text{cusp}})$.

$$H^\bullet_{\text{cusp}}=\bigoplus_{\pi\text{ cusp.}}H^\bullet_{\text{cusp}}[\pi_f]$$

Notons que par la classification de VZ, on peut estimer la dimension (finie) de W_{π_f} :

$$W_{\pi_f}=\bigoplus_{\pi=\pi_f\otimes\pi_\infty\text{ cusp.}}m_\pi\cdot H^\bullet(\mathfrak{g},C_\infty,\pi_\infty^{(C_\infty)}\otimes V_\lambda)$$

donc

$$\dim W_{\pi_f}=2m(\pi_f\otimes\pi^H_{\widehat{\lambda+\rho}})+2m(\pi_f\otimes\pi^W_{\widehat{\lambda+\rho}})+4m(\pi_f\otimes\pi^1_\lambda)+2m(\pi_f\otimes\pi^{2,\pm}_\lambda)$$

où π^1_λ resp. $\pi^{2,\pm}_\lambda$ peut intervenir en poids $(a,0)$ resp. (a,a).

4. Cohomologie ℓ-adique

On va introduire les trois ingrédients-clés pour l'étude des représentations galoisiennes :
-décomposition de Hodge-Tate et endomorphisme de Sen,
-dualité de Poincaré
-relations d'Eichler-Shimura.

Les S_K admettent des modèles canoniques sur $\text{Spec}\,\mathbb{Q}$. Plus précisément, pour chaque sous-groupe compact ouvert K, soit $\mathbb{Q}_K$ le sous-corps de $\mathbb{Q}^{ab}$ fixé par $[\nu(K),\mathbb{Q}]$. Il y a des modèles $S_K/\mathbb{Q}$ munis de morphismes $S_K\to\text{Spec}\,\mathbb{Q}_K$ à fibres géométriques connexes, qui sont espaces de modules fins de variétés abéliennes principalement polarisées (en abrégé, VAPP) avec structure de niveau K ; on note A_K la VAPP universelle $A_K\to S_K$ définies sur $\mathbb{Q}_K$.

Les morphismes de transition $S_{K'} \to S_K$ sont compatibles à l'inclusion $\mathbb{Q}_K \subset \mathbb{Q}_{K'}$.
Soit $\overline{x}$ un point géométrique de S_K, on a une représentation continue

$$\phi_{\overline{x}} : \pi_1(S_K, \overline{x}) \to GSp(T_\ell A_{K,\overline{x}}) = GSp_4(\mathbb{Z}_\ell)$$

4.1. Décomposition de Hodge-Tate et endomorphisme de Sen. — Soit λ un poids dominant pour (G, B, T). La composée de $\phi_{\overline{x}}$ avec l'action de $G(\mathbb{Z}_\ell)$ sur $V_\lambda(\mathbb{Q}_\ell)$ fournit un faisceau lisse sur le modèle canonique S_K. En passant à la limite sur les niveaux, on obtient un $G_f \times \mathrm{Gal}\,(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-module

$$H^\bullet_{\mathrm{et}}(S \otimes \overline{\mathbb{Q}}, V_\lambda(\mathbb{Q}_\ell))$$

Par Faltings-Chai Chap.VI, il est de Hodge-Tate. Pour décrire sa décomposition de Hodge-Tate, on introduit le sous-ensemble W^M du groupe de Weyl W constitué des representants de Kostant de $W_M \backslash W$. Ils sont définis par la condition $w(\Phi^+_G) \cap \Phi^-_G \subset \Phi^{M-}$. Soit s_α resp. s_β la réflexion associée à la racine courte $\alpha = (1, -1; 0)$, resp. à la racine longue $\beta = (2, 0; 0)$. On voit facilement que $W^M = \{w_0, w_1, w_2, w_3\}$ où $w_0 = Id$, $w_1 = s_\beta$, $w_2 = s_\beta s_\alpha$, $w_3 = s_\beta s_\alpha s_\beta$.
Posons $H_{w_0} = 0$, $H_{w_1} = -b - 1$, $H_{w_2} = -a - 2$ et $H_{w_3} = -a - b - 3$.
Suivant Faltings-Chai, on définit des G_f-modules admissibles $A^v_{w_u}(\lambda)$ $0 \leq u, v \leq 3$ en termes de la cohomologie cohérente du complexe BGG dual ; par exemple, $A^0_{w_3}(\lambda) = \mathrm{indlim}_{K,\Sigma} H^0(\overline{S}^\Sigma_K, \omega^{a+3,b+3})$, où $\overline{S}^\Sigma_K$ désigne la compactification toroidale de S_K associée à l'éventail Σ et $\omega^{i,j}$ $(i \geq j \geq 0)$ est le prolongement canonique à $\overline{S}^\Sigma_K$ du fibré des différentielles relatives de A_K/S_K de poids (i, j). Rappelons que le faisceau $\omega^{i,j}$ sur S_K est le faisceau localement libre de rang $i - j + 1$ associé à la représentation $\mathrm{Sym}^{i-j} \otimes \det^j \mathrm{St}_2$ du sous-groupe de Levi M de Q. On a alors la décomposition de Hodge-Tate $G_f \times \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-équivariante :

