INSTITUT DE FRANCE
Académie des sciences

Comptes Rendus Mathématique

Yann Brenier

Une interprétation variationnelle de la relativité générale dans le vide en termes de transport optimal

Volume 360 (2022), p. 25-33

Published online: 26 January 2022

https://doi.org/10.5802/crmath.275

Les Comptes Rendus. Mathématique *sont membres du*
Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte
www.centre-mersenne.org
e-ISSN : 1778-3569

Comptes Rendus
Mathématique
2022, 360, p. 25-33
https://doi.org/10.5802/crmath.275

Equations aux dérivées partielles / *Partial differential equations*

Une interprétation variationnelle de la relativité générale dans le vide en termes de transport optimal

Yann Brenier[*, a]

[a] CNRS, Département de Mathématiques et Applications, École Normale Supérieure, Université PSL, 45 rue d'Ulm 75005 Paris, France

Courriel : yann.brenier@ens.fr

Résumé. On revoit les équations d'Einstein de la relativité générale dans le vide comme équations d'optimalité d'une sorte de problème de transport optimal quadratique généralisé.

Manuscrit reçu le 30 juillet 2021, révisé le 24 septembre 2021, accepté le 25 septembre 2021.

1. Introduction

La relativité générale a fait l'objet de très nombreux et importants travaux d'analyse (par exemple [12]). Elle a été récemment placée par plusieurs auteurs [18, 19] dans le cadre de la théorie du transport optimal de Monge–Kantorovich [1, 22, 23, 25] (dont [9] est l'une des premières applications à l'analyse géométrique et [13] à l'astronomie), suivant les idées introduites par Lott, Sturm et Villani [16, 24] pour caractériser la courbure de Ricci. Notre objectif est ici de proposer une autre approche, très élémentaire et s'inspirant de la formulation *hydrodynamique* (souvent dite de Benamou–Brenier) du problème de transport optimal *quadratique* [1, 2, 20], qui, rappelons-le, consiste à chercher, sur l'espace euclidien $\{x \in \mathbb{R}^d\}$, des champs de densité $\rho = \rho(t,x) \in \mathbb{R}_+$ et de vitesse $v = v(t,x) \in \mathbb{R}^d$, dépendant du temps $t \in [0,1]$ et minimisant

$$\int_{[0,1]\times\mathbb{R}^d} \rho(t,x)|v(t,x)|^2 dx dt$$

sous contrainte $\partial_t \rho + \nabla\cdot(\rho v) = 0$, ρ étant prescrit en $t = 0$ et $t = 1$.

Dans cette note, on va plutôt s'intéresser à des champs

$$C = \left(C^j_k(x,\xi)\right) \quad \text{et} \quad V = \left(V^j_k(x,\xi)\right)$$

* Auteur correspondant.

de matrices réelles $d \times d$ définis sur l'espace des phases $(x,\xi) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, avec $d = 4$ (comme dans toute la suite de cette note), contraints par les relations différentielles linéaires de symétrie suivantes

$$\partial_{\xi^i} V^k_j = \partial_{\xi^j} V^k_i, \tag{1}$$

$$(1-d)\partial_{\xi^m} C^j_k + \partial_{\xi^m} C^\gamma_\gamma\, \delta^j_k = (1-d)\partial_{\xi^k} C^j_m + \partial_{\xi^k} C^\gamma_\gamma\, \delta^j_m \tag{2}$$

(avec sommation implicite sur les indices répétés haut et bas, comme dans toute la suite de la note, ici γ), qui sont points critiques, par rapport à des variations à support compact, de

$$\mathscr{J}(C,V) = \int \operatorname{trace}\left(C(x,\xi)V^2(x,\xi)\right) dx d\xi = \int \left(V^k_\gamma C^\gamma_\sigma V^\sigma_k\right)(x,\xi) dx d\xi, \tag{3}$$

sous la contrainte différentielle non-linéaire

$$\partial_{x^j} C^j_k + \partial_{\xi^j} (CV + VC)^j_k = 0. \tag{4}$$

On a donc là une généralisation assez directe de la formulation hydrodynamique du transport optimal quadratique, pour laquelle on va établir :

Théorème 1. *Soit g une solution lisse de la relativité générale dans le vide, au sens que g est une métrique de Lorentz sur* $\mathbb{R}^d$ *(avec d = 4) de signature* $(-1,1,1,1)$ *dont la connexion de Levi–Cività* Γ *est de courbure de Ricci nulle. Introduisons*

$$A^j(x,\xi) = \xi^j \det g(x) \cos\left(\frac{g_{\alpha\beta}(x)\xi^\alpha\xi^\beta}{2}\right), \quad V^j_k(x,\xi) = -\Gamma^j_{k\gamma}(x)\xi^\gamma. \tag{5}$$

ce qui permet de reconstruire la métrique g à partir de A via

$$g^{ij}(x)\sqrt{-\det g(x)} = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\xi^i A^j(x,\xi) + \xi^j A^i(x,\xi)\right) d\xi \tag{6}$$

(à une constante multiplicative près), et posons

$$C^j_k(x,\xi) = \left(\mathscr{D}_\xi A\right)^j_k(x,\xi) = \partial_{\xi^k} A^j(x,\xi) - \partial_{\xi^q} A^q(x,\xi)\,\delta^j_k. \tag{7}$$

Alors (C,V) *est point critique du problème de transport optimal généralisé.*

Notons que la considération de la relativité générale dans le vide (*i.e.* le "nobody problem" selon une plaisanterie de D. Christodoulou) est plus pertinente qu'il ne semble à première vue car les équations d'Einstein ne sont pas « faiblement fermées » et certains types de champs de matière (au moins sans masse) peuvent émerger à la limite faible (voir [15] et la conjecture de Burnett).

