

*Journées*

# **ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES**

Évian, 2 juin–6 juin 2008

David Gérard-Varet

**Quelques problèmes d'irrégularité dans l'interaction fluide-solide**

*J. É. D. P.* (2008), Exposé n° II, 19 p.

<[http://jedp.cedram.org/item?id=JEDP\\_2008\\_\\_\\_\\_A2\\_0](http://jedp.cedram.org/item?id=JEDP_2008____A2_0)>

**cedram**

*Article mis en ligne dans le cadre du  
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques  
<http://www.cedram.org/>*

# Quelques problèmes d’irrégularité dans l’interaction fluide-solide

David Gérard-Varet

## 1. Introduction

L’objet de cette note est l’analyse mathématique de l’interaction entre un liquide et une surface solide. Plus précisément, nous nous intéressons au rôle de l’irrégularité de la surface dans cette interaction. Notre intérêt vient de ce que, depuis plusieurs années, des études numériques et expérimentales mettent en avant l’effet des rugosités, sur la stabilité des écoulements, ou encore sur la dissipation d’énergie. Ce dernier aspect est particulièrement important en microfluidique, domaine dans lequel la minimisation de la friction aux parois est une préoccupation majeure, *cf* [18].

Dans le but d’analyser l’effet des rugosités, deux types de modèles sont naturels:

- L’irrégularité peut être représentée par une surface non-lisse:  $x_3 = f(x_1, x_2)$ , avec  $f$  qui n’est pas  $C^2$ , ou pas Lipschitzienne, ou pire.
- L’irrégularité peut être représentée par des petites échelles:  $x_3/\varepsilon = f(x_1/\varepsilon, x_2/\varepsilon)$ , avec  $\varepsilon \ll 1$ ,  $f$  assez régulière.

Nous souhaitons présenter ici deux problèmes mathématiques, correspondant à ces deux modélisations:

- La première modélisation, à l’aide d’une fonction non-lisse, intervient à la section 3, pour étudier le problème de collision entre solides immergés. Notre présentation s’inspire de l’article [7], en collaboration avec M. Hillairet.
- La deuxième modélisation, *via* un petit paramètre, renvoie à des questions d’homogénéisation. Nous considérons ces questions dans le contexte des lois de paroi, à la section 2. Nous y décrivons de manière synthétique des résultats obtenus dans les articles [1, 6, 8].

## 2. Lois de paroi

Dans de nombreux cas, il est impossible de décrire avec précision l’impact de l’irrégularité sur la dynamique du fluide: les détails des rugosités sont souvent mal connus, ou

trop fins pour les grilles des simulations numériques. Le seul espoir est de décrire leur effet moyen, c'est-à-dire leur homogénéisation. En pratique, les numériciens procèdent de la manière suivante: les frontières rugueuses sont remplacées par des frontières artificielles lisses, et des conditions aux limites homogénéisées, appelées *lois de paroi*, sont imposées à ces frontières lissées. La question naturelle est alors : quelles sont les bonnes lois de paroi ?

Cette question a fait l'objet de nombreux articles physiques, mais aussi mathématiques. Nous renvoyons à [1] pour une liste détaillée de références. A notre connaissance, les études mathématiques ont été menées sous deux restrictions:

1. Elles concernent des domaine bornés (typiquement des canaux bornés, avec, aux parois verticales, des conditions périodiques ou de type flux entrant/flux sortant).
2. Elles concernent des irrégularités périodiques, ce qui mène à des problèmes d'homogénéisation périodique.

La première restriction est un petit avantage mathématique, qui permet d'obtenir directement de la compacité en espace, par des théorèmes de type Rellich. La deuxième restriction est beaucoup plus sérieuse. D'une part, elle simplifie grandement l'analyse mathématique. D'autre part, elle limite la portée applicative des résultats, car les rugosités réalistes ne sont bien sûr pas périodiques. Dans une série de papiers récents [1, 6, 8], nous avons cherché à relaxer au maximum ces hypothèses.

On se restreint ici à un modèle simple, celui d'un canal rugueux 2D:

$$\Omega^\varepsilon = \Omega \cup \Sigma \cup R^\varepsilon,$$

où  $\Omega = \mathbb{R} \times (0, 1)$  est la partie lisse,  $R^\varepsilon$  est la partie rugueuse, et  $\Sigma = \mathbb{R} \times \{0\}$  leur interface. On suppose que la partie rugueuse a une taille caractéristique  $\varepsilon$ , c'est-à-dire

$$R^\varepsilon = \left\{ x, 0 > x_2 > \varepsilon \omega \left( \frac{x_1}{\varepsilon} \right) \right\},$$

pour une fonction  $\omega = \omega(y_1)$   $K$ -lipschitzienne et à valeurs dans  $(-1, 0)$ . Voir figure 1 pour un exemple de tel domaine. On considère dans ce canal un écoulement en régime permanent, régi par les équations de Navier-Stokes stationnaires, avec flux imposé:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u + u \cdot \nabla u + \nabla p = 0, x \in \Omega^\varepsilon, \\ \nabla \cdot u = 0, x \in \Omega^\varepsilon, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \\ \int_{\sigma^\varepsilon} u_1 = \phi. \end{array} \right. \quad (\text{NS}^\varepsilon)$$

La troisième équation exprime une condition classique d'adhérence à la paroi rugueuse  $\partial\Omega^\varepsilon$ . La dernière équation exprime qu'un flux  $\phi > 0$  est imposé à travers une section verticale  $\sigma^\varepsilon$  de  $\Omega^\varepsilon$ . On vérifie que l'intégrale de flux ne dépend pas de la section verticale choisie, du fait de la condition de divergence nulle et d'imperméabilité aux parois. Les résultats présentés ci-dessous peuvent être adaptés à d'autres types de modèles, notamment le système de Navier-Stokes non-stationnaire.

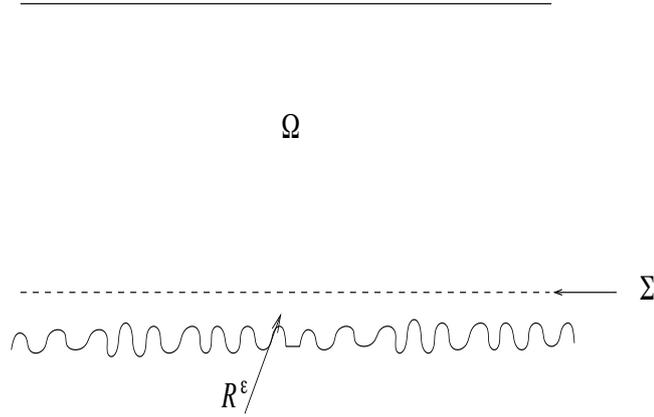


Figure 1: Le domaine rugueux  $\Omega^\varepsilon$ .

Dans ce cadre simple, la recherche des lois de parois se résume au problème suivant: trouver un opérateur  $B^\varepsilon(x, D_x)$ , régulier en  $\varepsilon$ , agissant à la paroi artificielle  $\Sigma$ , tel que la solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta u + u \cdot \nabla u + \nabla p = 0, x \in \Omega, \\ \nabla \cdot u = 0, x \in \Omega, \\ u|_{x_2=1} = 0, \\ \int_\sigma u_1 = \phi, \\ B^\varepsilon(x, D_x)u|_\Sigma = 0, \end{array} \right. \quad (\text{NS})$$

approche bien la solution  $u^\varepsilon$  de  $(\text{NS}^\varepsilon)$  dans  $\Omega$ .

