Journées

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Forges-les-Eaux, 7 juin–11 juin 2004

Jean-Michel Bony

Décomposition des fonctions positives en sommes de carrés

J. É. D. P. (2004), Exposé n° III, 8 p.

<http://jedp.cedram.org/item?id=JEDP_2004____A3_0>

Journées *Équations aux dérivées partielles*
Forges-les-Eaux, 7 juin–11 juin 2004
GDR 2434 (CNRS)

Décomposition des fonctions positives en sommes de carrés

Jean-Michel Bony

Résumé

Toute fonction positive de classe C^{2m} définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ est somme de deux carrés de fonctions de classe C^m.

Abstract

Any nonnegative C^{2m} function defined in an interval is the sum of the squares of two C^m functions.

1. Introduction

Le résultat principal de cet exposé est le théorème suivant.

Théorème 1. *Soit f une fonction positive et de classe C^{2m} définie sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$. Il existe alors g et h appartenant à $C^m(I)$ telles que $f = g^2 + h^2$.*

Si de plus f appartient à l'espace de Hölder $C^{2m+2\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, [resp. $C^{2m,1}$, $C^{2m+1,1}$], on peut trouver g et h appartenant à $C^{m+\alpha}$ [resp. $C^{m+1/2}$, $C^{m,1}$].

Toutes les fonctions considérées sont bien sûr à valeurs réelles. On a noté $C^{k,1}$ l'espace des fonctions dont les dérivées jusqu'à l'ordre k sont localement lipschitziennes.

La régularité de g et h ne peut pas en général être améliorée : si f est la primitive d'ordre $2m$, plate à l'origine, de $(-\log|x|)^{-1}$, elle ne peut pas être somme de carrés de fonctions de classe $C^{m+\alpha}$, ce qui impliquerait $f(x) = O(|x|^{2m+2\alpha})$.

Dans le cas où f est positive et de classe C^∞, notre résultat permet pour chaque m d'écrire $f = g_m^2 + h_m^2$ avec g_m et $h_m \in C^m$, mais ces fonctions dépendent de m et il ne s'ensuit pas que f puisse s'écrire comme somme de carrés de fonctions C^∞. Selon [BCR] et [Br], il existerait des contre-exemples de P. Cohen et D. Epstein, mais ces contre-exemples n'ont jamais été publiés.

Un résultat de Glaeser [Gl] montre que la racine carrée d'une fonction positive de classe C^2 est toujours de classe C^1, mais qu'il existe des fonctions $f \in C^\infty$, positives et ne s'annulant qu'en un point, telles que $f^{1/2}$ ne soit pas de classe C^2. On peut même (voir [BBCP]), pour tout module de continuité ω fixé à l'avance, construire une telle fonction f pour laquelle $\frac{d}{dx} f^{1/2}$ n'est pas ω-continue.

En dimension supérieure, la situation est nettement différente et des résultats négatifs proviennent de l'impossibilité de décomposer un polynôme positif en somme de carrés de polynômes. En notant Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ pour $n \geq 4$ [resp. $n = 3$], il existe $f \in C^\infty(\Omega)$ positive telle que f ne soit pas somme finie de carrés de fonctions C^2 [resp. C^3].

En revanche, le résultat suivant [Gu] est valable en toute dimension : si f est positive et de classe $C^{3,1}$ dans Ω, on peut écrire $f = \sum_1^N g_j^2$ avec $g_j \in C^{1,1}(\Omega)$, l'entier N ne dépendant que de n. La preuve utilise de manière cruciale les arguments introduits par Fefferman et Phong pour démontrer leur célèbre inégalité. Nous rappelons ici deux formes de celle-ci, démontrées respectivement dans [FP] et [Bo1] et qui s'étendent ([Hö, Section 18.6], [Bo1]) à des classes très générales de symboles pseudo-différentiels :

$$\operatorname{Re} \int \overline{u(x)} a(x,D) u(x)\, dx \geq -C^{\text{te}} \|u\|_{L^2}^2 ,$$

sous l'une ou l'autre des hypothèses suivantes

$$\left|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x,\xi)\right| \leq C_{\alpha,\beta} (1+|\xi|)^{2-|\alpha|} \qquad \text{pour } \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n;$$

$$\left|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x,\xi)\right| \leq C_{\alpha,\beta} \quad \text{pour } |\alpha|+|\beta| \geq 4.$$

L'idée essentielle de C. Fefferman et D. H. Phong est de d'écrire localement le symbole sous la forme $a = b^2 + a_1$, en faisant apparaître la somme d'un carré et d'une fonction positive dépendant d'une variable de moins, les dérivées d'ordre 2 de b et celles d'ordre 4 de a_1 s'estimant à l'aide des dérivées d'ordre 4 de a. Il devient alors possible de démontrer par récurrence les inégalités ci-dessus ou la décomposition en sommes de carrés.

