

ANNALES MATHÉMATIQUES



BLAISE PASCAL

HASSAN ASENSOUYIS

Formule des genres pour le noyau sauvage étale

Volume 23, n° 1 (2016), p. 1-20.

<http://ambp.cedram.org/item?id=AMBP_2016__23_1_1_0>

© Annales mathématiques Blaise Pascal, 2016, tous droits réservés.

L'accès aux articles de la revue « Annales mathématiques Blaise Pascal » (<http://ambp.cedram.org/>), implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://ambp.cedram.org/legal/>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

*Publication éditée par le laboratoire de mathématiques
de l'université Blaise-Pascal, UMR 6620 du CNRS
Clermont-Ferrand — France*

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>*

Formule des genres pour le noyau sauvage étale

HASSAN ASENSOUYIS

Abstract

Let M/F be a Galois extension of number fields with Galois group G and p an odd prime. We give an explicit description of the kernel and cokernel of the natural map on étale wild kernels $(WK_{2i-2}^{\text{ét}}M)_G \rightarrow WK_{2i-2}^{\text{ét}}F$.

Introduction

Soit F un corps de nombres et soit p un nombre premier impair. La théorie du corps de classes affirme que le groupe de classes de F est isomorphe au groupe de Galois de l'extension abélienne non-ramifiée maximale de F . Les résultats de Tate [24] ($i = 2$) et Voevodsky [26] montrent que, pour tout $i \geq 2$, le groupe de K -théorie algébrique (tensorisé par \mathbf{Z}_p) $K_{2i-2}F \otimes \mathbf{Z}_p$ contient un sous-groupe fini remarquable $WK_{2i-2}^{\text{ét}}F$ (le noyau sauvage étale [16, 20]) qu'on peut voir comme un analogue "tordu" du groupe de classes. La théorie d'Iwasawa permet de montrer que $WK_{2i-2}^{\text{ét}}F$ peut être réalisé comme groupe de Galois d'une extension abélienne non-ramifiée de l'extension cyclotomique $F(\mu_{p^\infty})$ obtenue par adjonction de toutes les racines p -primaires de l'unité [22].

Soit maintenant M une extension galoisienne finie de F , de groupe de Galois G . Si G est cyclique, la formule des genres de Chevalley permet de relier l'ordre du groupe de classes de M (fixé par G) à celui de F . Concernant le noyau sauvage étale, nous avons, pour $i \geq 2$, un morphisme fonctoriel

$$N_i : (WK_{2i-2}^{\text{ét}}M)_G \longrightarrow WK_{2i-2}^{\text{ét}}F$$

qu'on peut voir comme l'analogie de l'application norme sur les parties p -primaires des groupes de classes d'idéaux

$$N : (A_M)_G \longrightarrow A_F.$$

Mots-clés : K -theory, Galois cohomology, étale wild kernel.

Classification math. : 11R70, 11R34, 19F27.

Comme pour le groupe de classes, une question naturelle est la détermination du noyau et conoyau du morphisme N_i . Dans ce sens, une formule des genres dans le style de Chevalley pour le noyau sauvage étale a été obtenue par Kolster–Movahhedi [14] pour une extension cyclique M/F de degré p et par Griffiths [12] si M/F est cyclique d'exposant une puissance de p . Si $F(\mu_p)$ contient suffisamment de racines p -primaires de l'unité et M/F est une p -extension galoisienne, vérifiant une certaine hypothèse sur la décomposition des places de S , nous avons obtenu dans [1] une formule reliant les ordres de $(WK_{2i-2}^{\text{ét}}M)_G$ et $WK_{2i-2}^{\text{ét}}F$ analogue à celle de Chevalley. Dans la perspective d'un résultat global, nous nous proposons de montrer dans cet article une formule des genres pour le noyau sauvage étale dans le cas d'une extension galoisienne quelconque de corps de nombres.

Soit S un ensemble fini de places de F contenant les places au-dessus du nombre premier p et les places ramifiées dans M/F . Pour tout $i \geq 2$, notons $H_{\mathcal{N}}^1(F, \mathbf{Z}_p(i))$ le noyau de l'homomorphisme naturel

$$H^1(F, \mathbf{Z}_p(i)) \xrightarrow{\oplus_{v \in S} \text{res}_v} \oplus_{v \in S} H^1(F_v, \mathbf{Z}_p(i)) \rightarrow \oplus_{v \in S} \frac{H^1(F_v, \mathbf{Z}_p(i))}{N_{G_v} H^1(M_w, \mathbf{Z}_p(i))},$$

où pour chaque $v \in S$, res_v est le morphisme de restriction

$$\text{res}_v : H^1(F, \mathbf{Z}_p(i)) \longrightarrow H^1(F_v, \mathbf{Z}_p(i)),$$

w est une place de M divisant v et G_v est le groupe de décomposition de la place w . La formule des genres ainsi obtenue, dépend de la congruence mod $|\Delta|$ de l'entier i où $\Delta := \text{Gal}(F(\mu_p)/F)$.

Si $i \not\equiv 1 \pmod{|\Delta|}$, N_i est surjectif et son noyau est explicitement décrit. Nous avons

Théorème. *Soit M/F une extension galoisienne S -ramifiée de corps de nombres, de groupe de Galois G . On suppose que $i \not\equiv 1 \pmod{|\Delta|}$. Alors*

$$\frac{|(WK_{2i-2}^{\text{ét}}M)_G|}{|WK_{2i-2}^{\text{ét}}F|} = \frac{\prod_{v \in S} |H_1(G_v, H^2(M_w, \mathbf{Z}_p(i)))|}{[H^1(F, \mathbf{Z}_p(i)) : H_{\mathcal{N}}^1(F, \mathbf{Z}_p(i))]}$$

où, pour tout $v \in S$, w est une place de M au-dessus de v et G_v est son groupe de décomposition.

Si $i \equiv 1 \pmod{|\Delta|}$, la formule des genres est plus compliquée et fait intervenir un quotient $X_{M/F}^{(i)}$ de $H_2(G, H^0(M, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(1-i))^*)$ difficile à contrôler.

Théorème. Soit M/F une extension galoisienne S -ramifiée de corps de nombres, de groupe de Galois G . On suppose que $i \equiv 1 \pmod{|\Delta|}$. Alors

$$\begin{aligned} & \frac{|(WK_{2i-2}^{\acute{e}t}M)_G|}{|WK_{2i-2}^{\acute{e}t}F|} \\ &= \frac{|X_{M/F}^{(i)} \cdot \prod_{v \in S} |H_1(G_v, H^2(M_w, \mathbf{Z}_p(i)))|}{|H_1(G, H^0(M, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(1-i)^*))| [H^1(F, \mathbf{Z}_p(i)) : H_N^1(F, \mathbf{Z}_p(i))]} \end{aligned}$$

Notons que les facteurs locaux $H_1(G_v, H^2(M_w, \mathbf{Z}_p(i)))$ sont faciles à calculer.