## 2.1. Loi de Dirichlet

L'idée la plus naturelle est de conserver la condition d'adhérence

$$B^\varepsilon(x, D_x)u := u = 0 \text{ à } \Sigma. \quad (\text{Di})$$

Le système (NS)-(Di) dans le canal lisse a alors une solution explicite: c'est le célèbre flot de Poiseuille

$$u^0(x) = (U(x_2), 0), \quad U(x_2) = 6\phi x_2(1 - x_2)$$

qui est même défini sur tout  $\mathbb{R}^2$ . Dans l'article [1] avec A. Basson, nous commençons par étudier la validité d'une telle loi de paroi:

**Théorème 1.** *Il existe  $\phi_0, \varepsilon_0 > 0$ , tel que pour tout  $\phi < \phi_0, \varepsilon < \varepsilon_0$ , le système  $(\text{NS}^\varepsilon)$  a une unique solution  $u^\varepsilon$  dans  $H_{uloc}^1(\Omega^\varepsilon)$ . De plus,*

$$\|u^\varepsilon - u^0\|_{H_{uloc}^1(\Omega^\varepsilon)} \leq C\sqrt{\varepsilon}, \quad \|u^\varepsilon - u^0\|_{L_{uloc}^2(\Omega)} \leq C'\varepsilon.$$

Cela montre que la condition de Dirichlet fournit une approximation  $O(\varepsilon)$  dans  $L^2(\Omega)$ . En particulier,  $u^0$  est la limite de  $u^\varepsilon$ . Ce théorème appelle deux remarques:

- Il n'y a pas d'autre hypothèse sur le profil de rugosité  $\omega$  que d'être lipschitzien et borné. *C'est pour une amélioration de cette loi, cf paragraphe suivant, que la structure de  $\omega$  joue un rôle.*
- Le théorème est valable sous une condition de petitesse sur le flux  $\phi$ . Il s'agit d'une condition naturelle: pour des termes de forçage trop grands, les équations de Navier-Stokes stationnaires sont en général mal posées, avec perte d'unicité des solutions.

Contrairement aux études antérieures, menées en domaines bornés, on travaille ici avec des fonctions d'énergie infinie (espaces  $H_{uloc}^1, L_{uloc}^2$ ): le flux étant constant, il n'y a pas de décroissance des solutions en la variable horizontale  $x_1$ . Cela crée des difficultés, dès la construction de solutions. En effet, l'idée naturelle est de rechercher la solution  $u^\varepsilon$  dans  $\Omega^\varepsilon$  comme limite d'une suite de solutions approchées  $u_n^\varepsilon$  définies dans les domaines bornés  $\Omega_n^\varepsilon := \Omega^\varepsilon \cap \{|x_1| \leq n\}$ . Mais l'énergie de telles solutions approchées explose lorsque  $n$  tend vers l'infini: par exemple, celles construites dans [1] vérifient

$$\int_{\Omega_n^\varepsilon} |\nabla u_n^\varepsilon|^2 = O(n).$$

Pour obtenir une borne uniforme  $H_{uloc}^1$ , on doit montrer que cette explosion de l'énergie n'est pas localisée.

Pour résoudre ce problème, on utilise une idée de Ladyzenskaja et Solonnikov [11]. De façon simplifiée, on considère les quantités

$$E_k^n = \int_{\Omega_k^\varepsilon} |\nabla u_n^\varepsilon|^2, \quad \Omega_k^\varepsilon := \Omega^\varepsilon \cap \{|x_1| \leq k\}.$$

pour  $k \leq n$ . La borne ci-dessus fournit  $E_n^n = O(n)$ . L'idée est alors de montrer par une récurrence descendante (*i.e.* sur  $n - k$ ) que

$$E_k^n = O(k), \quad \forall k \leq n.$$

Cette récurrence repose sur une relation de récurrence de la forme

$$E_k^n \leq C \left( (E_{k+1}^n - E_k^n) + (E_{k+1}^n - E_k^n)^{3/2} + k + 1 \right). \quad (1)$$

obtenue par des estimations locales sur une tranche du canal de largeur  $O(k)$ . Nous insistons sur le fait qu'*un ingrédient essentiel pour obtenir cette relation est l'inégalité de Poincaré*, valable car le canal est borné dans une direction. En effet, l'estimation locale est obtenue par troncature, et les commutateurs issus de la troncature contiennent du  $u$  (sans dérivées). L'inégalité de Poincaré permet de contrôler ces termes par l'enstrophie, *i.e.* par  $\nabla u$ .

Ces arguments permettent d'obtenir le caractère bien posé de  $(NS^\varepsilon)$ , et la borne  $H_{uloc}^1$ . La borne raffinée  $L_{uloc}^2$  utilise des arguments de dualité, que nous ne détaillons pas.

## 2.2. Loi de Navier

Retrouver la loi de Dirichlet à la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  est vrai dans de nombreux contextes [2]. Néanmoins, cette condition d'adhérence est relativement grossière, au sens où elle se déduit d'estimations d'énergie, qui ne distinguent pas la dynamique près du bord rugueux. Il est donc naturel et souhaité par les numériciens d'obtenir une meilleure loi de paroi. Une idée très répandue est qu'on a une meilleure approximation en considérant une condition de glissement de type Navier:

$$B^\varepsilon(x, D_x)v = (v_1 - \varepsilon\alpha\partial_2v_1, v_2) = 0 \text{ à } \Sigma, \quad (\text{Na})$$

où  $\alpha$  est un paramètre lié au profil de rugosité  $\omega$ . Dans notre modèle, une explication formelle est la suivante. L'approximation par  $u^0$  crée une trace non-nulle d'amplitude  $O(\varepsilon)$  au bord  $\partial\Omega^\varepsilon$ . Il est donc naturel de considérer un correcteur couche limite d'amplitude  $O(\varepsilon)$ , et un développement de la forme

$$u^\varepsilon \sim u^0 + 6\phi\varepsilon v\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

où  $v = v(y)$  est un profil de couche limite normalisé. Il est défini dans le domaine rescalé

$$\Omega^{bl} = \left\{ y \in \mathbb{R}^2, y_2 > \omega(y_1) \right\}$$

qui est un demi-plan bosselé. Formellement, il satisfait le système

$$\begin{cases} -\Delta v + \nabla q = 0, x \in \Omega^{bl}, \\ \nabla \cdot v = 0, x \in \Omega^{bl}, \\ v(y_1, \omega(y_1)) = -(\omega(y_1), 0), \end{cases} \quad (\text{BL})$$

où la condition de Dirichlet non-homogène est faite pour contrebalancer l'erreur due au flot de Poiseuille. La croyance qui mène à la loi de Navier est la suivante:  $v$  devrait converger vers un champ constant  $v^\infty$ , lorsque  $y_2 \rightarrow +\infty$ , ce qui est classique pour un profil de couche limite. Plus précisément, on s'attend à ce que

$$v \rightarrow v^\infty = (\alpha, 0), \quad y_2 \rightarrow 0,$$

pour une constante  $\alpha$ . Si l'on croit à une telle convergence, on obtient formellement

$$u^\varepsilon \sim u^0 + 6\phi\varepsilon(\alpha, 0) + o(\varepsilon) \quad \text{dans } L^2,$$

et la somme des deux premiers termes du membre de droite vérifie (Na).

Le problème est bien sûr la justification mathématique d'un tel scénario. Le point crucial est de comprendre les propriétés du système de couche limite (BL). Bien que linéaire, ce système est difficile à analyser, à au moins deux niveaux:

1. Le caractère bien posé de (BL) n'est pas clair. Comme la donnée au bord ne décroît pas, on doit à nouveau travailler avec des fonctions d'énergie infinie. Identifier l'espace fonctionnel adéquat et obtenir des bornes locales n'est pas évident. L'opérateur de Stokes étant vectoriel, on ne peut pas utiliser les outils tels le principe du maximum ou l'inégalité de Harnack (qui fournissent dans le cas scalaire une unique solution dans  $L^\infty$ ). D'autre part,  $\Omega^{bl}$  étant non-borné dans toute direction, on ne peut utiliser les arguments employés pour le canal, basés sur l'inégalité de Poincaré.

2. Même si l'on règle le problème du caractère bien posé, la question du comportement asymptotique de  $v$  quand  $y_2 \rightarrow +\infty$  (en particulier sa convergence) subsiste.