Remarques. Bien que cette formulation variationnelle de la relativité générale dans le vide soit très proche de celle du transport optimal quadratique en formulation hydrodynamique, insistons sur les différences les plus importantes :

(1) Pour la relativité générale dans le vide, les variables x et ξ sont multidimensionnelles, de dimension d, alors qu'en transport optimal, x est seulement unidimensionnelle (et correspond à la variable de temps). (Cela dit, il y a une généralisation dorénavant bien établie par Lavenant [17] du transport optimal quadratique en formulation hydrodynamique au cas où x est multidimensionnelle avec sa théorie des « applications harmoniques généralisées » inspirée de [5]. La ressemblance entre transport optimal quadratique et relativité générale dans le vide est alors encore plus frappante.)

(2) Les inconnues sont à valeurs matricielles. (Cela dit, il existe des formulations de type hydrodynamique du transport optimal pour les champs de matrices symétriques semi-définies positives et même pour les opérateurs en mécanique quantique [7, 10, 11, 21].)

(3) Il n'y a pas de transposition ni de symétrie dans les matrices carrées C et V mises en jeu. En particulier, il n'y a pas de convexité apparente dans cette formulation, contrairement au transport optimal quadratique. (Cela dit, l'équation d'optimalité du transport optimal quadratique est l'équation d'Halmilton–Jacobi réelle. Or cette équation admet une généralisation complexe, bien connue dans la théorie des matrices aléatoires [14], qui s'écrit en une dimension d'espace

$$\partial_t\phi + \frac{1}{2}(\partial_x\phi)^2 = 0, \quad \phi = \phi(t,x) \in \mathbb{C}, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^2,$$

et où figure un carré complexe et pas une norme au carré. Néanmoins, comme l'a montré Guionnet dans [14], on peut quand même se ramener à un problème d'optimisation convexe ! Rappelons aussi que le transport optimal quadratique est lié à l'équation de Monge–Ampère réelle [25], qui connaît aussi une variante complexe, bien connue et très importante en géométrie kählérienne, et pour laquelle la notion de convexité est remplacée par celle de pluri-sous-harmonicité [3]. Citons enfin le récent concept de dualité de Legendre complexe de Berndtsson, Cordero–Erausquin, Klartag et Rubinstein [4] qui diffère de la dualité de Legendre, Fenchel et Moreau, bien connue en analyse convexe [8].)

Ainsi, il n'est pas impensable que la formulation hydrodynamique des équations d'Einstein dans le vide présentée dans cette note ait de l'intérêt du point de vue de l'analyse mathématique.

2. Formulation dans l'espace des phases

On introduit d'abord sur l'espace des phases $\mathbb{R}^{2d}$ le champ d'accélération gravitationnel

$$F^k(x,\xi) = -\Gamma^k{}_{ij}(x)\xi^i\xi^j, \quad \in \mathbb{R}^d, \quad \xi \in \mathbb{R}^d$$

et le champ matriciel V de ses dérivées en ξ :

$$V_i^k(x,\xi) = \frac{1}{2}\partial_{\xi^i}F^k(x,\xi) = -\Gamma_{ij}^k(x)\xi^j. \tag{8}$$

Ici, la connexion, décrite par les symboles de Christoffel Γ, est supposée sans torsion, *i.e.* Γ_{ij}^k est symétrique en (i,j) (ce qui correspond au fait que V « dérive en ξ d'un potentiel ».) Ainsi les géodésiques (qui décrivent la chute libre des corps) sont les courbes

$$s \in \mathbb{R} \to \big(x(s),\, \xi(s)\big) \in \mathbb{R}^{2d}$$

solutions de

$$\frac{dx^k}{ds} = \xi^k(s), \quad \frac{d\xi^k}{ds} = F^k\big(\xi(s),\, \xi(s)\big).$$

On vérifie que la courbure de Riemann s'exprime facilement comme commutateur sur V :

$$R_{ijm}^k(x)\xi^m = \left(\left(\partial_{x^j} + V_j^q\partial_{\xi^q}\right)V_i^k - \left(\partial_{x^i} + V_i^q\partial_{\xi^q}\right)V_j^k\right)(x,\xi).$$

Comme V dérive de F, cette quantité peut aussi s'écrire sous forme « conservative » :

$$\left(\partial_{x^j}V_i^k + \partial_{\xi^i}\left(V_j^qV_q^k\right) - \partial_{x^i}V_j^k - \partial_{\xi^j}\left(V_i^qV_q^k\right)\right)(x,\xi).$$