$$H^m_{\mathrm{et}}(S \otimes \overline{\mathbb{Q}}, V_\lambda(\mathbb{Q}_\ell)) \otimes \widehat{\overline{\mathbb{Q}}}_\ell = \bigoplus_{u+v=m} A^v_{w_u}(\lambda) \otimes \widehat{\overline{\mathbb{Q}}}_\ell(H_{w_u}(\lambda))$$

On abrège $H_{w_i}(\lambda)$ en H_i.
Soit $W^3_{\pi,\ell} = \mathrm{Hom}_{G_f}(\pi_f, H^3_{\mathrm{et}}(S \otimes \overline{\mathbb{Q}}, V_\lambda(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)))$. Posons $m^H(\pi_f) = m(\pi_f \otimes \pi^H_{\lambda+\rho})$ et $m^W(\pi_f) = m(\pi_f \otimes \pi^W_{\lambda+\rho})$
Le corollaire suivant est une application directe s'un théorème de Sen :

Corollaire 4.1. — *Soit π cuspidale telle que $m^H(\pi) > 0$ et $m^W(\pi) > 0$. Considérons la représentation galoisienne $\mathrm{Gal}\,(\overline{\mathbb{Q}}_\ell/\mathbb{Q}_\ell) \to GL(W^3_{\pi,\ell})$. Soit C_ℓ son image et $\mathfrak{c}_\ell$ son algèbre de Lie. Il existe un endomorphisme Φ de $\mathfrak{c}_\ell \otimes \widehat{\overline{\mathbb{Q}}}_\ell$ de valeurs propres H_i $i = 0, 1, 2, 3$, avec multiplicité resp. $m^H(\pi_f)$, $m^W(\pi_f)$, $m^W(\pi_f)$, $m^H(\pi_f)$.*

Démonstration : Cela résulte immédiatement du théorème de Sen suivant. Soit (σ_ℓ, V_ℓ) une représentation ℓ-adique de Hodge-Tate de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell/\mathbb{Q}_\ell)$, soit $\mathfrak{g}_\ell$ l'algèbre de Lie de $\mathrm{Im}\,\sigma_\ell$; Il existe alors un endomorphisme $\Phi \in \mathfrak{g}_\ell(\widehat{\overline{\mathbb{Q}}}_\ell)$ dont les valeurs propres sur $V_\ell \otimes \otimes\widehat{\overline{\mathbb{Q}}}_\ell$ sont les poids de Hodge-Tate comptés avec multiplicités. Pour déterminer les multiplicités, on vérifie que pour $u+v=3$, la dimension de $\mathrm{Hom}_{G_f}(\pi_f, A^v_{w_u}(\lambda))$ est égale à $m^H(\pi_f)$ si $uv=0$, et à $m^W(\pi_f)$ si u ou v vaut 2. Pour cela, on utilise un théorème de M. Harris [6] qui décompose le G_f-module $A^v_{w_u}(\lambda)$ (donné par une limite inductive d'espaces de cohomologie cohérente) comme somme des

$$\pi_f \otimes H^{u,v}(\mathfrak{g}, \mathfrak{q}, \pi_\infty \otimes V_\lambda)^{\oplus m(\pi)}$$

Ces derniers espaces ont la dimension voulue grâce à la classification de VZ rappelée ci-dessus. Il reste à rappeler que les espaces $A^v_{w_u}(\lambda)$ ont une structure $\mathbb{Q}$-rationnelle naturelle puisque ce sont des espaces de cohomologie cohérente de faisceaux définis sur $\mathbb{Q}$; donc les $\mathrm{Hom}_{G_f}(\pi_f, A^v_{w_u}(\lambda))$ ont une structure $\overline{\mathbb{Q}}$-rationnelle naturelle, de sorte que les dimensions sur $\mathbb{C}$ ou sur $\widehat{\overline{\mathbb{Q}}}_\ell$ des gradués sont les mêmes.