Cette même idée permet aussi de déduire du théorème 1 le résultat suivant en dimension 2, mais la récurrence s'arrête là.

Corollaire 2. *Soit f une fonction positive et de classe C^4 définie dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ et vérifiant*

$$\left\{ f(x) = \nabla^2 f(x) = 0 \right\} \Longrightarrow \nabla^4 f(x) = 0.$$

Il existe alors un nombre fini ($N = 78$ convient) de fonctions $g_j \in C^2(\Omega)$ telles que $f = \sum_1^N g_j^2$.

Dans la démonstration du théorème 1, il faut distinguer, au voisinage de chaque point x_0, le cas où une des dérivées paires $f^{2p}(x_0)$ est strictement positive et domine les autres, et celui où $f(x_0)$ n'est "pas trop petit" (la fonction ρ définie par (7) précise le "poids" de chaque dérivée). Dans le second cas, la fonction $f^{1/2}$ possède de bonnes estimations dans C^m et un seul carré suffit localement. Dans le premier cas, il sera possible, au voisinage de x_0, de construire un polynôme P de degré $p-1$ tel que la fonction $f - P^2$ soit positive et possède p zéros doubles ξ_j. On posera $f - P^2 = \prod (x-\xi_j)^2 \theta(x)$ et c'est la décomposition $f = P^2 + h^2$, avec $h = \prod (x-\xi_j) \theta^{1/2}$ qui conviendra localement.

Nous ne donnerons ici que les idées principales des démonstrations, renvoyant à [Bo2] pour une preuve complète. La section 2 est consacrée à l'étude locale évoquée ci-dessus. Dans la section 3, où nous ne détaillerons que le cas, un peu plus simple, d'une fonction f appartenant à $C^{2m-1,1}$, il faudra construire une suite d'intervalles nettement séparés, où l'on peut d'après l'étude locale écrire f comme somme de deux carrés, et telle qu'entre deux intervalles consécutifs, les m premières dérivées de la fonction $f^{1/2}$ soient bien estimées.

2. Étude locale

On utilisera les notations $D^k = d^k/dx^k$ et $T_k f(x) = \sum_0^k D^\ell f(0)x^\ell/\ell!$ pour les dérivées et le polynôme de Taylor.

Lemme 2.1. *Soit n un entier et Φ une fonction continue et strictement positive sur l'intervalle $[-1,1]$. On peut alors trouver un polynôme P de degré n et $2n+1$ points*

$$-1 \leq \xi_0 < x_1 < \xi_1 < x_2 < \cdots < x_n < \xi_n \leq 1$$

vérifiant

$$|P(x)| \leq \Phi(x) \text{ pour } x \in [-1,1], \tag{1}$$
$$P(x_j) = 0 \text{ pour } j = 1, \ldots, n, \tag{2}$$
$$|P(\xi_j)| = \Phi(\xi_j) \text{ pour } j = 0, \ldots, n. \tag{3}$$

Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynomes de degré n, vérifiant (1) et possédant n racines réelles distinctes dans l'intervalle $]-1,1[$. Pour $P \in \mathcal{P}$, on notera $X_1(P) < \cdots < X_n(P)$ ces racines et on posera

$$I_0(P) =]-1, X_1(P)[, \quad I_k(P) =]X_k(P), X_{k+1}(P)[, \quad I_n(P) =]X_n(P), 1[,$$
$$\lambda_k(P) = \sup_{x \in I_k(P)} |P(x)|/\Phi(x), \qquad \mu(P) = \inf_{k=0,\ldots,n} \lambda_k(P).$$