La courbure de Ricci se retrouve en contractant i et k :

$$\mathscr{R}_j[V](x,\xi) = \left(\partial_{x^j}V_k^k + \partial_{\xi^k}\left(V_j^qV_q^k\right) - \partial_{x^k}V_j^k - \partial_{\xi^j}\left(V_k^qV_q^k\right)\right)(x,\xi) = R_{jm}(x)\xi^m.$$

Ainsi l'équation d'Einstein dans le vide $R_{jm}(x) = 0$ sur l'espace des $x \in \mathbb{R}^d$, se traduit simplement comme un système de « lois de conservation » pour V dans l'espace des phases $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2d}$:

$$\mathscr{R}_j[V] = \partial_{x^j}V_k^k + \partial_{\xi^k}\left(V_j^qV_q^k\right) - \partial_{x^k}V_j^k - \partial_{\xi^j}\left(V_k^qV_q^k\right) = 0. \tag{9}$$

On peut donc énoncer

Proposition 2. *Soit g une solution sur* $\mathbb{R}^d$ *de la relativité générale dans le vide et sa connexion de Levi–Cività* Γ. *Alors* V *définie par* (8) *est solution de (1, 9) sur l'espace des phases* $\mathbb{R}^{2d}$.

A priori, l'équation (9) peut admettre bien d'autres solutions V que celles de la forme

$$V_i^k(x,\xi) = -\Gamma_{ij}^k(x)\xi^j,$$

qui sont juste linéaires en ξ ! Ainsi l'équation d'Einstein se trouve littéralement « noyée » dans une équation *a priori* beaucoup plus générale mais qui admet néanmoins une interprétation variationnelle élémentaire très proche du problème de transport optimal quadratique dans sa formulation hydrodynamique [1, 2], comme on va maintenant le voir.

3. Formulation variationnelle

Pour obtenir, selon le procédé traditionnel, la formulation faible de l'équation (9) et de la contrainte de symétrie (1), on les multiplie respectivement par un champ test vectoriel $A^j(x,\xi)$ et des champs (indexés par k) de matrices $\Omega_k^{ij}(x,\xi)$, antisymétriques en (i,j), on ajoute le tout et on intègre en (x,ξ) sur l'espace des phases $\mathbb{R}^{2d}$, ce qui donne

$$\mathscr{I}(A,\Omega,V) = \int \left(\mathscr{R}_j[V](x,\xi)A^j(x,\xi) + \partial_{\xi^i} V_j^k(x,\xi)\Omega_k^{ji}(x,\xi)\right) dxd\xi, \tag{10}$$

soit, en intégrant par partie,

$$\mathscr{I}(A,\Omega,V) = \int \left(-\partial_{x^j} A^j V_k^k - \partial_{\xi^k} A^j V_j^q V_q^k + \partial_{x^k} A^j V_j^k + \partial_{\xi^j} A^j V_k^q V_q^k - \partial_{\xi^i}\Omega_k^{ji} V_j^k\right) dxd\xi,$$

et on impose que le résultat soit nul pour tous (A,Ω). Un point de vue plus fructueux consiste plutôt à voir $\mathscr{I}$ comme une fonctionnelle et d'en rechercher les points critiques par rapport aux *trois* variables V, A et Ω. Cela fait, bien entendu, de V une solution (faible) de l'équation avec la condition de symétrie voulue, en dérivant par rapport à A et Ω, mais donne aussi une nouvelle équation obtenue en dérivant par rapport à V. Introduisons pour cela les opérateurs $\mathscr{D}_x$ et $\mathscr{D}_\xi$ définis par

$$\left(\mathscr{D}_x A\right)_k^j = \partial_{x^k} A^j - \partial_{x^q} A^q\, \delta_k^j, \quad \left(\mathscr{D}_\xi A\right)_k^j = \partial_{\xi^k} A^j - \partial_{\xi^q} A^q\, \delta_k^j. \tag{11}$$

On peut alors écrire plus commodément la fonctionnelle sous la forme

$$\mathscr{I}(A,\Omega,V) = \int (\mathscr{D}_x A)_k^j V_j^k - \left(\mathscr{D}_\xi A\right)_k^j V_j^q V_q^k - \partial_{\xi^i}\Omega_k^{ji} V_j^k$$

et, en dérivant en V, on obtient

$$\left(\mathscr{D}_x A\right)_k^j - V_k^q \left(\mathscr{D}_\xi A\right)_q^j - V_q^j \left(\mathscr{D}_\xi A\right)_k^q = \partial_{\xi^i}\Omega_k^{ji}. \tag{12}$$

Proposition 3. *Tout point critique* (A,Ω,V) *de la fonctionnelle* $\mathscr{I}$ *est caractérisé par les trois équations (1, 9, 12). De plus, si C est défini par* (7), *alors* (C,V) *est point critique de la fonctionnelle* $\mathscr{J}$ *définie par* (3) *sous contraintes (1, 2, 4).*