4.2. Dualité de Poincaré. — Le cup-produit induit un accouplement parfait (sur les K-invariants, pour chaque K net)

$$H^m_{\mathrm{et},!}(S\otimes\overline{\mathbb{Q}}, V_\lambda(\mathbb{Q}_\ell))\times H^{6-m}_{\mathrm{et},!}(S\otimes\overline{\mathbb{Q}}, V_{\widehat{\lambda}}(\mathbb{Q}_\ell)) \to H^6_{\mathrm{et,c}}(S\otimes\overline{\mathbb{Q}}, V_{(0,0;c)}(\mathbb{Q}_\ell)) \xrightarrow{tr} \mathbb{Q}_\ell(-3-c)$$

Cet accouplement est $G_f \times \mathrm{Gal}\,(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$-équivariant si l'on munit $\mathbb{Q}_\ell(-3-c)$ de l'action de G_f par $g_f \mapsto ||\nu(g_f)||^{-c}$.
On omet le caractère algébrique ν dans la formule qui suit :

Lemme 4.2. —

$$H^6_{\mathrm{et,c}}(S \otimes \overline{\mathbb{Q}}, V_{(0,0;c)}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)) = \bigoplus_\chi (\chi|| \cdot ||^{-c}) \otimes (\chi^{\mathrm{gal}}\chi_\ell^{-3-c})$$

où $\chi : \mathbb{Q}_f^\times/\mathbb{Q}^{\times+} \to \overline{\mathbb{Q}}_\ell^\times$ parcourt les caractères continus d'image finie et χ_ℓ est le caractère cyclotomique ℓ-adique. Dans cette décomposition, la trace est le morphisme de projection sur le caractère trivial.

Du point de vue galoisien, on a en effet par dualité de Poincaré étale :

$$H^6_{\mathrm{et,c}}(S\otimes\overline{\mathbb{Q}}, V_{(0,0;c)}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell))) = H^0_{\mathrm{et}}(\mathrm{Spec}\,(\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}})\otimes\overline{\mathbb{Q}}, V_{(0,0;-3-c)}(\overline{\mathbb{Q}}_\ell)) = \bigoplus_\chi (\chi^{\mathrm{gal}}\chi_\ell^{-3-c})$$

L'identification du H^0 de S avec celui de $\mathrm{Spec}\,(\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}})$ vient de la théorie des modèles canoniques rappelée ci-dessus. La partie concernant G_f vient de la fonctorialité de cette dualité pour les correspondances algébriques et de ce que la théorie des modèles canoniques précise que dans l'identification du H^0 de S avec celui de Spec $(\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}})$, l'action de $g_f \in G_f$ se fait par la loi d'Artin de $\nu(g_f)$. Rappelons que si π est cuspidale sur $G(\mathbf{A})$, de caractère central ω_π (d'ordre fini), on a $\pi_{\mathfrak{q}} \cong \pi_q^* \otimes \omega_{\pi,q}$ en tout q non-ramifé. En effet, le paramètre de Langlands local en une telle place est

$$\sigma(\pi_q)(Fr_q) = \begin{pmatrix} \alpha_q & & & \\ & \beta_q & & \\ & & \gamma_q & \\ & & & \delta_q \end{pmatrix}$$

(où $P_{\pi,q}^*(X) = (1-\alpha_q X)(1-\beta_q X)(1-\gamma_q X)(1-\delta_q X)$) et

$$\sigma(\omega_{\pi,q}) = \nu \circ \sigma(\pi_q) : Fr_q \mapsto \alpha_q \delta_q = \beta_q \gamma_q,$$

donc

$$\sigma(\pi_q) \cong \sigma(\pi_q)^* \otimes \sigma(\omega_{\pi,q})$$

R. Taylor pose dans [11] la question : **a t-on globalement** $\pi \cong \pi^* \otimes \omega_\pi$ **?** Nous remercions le rapporteur qui a attiré notre attention sur le fait suivant : **la réponse à cette question est positive.**
En effet, pour toute place v de $\mathbb{Q}$, la représentation locale π_v satisfait $\pi_v \cong \pi_v^* \otimes \omega(\pi_v)$ puisque $g \mapsto \pi_v({}^t g^{-1})$ réalise la dualité et que $gJ^t g = \lambda(g)J$.
En l'absence de réponse à cette question au moment de la rédaction de [11], Taylor a eu recours à une astuce : introduire un ensemble fini Π de représentations cuspidales π presqu'équivalentes, c.à.d. dont les paramètres locaux $\sigma(\pi_q)$ sont égaux pour presque tout q, et qui est stable par $\pi \mapsto \pi^* \otimes \omega_\pi$. Nous appelerons un tel ensemble Π un paquet autodual tordu. Pour un tel paquet, soit $W_{\Pi,\ell}^i = \bigoplus_{\pi \in \Pi} W_{\pi,\ell}^i$ et $W_\Pi = \bigoplus_i W_{\Pi,\ell}^i$.
Il résulte de la dualité de Poincaré que

$$W_{\Pi,\ell}^i \cong (W_{\Pi,\ell}^{6-i})^* \otimes \overline{\mathbb{Q}}_\ell(\omega_\pi^{\mathrm{gal}} \chi_\ell^{-3-c})$$

($\omega_\pi^{\mathrm{gal}}$ ne dépend pas de $\pi \in \Pi$ par Cebotarev).