Ces difficultés expliquent l'hypothèse de périodicité faite sur  $\omega$  dans les études précédentes. En effet, si  $\omega$  est disons  $L$ -périodique en  $y_1$ , une simple application du théorème de Lax-Milgram fournit une unique solution dans l'espace

$$\left\{ v \in H_{loc}^1(\overline{\Omega^{bl}}), v \text{ } L\text{-périodique en } y_1, \int_0^L \int_{\omega(y_1)}^{+\infty} |\nabla v|^2 dy_1 < +\infty \right\}.$$

De plus, pour  $y_2 > 0$ , un simple développement en série de Fourier de  $v$  par rapport à  $y_1$  permet de se ramener à un système différentiel ordinaire en  $y_2$ . Le comportement asymptotique s'en déduit immédiatement:

$$\|v(y) - v^\infty\| \leq C e^{-\delta y_2/L}, \quad v^\infty = (\alpha, 0), \quad \alpha = \frac{1}{L} \int_0^L v_1(s) ds, \quad \delta > 0.$$

Autrement dit  $v$  converge exponentiellement vite vers  $(\alpha, 0)$ . On en déduit facilement que, pour des rugosités périodiques, la solution  $u^N$  de (NS)-(Na) satisfait

$$\|u^\varepsilon - u^N\|_{L^2_{uloc}(\Omega)} \leq C \varepsilon^{3/2}.$$

Ainsi, la loi de Navier fournit une meilleure approximation:  $O(\varepsilon^{3/2})$ .

Dans [1, 6, 8], nous avons étudié la validité de cette loi de Navier pour des rugosités générales, en abandonnant l'hypothèse de périodicité. En particulier, nous avons mené une analyse détaillée du système (BL): existence et unicité des solutions, puis comportement asymptotique. Les conclusions principales de nos travaux sont les suivantes:

1. Le système (BL) est bien posé, sans autre propriété sur la rugosité que lipschitzienne et bornée.
2. La solution  $v$  de (BL) peut ne pas converger lorsque  $y_2 \rightarrow +\infty$ . Pour les profils de rugosité  $\omega$  correspondant à de tels  $v$ , la condition homogénéisée de Dirichlet ne semble pas améliorable.
3. Néanmoins, dès que  $\omega$  a de bonnes propriétés de moyennisation (c'est-à-dire d'ergodicité), la solution  $v$  converge vers un  $v^\infty = (\alpha, 0)$ , et l'on peut justifier la loi de Navier.

Plus précisément, le caractère bien posé de (BL) est l'objet du théorème suivant, avec N. Masmoudi [8]:

**Théorème 2.** *Le système (BL) a une unique solution  $v \in H_{loc}^1(\overline{\Omega^{bl}})$  satisfaisant:*

$$\sup_k \int_{\Omega_{k,k+1}^{bl}} |\nabla v|^2 < +\infty \quad \text{où pour tous } k, l, \quad \Omega_{k,l}^{bl} := \Omega^{bl} \cap \{k < y_1 < l\}.$$

Nous espérons que ce résultat est utile en lui-même, car il améliore la compréhension des équations de Navier-Stokes stationnaires en domaines non-bornés. Or, ce sujet est une source de nombreuses questions ouvertes, voir par exemple [5].

L'élément principal de la preuve est l'utilisation de conditions aux limites transparentes, comme en analyse numérique. L'idée est de restreindre les équations de

couche limite à la partie inférieure du domaine :  $\Omega_-^{bl} := \Omega^{bl} \cap \{y_2 < 0\}$ . Evidemment, il faut alors imposer à la frontière  $\{y_2 = 0\}$  une condition aux limites transparente, c'est-à-dire exactement vérifiée par la solution  $v$  de (BL). Il s'agit d'une condition non-locale, obtenue formellement de la manière suivante: la solution  $v$  de (BL) satisfait pour  $y_2 > 0$  une équation de Stokes

$$-\Delta v + \nabla q = 0, \quad \nabla \cdot v = 0.$$

En appliquant formellement une transformée de Fourier en  $y_1$ , l'équation de Stokes devient une EDO en  $y_2$ . On peut alors résoudre et exprimer (en Fourier)  $v$  et  $q$  en fonction de la donnée  $v|_{y_2=0}$ . En particulier, on peut exprimer formellement le tenseur des contraintes à  $y_2 = 0$ :

$$(\partial_2 v - q e_2)|_{\{y_2=0\}} = DN(v|_{\{y_2=0\}}),$$

où  $DN$  est un opérateur de type Dirichlet-Neumann, qui est donné classiquement en Fourier par

$$\mathcal{F}DN(v_0)(\xi) = \begin{pmatrix} -2|\xi| & -i\xi \\ i\xi & -2|\xi| \end{pmatrix} \mathcal{F}(v_0)(\xi). \quad (2)$$

Ainsi, on aboutit formellement au système équivalent

$$\begin{cases} -\Delta v + \nabla q = 0, x \in \Omega_-^{bl}, \\ \nabla \cdot v = 0, x \in \Omega_-^{bl}, \\ v(y_1, \omega(y_1)) = -(\omega(y_1), 0), \\ (\partial_2 v - q e_2)|_{\{y_2=0\}} = DN(v|_{\{y_2=0\}}). \end{cases} \quad (3)$$

Bien sûr, l'idée est ensuite de travailler sur ce système: le domaine  $\Omega_-^{bl}$  étant un canal, on espère pouvoir adapter la preuve du Théorème 1.

Ce programme est mené à bien dans [8]. Parmi les difficultés à surmonter, mentionnons :

- Définir rigoureusement l'opérateur de Dirichlet-Neumann  $DN$ . En effet, le champ  $v_0 := v|_{\{y_2=0\}}$  n'appartient *a priori* qu'à  $H_{uloc}^{1/2}(\mathbb{R})$ . Il faut donc étendre la définition (2), typiquement valable pour  $H^{1/2}(\mathbb{R})$ .
- Une fois le système (3) bien défini, justifier l'équivalence entre (BL) et (3).
- Parvenir à adapter l'argument de Ladyzenskaja et Solonnikov, en particulier établir :

$$E_k = \int_{\Omega_-^{bl} \cap \{|x_1| \leq k\}} |\nabla v|^2 = O(k).$$

En effet, du fait du caractère non-local de l'opérateur  $DN$ , une relation de récurrence du type (1) n'est pas possible: tous les  $E_{j+1} - E_j$  sont impliqués dans le contrôle de  $E_k$ . On doit utiliser la décroissance de ces quantités lorsque  $j \rightarrow +\infty$ , qui vient de la décroissance du noyau associé à l'opérateur  $DN$ .

Une unique solution  $v$  étant construite, se pose la question du comportement asymptotique de  $v$  lorsque  $y_2 \rightarrow +\infty$ . En particulier, a-t-on, pour toute frontière rugueuse, convergence vers un champ constant  $v^\infty = (\alpha, 0)$  (ce qui permettrait de justifier la loi de Navier) ? Nous expliquons dans [8] qu'il est peu probable qu'une

telle convergence soit vérifiée pour toute rugosité  $\omega$ . Notre assertion est fondée sur l'exemple du problème de Dirichlet dans un demi-espace:

$$-\Delta v = 0, \quad y_2 > 0, \quad v|_{\{y_2=0\}} = v_0, \quad (4)$$

où  $v_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ . Ce problème est bien posé dans  $L^\infty$ . On peut voir ce système comme une version très simplifiée de (BL), où les oscillations de la donnée  $v_0$  se substituent à celles de la frontière  $\omega$ . On peut en particulier s'intéresser au comportement de  $v$  quand  $y_2 \rightarrow +\infty$ . On montre :

**Proposition 3.** (voir [8])

**i):** Si  $v_0$  est périodique, le champ  $v$  converge exponentiellement vite vers une constante quand  $y_2$  tend vers l'infini.

**ii):** Il existe  $v_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ , tel que  $v(0, y_2)$  n'a pas de limite lorsque  $y_2$  tend vers l'infini.

**iii):** Si  $\lim_{L \rightarrow \pm\infty} L^{-1} \int_0^L v_0(y_1 - t) dt = \alpha$ , alors  $v(y_1, y_2) \rightarrow \alpha$  quand  $y_2$  tend vers l'infini.

Le point i) confirme l'analogie avec le système (BL): le cas périodique est très favorable, avec convergence exponentielle. Mais le point ii) montre que, dans certains cas, il n'y a pas convergence. Ces cas correspondent à des données  $v_0$  qui ne se moyennent pas bien en espace. Dès lors que  $v_0$  se moyennise, la solution converge à l'infini, comme confirmé par iii). Transposés à (BL), ces résultats suggèrent que pour certains profils de rugosité  $\omega$ , l'usage de la loi de Navier n'est pas fondé, et que la condition d'adhérence ne peut pas être améliorée. Néanmoins, dès lors que  $\omega$  a des bonnes propriétés d'ergodicité, on peut espérer justifier la loi de Navier. C'est l'objet du paragraphe suivant.