Démonstration. On vient de voir qu'un point critique (V,A,Ω) de $\mathscr{I}(A,\Omega,V)$ est en effet caractérisé par les trois équations d'optimalité (1, 9, 12). Si on élimine Ω de $\mathscr{I}(A,\Omega,V)$ en utilisant (12), on obtient

$$\int - \left(\mathscr{D}_\xi A\right)_k^j V_j^q V_q^k + V_j^k V_k^q \left(\mathscr{D}_\xi A\right)_q^j + V_j^k V_q^j \left(\mathscr{D}_\xi A\right)_k^q = -\int \left(\mathscr{D}_\xi A\right)_k^j V_j^q V_q^k. \tag{13}$$

Comme Ω a disparu de cette intégrale, on déduit que (V,A) en est point critique, sous contrainte (1) et que (12) est satisfait pour un certain Ω_k^{ij}, antisymétrique en (i,j). Or, comme nous sommes en dimension $d=4$ (et c'est le seul endroit de cette note où nous utilisons cette hypothèse), cette dernière condition veut exactement dire :

$$\partial_{\xi^j}\left(\left(\mathscr{D}_x A\right)_k^j - V_k^q \left(\mathscr{D}_\xi A\right)_q^j - V_q^j \left(\mathscr{D}_\xi A\right)_k^q\right) = 0. \tag{14}$$

En effet, posons, pour k et x fixés,

$$w^{ji}(\xi) = \Omega_k^{ji}(x,\xi), \quad W^j(\xi) = \left(\left(\mathscr{D}_x A\right)_k^j - V_k^q \left(\mathscr{D}_\xi A\right)_q^j - V_q^j \left(\mathscr{D}_\xi A\right)_k^q\right)(x,\xi)$$

de sorte que l'on a $W^j(\xi) = \partial_{\xi_i} w^{ji}(\xi)$ et utilisons le langage des formes différentielles.

On voit donc que la 3-forme sur $\mathbb{R}^4$

$$W^0 d\xi^1 \wedge d\xi^2 \wedge d\xi^3 + W^1 d\xi^2 \wedge d\xi^3 \wedge d\xi^0 + W^2 d\xi^3 \wedge d\xi^0 \wedge d\xi^1 + W^3 d\xi^0 \wedge d\xi^1 \wedge d\xi^2$$

dérive de la $2-$forme

$$w^{01} d\xi^2 \wedge d\xi^3 + w^{12} d\xi^3 \wedge d\xi^0 + w^{23} d\xi^0 \wedge d\xi^1 + w^{30} d\xi^1 \wedge d\xi^2 + w^{31} d\xi^2 \wedge d\xi^0 + w^{02} d\xi^3 \wedge d\xi^1$$

et cela est possible si et seulement si elle est fermée, *i.e.* $\partial_{\xi j} W^j(\xi) = 0$.

On a donc prouvé à ce stade que (A,V) est point critique de

$$\int \left(\mathscr{D}_\xi A\right)_k^j V_j^q V_q^k,$$

sous contraintes (1, 14).

Remarque 4. On aurait pu raisonner de façon plus abstraite (avec des notations synthétiques moins précises) à l'aide de formes différentielles comme suit : Soit (A,V,Ω) point critique de $\int \mathscr{R}[V]A - V d\Omega$. Les équations d'optimalité sont, en dérivant successivement en A, V et Ω,

$$\mathscr{R}[V] = 0, \quad \mathscr{R}'[V]A = d\Omega, \quad V = 0.$$

Il s'agit de montrer que (A,V) est point critique de $\int (\mathscr{R}[V] - V\mathscr{R}'[V])A$ sous contrainte $dV = 0$ et $d(\mathscr{R}'[V]A) = 0$. En introduisant comme multiplicateurs une zéro-forme F et une $2-$forme Z, cela revient à optimiser

$$\int \left(\mathscr{R}[V] - V\mathscr{R}'[V]\right) A + dF\, \mathscr{R}'[V]A - V dZ$$

dont les équations d'optimalité sont, en dérivant successivement en A, V, F et Z,

$$\mathscr{R}[V] + (dF - V)\mathscr{R}'[V] = 0, \quad (dF - V)\mathscr{R}"[V]A = dZ, \quad d\left(\mathscr{R}'[V]A\right) = 0, \quad dV = 0.$$

Or, ces équations sont automatiquement satisfaites en choisissant $Z = 0$ et F de sorte que $V = dF$, ce qui est possible puisque $dV = 0$.