4.3. Relations d'Eichler-Shimura. — Soit K un compact ouvert net. Soit q un premier ne divisant pas le niveau de K ; soit $\mathcal{H}_{G,q}$ resp. $\mathcal{H}_{M,q}$, la $\mathbb{Q}$-algèbre de Hecke non ramifiée de $G(\mathbb{Q}_q)$ resp. de $M(\mathbb{Q}_q)$. Soit $\widetilde{S}_G^M : \mathcal{H}_{G,q} \to \mathcal{H}_{M,q}$ la transformée de Satake partielle tordue $\widetilde{S}_G^M(f)(m) = \int_{U(\mathbb{Q}_q)} f(mu)du$. L'algèbre $\mathcal{H}_{M,q}$ est engendrée sur
$\mathcal{H}_{G,q}$ par $U_q = M(\mathbb{Z}_q)\mathrm{diag}(1,1,q,q)\cdot M(\mathbb{Z}_q)$. Le polynôme minimal $P_q(X)$de U_q sur $\mathcal{H}_{G,q}$ est un polynôme unitaire de degré 4 appelé polynôme de Hecke. Pour toute représentation cuspidale π cohomologique telle que $\pi^K \neq 0$, soit $\lambda_\pi : \mathcal{H}_{G,q} \to \overline{\mathbb{Q}}$ la représentation donnant l'action de $\mathcal{H}_{G,q}$ sur la droite $\pi_q^{G(\mathbb{Z}_q)}$. Soit

$P_{\pi,q}(X)$ le polynôme réciproque de $P^*_{\pi,q}(X) = (1-\alpha_q X)$.... La spécialisation de $P_q(X)$ via λ_π est $q^{4(c+3)}P_{\pi,q}(q^{-c-3}X)$.
Faltings-Chai ont montré ([3] Chap.VI) que

Proposition 4.3. — *(Relations d'Eichler-Shimura) Le Frobenius géométrique Fr_q agissant sur $H^\bullet_{et,*}(S_K \otimes \overline{\mathbb{Q}}, V_\lambda(\mathbb{Q}_\ell))$ est annulé par $P_q(X)$ (avec $* = \emptyset$ ou c).*

Si on prend $c = a+b$ comme dans le Théorème, comme les représentations cuspidales sont dans la cohomologie intérieure (qui est pure), on a

Corollaire 4.4. — *Le Frobenius géométrique Fr_q agissant sur $W^\bullet_{\pi,\ell}$ est annulé par $q^{4(a+b+3)}P_{\pi,q}(q^{-a-b-3}X)$. Les valeurs propres de $q^{a+b+3}\sigma(\pi_q)$ ont pour module q^{a+b+3}.*

Dans cette deuxième partie, on présente, à des fins pédagogiques mais sans apport nouveau, certains aspects de la construction de la représentation galoisienne associée à une forme cuspidale π sur $GSp(4)$; on étudie d'abord le cas où la composante à l'infini est dans la série discrète, puis on décrit sans démonstration les autres cas (on donne les résultats complets, non tous démontrés à ce jour). On suit une approche de R. Taylor [11] qui n'utilise pas la formule des traces pour GSp_4 mais seulement : la théorie de Hodge-Tate, les relations d'Eichler-Shimura et la dualité de Poincaré. Cette méthode montre qu'on peut associer à π de type à l'infini dans la série discrète, une représentation galoisienne qui est, soit de la forme voulue, soit d'une forme étrange. Dans le cas où π_∞ est dans la série discrète, seul le recours à la formule des traces [8], [12], permet d'exclure cette forme.

5. La méthode de Taylor

Soit π cuspidale telle que $m^H(\pi) > 0$ ou $m^W(\pi) > 0$. Soit Π un paquet autodual tordu (cf. Sect. 4.2 de CVS), c'est un ensemble fini de représentations cuspidales contenant π et stable par dualité tordue. Soit E un corps ℓ-adique sur lequel sont définies toutes les parties finies π_f de Π. Soit $N(\Pi)$ un multiple commun des niveaux des $\pi \in \Pi$. On forme la semi-simplification W du $E[\mathrm{Gal}\,(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})]$-module $W^3_{\Pi,\ell}$. Par hypothèse, $W \neq 0$. Soit H l'enveloppe de Zariski de l'image de Galois dans $GL_E(W)$. Ce groupe algébrique est réductif comme enveloppe de Zariski d'un groupe agissant sur une somme d'irréductibles. Soit $s : H \hookrightarrow GL_E(W)$ la représentation fidèle de H sur W et $r : \mathrm{Gal}\,(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to H(E)$ la représentation galoisienne correspondante.
Par dualité de Poincaré, on a un accouplement parfait

$$\langle \bullet, \bullet \rangle : W \times W \to E(\omega_\pi^{\mathrm{gal}} \chi_\ell^{-3-c})$$