Remerciements. Cet article est un extrait de la thèse que l’auteur a soutenue à l’université Moulay Ismail. Je tiens à remercier mon directeur de thèse J. Assim pour l’aide constante qu’il m’a apportée.

1. Préliminaires

Pour tout corps de nombres F d’anneau des entiers \mathcal{O}_F et tout nombre premier impair p , soit S un ensemble fini de places de F contenant l’ensemble S_p des places au-dessus de p et des places infinies. Notons $G_S = G_S(F)$ le groupe de Galois de l’extension algébrique S -ramifiée maximale de F .

Par passage à la limite projective dans la suite exacte de Poitou-Tate, nous avons la suite exacte

$$H^2(G_S, \mathbf{Z}_p(i)) \rightarrow \bigoplus_{v \in S} H^2(F_v, \mathbf{Z}_p(i)) \rightarrow H^0(F, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(1-i))^* \rightarrow 0,$$

où, pour un groupe A , A^* est le dual de Pontryagin de A . Si $i = 1$, le noyau de l’homomorphisme de localisation

$$\text{Loc} : H^2(G_S(F), \mathbf{Z}_p(i)) \rightarrow \bigoplus_{v \in S} H^2(F_v, \mathbf{Z}_p(i))$$

n’est autre que la partie p -primaire du groupe des S -classes de F , *i.e.* le groupe de classes modulo les classes des diviseurs contenus dans S . Notons X_∞ le groupe de Galois de la pro- p -extension abélienne de $F(\mu_{p^\infty})$, non-ramifiée et décomposant totalement toutes les places au-dessus de p , et $G_\infty = G_\infty(F) = \text{Gal}(F(\mu_{p^\infty})/F)$. Pour $i \neq 1$, le noyau de l’homomorphisme de localisation Loc est isomorphe à $X_\infty(i-1)_{G_\infty}$ et est donc indépendant de S contenant S_p ([22]). En particulier, $WK_{2i-2}^{\acute{e}t}F$ peut être réalisé comme groupe de Galois d’une extension non-ramifiée de $F(\mu_{p^\infty})$.

- (i) Pour $i = 2$, les résultats de Tate [24] montrent que ce noyau est isomorphe à la partie p -primaire du noyau sauvage classique [18]. Comme conséquence de la conjecture de Bloch-Kato motivique montrée par Voevodsky [26], on sait dorénavant que les caractères de Chern p -adiques introduits par Soulé et Dwyer-Friedlander [23, 10]

$$ch_{i,k}^{(p)} : K_{2i-k} \otimes \mathbf{Z}_p \rightarrow H^k(G_S(F), \mathbf{Z}_p(i))$$

sont des isomorphismes pour $i \geq 2$ et $k = 1, 2$. Par analogie avec le cas $i = 2$, le noyau de l'homomorphisme de localisation Loc a été baptisé noyau sauvage étale par Kolster [16] et Nguyen Quang Do [20] et est noté $WK_{2i-2}^{\text{ét}} F$. Les résultats de Borel sur la finitude des groupes de K -théorie algébrique $K_{2i-2} \otimes \mathbf{Z}_p$, $i \geq 2$, entraînent en particulier que le noyau sauvage étale $WK_{2i-2}^{\text{ét}} F$ est fini pour tout entier $i \geq 2$.

- (ii) Pour $i \leq 0$, la finitude du noyau de l'homomorphisme de localisation ci-dessus est conjecturale [11, 22]. Le cas $i = 0$ correspond à la conjecture de Leopoldt.

Le noyau sauvage étale peut donc être considéré comme un analogue tordu du groupe de classes (tensorisé par \mathbf{Z}_p) et son étude est étroitement liée à l'arithmétique du corps F (voir e.g. [24, 15, 14, 21, 4])

Soit maintenant M/F une extension galoisienne S -ramifiée de corps de nombres, de groupe de Galois G . Nous avons deux applications de corestriction et restriction

$$\begin{aligned} \text{cor} : H^2(G_S(M), \mathbf{Z}_p(i)) &\rightarrow H^2(G_S(F), \mathbf{Z}_p(i)) \\ \text{et res} : H^2(G_S(F), \mathbf{Z}_p(i)) &\rightarrow H^2(G_S(M), \mathbf{Z}_p(i))^G \end{aligned}$$

pour tout entier $i \geq 2$. Si $i = 2$, ces applications correspondent respectivement à l'homomorphisme transfert et extension pour le K_2 [18]. Il est bien connu que le noyau et le conoyau de l'homomorphisme res sont décrits à l'aide de la G -cohomologie de $H^1(G_S(M), \mathbf{Z}_p(i))$:

$$\begin{aligned} \ker(\text{res}) &\cong H^1(G, H^1(G_S(M), \mathbf{Z}_p(i))) \\ \text{et coker}(\text{res}) &\cong H^2(G, H^1(G_S(M), \mathbf{Z}_p(i))) \end{aligned}$$

(voir e.g. [13, 9, 17, 14]), et que la corestriction induit un isomorphisme, noté encore cor,

$$H^2(G_S(M), \mathbf{Z}_p(i))_G \xrightarrow{\sim} H^2(G_S(F), \mathbf{Z}_p(i))$$

FORMULE DES GENRES POUR LE NOYAU SAUVAGE ÉTALE

(voir e.g. [17]). Des résultats analogues sont valables dans le cas d'une extension de corps locaux. Notons $\tilde{\Theta}_{v \in S} H^2(F_v, \mathbf{Z}_p(i))$ le noyau de l'homomorphisme

$$\bigoplus_{v \in S} H^2(F_v, \mathbf{Z}_p(i)) \rightarrow H^0(F, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(1-i))^*.$$

Nous avons alors, pour tout entier $i \geq 2$, une suite exacte

$$0 \rightarrow WK_{2i-2}^{\text{ét}} F \rightarrow H^2(G_S, \mathbf{Z}_p(i)) \rightarrow \tilde{\Theta}_{v \in S} H^2(F_v, \mathbf{Z}_p(i)) \rightarrow 0. \quad (1.1)$$

Les homomorphismes de restriction et de corestriction induisent respectivement des morphismes

$$\begin{aligned} N_i &: (WK_{2i-2}^{\text{ét}} M)_G \longrightarrow WK_{2i-2}^{\text{ét}} F \\ \text{et } f_i &: WK_{2i-2}^{\text{ét}} F \longrightarrow (WK_{2i-2}^{\text{ét}} M)^G. \end{aligned}$$

Les homomorphismes N_i et f_i sont les analogues respectifs des morphismes sur les p -parties des groupes de classes d'idéaux

$$N : (A_M)_G \longrightarrow A_F \text{ et } f : A_F \longrightarrow A_M^G$$

induits respectivement par la norme et l'extension des idéaux.