Pour conclure la preuve de la proposition 3, on introduit le champ de matrices C défini par (7), *i.e.*

$$C_k^j = \left(\mathscr{D}_\xi A\right)_k^j = \partial_{\xi^k} A^j - \partial_{\xi^q} A^q\, \delta_k^j,$$

sujet à la condition de compatibilité (2) qui exprime la possibilité de reconstituer A à partir de C, comme on peut le vérifier aisément, via les formules :

$$(1-d)\partial_{\xi^q} A^q = C_q^q, \quad (1-d)\partial_{\xi^k} A^j = (1-d)C_k^j + C_q^q \delta_k^j$$

et de déduire aussi de (11) que

$$\partial_{\xi^j} \left(\mathscr{D}_x A\right)_k^j = \partial^2_{\xi^j x^k} A^j - \partial^2_{\xi^j x^q} A^q\, \delta_k^j = \partial^2_{x^k \xi^j} A^j - \partial^2_{x^q \xi^k} A^q = -\partial_{x^q} C_k^q,$$

ce qui permet de réécrire la condition (14) en seuls termes de (C,V) sous la forme (4). Par ailleurs, la fonctionnelle (13) dont (A,V) est point critique se réécrit aussi entièrement en termes de (C,V) sous la forme $-\mathscr{J}(C,V)$ définie par (3). Finalement, on a bien obtenu que (C,V) est point critique de la fonctionnelle (3), sous contraintes (1, 2, 4), ce qui termine la preuve de la proposition 3. $\square$

4. Retour à la relativité générale dans le vide

Démonstration. Pour compléter la démonstration du théorème 1, il reste à nous assurer que le couple (A,V) défini par (5) à partir d'une métrique de Lorentz g solution de la relativité générale dans le vide, *i.e.*

$$A^j(x,\xi)=\xi^j \det g(x)\,\Phi\left(\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}(x)\xi^\alpha\xi^\beta\right),\quad V^j_k(x,\xi)=-\Gamma^j_{k\gamma}(x)\xi^\gamma,$$

où on a posé $\Phi(s)=\cos(s)$ (et où, plus généralement, $\Phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ pourrait être une fonction quelconque du moment que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty}ds\int_0^\infty (s^2-r^2)\Phi\left(\frac{s^2-r^2}{2}\right)r^2dr$$

ait un sens et soit non nulle, comme on va le voir plus loin), vérifie les trois équations voulues par l'approche variationnelle (1, 9, 12) et permet de retrouver g via (6), *i.e.*

$$g^{ij}(x)\sqrt{-\det g(x)}=\int_{\mathbb{R}^d}\left(\xi^iA^j(x,\xi)+\xi^jA^i(x,\xi)\right)d\xi$$

(à une constante multiplicative près). A l'aide de cette dernière formule, on voit déjà que, dans la fonctionnelle $\mathscr{I}(A,\Omega,V)$ définie par (10), le terme

$$\int\mathscr{R}_j[V](x,\xi)A^j(x,\xi)dxd\xi=\int R_{jk}(x)\xi^kA^j(x,\xi)dx=\int R_{jk}(x)\left(\int\xi^kA^j(x,\xi)d\xi\right)dx$$

se réécrit

$$\int R_{jk}(x)\sqrt{-\det g(x)}\,g^{kj}(x)dx$$

et n'est rien d'autre que la fonctionnelle d'Hilbert–Einstein, laquelle permet de retrouver les équations de la relativité générale dans le vide en faisant varier g. Comme notre cadre variationnel avec les variables (A,V) est beaucoup plus vaste que celui de la simple variable g, cela ne nous suffit pas *a priori* pour conclure et nous allons donc vérifier directement les équations d'optimalité (1, 9, 12). Les deux premières sont automatiquement satisfaites (par définition de V et de la nullité de la courbure de Ricci exprimée précisément par (9) en termes de V). Reste à montrer (12), à savoir

$$(\mathscr{D}_xA)^j_k-V^q_k(\mathscr{D}_\xi A)^j_q-V^j_q(\mathscr{D}_\xi A)^q_k=\partial_{\xi^i}\Omega^{ji}_k,$$

en exhibant pour cela un champ Ω^{ji}_k, antisymétrique en (i,j), convenable, ou, de façon équivalente, comme on l'a vu plus haut (en utilisant que $d=4$) en montrant (14), *i.e.*

$$\partial_{\xi^j}\left((\mathscr{D}_xA)^j_k-V^q_k(\mathscr{D}_\xi A)^j_q-V^j_q(\mathscr{D}_\xi A)^q_k\right)=0.$$

On a, par hypothèse (5),

$$A^j(x,\xi)=\rho(x)\Phi(u(x,\xi))\xi^j,\quad \rho(x)=\det g(x),\quad u(x,\xi)=\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}(x)\xi^\alpha\xi^\beta.$$

On utilise les relations classiques :

$$\partial_{x^k}\rho=2\Gamma^q_{kq}\rho,\quad \partial_{\xi^k}u(x,\xi)=g_{kj}(x)\xi^j=\xi_k,\quad \partial_{x^k}u(x,\xi)=\Gamma^\sigma_{k\tau}\xi_\sigma\xi^\tau,$$

ce qui conduit bien à l'équation voulue, au prix du calcul fastidieux qui suit :

On note Φ' et Φ" les dérivées première et seconde de Φ. On a

$$\partial_{\xi^k}A^j=\rho\Phi\delta^j_k+\rho\Phi'\xi^j\xi_k,\quad \partial_{x^k}A^j=2\rho\Phi\Gamma^\sigma_{\sigma k}\xi^j+\rho\Phi'\Gamma^\sigma_{\alpha k}\xi^\alpha\xi_\sigma\xi^j$$