Soit (P_ι) une suite d'éléments de $\mathcal{P}$ telle que la suite $\mu(P_\iota)$ converge vers $\sup_{P\in\mathcal{P}} \mu(P)$. Les éléments de $\mathcal{P}$ sont uniformément bornés, ainsi que leurs dérivées, sur $[-1,1]$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que P_ι converge vers un certain polynôme P de degré $\leq n$. Il est impossible que la longueur de $I_k(P_\iota)$ tende vers 0, ce qui impliquerait $\mu(P_\iota) \to 0$, et P a donc n racines réelles distinctes. Le polynôme P appartient ainsi à $\mathcal{P}$ et réalise le maximum de μ sur cet ensemble. Il reste à montrer que $\mu(P) = 1$ ce qui entraîne l'existence de points $\xi_k \in I_k(P)$ vérifiant (3).

Supposons $\mu(P) < 1$ et soit $\mathcal{K}$ l'ensemble des indices $k \in \{0,\ldots,n\}$ tels que $\lambda_k(P) = 1$. Il est non vide car, dans le cas contraire, le polynôme θP avec $\theta > 1$ proche de 1 appartiendrait encore à $\mathcal{P}$ et on aurait $\mu(\theta P) > \mu(P)$. Regroupons ceux des intervalles I_k, $k \in \mathcal{K}$ qui sont contigus pour former un ou plusieurs intervalles dont les distances mutuelles sont > 0 et qui peuvent être du type suivant :
— 0 ou 1 intervalle $]-1, X_i(P)[$,
— 0, 1 ou plusieurs intervalles du type $]X_{j_r}(P), X_{\ell_r}(P)[$,
— 0 ou 1 intervalle $]X_m(P), 1[$.

Posons $P(x) = Q(x)R(x)$ avec

$$R(x) = (x - X_i(P))(X_m(P) - x)\prod_r (x - X_{j_r}(P))(x - X_{\ell_r}(P)),$$

en convenant que les facteurs correspondant aux intervalles inexistants sont omis.

On a $R(x) < 0$ si $x \in I_k$ avec $k \in \mathcal{K}$ et on a $R(x) \geq 0$ sinon. Le polynôme $P_\varepsilon(x) = Q(x)(R(x) + \varepsilon)$, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, contredit alors la maximalité de $\mu(P)$: les $\lambda_k(P_\varepsilon)$ sont aussi voisins de 1 que l'on veut pour $k \in \mathcal{K}$ et sont strictement supérieurs à $\lambda_k(P)$ pour $k \notin \mathcal{K}$.

Corollaire 2.2. *Soit* $f \in C^{2m-1,1}([-1, 1])$ *vérifiant*

$$f(x) \geq 0; \quad \left|D^{2m} f(x)\right| \leq 1, \quad \sup_{0 \leq p < m} D^{2p} f(0) = 1. \tag{4}$$

Pour tout $a > 0$, *il existe* $\delta = \delta(a) > 0$ *et* $r = r(a) > 0$ *tels que, s'il existe* p *vérifiant*

$$0 < p < m\,; \quad D^{2p} f(0) = a\,; \quad \forall q \in \{0, \dots, p-1\}, D^{2q} f(0) \leq \delta, \tag{5}$$

il existe un polynôme P *de degré inférieur ou égal à* $p-1$ *tel que* $P^2 \leq f$ *dans* $[-3r, 3r]$ *et tel que* $f - P^2$ *ait exactement* p *racines doubles (comptées avec leur multiplicité) dans* $[-r/3, r/3]$.

Une première étape consiste à déduire de (4) une borne de toutes les dérivées de f. En écrivant la formule de Taylor $T_{2m-1}f(x) \geq x^{2m}/(2m)!$ aux points $x = \pm p/2m$ pour $p = 1, \dots, 2m$, on obtient l'existence d'une constante C ne dépendant que de m telle que $\left|D^k f(x)\right| \leq C$ pour $|x| \leq C^{-1}$.

On choisit ensuite $r = r(a)$ assez petit pour que $D^{2p} f(x) \geq a/2$ lorsque $|x| \leq 3r$ et que $f(x) - T_{2p-1}f(x) \geq \frac{a}{2} |x|^{2p} / (2p)!$ pour $r/3 \leq |x| \leq 3r$.