Nous terminons cette section par introduire les notations usuelles qui seront utilisées dans tout le texte :

- F^\bullet le groupe multiplicatif de F ;
- μ_{p^n} le groupe des racines p^n -ièmes de l'unité, pour tout $n \geq 0$;
- μ_{p^∞} le groupe de toutes les racines p -primaires de l'unité ;
- $\mu(F) = \mu_{p^\infty}(F)$ le groupe des racines p -primaires de l'unité contenues dans F ;
- S_p l'ensemble des places au-dessus de p et des places infinies ;
- M une extension galoisienne finie de F ;
- G le groupe de Galois $\text{Gal}(M/F)$;
- S un ensemble fini de places de F , contenant S_p et les places de F ramifiées dans M ;
- $G_S = G_S(F)$ le groupe de Galois de l'extension algébrique S -ramifiée maximale de F ;
- F_∞ la \mathbf{Z}_p -extension cyclotomique de F ;
- Γ le groupe de Galois $\text{Gal}(F_\infty/F)$;
- L_∞ la pro- p -extension abélienne non-ramifiée maximale de F_∞ , décomposant totalement toutes les places de F_∞ au-dessus de p ;

- $X_\infty(F)$ le groupe de Galois $\text{Gal}(L_\infty/F_\infty)$;
- Δ le groupe de Galois $\text{Gal}(F(\mu_p)/F) \simeq \text{Gal}(F(\mu_{p^\infty})/F_\infty)$;
- G_∞ le groupe de Galois $\text{Gal}(F(\mu_{p^\infty})/F)$;
- H le groupe de Galois $\text{Gal}(M_\infty/F_\infty)$;
- $\overline{H} = H^{ab} \otimes \mathbf{Z}_p$ la partie p -primaire de l'abélianisé de H .

Si v est une place finie de F et w une place de M au-dessus de v , nous notons

- $F_{v,\infty}$ la \mathbf{Z}_p -extension cyclotomique de F_v ;
- Γ_v le groupe de Galois $\text{Gal}(F_{v,\infty}/F_v)$;
- Γ_w le groupe de Galois $\text{Gal}(M_{w,\infty}/M_w)$;
- G_v le groupe de Galois $\text{Gal}(M_w/F_v)$;
- Δ_v le groupe de Galois $\text{Gal}(F_v(\mu_p)/F_v) \simeq \text{Gal}(F_v(\mu_{p^\infty})/F_{v,\infty})$;
- H_v le groupe de Galois $\text{Gal}(M_{w,\infty}/F_{v,\infty})$;
- $\overline{H}_v = H_v^{ab} \otimes \mathbf{Z}_p$ la partie p -primaire de l'abélianisé de H_v .

Enfin, si A est un groupe abélien quelconque et $n \geq 1$, notons ${}_nA$ le noyau de la multiplication par n et A/n le conoyau. Si un groupe G opère sur A , A^G est le groupe des invariants par G et A_G est le groupe des co-invariants.

2. Formule des genres

Le but de cette section est d'expliciter le noyau et le conoyau de l'homomorphisme naturel

$$N_i : (WK_{2i-2}^{\text{ét}}M)_G \longrightarrow WK_{2i-2}^{\text{ét}}F.$$

Par homologie, la suite exacte (1.1) donne un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \rightarrow & (WK_{2i-2}^{\text{ét}}M)_G & \rightarrow & H^2(G_S(M), \mathbf{Z}_p(i))_G & \rightarrow & (\tilde{\Theta}_{v \in S, w|v} H^2(M_w, \mathbf{Z}_p(i)))_G \rightarrow 0 \\ & & \downarrow N_i & & \downarrow \text{cor} & & \downarrow N'_i \\ 0 & \rightarrow & WK_{2i-2}^{\text{ét}}F & \rightarrow & H^2(G_S(F), \mathbf{Z}_p(i)) & \rightarrow & \tilde{\Theta}_{v \in S} H^2(F_v, \mathbf{Z}_p(i)) \rightarrow 0 \end{array}$$

Ainsi

$$\text{coker} N_i \simeq \ker N'_i$$

$$\text{et } \ker N_i \simeq \text{coker}(H_1(G, H^2(G_S(M), \mathbf{Z}_p(i))))$$

$$\xrightarrow{\tilde{\alpha}} H_1(G, \tilde{\Theta}_{w|v, v \in S} H^2(M_w, \mathbf{Z}_p(i))).$$

Explicitons d'abord certains groupes d'homologie. Nous utiliserons souvent la version suivante du lemme de Tate

Lemme (de Tate). *Soit F un corps local ou global et soit G_∞ le groupe de Galois $\text{Gal}(F(\mu_{p^\infty})/F)$. Alors, pour $k \geq 1$ et pour tout entier $j \neq 0$*

$$H^k(G_\infty, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(j)) = 0,$$

(voir e.g. [22]).

Lemme 2.1. *Soit $i \neq 1$. Alors*

- $H_1(G, H^0(M, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(1-i))^*) \cong \overline{H}(i-1)_\Gamma$ si $i \equiv 1 \pmod{|\Delta|}$ et 0 sinon.
- $H_1(G_v, H^2(M_w, \mathbf{Z}_p(i))) \cong \overline{H}_v(i-1)_{\Gamma_v}$ si $i \equiv 1 \pmod{|\Delta_v|}$ et 0 sinon.

Démonstration. Pour toute place v de F , soit w une place de M au-dessus de v . Par le théorème de dualité locale, on a

$$H^2(M_w, \mathbf{Z}_p(i)) \cong H^0(M_w, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(1-i))^*.$$

Si $i \not\equiv 1 \pmod{|\Delta_v|}$, $H^2(M_w, \mathbf{Z}_p(i))$ est donc nul et on n'a à traiter que le cas $i \equiv 1 \pmod{|\Delta_v|}$. Utilisant le théorème de dualité pour la cohomologie des groupes finis, il vient

$$H_1(G_v, H^2(M_w, \mathbf{Z}_p(i))) \cong H^1(G_v, H^0(M_w, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(1-i)))^*.$$