### 2.2.1. Rugosités aléatoires homogènes. Rugosités presque périodiques

Nous avons justifié la loi de Navier dans deux contextes. Dans [1], nous avons d'abord considéré des rugosités distribuées aléatoirement, selon un processus spatialement homogène. C'est le cadre le plus pertinent du point de vue applicatif: en effet, dans la plupart des situations réalistes, on n'a qu'une connaissance statistique des rugosités. Concrètement, la frontière rugueuse est considérée comme une réalisation parmi toutes les frontières rugueuses possibles, c'est-à-dire comme un élément de l'ensemble

$$P := \{\omega : \mathbb{R} \mapsto (-1, 0), \omega K - \text{Lip}\},$$

que l'on munit de la tribu cylindrique  $\mathcal{P}$  (c'est-à-dire générée par les coordonnées  $\omega \mapsto \omega(t)$ ) et d'une mesure de probabilités  $\pi$ . On fait une hypothèse d'homogénéité spatiale (ou stationnarité): la mesure  $\pi$  est supposée invariante par le groupe des translations

$$\tau_h : P \mapsto P, \quad \omega \mapsto \omega(\cdot + h).$$

Cela signifie que statistiquement, la rugosité a la même description à toutes les abscisses  $y_1$ . Du fait de cette modélisation, les domaines  $\Omega^\varepsilon$ ,  $\Omega^{bl}$ , ou les solutions correspondantes  $u^\varepsilon$ ,  $v$  dépendent tous du paramètre aléatoire supplémentaire  $\omega$ . Nous avons dans ce cadre une justification de la loi de Navier:

**Théorème 4.** *Il existe  $\alpha = \alpha(\omega) \in L^2(P)$  tel que la solution  $u^N$  de (NS)-(Na) vérifie*

$$\|u^\varepsilon - u^N\|_{L^2_{\text{loc}}(P \times \Omega)} = o(\varepsilon).$$

avec  $\|w\|_{L^2_{\text{loc}}(P \times \Omega)} := \sup_x \left( \int_P \int_{B(x,1) \cap \Omega} |w|^2 dx d\pi \right)^{1/2}$ . De plus,  $\alpha$  est indépendant de  $\omega$  si la mesure  $\pi$  est ergodique.

Ce résultat montre, que dans une norme adéquate de type  $L^2$ , la loi de Navier fournit une approximation  $o(\varepsilon)$  de la vraie solution, contre  $O(\varepsilon)$  pour Dirichlet.

On démontre un résultat analogue dans [8], dans le contexte déterministe de rugosités presque-périodiques. Précisément, on introduit l'ensemble

$$PT(\mathbb{R}) = \left\{ \omega : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, \quad y_1 \mapsto \sum_{j \in J} a_j e^{i\xi_j y_1}, \quad a_j \in \mathbb{C}, \xi_j \in \mathbb{R}, J \text{ fini} \right\}$$

des polynômes trigonométriques à valeurs réelles, et l'ensemble  $AP(\mathbb{R}) := \overline{PT(\mathbb{R})}^{W^{2,\infty}}$  qui est la fermeture de  $PT(\mathbb{R})$  pour la norme  $W^{2,\infty}$ . On a alors

**Théorème 5.** *Pour tout  $\omega \in AP(\mathbb{R})$ , il existe  $\alpha$  tel que la solution  $u^N$  de (NS)-(Na) satisfait*

$$\|u^\varepsilon - u^N\|_{L^2_{\text{loc}}(\Omega)} = o(\varepsilon).$$

Ces deux théorèmes découlent du même type de raisonnement. Le point essentiel est de montrer la convergence de  $v$  vers un champ  $v^\infty = (\alpha, 0)$ . Pour cela, on montre d'abord que  $v$  garde la même structure que la fonction  $\omega$ . A cette fin, on résout le système (BL) directement dans la classe des fonctions stationnaires, *resp.* presque périodiques en  $y_1$ . La solution ainsi construite s'identifie à celle du théorème 2. Dans le cadre presque-périodique, on traite d'abord le cas  $\omega \in PT(\mathbb{R})$ , puis on raisonne par densité. Dans ce cas particulier,  $v$  est en fait quasipériodique en  $y_1$ :

$$v(y_1, y_2) = V(\lambda y_1, y_2), \quad V = V(\theta, y_2), \theta \in \mathbb{T}^d, \quad \lambda \in \mathbb{R}^d.$$

La construction d'une solution  $v$  sous cette forme passe par la construction du  $V$ , solution d'un système elliptique dégénéré obtenu en remplaçant  $\partial_{y_1}$  par  $\lambda \cdot \nabla_\theta$  dans (BL). On renvoie à [8] pour tous les détails.

Ensuite, on utilise que  $v_0 := v|_{\{y_2=0\}}$  est aléatoire stationnaire, *resp.* presque périodique. Dans les deux cas, par le théorème ergodique:

$$\frac{1}{L} \int_0^L v_0(y_1 - t) dt \rightarrow v^\infty, \quad L \rightarrow \infty, \quad (5)$$

pour un champ indépendant de  $y_1$  (et, dans le cas stationnaire, indépendant de  $\omega$  si  $\pi$  est ergodique). On parvient ensuite à établir que  $v^\infty$  est de la forme  $(\alpha, 0)$ .

Enfin, on exprime  $v$  à l'aide du noyau de Poisson de l'opérateur de Stokes:

$$v(y) = \int_{\mathbb{R}} G(t, y_2) v_0(y_1 - t) dt, \quad y_2 > 0, \quad \text{où} \quad G(y) = \frac{2y_2}{\pi(y_1^2 + y_2^2)^2} \begin{pmatrix} y_1^2 & y_1 y_2 \\ y_1 y_2 & y_2^2 \end{pmatrix}.$$

Une intégration par parties dans cette formule permet de faire apparaître la moyenne de  $v_0(y_1 - \cdot)$  et, grâce à (5), de montrer que  $v(y)$  converge vers  $v^\infty$  quand  $y_2 \rightarrow +\infty$ .

### 2.2.2. Amélioration des estimations d'erreur

Les théorèmes 4 et 5 justifient l'usage de la loi de Navier dans des cadres très généraux. Néanmoins, l'estimation d'erreur en  $o(\varepsilon)$  ne permet pas de juger de l'intérêt pratique du gain. Une question naturelle est alors: peut-on améliorer une telle estimation d'erreur ? Ici, la clé est l'estimation du terme  $e_\varepsilon := \varepsilon v(x/\varepsilon) - \varepsilon(\alpha, 0)$ , qui est l'erreur commise en remplaçant le profil de couche limite par sa valeur à l'infini: c'est de là qu'on déduit la loi de Navier. Dans le cas périodique, la convergence exponentielle de  $v$  vers  $(\alpha, 0)$  implique que  $v - (\alpha, 0)$  est de carré intégrable en  $y_2$ . On en déduit facilement  $\|e_\varepsilon\|_{L^2_{uloc}(\Omega)} = O(\varepsilon^{3/2})$ . La condition de glissement donne donc une approximation  $O(\varepsilon^{3/2})$  de la vraie solution.

Dans les cas stationnaire et presque périodique, la convergence de  $v$  vers  $(\alpha, 0)$  est donnée par le théorème ergodique, et ce théorème ne fournit pas de vitesse de convergence. De plus, quelques considérations sur le modèle simplifié (4) permettent de se convaincre que le  $o(\varepsilon)$  est optimal en général.