La fonction f peut avoir des zéros doubles $b_1, \dots, b_q$, auquel cas on applique le lemme précédent à la fonction strictement positive $\Phi = \sqrt{f(x)/\prod(x-b_j)^2}$ pour trouver un polynôme Q de degré $p-q-1$ vérifiant $|Q| \leq \Phi$ et tel que $\Phi - |Q|$ s'annule en $p-q$ points de $[-3r, 3r]$. Le polynôme $P(x) = \prod(x-b_j)Q(x)$ répond alors à la question : si $\delta = \delta(a)$ est choisi assez petit, on aura $P(x)^2 < f(x)$ pour $r/3 \leq |x| \leq 3r$ et $f - P^2$ aura p racines doubles dans $[-r/3, r/3]$.

Le résultat suivant est ou devrait être classique.

Lemme 2.3. *Soit* f *une fonction définie sur un intervalle, possédant des dérivées jusqu'à l'ordre* n *sommables, et s'annulant en* n *points* $\xi_1, \dots, \xi_n$ *distincts ou confondus. Alors*

$$f(x) = \prod_1^n (x-\xi_j) \int_{[0,1]^n} t_1^{n-1} t_2^{n-2} \dots t_{n-1} D^n f(\Theta_{x,t_1,\dots,t_n}) dt_1 \dots dt_n,$$

en notant $\Theta_{x,t_1,\dots,t_n}$ *le barycentre de* $x, \xi_1, \dots, \xi_n$ *défini par*

$$(1-t_1)\xi_1 + t_1(1-t_2)\xi_2 + \dots + t_1 \dots t_{n-1}(1-t_n)\xi_n + t_1 \dots t_n\, x.$$

Corollaire 2.4. *Avec les notations du corollaire 2.2, quitte à diminuer $\delta = \delta(a)$ et $r = r(a)$, on peut décomposer toute fonction $f \in C^{2m}[-1,1]$ vérifiant* (4) *et* (5) *sous la forme*

$$f(x) = g(x)^2 + h(x)^2 \text{ dans } [-3r, 3r] \quad ; \quad \|g\|_{C^m} + \|h\|_{C^m} \leq C$$

où $C = C(a)$ ne dépend que de a, où $g \in C^m(\mathbb{R})$ a son support dans $[-r/2, r/2]$ et où $h \in C^m([-3r, 3r])$. On peut de plus supposer que f est croissante dans $[r/3, 3r]$ et décroissante dans l'intervalle symétrique.

Le même résultat est valable pour $f \in C^{2m-1,1}$, les fonctions g et h appartenant alors à $C^{m-1,1}$.

Le principe de la démonstration est le suivant. Si P est le polynôme fourni par le corollaire 2.2, on pose $g = \chi P$ où χ est une fonction positive C^∞ comprise entre 0 et 1, valant 1 [resp. 0] pour $|x| \leq r/3$ [resp. $|x| \geq r/2$]. Pour un choix convenable de r et δ, la fonction $\varphi = f - g^2$ vérifie $D^{2p}\varphi(x) \geq a/3$ dans $[-3r, 3r]$ et elle a exactement p zéros doubles $b_1, \ldots, b_p$ (répétés selon leur multiplicité). D'après le lemme précédent, on peut alors écrire $f(x) - g(x)^2 = \prod (x - b_j)^2 \Phi(x)$, la fonction Φ étant de classe C^{2m-2p} et vérifiant $(2p)!\Phi(x) \geq a/3$. On pose alors $h = \prod (x - b_j)\Phi(x)^{1/2}$.

La fonction Φ possède des régularités supplémentaires : pour $\alpha_j = 0, 1$ ou 2, on a $\prod (x - b_j)^{\alpha_j}\Phi(x) \in C^{2m-2p+\sum \alpha_j}$. Cela résulte encore du lemme 2.3 qui fournit l'égalité $f(x) = \prod (x - b_j)^{2-\alpha_j}\Psi(x)$. En explicitant les dérivées de la fonction $\Phi^{1/2}$, on vérifie qu'elle hérite de ces régularités : on a $\prod (x - b_j)^{\alpha_j}\Phi^{1/2} \in C^{2m-2p+\sum \alpha_j}$ pour $\alpha_j = 0$ ou 1. En particulier, h appartient à $C^{2m-p} \subset C^m$ et on obtient facilement une borne des dérivées.