Il existe un caractère algébrique $n : H \to \mathbb{G}_m$ défini sur E tel que $n \circ r = \omega_\pi^{\mathrm{gal}} \chi_\ell^{-3-c}$ et on a pour tout $h \in H$: $\langle hw, hw' \rangle = n(h)\langle w, w' \rangle$.
Il s'ensuit que les valeurs propres des $h \in H$ interviennent par paires $\{\alpha, n(h)/\alpha\}$. Par les relations de congruence, on va voir en fait que :

Lemme 5.1. — *Si $h \in H$, ses valeurs propres sont contenues dans l'union d'au plus deux paires $\{\alpha, n(h)/\alpha\}$.*

En effet, pour h dans la classe de conjugaison de $r(Fr_q)$ ($q \neq \ell$ premier à $N(\Pi)$), cela résulte des relations de congruences d'Eichler-Shimura. On voit facilement que cette condition est Zariski-fermée.
Soit H^0 la composante neutre de H et $T_H \subset B_H \subset H^0 \otimes \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ un tore déployé maximal et un sous-groupe de Borel.

Corollaire 5.2. — *La représentation algébrique $W \otimes \overline{\mathbb{Q}}_\ell$ fidèle de H^0 est telle que :*
1) les poids de (H^0, B_H, T_H) sont de la forme $(\lambda_1, \lambda_2, n/\lambda_1, n/\lambda_2)$ et les multiplicités de λ_i et n/λ_i sont égales.
2) Il y a un élément $\phi \in T_H(\overline{E})$ tel que $\mathrm{mult}\lambda_1(\phi) = m^H(\Pi)$ et $\mathrm{mult}\lambda_2(\phi) = m^W(\Pi)$.
3) $\dim W^{\lambda_1} = \dim W^{n/\lambda_1} = m^H(\Pi)$ et $\dim W^{\lambda_2} = \dim W^{n/\lambda_2} = m^W(\Pi)$.

En effet, soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les poids de H^0 sur W. Soit $t \in T_H(\overline{E})$ un élément suffisamment régulier : $\lambda_i(t) \neq \lambda_j(t)$ pour tout $i \neq j$ et $\lambda_i(t)\lambda_j(t) \neq n(t)$ si $\lambda_i\lambda_j \neq n$.
Par le lemme la liste est en fait $\lambda_1, \lambda_2, n/\lambda_1, n/\lambda_2$; par l'accouplement de dualité, $\mathrm{mult}\,(\lambda_i) = \mathrm{mult}\,(n/\lambda_i)$.
Par le théorème de Sen, on a $\Phi \in \mathfrak{c}_\ell \subset \mathrm{Lie}\, H^0 \otimes \overline{E}$ de valeurs propres H_i ($= 0, 1, 2, 3$) sur W (on peut supposer qu'il est défini sur $\overline{E}$ au lieu de $\widehat{\overline{E}}$). On prend alors $\phi = \exp \ell^2 \Phi$. Les valeurs propres de ϕ sont donc $\lambda_1(\phi) = \exp \ell^2 H_0$, $\lambda_2(\phi) = \exp \ell^2 H_1$, $(n/\lambda_2)(\phi) = \exp \ell^2 H_2$, et $(n/\lambda_1)(\phi) = \exp \ell^2 H_3$.
Pour conclure concernant les multiplicités, il ne reste plus qu'à vérifier que $\lambda_i \neq n/\lambda_i$. Si l'égalité avait lieu, en prenant $h = \phi$, on trouverait $2H_i = -c - 3$ et donc $H_i = H_{3-i}$, ce qui est faux car ces poids sont deux à deux distincts. En particulier, les multiplicités des poids ont les valeurs annoncées.
On en déduit que le groupe semisimple $(H^0)'$ est de rang au plus deux ; la classification des groupes semisimples de rang ≤ 2 sur un corps algébriquement clos de caractéristique zéro fournit la liste de possibilités pour les couples $((H^0)', s|_{(H^0)'})$, puis pour $s|_{H^0}$ ainsi que les groupes (finis) d'automorphismes extérieurs de H^0 préservant cette représentation (pages 298-299 de [11]).
En utilisant alors un

Lemme 5.3. — *(Serre)*

Soit F un corps de nombres et E un corps ℓ-adique. Soit H un groupe algébrique défini sur E et $R : \mathrm{Gal}\,(\overline{F}/F) \to H(E)$ continue d'image Zariski dense. Soit V un fermé de Zariski de H stable par conjugaison et de dimension strictement plus petite que celle de H. Alors l'ensemble des places v de F telles que $R(Fr_v) \in V(E)$ est de densité nulle.

Taylor obtient plusieurs théorèmes.