Par inflation-restriction, on a les deux suites exactes

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^1(G_v, H^0(\Gamma_w, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(1-i))) &\rightarrow H^1(M_{w,\infty}/F_v, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(1-i)) \\ &\rightarrow H^1(\Gamma_w, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(1-i))^{G_v} = 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} 0 = H^1(\Gamma_v, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(1-i)) &\rightarrow H^1(M_{w,\infty}/F_v, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(1-i)) \\ &\rightarrow H^1(H_v, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(1-i))^{\Gamma_v} \rightarrow H^2(\Gamma_v, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(1-i)) = 0 \end{aligned}$$

où la nullité des groupes $H^j(\Gamma_w, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(1-i))$ et $H^j(\Gamma_v, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(1-i))$, $j = 1, 2$, découle du lemme de Tate. On en déduit que

$$H^1(G_v, H^0(\Gamma_w, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(1-i))) \cong H^1(H_v, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(1-i))^{\Gamma_v}.$$

Puisque H_v opère trivialement sur $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(1-i)$,

$$H^1(G_v, H^0(M_w, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(1-i))) \cong \text{Hom}(H_v^{ab} \otimes \mathbf{Z}_p(i-1)_{\Gamma_v}, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p),$$

ou encore

$$H_1(G_v, H^2(M_w, \mathbf{Z}_p(i))) \cong \overline{H}_v(i-1)_{\Gamma_v}.$$

De même :

$$H_1(G, H^0(M, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(1-i))^*) \cong \overline{H}(i-1)_\Gamma. \quad \square$$

Pour déterminer le conoyau de l'homomorphisme

$$N_i : (WK_{2i-2}^{\text{ét}}M)_G \rightarrow WK_{2i-2}^{\text{ét}}F,$$

le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} (\tilde{\Theta}_{w|v, v \in S} H^2(M_w, \mathbf{Z}_p(i)))_G & \xrightarrow{N'_i} & \tilde{\Theta}_{v \in S} H^2(F_v, \mathbf{Z}_p(i)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\oplus_{w|v, v \in S} H^2(M_w, \mathbf{Z}_p(i)))_G & \xrightarrow{\sim} & \oplus_{v \in S} H^2(F_v, \mathbf{Z}_p(i)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (H^0(M, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(1-i))^*)_G & \xrightarrow{\sim} & H^0(F, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(1-i))^* \end{array}$$

montre que

$$\begin{aligned} \text{coker } N_i &\cong \ker N'_i \\ &\cong \text{coker}(H_1(G, \oplus_{w|v, v \in S} H^2(M_w, \mathbf{Z}_p(i))) \\ &\quad \xrightarrow{\theta} H_1(G, H^0(M, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(1-i))^*)) \\ &\cong \text{coker}(\oplus_{v \in S} \overline{H}_v(i-1)_{\Gamma_v} \rightarrow \overline{H}(i-1)_\Gamma) \\ &\cong \text{Gal}(L_\infty \cap M_\infty / F_\infty)(i-1)_\Gamma. \end{aligned}$$

Nous avons ainsi une description du conoyau de N_i :

Proposition 2.2. *Soit M/F une extension galoisienne de corps de nombres. Alors*

(1) *Si $i \equiv 1 \pmod{|\Delta|}$,*

$$\text{coker } N_i \cong \text{Gal}(L_\infty \cap M_\infty / F_\infty)(i-1)_\Gamma.$$

(2) *L'homomorphisme N_i est surjectif exactement dans les cas suivants :*

- $i \not\equiv 1 \pmod{|\Delta|}$
- $i \equiv 1 \pmod{|\Delta|}$ et $L_\infty \cap M_\infty = F_\infty$.

La description du noyau est beaucoup plus compliquée, notamment dans le cas $i \equiv 1 \pmod{|\Delta|}$. Rappelons que

$$\begin{aligned} \ker N_i &\cong \text{coker}(\tilde{\alpha} : H_1(G, H^2(G_S(M), \mathbf{Z}_p(i))) \\ &\quad \rightarrow H_1(G, \tilde{\Theta}_{w|v, v \in S} H^2(M_w, \mathbf{Z}_p(i))))). \end{aligned}$$

Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 & H_2(G, \oplus_{w|v, v \in S} H^2(M_w, \mathbf{Z}_p(i))) & \\
 & \downarrow \kappa & \\
 & H_2(G, H^0(M, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(1-i))^*) & \\
 & \downarrow & \\
 H_1(G, H^2(G_S(M), \mathbf{Z}_p(i))) & \xrightarrow{\tilde{\alpha}} & H_1(G, \tilde{\oplus}_{w|v, v \in S} H^2(M_w, \mathbf{Z}_p(i))) \quad (2.1) \\
 \downarrow \wr & & \downarrow \\
 H_1(G, H^2(G_S(M), \mathbf{Z}_p(i))) & \xrightarrow{\alpha} & H_1(G, \oplus_{w|v, v \in S} H^2(M_w, \mathbf{Z}_p(i))) \\
 & & \downarrow \theta \\
 & & H_1(G, H^0(M, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(1-i))^*)
 \end{array}$$

Une chasse dans ce diagramme donne la suite exacte

$$\begin{aligned}
 0 \longrightarrow \ker \tilde{\alpha} \longrightarrow \ker \alpha \longrightarrow \operatorname{coker} \kappa \\
 \longrightarrow \operatorname{coker} \tilde{\alpha} \longrightarrow \operatorname{coker} \alpha \longrightarrow \operatorname{Im} \theta \longrightarrow 0. \quad (2.2)
 \end{aligned}$$

Posons

$$X_{M/F}^{(i)} = \operatorname{Im}(\operatorname{coker} \kappa \longrightarrow \operatorname{coker} \tilde{\alpha})$$

En particulier

$$|X_{M/F}^{(i)}| \leq |H_2(G, H^0(M, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(1-i))^*)|.$$

Proposition 2.3. *Soit M/F une extension galoisienne S -ramifiée de corps de nombres, de groupe de Galois G . Pour tout $i \geq 2$,*

$$\frac{|(WK_{2i-2}^{\acute{e}t} M)_G|}{|WK_{2i-2}^{\acute{e}t} F|} = \frac{|X_{M/F}^{(i)}| \cdot |\operatorname{coker} \alpha|}{|H_1(G, H^0(M, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(1-i))^*)|}.$$

Démonstration. La suite exacte (2.2) et la définition de $X_{M/F}^{(i)}$ donnent la suite exacte

$$0 \longrightarrow X_{M/F}^{(i)} \longrightarrow \operatorname{coker} \tilde{\alpha} \longrightarrow \operatorname{coker} \alpha \longrightarrow \operatorname{Im} \theta \longrightarrow 0, \quad (2.3)$$

avec

$$\ker N_i \cong \operatorname{coker} \tilde{\alpha}.$$

— Si $i \not\equiv 1 \pmod{|\Delta|}$, l'homomorphisme N_i est surjectif (Proposition 2.2) et les morphismes θ et κ sont nuls, donc

$$X_{M/F}^{(i)} = 0 \text{ et } \operatorname{Im} \theta = 0.$$

Par suite

$$\ker N_i \cong \text{coker } \alpha,$$

d'où

$$\frac{|(WK_{2i-2}^{\text{ét}}M)_G|}{|WK_{2i-2}^{\text{ét}}F|} = |\text{coker } \alpha|.$$