3. Étude globale

Nous allons esquisser la démonstration du théorème 1 dans le cas, un peu plus facile, où $f \in C^{2m-1,1}$ et où on recherche g et h dans $C^{m-1,1}$. Nous renvoyons à la remarque 3.3 et à [Bo2] pour la démonstration dans le cas général.

Tous les intervalles ouverts non vides de $\mathbb{R}$ étant difféomorphes, on peut supposer que I est l'intervalle $]0, 1[$. Quitte à multiplier f par le carré d'une fonction régulière strictement positive sur $]0, 1[$ et suffisamment plate au bord, on peut même supposer — ce que nous ferons désormais — que f appartient à $C^{2m-1,1}(\mathbb{R})$, que f est nulle hors de $[0, 1]$ et que $\left|D^k f(x)\right| \leq 1$ pour $0 \leq k \leq 2m$.

Soit $F = \{x \in \mathbb{R} |\, f(x) = D^2 f(x) = \cdots = D^{2m-2} f(x) = 0\}$. Son complémentaire est réunion d'intervalles ouverts disjoints. Si J est l'un d'eux, en notant $d(x)$ la distance au complémentaire de J, on a

$$\left|D^k f(x)\right| \leq d(x)^{2m-k} \quad \text{pour } 0 \leq k \leq 2m \tag{6}$$

Tout revient à démontrer le lemme suivant.

Lemme 3.1. *Soit $f \in C^{2m-1,1}(J)$, positive et vérifiant* (6). *On peut alors écrire f comme somme $f = g^2 + h^2$ de deux fonctions de classe $C^{m-1,1}$, vérifiant $\left|D^k g\right| \leq Cd(x)^{m-k}$ pour $0 \leq k \leq m$ ainsi que la relation analogue pour h, la constante C étant indépendante de J.*

En effet, ce lemme fournit des fonctions g_J et h_J dans chacun des intervalles J. La fonction g valant 0 si $x \in F$ et $g_J(x)$ si $x \in J$, et la fonction h définie de même, sont globalement de classe $C^{m-1,1}$ et résolvent le problème.

Pour démontrer le lemme 3.1, on introduit la "métrique propre de f", ici de la forme $dx^2/\rho(x)^2$, pour employer une terminologie qui est plus utile en dimension supérieure (voir [LN]). La fonction ρ est définie par

$$\rho(x) = \max_{0<k<m} \left(\left[D^{2k} f(x) \right]^+ \right)^{1/(2m-2p)}, \tag{7}$$

en posant $a^+ = \max(a, 0)$.

Cette fonction est strictement positive dans J et vérifie $\rho(x) \leq d(x)$.

En chaque point $z \in J$, on peut considérer la fonction $\varphi(t) = \rho(z)^{-2m} f(z+\rho(z)t)$. Cette fonction est définie sur $[-1, 1]$ et vérifie (4). En transformant les résultats de la première partie du corollaire 2.2 par ce changement d'échelle, on obtient

$$\begin{gathered} \left| D^k f(y) \right| \leq \overline{C} \rho(z)^{2m-k} \text{ pour } |y-z| \leq \rho(z) \text{ et } 0 \leq k \leq 2m, \\ (\rho(y)/\rho(z))^{\pm 1} \leq 2 \text{ pour } |y-z| \leq 3\rho(z)/\overline{C}, \end{gathered}$$

avec $\overline{C}$ indépendant de J. La seconde estimation affirme que la métrique dx^2/ρ^2 est lentement variable au sens de Hörmander.

Le lemme suivant est le point-clef de la démonstration

Lemme 3.2. *Il existe un nombre fini de constantes strictement positives a_0, A_0 et $r_N < r_{N-1} < \cdots < r_1 < 1/3\overline{C}$ telles que, en tout point $z \in J$, on ait*
— ou bien $f(z) \geq a_0 \rho(z)^{2m}$
— ou bien il existe $j \in \{1, \ldots, N\}$ tel que, en notant I_z [resp. λI_z] l'intervalle de centre z et de rayon $r_j \rho(z)$ [resp. $\lambda r_j \rho(z)$], on ait une décomposition