Néanmoins, l'estimation de l'erreur peut être précisée pour des sous-classes de rugosité. C'est par exemple le cas dans le cadre quasipériodique, sous condition de petits diviseurs. On montre dans [8] le résultat suivant:

**Théorème 6.** *Soit  $\omega(y_1) = F(\lambda y_1)$ , où  $F$  est une fonction régulière périodique sur  $\mathbb{T}^d$  et  $\lambda \in \mathbb{R}^d$ . On suppose que  $\lambda$  vérifie la condition diophantienne*

$$(H) \text{ pour tout } \delta > 0, \text{ il existe } c > 0, \quad |\lambda \cdot \xi| \geq c|\xi|^{-d-\delta}, \quad \forall \xi \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}.$$

Alors

$$\|u^\varepsilon - u^N\|_{L^2_{uloc}(\Omega)} = O(\varepsilon^{3/2}).$$

On peut noter que la condition (H) est générique, car satisfaite pour presque tout  $\lambda \in \mathbb{R}^d$ . Le théorème est déduit du comportement de la solution  $v(y) = V(\lambda y_1, y_2)$  de (BL). On montre en effet, par des estimations dites de Saint-Venant, que  $V - (\alpha, 0)$  est à décroissance rapide en  $y_2$ .

Dans le cas aléatoire stationnaire, la situation est très différente. *Grosso modo*, le problème est de déterminer la vitesse de convergence des moyennes spatiales

$$\frac{1}{n} \int_0^n v_0(\omega, y_1 - t) dt = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X_k(\omega), \quad X_k(\omega) = \int_k^{k+1} v_0(\omega, y_1 - t) dt.$$

qui peuvent être vues, à  $y_1$  fixé, comme des moyennes discrètes d'une suite de variables aléatoires  $X_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Par stationnarité, ces variables sont identiquement distribuées.

Si les  $X_n$  étaient indépendantes, on pourrait appliquer le théorème central limite. Mais ces variables sont *a priori* toujours corrélées: elles dépendent des valeurs de  $v$  à différents points  $(y_1, 0)$ . Or ces valeurs sont corrélées à cause de l'ellipticité de l'opérateur de Stokes, *via* propagation de l'information à vitesse infinie. Néanmoins, pour faire bref, on peut encore appliquer le théorème central limite si les corrélations entre  $X_k$  et  $X_l$  décroissent assez vite lorsque  $|k - l| \rightarrow +\infty$ . C'est la notion de décroissance de corrélations, classique en théorie des probabilités et des systèmes dynamiques mesurés.

Cela suggère de considérer l'hypothèse suivante sur la distribution de rugosités:

(H1) La frontière rugueuse n'a pas de corrélation à larges distances, i.e. les tribus

$$\sigma(s \mapsto \omega(s), s \leq a) \text{ et } \sigma(s \mapsto \omega(s), s \geq b)$$

sont indépendantes pour  $b - a \geq \kappa$ , pour un  $\kappa > 0$ .

Pour établir un théorème central limite, j'ai également besoin d'une hypothèse technique de régularité  $C^{2,\nu}$  sur les frontières rugueuses:

(H2) La mesure  $\pi$  est à support dans

$$P_\nu = \{\omega : \mathbb{R} \mapsto (-1, 0), \|\omega\|_{C^{2,\nu}} \leq K_\nu\}$$

pour un  $\nu > 0$  et un  $K_\nu > 0$ .

Sous ces hypothèses, on montre un théorème central limite pour les moyennes spatiales. En termes d'estimations d'erreur, on obtient

**Théorème 7.** *Sous les hypothèses (H1)-(H2), on a l'estimation améliorée*

$$\|u^\varepsilon - u^N\|_{L^2_{uloc}(P \times \Omega)} = O(\varepsilon^{3/2} |\ln(\varepsilon)|^{1/2}).$$

Le facteur  $\sqrt{|\ln \varepsilon|}$  vient de ce que le profil de couche limite converge vers une constante comme  $1/\sqrt{y_2}$ , au lieu de  $e^{-\delta y_2}$  dans le cas périodique. De ce fait, le terme  $v - (\alpha, 0)$  est presque de carré intégrable en  $y_2$ , ce "presque" étant responsable du  $\sqrt{|\ln \varepsilon|}$ .

On conclut cette partie en évoquant la preuve du théorème 7, à laquelle est consacré l'article [6]. La clé est de montrer que l'hypothèse (H1) implique une bonne décroissance des corrélations sur les quantités  $v(\omega, y_1, 0)$ , malgré l'ellipticité de l'opérateur de Stokes. Après quelques préliminaires, on se ramène au problème déterministe suivant: *montrer que si  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont deux frontières telles que*

$$\omega_1 = \omega_2 \quad \text{sur } [-n, n]$$

*alors les solutions correspondantes  $v_1$  et  $v_2$  de (BL) vérifient*

$$|v_1(y=0) - v_2(y=0)| \leq \frac{C}{n^\tau}, \quad \text{pour un } \tau > 1/2.$$

On établit que cette borne est vraie, pour n'importe quel  $\tau \in (0, 1)$ . En fait, comme discuté dans [6], l'inégalité est encore vraie (et optimale) pour  $\tau = 1$ , mais seul le cas  $\tau < 1$  est traité en détail. La difficulté de la preuve vient de ce que les deux fonctions ne sont pas définies sur le même domaine. De plus, on demande une estimation ponctuelle.

Pour faire bref, on déduit cette inégalité de bonnes estimations sur la fonction de Green  $G_\omega(z, y)$  solution de

$$\begin{cases} -\Delta G_\omega(z, \cdot) + \nabla P_\omega(z, \cdot) = \delta_z I_2, & y_2 > \omega(y_1), \\ G_\omega(z, \cdot) = 0, & y_2 = \omega(y_1). \end{cases} \quad (6)$$

On utilise ces bonnes estimations avec les formules de représentation

$$v_i(0) = \int_{y_2=0} G_{\omega_i}(0, y) e_1 dy.$$

Parmi les estimations requises sur les fonctions de Green, certaines sont des estimations large distance, i.e. pour  $|z - y|$  large. Or à large distance, la frontière peut

être à nouveau vue comme rugueuse, le petit paramètre étant cette fois  $\varepsilon := |z - y|^{-1}$ . En particulier, on a besoin d'établir des résultats de régularité elliptique assez fins pour l'opérateur de Stokes près d'un bord rugueux. Typiquement, on considère un demi-disque rugueux

$$D^\varepsilon(0, 1) = D(0, 1) \cap \{x_2 > \varepsilon\omega(x_1/\varepsilon)\},$$

on considère le système de Stokes

$$\begin{cases} -\Delta u + \nabla p = \nabla \cdot f, & x \in D^\varepsilon(0, 1), \\ \nabla \cdot u = 0, & x \in D^\varepsilon(0, 1), \\ u = 0, & x \in D^\varepsilon(0, 1) \cap \{x_2 = \varepsilon\omega(x_1)\}, \end{cases} \quad (7)$$

et on établit la borne locale, uniforme en  $\varepsilon$

$$\|u\|_{C^{0,\tau}(D^\varepsilon(0,1/2))} \leq C \left( \|f\|_{L^q(D^\varepsilon(0,1))} + \|u\|_{L^2(D^\varepsilon(0,1))} \right), \quad \tau \in (0, 1), \quad q = 2(1 - \mu)^{-1}.$$

Pour obtenir cette borne, on s'inspire très fortement du travail d'Avellaneda et Lin sur l'homogénéisation des opérateurs elliptiques à coefficients périodiques. De manière très résumée, on s'appuie sur une caractérisation de l'espace de Hölder  $C^{0,\tau}$  due à Stampacchia: celle-ci permet de se ramener au contrôle des quantités

$$I^\varepsilon(x, r) = \frac{1}{r^{2+2\tau}} \int_{D^\varepsilon(x,r)} |u - \bar{u}_{x,r}|^2, \quad \bar{u}_{x,r} = \frac{1}{|D^\varepsilon(x, r)|} \int_{D^\varepsilon(x,r)} u,$$

avec  $D^\varepsilon(x, r) := D^\varepsilon(0, 1) \cap D(x, r)$ . Pour avoir un contrôle uniforme de telles quantités, il est alors nécessaire de comparer  $\varepsilon$  et  $r$ . L'idée est la suivante. Si  $\varepsilon \ll r$ , on est presque dans le cas plan, et l'oscillation ne gêne pas. Si en revanche,  $\varepsilon$  devient comparable à  $r$ , on rescale le système par un facteur  $1/\varepsilon$  pour se débarrasser des petits paramètres. Il s'agit bien sûr de l'idée grossière. L'implémentation de cette idée s'avère très technique, et nous renvoyons à [6] pour tous les détails.