En utilisant la définition (11), on a respectivement

$$\begin{aligned}(\mathscr{D}_xA)^j_k&=\partial_{x^k}A^j-\partial_{x^\tau}A^\tau\,\delta^j_k\\&=2\rho\Phi\Gamma^\sigma_{\sigma k}\xi^j+\rho\Phi'\Gamma^\sigma_{\alpha k}\xi^\alpha\xi_\sigma\xi^j-\left(2\rho\Phi\Gamma^\sigma_{\sigma\tau}\xi^\tau+\rho\Phi'\Gamma^\sigma_{\alpha\tau}\xi^\alpha\xi_\sigma\xi^\tau\right)\delta^j_k,\\(\mathscr{D}_\xi A)^j_k&=\partial_{\xi^k}A^j-\partial_{\xi^\tau}A^\tau\,\delta^j_k=(1-d)\rho\Phi\delta^j_k+\rho\Phi'\left(\xi^j\xi_k-2u\delta^j_k\right).\end{aligned}$$

Par définition (8),

$$V_i^k(x,\xi) = -\Gamma^k_{i\sigma}(x)\xi^\sigma$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned}&- V_k^q\left(\mathscr{D}_\xi A\right)_q^j - V_q^j\left(\mathscr{D}_\xi A\right)_k^q\\ &\qquad = \left((1-d)\rho\Phi\delta_q^j + \rho\Phi'\left(\xi^j\xi_q - 2u\delta_q^j\right)\right)\Gamma^q_{k\sigma}\xi^\sigma + \left((1-d)\rho\Phi\delta_k^q + \rho\Phi'\left(\xi^q\xi_k - 2u\delta_k^q\right)\right)\Gamma^j_{q\sigma}\xi^\sigma.\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}&(\mathscr{D}_x A)_k^j - V_k^q\left(\mathscr{D}_\xi A\right)_q^j - V_q^j\left(\mathscr{D}_\xi A\right)_k^q\\ &\qquad = 2\rho\Phi\Gamma^\sigma_{\sigma k}\xi^j + \rho\Phi'\Gamma^\sigma_{\alpha k}\xi^\alpha\xi_\sigma\xi^j - \left(2\rho\Phi\Gamma^\sigma_{\sigma\tau}\xi^\tau + \rho\Phi'\Gamma^\sigma_{\alpha\tau}\xi^\alpha\xi_\sigma\xi^\tau\right)\delta_k^j + (1-d)\rho\Phi\delta_q^j\Gamma^q_{k\sigma}\xi^\sigma\\ &\qquad\quad + \rho\Phi'\left(\xi^j\xi_q - 2u\delta_q^j\right)\Gamma^q_{k\sigma}\xi^\sigma + (1-d)\rho\Phi\delta_k^q\Gamma^j_{q\sigma}\xi^\sigma + \rho\Phi'\left(\xi^q\xi_k - 2u\delta_k^q\right)\Gamma^j_{q\sigma}\xi^\sigma.\\ &\qquad = \rho\Phi\left(2\Gamma^\sigma_{\sigma k}\xi^j - 2\Gamma^\sigma_{\sigma\tau}\xi^\tau\delta_k^j + (1-d)\delta_q^j\Gamma^q_{k\sigma}\xi^\sigma + (1-d)\delta_k^q\Gamma^j_{q\sigma}\xi^\sigma\right)\\ &\qquad\quad + \rho\Phi'\left(2\Gamma^\sigma_{\alpha k}\xi^\alpha\xi_\sigma\xi^j - \Gamma^\sigma_{\alpha\tau}\xi^\alpha\xi_\sigma\xi^\tau\delta_k^j - 2\Gamma^q_{k\sigma}\xi^\sigma u\delta_q^j + \Gamma^j_{q\sigma}\xi^\sigma\xi^q\xi_k - 2\Gamma^j_{k\sigma}\xi^\sigma u\right).\end{aligned}$$

Il nous reste maintenant à dériver en ξ^j, sachant que $\partial_{\xi^j}(\Phi(u)) = \xi_j\Phi'(u)$, $\quad\partial_{\xi^j}(\Phi'(u)) = \xi_j\Phi"(u)$, et à obtenir un résultat nul.
On trouve, d'abord en facteur de $\rho\Phi$,

$$2d\Gamma^\sigma_{\sigma k} - 2\Gamma^\sigma_{\sigma k} + (1-d)\Gamma^q_{kq} + (1-d)\Gamma^j_{kj} = 0,$$

puis, en facteur de $\rho\Phi"$,

$$2\Gamma^\sigma_{\alpha k}\xi^\alpha\xi_\sigma\xi^j\xi_j - \Gamma^\sigma_{\alpha\tau}\xi^\alpha\xi_\sigma\xi^\tau\xi_k - 2\Gamma^q_{k\sigma}\xi^\sigma u\xi_q + \Gamma^j_{q\sigma}\xi^\sigma\xi^q\xi_k\xi_j - 2\Gamma^j_{k\sigma}\xi^\sigma u\xi_j = 0$$