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= g(x)^2 + h(x)^2 \\ \forall k \leq m, \ \left| D^k g(x) \right| + \left| D^k h(x) \right| &\leq A_0 \rho(z)^{m-k} \end{aligned} \right\} \textit{ pour } x \in 3I_z,$$

la fonction g étant à support dans $\frac{1}{2} I_z$. De plus

$$f(x) \geq a_0 \rho(z)^{2m} \textit{ et } \operatorname{sgn}(x) f'(x) > 0 \textit{ pour } x \in 3I_z - \tfrac{1}{3} I_z.$$

Esquissons la démonstration. La fonction $\varphi(t)$ définie plus haut vérifie $D^{2p}\varphi(0) = 1$ pour un certain $p \in \{0, \ldots, m-1\}$. Avec les notations du corollaire 2.2, si on a $D^{2q}\varphi(0) \leq \delta(1)$ pour tout $q < p$, la décomposition locale de f en somme de carrés résulte immédiatement, par changement d'échelle, du corollaire 2.4.

S'il n'en est pas ainsi, c'est qu'il existe $q < p$ tel que $D^{2q}\varphi(0) \geq \delta(1)$. Si alors, pour tout $r < q$, on a $D^{2r}\varphi(0) \leq \delta(\delta(1))$, l'existence d'une décomposition résulte encore du corollaire 2.4, sinon … On aboutit par récurrence, soit à l'existence d'une décomposition, soit à une borne inférieure de $\varphi(0) = f(z)$. Les rayons r du corollaire sont bornés inférieurement, et il est facile de voir que l'on peut les choisir dans un ensemble discret.

A ce stade, en utilisant la lenteur de dx^2/ρ^2, on pourrait construire simplement un recouvrement de J par des intervalles centrés en des points z_ν et de diamètre

$\rho(z_\nu)/\mathrm{C^{te}}$ dans lesquels, ou bien $f(x)$ est minoré et on peut écrire $f = (f^{1/2})^2$, ou bien il existe une décomposition $f = g^2 + h^2$ comme ci-dessus. A l'aide d'une partition de l'unité $1 = \sum \chi_\nu^2$ subordonnée au recouvrement, on obtiendrait facilement une décomposition de f en somme de quatre carrés. Ecrire f comme somme de deux carrés est un peu plus délicat.

Il faut d'abord faire la remarque suivante pour les intervalles I_z définis ci-dessus : si $I_z/3$ et $I_w/3$ sont disjoints, alors $3I_z$ et $3I_w$ sont disjoints. En effet, dans le cas contraire, il existerait un point de l'intersection où f' devrait être à la fois > 0 et < 0. On considère ensuite une famille $\mathcal{I}_1$ de tels intervalles I_z, de rayon relatif r_1 (i. e. de rayon $r_1\rho(z)$), formée d'intervalles disjoints et maximale pour cette propriété. On y adjoint une famille $\mathcal{I}_2$ d'intervalles de rayon relatif r_2, telle que les éléments de $\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2$ soient disjoints, et qui est maximale pour cette propriété. On poursuit par récurrence et on obtient une famille $\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{I}_N$ d'intervalles séparés qui ne peuvent s'accumuler qu'aux extrémités. On peut donc les ranger par ordre croissant en une suite I_ν indexée par $\mathbb{Z}$ ou un intervalle de $\mathbb{Z}$.

Pour chaque ν, on connait l'existence d'une décomposition $f = g_\nu^2 + h_\nu^2$ valable dans $3I_\nu$ avec g_ν à support dans $I_\nu/2$. On a donc $h_\nu = \pm f^{1/2}$ dans $3I_\nu \setminus I_\nu/2$. D'autre part, dans l'intervalle J_ν séparant I_ν de $I_{\nu+1}$, il n'est pas difficile de montrer que l'on a $f(x) \geq \rho(x)^{2m}/C$, la constante C étant uniforme : dans le cas contraire, l'intervalle I_x pourrait être ajouté à la famille et contredirait sa maximalité. Dans J_ν, on peut ainsi écrire $f = u_\nu^2$ avec $u_\nu = f^{1/2}$. Dans leurs intervalles de définition, les dérivées d'ordre k des fonctions f_ν, g_ν et u_ν sont majorées par $C\rho(x)^{m-k}$ et donc par $Cd(x)^{m-k}$.