### 3. Collision de solides immergés

Dans l'article [7], avec M. Hillairet, nous nous intéressons au rôle des rugosités dans la dynamique collisionnelle de  $N$  solides immergés. En deux dimensions, dans le cas de solides rigides et homogènes, un modèle classique est le suivant:

**i):** Le fluide, de domaine  $F(t)$ , est gouverné par les équations de Navier-Stokes :

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(\partial_t u + u \cdot \nabla u) - \mu \Delta u &= -\nabla p + \bar{\rho} f, & x \in F(t), \\ \nabla \cdot u &= 0, & x \in F(t). \end{aligned} \quad (8)$$

**ii):** Les solides sont décrits par les adhérences  $\overline{S^i(t)}$  de domaines connexes bornés  $S^i(t)$ ,  $1 \leq i \leq N$ . Le champ de vitesse à l'intérieur du solide est rigide, de la forme

$$u^i(t, x) = v^i(t) + \omega^i(t)(x - x^i(t))^\perp, \quad x \in \overline{S^i(t)}, \quad 1 \leq i \leq N, \quad (9)$$

**iii):** L'ensemble fluide/solides occupe un domaine fixe  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$ , avec adhérence aux parois:

$$F(t) = \Omega \setminus \cup_{i=1}^N \overline{S^i(t)}, \quad u = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (10)$$

**iv)**: Le fluide et le solide sont couplés par la continuité des vitesses

$$u = u^i, \quad x \in \partial S^i(t), \quad (11)$$

et par la continuité des contraintes, qui intervient dans les équations de la mécanique classique

$$\begin{aligned} m^i \dot{v}^i(t) &= \int_{\partial S^i(t)} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial n} - pn \right) d\sigma + \int_{S^i(t)} \bar{\rho}^i f, \\ J^i \dot{\omega}^i(t) &= \int_{\partial S^i} (x - x^i)^\perp \cdot \left( \mu \frac{\partial u}{\partial n} - pn \right) d\sigma + \int_{S^i(t)} (x - x^i)^\perp \cdot \bar{\rho}^i f. \end{aligned} \quad (12)$$

Le terme source  $f$  modélise un forçage régulier, tel la gravité. Le vecteur  $n$  à la frontière  $\partial U$  désigne le vecteur normal sortant de l'ouvert  $U$ .

Bien que naturel et très utilisé, ce modèle prédit des phénomènes surprenants, en 2 et 3 dimensions. Le plus frappant concerne la situation classique d'une sphère tombant au voisinage d'une surface plane. Si le modèle ci-dessus est utilisé pour décrire la dynamique, on obtient le résultat paradoxal selon lequel la sphère ne peut pas toucher le plan, aussi dense soit-elle. Nous renvoyons aux travaux de Brenner [9] pour une justification formelle, et au papier [10] pour une réelle preuve mathématique (voir aussi [15] pour un résultat préliminaire). Cette absence de collision est aberrante, et a interpellé de nombreux physiciens, désireux d'expliquer ce paradoxe. Parmi les explications proposées, l'une d'entre elles repose sur l'irrégularité de la surface des solides [3]. L'idée est que le modèle trop lisse de la sphère ne prend pas en compte ces irrégularités, susceptibles de modifier la dynamique et d'autoriser les collisions.

Nous avons dans [7] validé mathématiquement ce scénario, jusque là largement empirique. Notre travail s'est divisé en deux parties. La première partie a consisté à revisiter la théorie d'existence et d'unicité des solutions fortes. En effet, les résultats précédents n'étaient valides que pour des solides à frontières  $C^{1,1}$ . Nous les avons étendus au cas de frontières  $C^{1,\alpha}$ . La deuxième partie a consisté à étudier la chute d'un solide de frontière  $C^{1,\alpha}$ , sous l'effet de la gravité, dans une cavité régulière. Nous avons étudié la possibilité de collision en temps fini, en fonction de l'indice de régularité höldérienne  $\alpha$  de la surface solide. Nous détaillons un peu ci-dessous ces deux aspects.

La construction de solutions pour le système (8)-(12) a été le sujet de nombreux articles, depuis [16]. On s'intéresse uniquement ici aux solutions jusqu'à collision. On suppose en particulier qu'il n'y a pas de contact initial:

$$\overline{S_0^i} \cap \overline{S_0^j} = \emptyset, \quad \overline{S_0^i} \subset \Omega, \quad \forall 1 \leq i, j \leq N, \quad i \neq j. \quad (13)$$

Un ingrédient clé dans de nombreux résultats est une formulation faible des équations. On introduit les quantités

$$v(t, x) := u(t, x) \mathbf{1}_{F(t)}(x) + \sum_{i=1}^N u^i(t, x) \mathbf{1}_{S^i(t)}(x), \quad (14)$$

$$\rho(t, x) := \rho^F(t, x) + \sum_{i=1}^N \rho^i(t, x) := \bar{\rho} \mathbf{1}_{F(t)}(x) + \sum_{i=1}^N \bar{\rho}^i \mathbf{1}_{S^i(t)}(x), \quad (15)$$

Les conservations de la quantité de mouvement totale, de la masse totale, et de la masse des solides donnent respectivement: pour tout  $T > 0$ , pour tout  $\varphi \in \mathcal{V}$ , pour tout  $\psi \in \mathcal{D}([0, T] \times \Omega)$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} \left( \rho v \cdot \partial_t \varphi + \rho v \otimes v : D(\varphi) - 2\mu D(v) : D(\varphi) + \rho f \cdot \varphi \right) dx ds + \int_{\Omega} \rho_0 v_0 \cdot \varphi(0) &= 0, \\ \int_0^T \int_{\Omega} \left( \rho \partial_t \psi + \rho u \cdot \nabla \psi \right) + \int_{\Omega} \rho_0 \psi(0) &= \int_0^T \int_{\Omega} \left( \rho^i \partial_t \psi + \rho^i u \cdot \nabla \psi \right) + \int_{\Omega} \rho_0^i \psi(0) = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

L'espace des fonctions tests  $\mathcal{V}$  est

$$\mathcal{V} = \left\{ \varphi \in \mathcal{D}([0, T] \times \Omega), \quad \nabla \cdot \varphi = 0, \quad \rho^i(t) D(\varphi) = 0, \forall t, \forall 1 \leq i \leq N \right\}.$$

Les contraintes d'incompressibilité, rigidité dans la partie solide, et d'adhérence s'écrivent :

$$\nabla \cdot v = 0, \quad \rho^i D(v) = 0, 1 \leq i \leq N, \quad v|_{\partial\Omega} = 0. \quad (17)$$

A partir de cette formulation, on distingue entre solutions fortes et solutions faibles. Nous prenons les définitions suivantes:

**Définition 8.** Une solution faible sur  $(0, T)$ ,  $T > 0$ , est une famille

$$(S^i(t), F(t), v), \quad 1 \leq i \leq N, \quad F(t) = \Omega \setminus \cup_{i=1}^N \overline{S^i(t)} \quad \text{telle que}$$

**i):**  $S^i(t)$  est un domaine connexe et borné, pour tout  $0 < t < T$ , pour tout  $1 \leq i \leq N$ .

**ii):** Les fonctions scalaires  $\rho, \rho_i$  définies en (15) et le champ de vecteur  $v$  satisfont

$$(\rho, \rho^i) \in L^\infty(0, T \times \Omega), \quad v \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega)).$$

ainsi que les équations (16), (17).

**Définition 9.** Une solution forte sur  $(0, T)$  est une solution faible, avec la régularité additionnelle:

$$v \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0, T; W^{1,p}(\Omega)) \quad \text{pour tout } p \text{ fini}, \quad \partial_t v \in L^2(0, T; L^2(\Omega)).$$

Les solutions faibles sont l'extension naturelle des solutions à la Leray de l'équation de Navier-Stokes classique. Elles existent globalement en temps, et ne nécessitent pas d'hypothèse de régularité sur les bords du domaine. Leur unicité n'est pas connue, même en dimension 2 et pour des temps pré-collisionnels.