— Si $i \equiv 1 \pmod{|\Delta|}$, la suite exacte (2.3) ci-dessus donne

$$|\ker N_i| = \frac{|X_{M/F}^{(i)}| \cdot |\text{coker } \alpha|}{|\text{Im } \theta|}.$$

De plus, nous avons

$$|\text{Im } \theta| \cdot |\text{coker } \theta| = |H_1(G, H^0(M, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(1-i))^*)|.$$

D'où

$$\frac{|(WK_{2i-2}^{\text{ét}}M)_G|}{|WK_{2i-2}^{\text{ét}}F|} = \frac{|X_{M/F}^{(i)}| \cdot |\text{coker } \alpha|}{|H_1(G, H^0(M, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(1-i))^*)|}. \quad \square$$

Nous allons maintenant expliciter le conoyau $\text{coker } \alpha$. Nous savons que

$$H_1(G, \oplus_{w|v, v \in S} H^2(M_w, \mathbf{Z}_p(i))) \cong \oplus_{v \in S} H_1(G_v, H^2(M_w, \mathbf{Z}_p(i)))$$

où pour toute place $v \in S$, on a choisi une place w de M au-dessus de v et G_v est le groupe de décomposition de w . Les applications de restriction naturelles

$$\begin{aligned} H^1(G_S(M), \mathbf{Z}_p(i)) &\longrightarrow H^1(M_w, \mathbf{Z}_p(i)) \\ &\text{et } H^2(G_S(M), \mathbf{Z}_p(i)) \longrightarrow H^2(M_w, \mathbf{Z}_p(i)) \end{aligned}$$

donnent un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H_1(G, H^2(G_S(M), \mathbf{Z}_p(i))) & \xrightarrow{\alpha} & \oplus_{v \in S} H_1(G_v, H^2(M_w, \mathbf{Z}_p(i))) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ \widehat{H}^0(G, H^1(M, \mathbf{Z}_p(i))) & \longrightarrow & \oplus_{v \in S} \widehat{H}^0(G_v, H^1(M_w, \mathbf{Z}_p(i))) \end{array}$$

où les morphismes verticaux sont donnés par un cup-produit et sont des isomorphismes ([9, Proposition 3.1]).

Par suite

$$\text{coker } \alpha \cong \text{coker}(\widehat{H}^0(G, H^1(M, \mathbf{Z}_p(i))) \longrightarrow \oplus_{v \in S} \widehat{H}^0(G_v, H^1(M_w, \mathbf{Z}_p(i))))).$$

FORMULE DES GENRES POUR LE NOYAU SAUVAGE ÉTALE

Puisque les groupes $H^1(M, \mathbf{Z}_p(i))$ et $H^1(M_w, \mathbf{Z}_p(i))$ vérifient la descente galoisienne (voir e.g. [17]), on obtient

$$\text{coker } \alpha \cong \text{coker} \left(\frac{H^1(F, \mathbf{Z}_p(i))}{N_G(H^1(M, \mathbf{Z}_p(i)))} \longrightarrow \bigoplus_{v \in S} \frac{H^1(F_v, \mathbf{Z}_p(i))}{N_{G_v}(H^1(M_w, \mathbf{Z}_p(i)))} \right) \quad (*).$$

D'autre part, pour chaque $a \in H^1(F, \mathbf{Z}_p(i))$ et tout $v \in S$, notons $a_v = \text{res}_v(a)$ son image par le morphisme de restriction

$$\text{res}_v : H^1(F, \mathbf{Z}_p(i)) \longrightarrow H^1(F_v, \mathbf{Z}_p(i)).$$

Nous avons donc un homomorphisme naturel

$$H^1(F, \mathbf{Z}_p(i)) \xrightarrow{\bigoplus_{v \in S} \text{res}_v} \bigoplus_{v \in S} H^1(F_v, \mathbf{Z}_p(i)) \rightarrow \bigoplus_{v \in S} \frac{H^1(F_v, \mathbf{Z}_p(i))}{N_{G_v} H^1(M_w, \mathbf{Z}_p(i))}.$$

Définition. On définit $H_{\mathcal{N}}^1(F, \mathbf{Z}_p(i))$ comme étant l'ensemble des éléments $a \in H^1(F, \mathbf{Z}_p(i))$, tel que pour toute place $v \in S$, $a_v \in N_{G_v}(H^1(M_w, \mathbf{Z}_p(i)))$. En d'autres termes, $H_{\mathcal{N}}^1(F, \mathbf{Z}_p(i))$ est le noyau de l'homomorphisme

$$H^1(F, \mathbf{Z}_p(i)) \longrightarrow \bigoplus_{v \in S} \frac{H^1(F_v, \mathbf{Z}_p(i))}{N_{G_v} H^1(M_w, \mathbf{Z}_p(i))},$$

où pour chaque $v \in S$, w est une place de M divisant v et G_v est son groupe de décomposition.

Nous avons une formule des genres explicite pour le noyau sauvage étale :

Théorème 2.4. *Soit M/F une extension galoisienne S -ramifiée de corps de nombres, de groupe de Galois G .*

(1) *On suppose que $i \equiv 1 \pmod{|\Delta|}$. Alors*

$$\frac{|(WK_{2i-2}^{\acute{e}t} M)_G|}{|WK_{2i-2}^{\acute{e}t} F|} = \frac{|X_{M/F}^{(i)}| \cdot \prod_{v \in S} |\overline{H}_v(i-1)_{\Gamma_v}|}{|\overline{H}(i-1)_{\Gamma}| [H^1(F, \mathbf{Z}_p(i)) : H_{\mathcal{N}}^1(F, \mathbf{Z}_p(i))]}.$$

(2) *On suppose que $i \not\equiv 1 \pmod{|\Delta|}$. Alors*

$$\frac{|(WK_{2i-2}^{\acute{e}t} M)_G|}{|WK_{2i-2}^{\acute{e}t} F|} = \frac{\prod_{v \in S^{(i)}} |\overline{H}_v(i-1)_{\Gamma_v}|}{[H^1(F, \mathbf{Z}_p(i)) : H_{\mathcal{N}}^1(F, \mathbf{Z}_p(i))]},$$

où $S^{(i)} = \{v \in S; [F_v(\mu_p) : F_v] \text{ divise } (i-1)\}$.