(puisque $\xi^j\xi_j = 2u$) et, enfin, en facteur de $\rho\Phi'$:

$$\begin{aligned}&= 2\Gamma^\sigma_{\sigma k}\xi^j\xi_j - 2\Gamma^\sigma_{\sigma\tau}\xi^\tau\xi_k + (1-d)\xi_q\Gamma^q_{k\sigma}\xi^\sigma + (1-d)\delta_k^q\Gamma^j_{q\sigma}\xi^\sigma\xi_j\\ &\qquad + 2\Gamma^\sigma_{jk}\xi_\sigma\xi^j + 2\Gamma^\sigma_{\alpha k}\xi^\alpha g_{\sigma j}\xi^j + 2d\Gamma^\sigma_{\alpha k}\xi^\alpha\xi_\sigma - \Gamma^\sigma_{j\tau}\xi_\sigma\xi^\tau\delta_k^j - \Gamma^\sigma_{\alpha\tau}\xi^\alpha g_{\sigma k}\xi^\tau - \Gamma^\sigma_{\alpha k}\xi^\alpha\xi_\sigma\\ &\qquad - 2\Gamma^q_{kq}u - 2\Gamma^q_{k\sigma}\xi^\sigma\xi_q + \Gamma^j_{qj}\xi^q\xi_k + \Gamma^j_{j\sigma}\xi^\sigma\xi_k + \Gamma^j_{q\sigma}\xi^\sigma\xi^q g_{kj} - 2\Gamma^j_{kj}u - 2\Gamma^j_{k\sigma}\xi^\sigma\xi_j = 0,\end{aligned}$$

ce qui termine notre calcul.

Enfin, il nous reste à établir la formule permettant de reconstruire g dans (5).

Pour cela, on écrit g^{-1} en tétrade e^i_μ (vierbein) par rapport à la métrique de Minkowski

$$g^{ij}(x) = e^i_\mu(x)e^j_\nu(x)\eta^{\mu\nu},\quad g_{ij}(x)e^i_\mu(x)e^j_\nu(x) = \eta^{\mu\nu},\quad \eta = \mathrm{diag}(-1,1,1,1).$$

On introduit le changement de variable

$$w\in\mathbb{R}^d \to \xi\in\mathbb{R}^d,\quad \xi^i = e^i_\mu(x)w^\mu,\quad d\xi = \sqrt{\text{-det}g^{-1}(x)}\,dw$$

pour déduire de (5)

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}\left(\xi^i A^j(x,\xi) + \xi^j A^i(x,\xi)\right)d\xi &= 2\mathrm{det}g(x)\int_{\mathbb{R}^d}\xi^i\xi^j\,\Phi\left(\frac{g_{\alpha\beta}(x)\xi^\alpha\xi^\beta}{2}\right)d\xi\\ &= 2\sqrt{\text{-det}g(x)}\,e^i_\mu(x)e^j_\nu(x)\int_{\mathbb{R}^d}w^\mu w^\nu\,\Phi\left(\frac{\eta_{\gamma\sigma}w^\gamma w^\sigma}{2}\right)dw\\ &= 2\sqrt{\text{-det}g(x)}\,e^i_\mu(x)e^j_\nu(x)\,\eta^{\mu\nu}\kappa = 2\kappa\sqrt{\text{-det}g(x)}\,g^{ij}(x)\end{aligned}$$

où

$$\kappa = 4\pi\int_{-\infty}^{+\infty}ds\int_0^\infty\left(s^2 - r^2\right)\Phi\left(\frac{s^2 - r^2}{2}\right)r^2\,dr$$

est bien définie (en tant qu'intégrale oscillante) et non nulle, au moins lorsque $\Phi(s) = \cos(s)$ auquel cas $\kappa(4\pi)^{-1}$ se calcule comme partie réelle de l'intégrale gaussienne complexe

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} ds \int_0^{\infty} (s^2 - r^2) \exp\left(\frac{i\,(s^2 - r^2)}{2}\right) r^2 dr \\ &= 2\int_0^{\infty} s^2 \exp\left(\frac{is^2}{2}\right) ds \int_0^{\infty} r^2 \exp\left(\frac{-ir^2}{2}\right) dr - 2\int_0^{\infty} \exp\left(\frac{is^2}{2}\right) ds \int_0^{\infty} r^4 \exp\left(\frac{-ir^2}{2}\right) dr \\ &= 32\pi.\end{aligned}$$

La preuve du théorème 1 est ainsi complète. □

Remerciements

Ce travail a été partiellement effectué dans le cadre du projet ANR-16-CE40-0014 « Maga » et de l'équipe CNRS-INRIA « Mokaplan ». L'auteur remercie les membres de cette équipe, en particulier François-Xavier Vialard, et aussi Hugo Lavenant, pour des discussions et remarques très stimulantes. Il est tout spécialement reconnaissant à Bernard Julia d'avoir remarqué une sérieuse inconséquence dans une version préliminaire de cette note. Il voudrait enfin remercier Jean-Michel Bony pour sa question sur la possibilité d'étendre aux équations d'Einstein la formulation hydrodynamique des équations de Born–Infeld [6] présentée par l'auteur lors d'un séminaire au Centre De Giorgi de Pise en 2004. Cette note est une sorte de réponse tardive à sa question.