On définit la fonction g sur J par $g(x) = g_\nu(x)$ si x appartient à l'un des I_ν et par $g(x) = 0$ sinon. On prend h égale à h_0 dans l'intervalle I_0. Dans $3I_0 \cap J_0$, on a $h_0 = \pm u_0$ et on définit en conséquence $h(x) = \pm u_0(x)$ dans J_0. On pose ensuite $h(x) = \pm h_1(x)$ pour $x \in I_1$ en choisissant judicieusement le signe et on poursuit par récurrence. On procède de même avec les indices négatif, ce qui achève la démonstration du lemme 3.1.

Remarque 3.3. Dans le cas où f est de classe C^{2m}, la démonstration doit être modifiée de la façon suivante. Il faut introduire l'ensemble fermé $G = \{x \in \mathbb{R} | f(x) = D^2 f(x) = \cdots = D^{2m} f(x) = 0\}$. On note $\Omega(x)$ une fonction régularisée de $\omega(d(x))$, définie dans le complémentaire de G, où ω est un module de régularité de $D^{2m}f$ et où d désigne la distance à G. Dans chaque intervalle J contigu à G, nous allons décomposer la fonction $\widetilde{f} = f/\Omega$ sous la forme $\widetilde{g}^2 + \widetilde{h}^2$ (en omettant l'indice J), avec $\widetilde{g}, \widetilde{h} \in C^m(J)$ et $\left|D^k \widetilde{g}(x)\right| + \left|D^k \widetilde{h}(x)\right| \leq Cd(x)^{m-k}$. La fonction g valant $\Omega^{1/2}\widetilde{g}_J$ dans chaque intervalle J et 0 dans G est alors de classe C^m. Associée à la fonction h correspondante, elle résout le problème.

La décomposition de $\widetilde{f}$ dans J se fait comme ci-dessus, la seule différence étant que la fonction $\widetilde{\rho}$ associée à $\widetilde{f}$ peut s'annuler en certains points y, qui sont plongés dans les intervalles J_ν, et qui constituent un ensemble discret $\mathcal{Y}$. Les fonctions $\widetilde{g}_\nu$ et $\widetilde{h}_\nu$ sont déterminées comme précédemment, seule la construction des fonctions $\widetilde{u}_\nu$ doit être modifiée comme suit. Au voisinage d'un point $y \in \mathcal{Y}$, on a $\widetilde{f}(x) = (x-y)^{2m}\theta(x)$ avec $\theta > 0$ et on doit choisir $\widetilde{u}_\nu(x) = \pm(x-y)^m\theta(x)^{1/2}$. On a donc toujours $|\widetilde{u}_\nu| = \widetilde{f}^{1/2}$ mais, pour m impair, il y a changement de signe de u_ν en chaque point de $\mathcal{Y}$. La fin de la démonstration (recollement des $\widetilde{h}_\nu$ et $\widetilde{u}_\nu$) est sans changement.

References

[BCR] Bochnak, J.; Coste, M.; Roy, M.-F. Géométrie algébrique réelle. Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[Bo1] Bony, J.-M. Sur l'inégalité de Fefferman-Phong. Séminaire Équations aux Dérivées Partielles, 1998–1999; École Polytechnique Palaiseau, Exp. N° III.

[Bo2] Bony, J.-M. Sommes de carrés de fonctions dérivables. Prépublication École Polytechnique (2004), no. 3.

[BBCP] Bony, J.-M.; Broglia F.; Colombini F.; Pernazza L. Nonnegative functions as squares or sums of squares. A paraître.

[Br] Brumfiel, G. Partially ordered rings and semi-algebraic geometry. London Mathematical Society Lecture Note Series, 37. Cambridge University Press, Cambridge-New York, 1979.

[FP] Fefferman, C.; Phong, D. H. On positivity of pseudo-differential operators. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 75 (1978), N° 10, 4673–4674.

[Gl] Glaeser, G. Racine carrée d'une fonction différentiable. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 13 (1963) fasc. 2, 203–210.

[Gu] Guan, P. C^2 A Priori Estimates for Degenerate Monge-Ampère Equations. Duke Math. J. 86(2) (1997), 323–346.

[Hö] Hörmander, L. The analysis of linear partial differential operators. Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[LN] Lerner, N.; Nourrigat, J. Lower bounds for pseudo-differential operators. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 40 (1990), no. 3, 657–682.

École polytechnique, Centre de Mathématiques Laurent Schwartz, 91128 Palaiseau cedex, France
bony@math.polytechnique.fr