Démonstration. Considérons l'homomorphisme

$$\alpha : H_1(G, H^2(G_S(M), \mathbf{Z}_p(i))) \longrightarrow \bigoplus_{v \in S} H_1(G_v, H^2(M_w, \mathbf{Z}_p(i))),$$

on a

$$|\text{coker } \alpha| = \frac{\prod_{v \in S} |H_1(G_v, H^2(M_w, \mathbf{Z}_p(i)))|}{|\text{Im } \alpha|}.$$

D'autre part, par l'isomorphisme (*) ci-dessus, on a

$$\text{Im } \alpha \cong H^1(F, \mathbf{Z}_p(i)) / H_{\mathcal{N}}^1(F, \mathbf{Z}_p(i)).$$

La proposition 2.3 et le lemme 2.1 permettent alors de conclure. \square

Supposons maintenant que G est d'ordre un entier $m \geq 2$. Alors

coker α

$$\cong \text{coker} \left(\frac{H^1(F, \mathbf{Z}_p(i))/m}{N_G(H^1(M, \mathbf{Z}_p(i))/m)} \longrightarrow \bigoplus_{v \in S} \frac{H^1(F_v, \mathbf{Z}_p(i))/m}{N_{G_v}(H^1(M_w, \mathbf{Z}_p(i))/m)} \right).$$

Proposition 2.5. *Pour tout $v \in S$, la surjection canonique*

$$\frac{H^1(F_v, \mathbf{Z}_p(i))/m}{N_{G_v}(H^1(M_w, \mathbf{Z}_p(i))/m)} \rightarrow \frac{H^1(F_v, \mathbf{Z}_p(i))/m}{H^1(F_v, \mathbf{Z}_p(i))/m \cap N_{G_v}(H^1(M_w, \mathbf{Z}_p/m(i)))}$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} H^1(M_w, \mathbf{Z}_p(i))/m & \hookrightarrow & H^1(M_w, \mathbf{Z}_p/m(i)) & \longrightarrow & {}_m H^2(M_w, \mathbf{Z}_p(i)) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \phi_1 & & \downarrow \phi_2 & & \downarrow \phi_3 \\ H^1(F_v, \mathbf{Z}_p(i))/m & \hookrightarrow & H^1(F_v, \mathbf{Z}_p/m(i)) & \longrightarrow & {}_m H^2(F_v, \mathbf{Z}_p(i)) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où les morphismes ϕ_1 , ϕ_2 et ϕ_3 sont induits par la norme.

Pour prouver l'injection $\text{coker } \phi_1 \hookrightarrow \text{coker } \phi_2$, nous allons procéder en trois étapes :

(1) Si $F_v = F_{v, \infty} \cap M_w$ alors,

$${}_m H^2(M_w, \mathbf{Z}_p(i)) \cong {}_m H^2(F_v, \mathbf{Z}_p(i))$$

puisque l'homomorphisme ϕ_3 est l'élévation à la puissance $[F_{v, \infty} \cap M_w : F_v]$ ([12, Lemma 4.2.1]). Il s'ensuit que $\text{coker } \phi_1 \cong \text{coker } \phi_2$.

(2) Si $M_w \subset F_{v,\infty}$ alors

$$\begin{aligned} \text{coker}\phi_1 &= \frac{H^1(F_v, \mathbf{Z}_p(i))/m}{N_{G_v}(H^1(M_w, \mathbf{Z}_p(i))/m)} \\ &\cong H_1(G_v, H^2(M_w, \mathbf{Z}_p(i))) \\ &= 0 \end{aligned}$$

par le lemme 2.1.

(3) Plus généralement, soit $M_v = F_{v,\infty} \cap M_w$. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} H^1(M_w, \mathbf{Z}_p(i))/m & \hookrightarrow & H^1(M_w, \mathbf{Z}_p/m(i)) & \twoheadrightarrow & {}_m H^2(M_w, \mathbf{Z}_p(i)) \\ \downarrow \phi'_1 & & \downarrow \phi'_2 & & \downarrow \phi'_3 \\ H^1(M_v, \mathbf{Z}_p(i))/m & \hookrightarrow & H^1(M_v, \mathbf{Z}_p/m(i)) & \twoheadrightarrow & {}_m H^2(M_v, \mathbf{Z}_p(i)) \\ \downarrow \phi''_1 & & \downarrow \phi''_2 & & \downarrow \phi''_3 \\ H^1(F_v, \mathbf{Z}_p(i))/m & \hookrightarrow & H^1(F_v, \mathbf{Z}_p/m(i)) & \twoheadrightarrow & {}_m H^2(F_v, \mathbf{Z}_p(i)). \end{array}$$

On a $\phi_j = \phi''_j \circ \phi'_j$ pour $j = 1, 2, 3$.

Alors $\text{coker}\phi'_1 \cong \text{coker}\phi'_2$ (cas 1) et $\text{coker}\phi''_1 = 0$ (cas 2). Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \text{coker}\phi'_1 & \longrightarrow & \text{coker}\phi_1 & \twoheadrightarrow & \text{coker}\phi''_1 = 0 \\ \downarrow \wr & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{coker}\phi'_2 & \longrightarrow & \text{coker}\phi_2 & \twoheadrightarrow & \text{coker}\phi''_2 \end{array}$$

montre alors que $\text{coker}\phi_1$ s'injecte dans $\text{coker}\phi_2$. \square

Pour tout entier $m \geq 2$, notons

$$H_{\mathcal{N}}^{1,m}(F, \mathbf{Z}_p(i)) := \ker(H^1(F, \mathbf{Z}_p(i))/m) \longrightarrow \bigoplus_{v \in S} \frac{H^1(F_v, \mathbf{Z}_p(i))/m}{N_{G_v} H^1(M_w, \mathbf{Z}_p/m(i))}.$$

Grâce à la proposition 2.5, le théorème 2.4 ci-dessus s'énonce

Théorème 2.6. *Soit M/F une extension galoisienne S -ramifiée de corps de nombres, de groupe de Galois G d'ordre m .*

(1) *On suppose que $i \equiv 1 \pmod{|\Delta|}$. Alors*

$$\frac{|(WK_{2i-2}^{\acute{e}t} M)_G|}{|(WK_{2i-2}^{\acute{e}t} F)|} = \frac{|X_{M/F}^{(i)}| \cdot \prod_{v \in S} |\overline{H}_v(i-1)_{\Gamma_v}|}{|\overline{H}(i-1)_{\Gamma}| |H^1(F, \mathbf{Z}_p(i))/m : H_{\mathcal{N}}^{1,m}(F, \mathbf{Z}_p(i))|}.$$

(2) On suppose que $i \not\equiv 1 \pmod{|\Delta|}$. Alors

$$\frac{|(WK_{2i-2}^{\acute{e}t}M)_G|}{|WK_{2i-2}^{\acute{e}t}F|} = \frac{\prod_{v \in S^{(i)}} |\overline{H}_v(i-1)_{\Gamma_v}|}{[H^1(F, \mathbf{Z}_p(i))/m : H_{\mathcal{N}}^{1,m}(F, \mathbf{Z}_p(i))]},$$

où $S^{(i)} = \{v \in S; [F_v(\mu_p) : F_v] \text{ divise } (i-1)\}$.