5.1. Cas $m^H(\pi) > 0$ et $m^W(\pi) > 0$. — L'hypothèse que $m^H(\Pi) > 0$ et $m^W(\Pi) > 0$ permet d'exclure certains cas. Il reste :

Théorème 5.4. — *Soit π_f une représentation lisse admissible de G_f. Supposons qu'il existe deux représentations lisses admissibles π_1 et π_2 de G_f presqu'équivalentes à π_f, telles que $\pi_1 \otimes \pi^H_{\widehat{\lambda}+\rho}$ et $\pi_1 \otimes \pi^W_{\widehat{\lambda}+\rho}$ soient cuspidales pour $G(\mathbf{A})$. On a l'un des cas suivants :*
1) Il existe $R : \mathrm{Gal}\,(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to GL_4(E')$ (pour une extension finie E' de E) non-ramifiée hors de $\mathrm{Ram}\,\pi \cup \{\ell, \infty\}$, et telle que pour pour tout premier hors d'un ensemble de densité nulle, $R(Fr_q)$ a le polynôme caractéristique voulu. et si $m^H(\Pi) = m^W(\Pi)$, $W = R^{\oplus m^H(\Pi)}$,
2) cas endoscopique : il existe $R_i : \mathrm{Gal}\,(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to GL_2(E')$ ($i = 1, 2$) non ramifées hors de $\mathrm{Ram}\,\pi \cup \mathrm{Ram}\,\pi_1 \cup \mathrm{Ram}\,\pi_2 \cup \{\ell, \infty\}$, telles que hors d'un ensemble de densité nulle de premiers q, le polynôme caractéristique de $R_1 \oplus R_2(Fr_q)$ est le polynôme voulu. De plus, $W = R_1^{m^H(\Pi)} \oplus R_2^{m^W(\Pi)}$.
3) cas potentiellement CAP : il y a une extension finie galoisienne de groupe sur $\mathbb{Q}$ contenu dans D_8, et deux caractères continus $\chi_i : \mathrm{Gal}\,(\overline{\mathbb{Q}}/K) \to (E')^\times$ ($i = 1, 2$ tels que $W|_K$ (après restriction à K) est isomorphe à $(\chi_1 \oplus (\omega_\pi^{\mathrm{gal}} \chi_\ell^{-3})|_K \chi_1^{-1})^{m^H(\Pi)} \oplus (\chi_2 \oplus (\omega_\pi^{\mathrm{gal}} \chi_\ell^{-3})|_K \chi_2^{-1})^{m^W(\Pi)}$

Le cas 3) est ETRANGE ; il ne doit pas intervenir dans la série discrète. mais ne peut être exclu par l'analyse de R. Taylor. De plus dans les cas 1) et 2), il y a *a priori* un ensemble exceptionnel de densité zéro de premiers non ramifiés où l'on ne connaît pas le polynôme caractéristique de Frobenius.
Le théorème est complété par [8] et [12].
On obtient le Th. annoncé. On conjecture que dans le cas 1), la représentation est irréductible. C'est par exemple le cas si π est le lifting de Yoshida d'une forme cuspidale de Hilbert sur un corps quadratique réel.
Le cas 2) s'appelle endoscopique, on l'obtient de la manière suivante : on fixe deux entiers $u > v \geq 2$ avec $u \equiv v \pmod 2$; on prend une forme cuspidale classique f, resp. g, de poids u, resp. de poids v le lifting de Yoshida associé à $f \times g$ fournit une forme cuspidale de Siegel dont la représentation galoisienne de degré 4 est

$$R = \rho_{f,\ell} \oplus \rho_{g,\ell} \chi_\ell^{u-v} \quad \text{et}\, W = \rho_{f,\ell}^{m^H(\pi)} \oplus (\rho_{g,\ell} \chi_\ell^{u-v})^{m^W(\pi)}.$$

Remarque : Noter que les cas 1) et 2), il résulte du Théorème de Faltings-Chai Chap.VI sur les poids de la cohomologie $H^3_{et,!}(S \otimes \overline{\mathbb{Q}}, V_\lambda(\mathbb{Q}_\ell))$ que les représentations R de degré quatre sont pures de poids $w = k_1 + k_2 - 3$.

5.2. Cas où $m^1(\pi) + m^2(\pi) > 0$. — On obtient les représentations de type CAP. Taylor obtient aussi des théorèmes dans ces cas. Dans la section ci-dessous, on voit comment elles entrent dans le paysage.

6. Panorama complet conjectural

On trouve dans [7] une interprétation de [1] donnant la classification des représentations galoisiennes associées aux formes cuspidales pour GSp_4. Cette classification sera complètement démontrée lorsque le transfert de GSp_4 à GL_4 sera établi (par Arthur).
La mention (R), resp. (NR) signifie que π est tempérée, ou de manière équivalente, que π satisfait la conjecture de Ramanujan : $|\alpha_i| = p^{\frac{w}{2}}$ avec $w = a+b+3$ pour toute valeur propre α_i du Frobenius $\rho_{\pi,\ell}(Fr_q)$, $q \neq \ell$, $q \notin \mathrm{Ram}(\pi)$.
Les représentations galoisiennes associées à une représentation automorphe dans la série discrète de $L^2(G_{\mathbb{Q}} \backslash G_{\mathbb{A}})$ sont de l'un des six types suivants. Les cinq premiers types sont cuspidaux, le dernier ne l'est pas.