References

[1] L. Ambrosio, N. Gigli, G. Savaré, *Gradient flows in metric spaces and in the space of probability measures*, 2nd éd., Lectures in Mathematics, ETH Zürich, Birkhäuser, 2008.

[2] J.-D. Benamou, Y. Brenier, "A computational fluid mechanics solution to the Monge–Kantorovich mass transfer problem", *Numer. Math.* **84** (2000), nº 3, p. 375-393.

[3] R. J. Berman, S. Boucksom, V. Guedj, A. Zeriahi, "A variational approach to complex Monge–Ampère equations", *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.* **117** (2013), p. 179-245.

[4] B. Berndtsson, D. Cordero-Erausquin, B. Klartag, Y. A. Rubinstein, "Complex Legendre duality", *Am. J. Math.* **142** (2020), nº 1, p. 323-339.

[5] Y. Brenier, "Extended Monge-Kantorovich theory", in *Optimal transportation and applications. Lectures given at the C.I.M.E. summer school, Martina Franca, Italy, September 2–8, 2001* (L. A. Caffarelli *et al.*, éds.), Lecture Notes in Mathematics, vol. 1813, Springer, 2003, p. 91-121.

[6] ———, "Hydrodynamic structure of the augmented Born–Infeld equations", *Arch. Ration. Mech. Anal.* **172** (2004), nº 1, p. 65-91.

[7] Y. Brenier, D. Vorotnikov, "On optimal transport of matrix-valued measures", *SIAM J. Math. Anal.* **52** (2020), nº 3, p. 2849-2873.

[8] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle appliquée*, Masson, 1982.

[9] H. Brézis, J.-M. Coron, E. H. Lieb, "Harmonic maps with defects", *Commun. Math. Phys.* **107** (1986), p. 649-705.

[10] E. A. Carlen, J. Maas, "Gradient flow and entropy inequalities for quantum Markov semigroups with detailed balance", *J. Funct. Anal.* **273** (2017), nº 5, p. 1810-1869.

[11] Y. Chen, W. Gangbo, T. T. Georgiou, A. Tannenbaum, "On the matrix Monge–Kantorovich problem", *Eur. J. Appl. Math.* **31** (2020), nº 4, p. 574-600.

[12] D. Christodoulou, S. Klainerman, *The global nonlinear stability of the Minkowski space*, Princeton Mathematical Series, vol. 41, Princeton University Press, 1993.

[13] U. Frisch, S. Matarrese, R. Mohayaee, A. Sobolevski, "A reconstruction of the initial conditions of the Universe by optimal mass transportation", *Nature* **417** (2002), p. 260-262.

[14] A. Guionnet, "First order asymptotics of matrix integrals; a rigorous approach towards the understanding of matrix models", *Commun. Math. Phys.* **244** (2004), nº 3, p. 527-569.

[15] C. Huneau, J. Luk, "Trilinear compensated compactness and Burnett's conjecture in general relativity", https://arxiv.org/abs/1907.10743, 2019.

[16] L. John, C. Villani, "Ricci curvature for metric-measure spaces via optimal transport", *Ann. Math.* **169** (2009), nº 3, p. 903-991.

[17] H. Lavenant, “Harmonic mappings valued in the Wasserstein space”, *J. Funct. Anal.* **277** (2019), nº 3, p. 688-785.
[18] R. J. McCann, “Displacement convexity of Boltzmann’s entropy characterizes the strong energy condition from general relativity”, *Camb. J. Math.* **8** (2020), nº 3, p. 609-681.
[19] A. Mondino, S. Suhr, “An optimal transport formulation of the Einstein equations of general relativity”, https://arxiv.org/abs/1810.13309v1, 2018.
[20] F. Otto, M. Westdickenberg, “Eulerian calculus for the contraction in the Wasserstein distance”, *SIAM J. Math. Anal.* **37** (2005), nº 4, p. 1227-1255.
[21] G. Peyré, L. Chizat, F.-X. Vialard, J. Solomon, “Quantum entropic regularization of matrix-valued optimal transport”, *Eur. J. Appl. Math.* **30** (2019), nº 6, p. 1079-1102.
[22] S. Rachev, L. Rûschendorf, *Mass Transportation Problems. Vol. 1: Theory. Vol. 2: Applications*, Springer Series in Statistics, Springer, 1998.
[23] F. Santambrogio, *Optimal transport for applied mathematicians*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, vol. 87, Birkhäuser/Springer, 2015.
[24] K.-T. Sturm, “On the geometry of metric measure spaces”, *Acta Math.* **196** (2006), nº 1, p. 65-177.
[25] C. Villani, *Topics in optimal transportation*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 58, American Mathematical Society, 2003.