Si $i \equiv 1 \pmod{|\Delta|}$, la formule des genres ci-dessus fait intervenir l'ordre de $X_{M/F}^{(i)}$ qui semble difficile à contrôler. Faisons l'hypothèse simplificatrice :

(\mathcal{H}) L'homomorphisme

$$\begin{aligned} \kappa : H_2(G, \bigoplus_{w|v, v \in S} H^2(M_w, \mathbf{Z}_p(i))) \\ \longrightarrow H_2(G, H^0(M, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(1-i))^*) \end{aligned}$$

est surjectif.

L'hypothèse (\mathcal{H}) entraîne en particulier que $X_{M/F}^{(i)} = 0$ et que N_i est surjectif.

Remarque 2.7. L'hypothèse (\mathcal{H}) est vérifiée par exemple s'il existe une place v_0 de F telle que

(1) $H^0(F, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(i-1)) \cong H^0(F_{v_0}, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(i-1))$ et

(2) v_0 divise p et v_0 ne se décompose pas, ou v_0 est totalement et modérément ramifiée dans l'extension M/F .

Si M/F est cyclique, la validité de l'hypothèse (\mathcal{H}) est exactement équivalente à celle des conditions (1) et (2).

Avec les notations du théorème ci-dessus, nous avons

Corollaire 2.8. *Soit M/F une extension galoisienne S -ramifiée de corps de nombres, de groupe de Galois G d'ordre m . Supposons que $i \equiv 1 \pmod{|\Delta|}$ et que l'hypothèse (\mathcal{H}) est vérifiée. Alors*

$$\frac{|(WK_{2i-2}^{\acute{e}t}M)_G|}{|WK_{2i-2}^{\acute{e}t}F|} = \frac{\prod_{v \in S} |\overline{H}_v(i-1)_{\Gamma_v}|}{|\overline{H}(i-1)_{\Gamma}| \cdot [H^1(F, \mathbf{Z}_p(i))/m : H_{\mathcal{N}}^{1,m}(F, \mathbf{Z}_p(i))]}.$$

FORMULE DES GENRES POUR LE NOYAU SAUVAGE ÉTALE

Supposons toujours que G est d'ordre m et soit $r := \text{ord}_p(m)$. Si $\mu_{p^r} \subseteq E := F(\mu_p)$, où μ_{p^r} est le groupe des racines p^r -ième de l'unité. La suite exacte

$$0 \rightarrow H^1(F, \mathbf{Z}_p(i))/m \rightarrow H^1(F, \mathbf{Z}_p/m(i)) \rightarrow {}_m H^2(F, \mathbf{Z}_p(i)) \rightarrow 0$$

et la théorie de Kummer, montrent qu'il existe un sous-groupe $D_F^{(i,m)}$ de E^\bullet tel que

$$H^1(F, \mathbf{Z}_p(i))/m \cong D_F^{(i,m)} / E^{\bullet p^r} (i-1)$$

(voir e.g. [11, 6, 7, 25] où m est une puissance de p). Par analogie avec le cas classique $i = 2$ [24], le groupe $D_F^{(i,m)}$ est appelé noyau de Tate généralisé.

Puisque $\mu_{p^r} \subseteq E$, p^r tue \overline{H}_v et \overline{H} ,

$$\overline{H}_v(i-1)_{\Gamma_v} \cong (\overline{H}_v)_{\Gamma_v}(i-1) \quad \text{si } i \equiv 1 \pmod{|\Delta_v|}$$

est donc isomorphe au groupe de Galois $\text{Gal}(M_{w,\infty}^{ab}/F_{v,\infty})(i-1)$ où $M_{w,\infty}^{ab}$ est la pro- p -extension abélienne maximale de $F_{v,\infty}$ contenue dans $M_{w,\infty}$. De même, si $i \equiv 1 \pmod{|\Delta|}$

$$\overline{H}(i-1)_{\Gamma} \cong \text{Gal}(M_{\infty}^{ab}/F_{\infty})(i-1)$$

où M_{∞}^{ab} est la pro- p -extension abélienne maximale de F_{∞} contenue dans M_{∞} . Supposons vérifiées les hypothèses (1) et (2) de la remarque 2.7. Alors, d'une part l'hypothèse (\mathcal{H}) est réalisée et d'autre part, d'après [8, p. 198-199], on sait que s'il existe une place v_0 qui ne se décompose pas dans M/F , un élément de F^\bullet est une norme globale si et seulement s'il est norme locale, c'est-à-dire que le principe de Hasse est vérifié. La formule des genres s'énonce :

Corollaire 2.9. *Soit M/F une extension galoisienne S -ramifiée de corps de nombres, de groupe de Galois G d'ordre m . On suppose que $\mu_{p^{\text{ord}_p(m)}} \subseteq F(\mu_p)$ et qu'il existe une place v_0 de F vérifiant les hypothèses (1) et (2) de la remarque 2.7.*

(1) Si $i \equiv 1 \pmod{|\Delta|}$, alors

$$\frac{|(WK_{2i-2}^{\text{ét}}M)_G|}{|WK_{2i-2}^{\text{ét}}F|} = \frac{\prod_{v \in S} [M_{w,\infty}^{ab} : F_{v,\infty}]}{[M_{\infty}^{ab} : F_{\infty}] \cdot [D_F^{(i,m)} : D_F^{(i,m)} \cap N_{M/F} M^\bullet]}.$$

(2) Si $i \not\equiv 1 \pmod{|\Delta|}$, alors

$$\frac{|(WK_{2i-2}^{\acute{e}t}M)_G|}{|WK_{2i-2}^{\acute{e}t}F|} = \frac{\prod_{v \in S^{(i)}} [M_{w,\infty}^{ab} : F_{v,\infty}]}{[D_F^{(i,m)} : D_F^{(i,m)} \cap N_{M/F} M^\bullet]}.$$

où $S^{(i)} = \{v \in S; [F_v(\mu_p) : F_v] \text{ divise } (i-1)\}$.