1. représentation "générale" (R)
   On a $\Pi = \{\pi_f\}$, $m^H(\pi) = m^W(\pi) > 0$ et $\rho_{\pi,\ell}$ est irréductible de dimension 4 d'image contenue dans GSp_4, pure de poids $a+b+3$, son D_{HT} (covariant) intervient dans $H^{w,0} \oplus H^{a+2,b+1} \oplus H^{b+1,a+2} \oplus H^{0,w} = grH^3_{dR,!}(S, \mathcal{V}_\lambda)$
2. représentation "de type Yoshida" (R)
   C'est le cas endoscopique. On a $\Pi = \{\pi_f\}$, $m^H(\pi) > 0$, $m^W(\pi) > 0$ et
   $$\rho_{\pi,\ell} = \rho_{f,\ell} \oplus \rho_{g,\ell} \chi_\ell^{-\frac{u-v}{2}}$$
   où les deux représentations de dimension 2 sont irréductibles (f, g cuspidales elliptiques) En fait, $u = w+1$, $v = a-b+2$ et $\frac{u-v}{2} = b+1$ et $\pi = \Theta(f \times g)$ est le Theta lift de H. Yoshida (Inv. Math.1980).
   L'image de $\rho_{\pi,\ell}$ est contenue dans $(GL_2 \times GL_2)^0 \subset GSp_4$. De plus, $D_{\mathrm{HT}}(\rho_{f,\ell})$ intervient dans $H^{w,0} \oplus H^{0,w}$ et $D_{\mathrm{HT}}(\rho_{g,\ell}\chi_\ell^{-\frac{u-v}{2}})$ dans $H^{a+2,b+1} \oplus H^{b+1,a+2}$ tous ces termes sont des sous-quotients de $H^3_{dR,!}(S, \mathcal{V}_\lambda)$). Il s'ensuit
   $$W^\bullet_{\Pi,\ell} = \rho_{f,\ell}^{m^H(\Pi)} \oplus (\rho_{g,\ell}\chi_\ell^{-\frac{u-v}{2}})^{m^W(\Pi)}$$
3. représentation "de type Soudry" (NR)

cas où les $\pi \in \Pi$ sont Cuspidales Associées au parabolique de Klingen (CAP Klingen), ceci suppose $\lambda = (a, 0)$. On a $m^1(\Pi) > 0$ et $m^2(\Pi) = m^H(\Pi) = m^W(\Pi) = 0$

$$\rho_{\pi,\ell} = \rho_{f,\ell} \oplus \rho_{f,\ell}\chi_\ell^{-1}$$

Pour mieux évoquer l'intervention de l'opérateur de Lefschetz qui explique la théorie de Hodge de cette représentation, on notera

$$\rho_{\pi,\ell} = \rho_{f,\ell} \oplus \rho_{f,\ell}(-1)$$

Son image est contenue dans le Levi du parabolique de Siegel de GSp_4. De plus, $\rho_{f,\ell}$ irréductble pure de poids $w-1$ (f forme cuspidale elliptique de poids w) $D_{\mathrm{HT}}(\rho_{f,\ell})$ intervient dans $H^{w-1,0} \oplus H^{0,w-1}$ qui provient de $H^2_{dR,!}$ (contribution de $m(\pi_f \otimes \pi^1_\lambda) > 0$) et $D_{\mathrm{HT}}(\rho_{f,\ell}(-1))$ est pur de poids $w+1$ intervient dans $H^{w,1} \oplus H^{1,w}$, (dans la décomposition de $H^4_{dR,!}$). On a $W^\bullet_{\Pi,\ell} = \rho_{\pi,\ell}^{m^1(\Pi)}$.

4. représentation "de type Saito-Kurokawa" (NR)

   Cas des Cuspidales Associées au parabolique de Siegel (CAP Siegel), ceci suppose $\lambda = (a, a)$. C'est le cas où $m^2(\Pi) > 0$. On a alors $m^1(\Pi) = 0$ et $m^H(\Pi) > 0$ ou $m^W(\Pi) > 0$. Blasius-Rogawski (BR) ont conjecturé qu'alors $m^H(\Pi) > 0$ et $m^W(\Pi) = 0$. On a

$$\rho_{\pi,\ell} = \chi \oplus \rho_{f,\ell} \oplus \chi(-1)$$

   Son image est contenue dans le Levi du parabolique de Siegel de GSp_4. De plus, $\rho_{f,\ell}$ est irréductible, pure de poids w, associée à une forme cuspidale elliptique de poids $w+1$. En admettant la conjecture de BR, on voit que $D_{\mathrm{HT}}(\rho_{f,\ell})$ intervient dans $H^{w,0} \oplus H^{0,w}$ donc dans $H^3_{dR,!}$.