Les solutions fortes sont plus régulières. Avec cette régularité, on a en particulier que  $u(t, x) = v|_{F(t)}$  est une solution p.p. de (8) dans le domaine fluide. On le déduit d'une réécriture de (8) sous la forme d'une équation de Stokes:

$$-\mu \Delta u + \nabla p = -\bar{\rho} \cdot \partial_t u - \bar{\rho} u \cdot \nabla u + \bar{\rho} f, \quad \nabla \cdot u = 0, \quad x \in F(t) \quad (18)$$

pour laquelle on utilise la propriété de régularisation elliptique  $L^2 \mapsto H^2$  loin des bords. Le premier théorème général sur les solutions fortes est dû à Desjardins et Esteban [4], qui, en deux dimensions, ont montré existence jusqu'au temps  $T_*$  de collision (pour des données initiales  $v_0 \in H_0^1(\Omega)$ ). L'unicité jusqu'à collision a été montrée ensuite par Takahashi [17]. Quand il n'y a pas collision, par exemple pour

les configurations étudiées par Hillairet [10], ces résultats fournissent une unique solution régulière.

Les papiers [4, 17] sont limités à des solides et une cavité  $C^{1,1}$ . La raison est qu'ils utilisent la régularisation  $L^2 \mapsto H^2$  pour (18) jusqu'au bord du domaine  $F(t)$ . Un tel résultat n'est pas valide *a priori* pour des frontières moins régulières. Il permet d'obtenir une borne du type

$$\int_0^T \int_{F(t)} |\nabla^2 v(t, \cdot)|^2 < +\infty, \quad 0 < T < T^*,$$

utilisée dans [4, 17] à la fois pour l'existence et l'unicité des solutions. Nous prouvons dans [7] le caractère bien posé de (8)-(12) pour des frontières  $C^{1,\alpha}$ :

**Théorème 10. (Solutions fortes jusqu'à collision)**

Soit  $v_0 \in H_0^1(\Omega)$ ,  $\rho_0^i D(v^0) = 0, \forall i$ ,  $f \in L^2((0, T); W^{1,\infty}(\Omega)), \forall T > 0$ . On suppose (13), et

$$\partial\Omega \in C^{1,\alpha}, \quad \partial S_0^i \in C^{1,\alpha}, \quad \forall i, \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

Alors il existe un temps maximal  $T_* \in (0, \infty]$  avec une unique solution forte sur  $(0, T)$  pour tout  $T < T_*$ . De plus, cette solution forte existe jusqu'à la première collision, ce qui signifie que l'une des alternatives ci-dessous est vérifiée:

**i):**  $T_* = \infty, \quad \delta(t) > 0 \quad \forall t.$

**ii):**  $T_* < \infty, \quad \delta(t) > 0 \quad \forall t < T_*, \quad \lim_{t \rightarrow T_*} \delta(t) = 0,$

où  $\delta(t) := \min\{d(S^i(t), S^j(t)), \quad d(S^i(t), \partial\Omega), \quad 1 \leq i, j \leq N, \quad i \neq j\}.$

Notons que ce résultat affirme davantage que le caractère bien posé du système jusqu'à collision. Il montre aussi qu'aucune solution forte ne peut exister au-delà du temps de collision. La clé de ce théorème est un résultat de régularité pour le système de Stokes

$$\begin{cases} -\Delta u + \nabla p = \nabla \cdot F, & x \in \mathcal{O}, \\ \nabla \cdot u = g, & x \in \mathcal{O}, \\ u|_{\partial\mathcal{O}} = 0, \end{cases} \quad (19)$$

en domaine  $C^{1,\alpha}$ . C'est la

**Proposition 11.** Soit  $\mathcal{O}$  ouvert borné, de frontière  $C^{1,\alpha}$ ,  $0 < \alpha < 1$ . Soit

$$F \in L^2(\mathcal{O}) \cap \text{BMO}(\mathcal{O}), \quad g \in L^2(\mathcal{O}) \cap \text{BMO}(\mathcal{O}).$$

Alors la solution faible  $(u, p)$  de (19) satisfait

$$\|(\nabla u, p)\|_{\text{BMO}(\mathcal{O})} \leq C \left( \|F, g\|_{\text{BMO}(\mathcal{O})} + \|F, g\|_{L^2(\mathcal{O})} \right). \quad (20)$$

On rappelle que  $\text{BMO}(\mathcal{O})$  est l'ensemble des  $f \in L^1(\mathcal{O})$  tels que

$$\sup_B \frac{1}{|B|} \int_B |f(x) - \bar{f}_B| dx < +\infty, \quad \bar{f}_B = \frac{1}{|B|} \int_B f(x) dx,$$

où le supremum est pris sur toutes les boules ouvertes  $B$  de  $\mathcal{O}$ . On note

$$\|f\|_{\text{BMO}(\mathcal{O})} := \sup_B \frac{1}{|B|} \int_B |f(x) - \bar{f}_B| dx$$

Bien que cette proposition fasse sans doute partie du folklore associé aux problèmes elliptiques à coefficients höldériens, nous ne sommes pas parvenus à trouver ce résultat dans la littérature. Une preuve est donc donnée dans [7]. Ainsi, une borne BMO sur  $\nabla u$  se substitue à la borne  $H^1$  utilisée dans les études précédentes. Une telle borne s'avère suffisante pour établir le théorème. On montre également que  $(\nabla u, p) \in W^{s,\tau}(F(t))$  pour une certaine gamme de  $s, \tau$  vérifiant  $s > 1/\tau$ . Cela permet de donner un sens à la trace au bord du tenseur des contraintes  $\partial_n u - p n|_{\partial F(t)}$ , et ainsi de passer de la formulation faible des équations à la formulation forte originale.

Une fois le théorème 10 établi, nous étudions le problème de collision en temps fini. Nous considérons la situation simple d'un seul solide tombant verticalement au voisinage d'une surface horizontale, sous l'action de la gravité. On note  $S(t) = \mathcal{R}_t S_0$  la position du solide au temps  $t$ . On suppose

1. Le terme source est  $f = -ge_2$ , avec  $g > 0$ ,  $e_2 = (0, 1)$ .
2. Le solide bouge le long de l'axe  $\{x_1 = 0\}$ :  $\mathcal{R}_t$  est une translation verticale.
3. Les seuls points de collision possibles sont le long de  $\{x_1 = 0\}$ .
4. Près de  $\{x_1 = 0\}$ ,  $\partial\Omega$  est plat horizontal.
5. Près de  $\{x_1 = 0\}$ , les parties haute et basse de  $\partial S(t)$  sont données par
$$x_2 - x_-(t) = |x_1|^{1+\alpha}, \quad x_2 - x_+(t) = -|x_1|^2, \quad 0 < t < T_*.$$
6. Le solide est plus lourd que le fluide, *i.e.*,  $\rho|_{S(t)} > \rho|_{F(t)}$ .

On peut noter que si la configuration  $(\Omega, S_0, v_0)$  est symétrique par rapport à  $\{x_1 = 0\}$ , alors l'unique solution forte a la même symétrie pour  $0 < t < T_*$ . De ce fait, les contraintes ci-dessus sont vérifiées dans de nombreuses configurations. On montre alors:

**Théorème 12. (Lien entre collision et irrégularité)**

*Pour toute solution forte satisfaisant 1-6,  $T_* < \infty$  si et seulement si  $\alpha < 1/2$ .*

On met ainsi en évidence un seuil de régularité höldérienne ( $\alpha = 1/2$  en deux dimensions) en-deçà duquel le modèle permet collision, et au-delà duquel il ne la permet pas. Cela traduit bien le rôle des rugosités dans la dynamique collisionnelle.

Une explication heuristique de ce seuil de régularité est la suivante. Considérons le cas simplifié où l'équation (8) est remplacée par l'équation de Stokes:

$$-\mu\Delta u = -\nabla p - \rho_F g e_2, \quad x \in F(t), \tag{21}$$

et les autres équations sont préservées. Cette approximation est dite quasistationnaire. Dans notre configuration simplifiée, le domaine à frontière libre  $F(t) = F_{h(t)}$  est déterminé par la distance  $h(t)$  entre l'extrémité basse du solide et la partie basse de  $\partial\Omega$ . De plus,

$$u|_{\partial S(t)} = \dot{h}(t) e_2, \quad u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{22}$$

Soit  $u_{qs}$  la solution de (21)-(22). Par la remarque précédente,  $u_{qs}$  est de la forme  $u_{qs}(t, x) = \dot{h} w_{h(t)}(x)$ . On a alors, par une estimation d'énergie

$$\mu \int_{F(t)} \nabla u_{qs} \nabla w_{h(t)} = \int_{\partial F(t)} (\mu \partial_n u_{qs} - p_{qs} n) w_{h(t)} - \int_{F(t)} \rho_F g e_2 w_h = -m_S \ddot{h}(t) + (\rho_F - \rho_S) |S_0|$$

Ainsi, dans l'approximation quasistationnaire, la dynamique collisionnelle est décrite par une EDO de la forme

$$\ddot{h}(t) = -\dot{h}(t)n(h(t)) + \frac{(\rho_F - \rho_S)|S_0|}{m_S}, \quad n(h) := \int_{F_h} |\nabla w_h|^2.$$

*Grosso modo*, l'idée est que si le solide est  $C^{1,\alpha}$ , alors, pour  $h \ll 1$ ,

$$n(h) \sim C h^{-\frac{3\alpha}{1+\alpha}}$$

ce qui donne collision si et seulement si  $\alpha < 1/2$ .

La preuve consiste à justifier rigoureusement ces idées. Il faut

- remplacer  $u_{qs}$  par la vraie solution  $u$  de (8).
- remplacer la fonction quasistationnaire  $w_h$ , sur laquelle on n'a pas de contrôle, par une fonction explicite ayant à peu près le même comportement quand  $h \rightarrow 0$ .

## 4. Perspectives

Ces études diverses sur l'interaction fluide/solide sont riches de perspectives. Par exemple, dans l'étude des lois de paroi, il serait bon de savoir caractériser le coefficient de glissement  $\alpha$  en termes de grandeurs caractéristiques de la rugosité. Diverses formules ont été proposées dans la littérature, de manière empirique [18]. L'approche présentée ici devrait permettre de les infirmer ou de les confirmer. D'autre part, il serait intéressant de reprendre la même étude dans un canal rugueux, mais partant d'une condition de glissement aux parois, au lieu d'une condition d'adhérence. L'article [2] montre que dans ce cas, et si la rugosité n'est pas dégénérée, la loi limite est encore la loi de Dirichlet. Mais l'étude de la couche limite, et d'un terme de glissement correctif, n'a pas été faite. Cette correction est pourtant très importante dans les applications physiques, notamment pour connaître les propriétés des surfaces rugueuses hydrophobes en microfluidique.

L'article [2] juste mentionné montre que, pour un système macroscopique de type Navier-Stokes, la présence de rugosités induit une condition homogénéisée de Dirichlet, même partant d'une condition de glissement pur. Il paraît intéressant de transposer ce résultat au cadre mésoscopique, *i.e.* à des équations de type cinétique. Dans ce domaine, on rencontre dans la littérature deux jeux de conditions classiques: les conditions de réflexion spéculaire, qui spécifient que les molécules de fluide rebondissent contre le bord selon les lois de l'optique géométrique, et les conditions de réflexion diffuse, qui spécifient que les molécules interagissent avec le bord, et sont renvoyées dans toutes les directions. La réflexion spéculaire correspond à la loi de Navier, la réflexion diffuse à la condition de Dirichlet, voir [13] pour des résultats rigoureux à ce sujet. Un résultat de type [2] permettrait de valider la loi de réflexion diffuse, en tant que condition homogénéisée, en présence de rugosités.

L'homogénéisation des rugosités, menée jusqu'ici sur des problème de Cauchy, pourrait être faite dans le cadre de problèmes aux valeurs propres. Cela serait intéressant pour les questions de stabilité hydrodynamique. En effet, de nombreuses expériences mettent en évidence que les rugosités font baisser les seuils d'instabilité.

Cela pourrait peut-être se justifier en montrant que la rugosité induit une correction des valeurs propres, par analogie avec la correction de la loi de paroi.

Enfin, le résultat montré avec M. Hillairet dans [7], *i.e.* la possibilité de collision dans un modèle de type Navier-Stokes, ouvre tout un champ de questions sur la dynamique post-collisionnelle. Des modèles et simulations numériques ont été proposés [14, 12], dont les propriétés mathématiques restent à étudier.

## References

- [1] A. BASSON & D. GÉRARD-VARET – “Wall laws for fluid flows at a boundary with random roughness”, *Comm. Pure Appl. Math.* **61** (2008), no. 7, p. 941–987.
- [2] J. CASADO-DÍAZ, E. FERNÁNDEZ-CARA & J. SIMON – “Why viscous fluids adhere to rugose walls: a mathematical explanation”, *J. Differential Equations* **189** (2003), no. 2, p. 526–537.
- [3] R. DAVIS, Y. ZHAO, K. GALVIN & H. WILSON – “Solid-solid contacts due to surface roughness and their effects on suspension behaviour”, *R. Soc. Lond. Philos. Trans. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.* **361** (2003), no. 1806, p. 871–894.
- [4] B. DESJARDINS & M. J. ESTEBAN – “Existence of weak solutions for the motion of rigid bodies in a viscous fluid”, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **146** (1999), no. 1, p. 59–71.
- [5] G. GALDI – *An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations. Vol. II*, Springer Tracts in Natural Philosophy, vol. 39, Springer-Verlag, New York, 1994, Nonlinear steady problems.
- [6] D. GÉRARD-VARET – “The Navier wall law at a boundary with random roughness”, To appear in *Comm. Math. Physics*, 2008.
- [7] D. GÉRARD-VARET & M. HILLAIRET – “Regularity issues in the problem of fluid-structure interaction”, Preprint, 2008.
- [8] D. GÉRARD-VARET & N. MASMOUDI – “Relevance of the slip condition for fluid flows near an irregular boundary”, Preprint, 2008.
- [9] J. HAPPEL & H. BRENNER – *Low Reynolds number hydrodynamics with special applications to particulate media*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1965.
- [10] M. HILLAIRET – “Lack of collision between solid bodies in a 2D incompressible viscous flow”, *Comm. Partial Differential Equations* **32** (2007), no. 7-9, p. 1345–1371.
- [11] O. A. LADYŽENSKAJA & V. A. SOLONNIKOV – “Determination of solutions of boundary value problems for stationary Stokes and Navier-Stokes equations having an unbounded Dirichlet integral”, *Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)* **96** (1980), p. 117–160, 308, Boundary value problems of mathematical physics and related questions in the theory of functions, 12.

- [12] A. LEFEVBRE – “Fluid particle simulation with FREEFEM++”, *Esaim Proceedings* **18** (2007), p. 120–132.
- [13] N. MASMOUDI & L. SAINT-RAYMOND – “From the Boltzmann equation to the Stokes-Fourier system in a bounded domain”, *Comm. Pure Appl. Math.* **56** (2003), no. 9, p. 1263–1293.
- [14] B. MAURY – “A time-stepping scheme for inelastic collisions. Numerical handling of the nonoverlapping constraint”, *Numer. Math.* **102** (2006), no. 4, p. 649–679.
- [15] J. SAN MARTÍN, V. STAROVOITOV & M. TUCSNAK – “Global weak solutions for the two-dimensional motion of several rigid bodies in an incompressible viscous fluid”, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **161** (2002), no. 2, p. 113–147.
- [16] D. SERRE – “Chute libre d’un solide dans un fluide visqueux incompressible. Existence”, *Japan J. Appl. Math.* **4** (1987), no. 1, p. 99–110.
- [17] T. TAKAHASHI – “Analysis of strong solutions for the equations modeling the motion of a rigid-fluid system in a bounded domain”, *Adv. Differential Equations* **8** (2003), no. 12, p. 1499–1532.
- [18] C. YBERT, C. BARENTIN, C. COTTIN-BIZONNE, P. JOSEPH & L. BOCQUET – “Achieving large slip with superhydrophobic surfaces: scaling laws for generic geometries”, *Phys. Fluids* **19** (2007), p. 123601.

DMA, UMR 8553, ECOLE NORMALE SUPÉRIEURE, 45 RUE D’ULM, F75230  
PARIS CEDEX 05.