   Le caractère χ est de la forme $\chi = \chi_\ell^{-a-1}\epsilon$ (ϵ d'ordre fini) et son image $D_{\mathrm{HT}}(\chi)$ intervient dans $H^{a+1,a+1}$, un sous-quotient de $H^2_{dR,!}$, et celle de $\chi(-1)$ intervient dans $H^{a+2,a+2}$, sous-quotient de $H^4_{dR,!}$; donc

$$W^\bullet_{\Pi,\ell} = \chi^A \oplus \rho^B_{f,\ell} \oplus \chi(-1)^A$$

5. représentation "de type Howe, Piatetskii-Shapiro" (NR)

   Cuspidale Associée au Borel (CAP Borel) C'est le cas où $m^2(\Pi) > 0$, $m^1(\Pi) = 0$ et $m^H(\Pi) = m^W(\Pi) = 0$.

   On a

$$\rho_{\pi,\ell} = \chi_1 \oplus \chi_2 \oplus \chi_1(-1) \oplus \chi_2(-1)$$

   Son image est contenue dans le tore maximal standard de GSp_4. les caractères χ_i interviennent dans $H^{a+1,a+1}$ dans le $H^2_!$, et leurs twists par

-1 interviennent dans le $H^4_!$. et

$$W^\bullet_{\Pi,\ell} = \chi_1^A \oplus \chi_2^B \oplus \chi_1(-1)^A \oplus \chi_2(-1)^B$$

pour certains $A, B \geq 1$.

6. représentation "de type dimension 1"

   C'est un cas dans la série discrète non cuspidale. $\rho_{\pi,\ell} = \chi \oplus \chi(-1) \oplus \chi(-2) \oplus \chi(-3)$.

Pour conclure, on peut noter que par [4], la correspondance locale de Langlands pour GSp_4 est maintenant complète de sorte que la question de la question de sa compatibilité à la correspondance globale ci-dessus peut être posée avec précision. Les résultats connus concernent la compatibilité dans le cas des séries principales non-ramifiées, certaines séries modérément ramifiiée (par A. Genestier et l'auteur) et le cas de la représentation de Steinberg, par A. Genestier. Les autres cas de niveau Iwahorique sont tous décrits conjecturalement dans [10].

Références

[1] J. Arthur : , *Automorphic Forms of $GSp(4)$, in* Contributions to Automorphic Forms, Geometry, and Number Theory, pp.65-82, a volume in honor of J. Shalika, ed. by H. Hida, D. Ramakrishnan and F. Shahidi, Johns Hopkins University Press 2004.

[2] A. Borel, N. Wallach : Continuous cohomology, discrete subgroups and representations of reductive groups, 2nd edition, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

[3] G. Faltings, C.-L. Chai : Degeneration of abelian varieties, Erg. der Math. u. ihre Grenzgebiete, Springer Verlag 1990.

[4] W.-T. Gan, S. Takeda : *The local Langlands correspondence for $GSp(4)$*, ArXiv :0706.0952v3[mathNT].

[5] A. Genestier, J. Tilouine :*Systèmes de Taylor-Wiles pour $GSp(4)$,in* "Formes Automorphes (II), le cas du groupe $GSp(4)$", pp.177-290, Astérisque 302, 2005.

[6] M. Harris : *Automorphic forms of $\overline{\partial}$-cohomology type as coherent cohomology classes*, J. Diff. Geom. 32 (1990), 1-63.

[7] T. Itô : *On motives and ℓ-adic Galois representations associated to automorphic representations on $GSp(4)$, in* On Automorphic Forms on the Symplectic Similitude Group GSp(4). Proc. 9th Autumn Workshop in Hakuba, edited by M. Furusawa, 2007.

[8] G. Laumon : *Fonctions zêtas des variétés de Siegel de dimension trois*, Formes Automorphes (II), le cas du groupe $GSp(4)$, pp. 151-176, Astérisque 302, SMF, 2005.

[9] A. Mokrane, J. Tilouine : *Cohomology of Siegel varieties with p-adic integral coefficients and applications*, pp.1-95 (2002), Astérisque 280, Publ. Soc. Math. France.

[10] B. Roberts, R. Schmidt : Local Newforms for GSp(4), Springer Lecture Notes in Mathematics Vol 1918 (2007), 312 pages.

[11] R. Taylor : *On the cohomology of Siegel threefolds*, Inv. Math.114 (1993), pp.289-310.

[12] R. Weissauer : *Four-dimensional Galois representations*, Formes Automorphes (II), le cas du groupe $GSp(4)$, pp. 151-176, Astérisque 302, SMF, 2005.

---

7 avril 2008

J. Tilouine, LAGA, Institut Galilée, Université Paris 13, 93430 Villetaneuse
E-mail : `tilouine@math.univ-paris13.fr`