Nous terminons par donner un critère de codescente pour le noyau sauvage étale qui dépend malheureusement de la validité de l'hypothèse (\mathcal{H}) si $i \equiv 1 \pmod{|\Delta|}$. Si $i \not\equiv 1 \pmod{|\Delta|}$, rappelons la notation

$$S^{(i)} = \{v \in S; [F_v(\mu_p) : F_v] \text{ divise } (i-1)\}.$$

Proposition 2.10. *Soit M/F une extension galoisienne S -ramifiée de corps de nombres, de groupe de Galois G . Si $i \equiv 1 \pmod{|\Delta|}$, on suppose qu'il existe une place v_0 de F vérifiant les hypothèses (1) et (2) de la remarque 2.7.*

Alors $(WK_{2i-2}^{\acute{e}t}M)_G$ est isomorphe à $WK_{2i-2}^{\acute{e}t}F$ exactement dans les cas suivants :

— l'entier $i \not\equiv 1 \pmod{|\Delta|}$ et l'homomorphisme

$$\alpha : \hat{H}^0(G, H^1(M, \mathbf{Z}_p(i))) \longrightarrow \bigoplus_{v \in S^{(i)}} \hat{H}^0(G_v, H^1(M_w, \mathbf{Z}_p(i)))$$

est surjectif.

— l'entier $i \equiv 1 \pmod{|\Delta|}$ et l'homomorphisme

$$\tilde{\alpha} : \hat{H}^0(G, H^1(M, \mathbf{Z}_p(i))) \longrightarrow \bigoplus_{v \in S - \{v_0\}} \hat{H}^0(G_v, H^1(M_w, \mathbf{Z}_p(i)))$$

est surjectif.

Démonstration. Pour tout $i \geq 2$ et sous l'hypothèse de la proposition dans le cas $i \equiv 1 \pmod{|\Delta|}$, nous remarquons que l'homomorphisme

$$N_i : (WK_{2i-2}^{\acute{e}t}M)_G \longrightarrow WK_{2i-2}^{\acute{e}t}F$$

est surjectif. Rappelons que

$$\tilde{\alpha} : H_1(G, H^2(G_S(M), \mathbf{Z}_p(i))) \longrightarrow H_1(G, \tilde{\bigoplus}_{w|v, v \in S} H^2(M_w, \mathbf{Z}_p(i))),$$

$$\alpha : H_1(G, H^2(G_S(M), \mathbf{Z}_p(i))) \longrightarrow H_1(G, \bigoplus_{w|v, v \in S} H^2(M_w, \mathbf{Z}_p(i)))$$

et $\ker N_i \cong \text{coker } \tilde{\alpha}$.

FORMULE DES GENRES POUR LE NOYAU SAUVAGE ÉTALE

- Si $i \not\equiv 1 \pmod{|\Delta|}$, les deux groupes $\tilde{\oplus}_{w|v, v \in S} H^2(M_w, \mathbf{Z}_p(i))$ et $\oplus_{w|v, v \in S} H^2(M_w, \mathbf{Z}_p(i))$ coïncident. Concernant les groupes

$$H_1(G_w, H^2(G_S(M), \mathbf{Z}_p(i))) \cong H^1(G_w, H^0(M_w, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(i))),$$

on voit que si $[F_v(\mu_p) : F_v]$ ne divise pas $i - 1$ le groupe $H^0(M_w, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(i))$ est trivial. Par suite,

$$\begin{aligned} \ker N_i &\cong \text{coker}(H_1(G, H^2(G_S(M), \mathbf{Z}_p(i))) \\ &\xrightarrow{\alpha} \oplus_{v \in S(i)} H_1(G_v, H^2(M_w, \mathbf{Z}_p(i)))) \\ &\cong \text{coker}(\widehat{H}^0(G, H^1(G_S(M), \mathbf{Z}_p(i))) \\ &\longrightarrow \oplus_{v \in S(i)} \widehat{H}^0(G_v, H^1(M_w, \mathbf{Z}_p(i)))). \end{aligned}$$

- Si $i \equiv 1 \pmod{|\Delta|}$, l'existence d'une place v_0 de F vérifiant les hypothèses (1) et (2) de la remarque 2.7 entraîne que $G_{v_0} \cong G$ et

$$H^0(M_{w_0}, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(1-i)) \cong H^0(M, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(1-i)),$$

où w_0 est la place de M au-dessus de v_0 . Le diagramme commutatif (2.1), montre alors que pour $j = 1$ ou 2 ,

$$H_j(G, \tilde{\oplus}_{w|v, v \in S} H^2(M_w, \mathbf{Z}_p(i))) \cong \oplus_{v \in S - \{v_0\}} H_j(G_w, H^2(M_w, \mathbf{Z}_p(i))).$$

D'où

$$\begin{aligned} \ker N_i &\cong \text{coker}(H_1(G, H^2(G_S(M), \mathbf{Z}_p(i))) \\ &\xrightarrow{\tilde{\alpha}} \oplus_{v \in S - \{v_0\}} H_1(G_v, H^2(M_w, \mathbf{Z}_p(i)))) \\ &\cong \text{coker}(\widehat{H}^0(G, H^1(G_S(M), \mathbf{Z}_p(i))) \\ &\longrightarrow \oplus_{v \in S - \{v_0\}} \widehat{H}^0(G_v, H^1(M_w, \mathbf{Z}_p(i)))). \end{aligned}$$

Le résultat en découle donc facilement. \square

Exemple 2.11. On suppose que F est le corps \mathbf{Q} des rationnels et que $i \equiv 1 \pmod{|\Delta|}$. Soit M une extension galoisienne de \mathbf{Q} telle que p ne se décompose pas dans M/\mathbf{Q} ($v_0 = p$). Alors l'homomorphisme

$$\tilde{\alpha} : \widehat{H}^0(G, H^1(M, \mathbf{Z}_p(i))) \longrightarrow \oplus_{v \in S - \{v_0\}} \widehat{H}^0(G_v, H^1(M_w, \mathbf{Z}_p(i)))$$

est surjectif si et seulement si M/\mathbf{Q} est non-ramifiée en dehors d'un ensemble de places $\{p, \ell\}$ où ℓ est un nombre premier tel que $\ell \equiv 1 \pmod{p}$ et $p \notin (\mathbf{Z}/\ell)^p$ [5, §5]. Un tel ensemble de places $\{p, \ell\}$ est dit i -primitif

(voir e.g. [3, 6, 7, 5]). La notion d'ensembles i -primitifs généralise celle d'ensembles primitifs introduite dans [19].

Ils ont également été utilisés pour minorer l'ordre du noyau et conoyau de l'homomorphisme naturel

$$f_i : H^2(F, \mathbf{Z}_p(i)) \longrightarrow H^2(M, \mathbf{Z}_p(i))^G, \quad (\text{voir [6, 2]}).$$

Références

- [1] H. ASENSOUYIS & J. ASSIM – « Codescente pour le noyau sauvage étale », in *Actes de la Conférence “Fonctions L et Arithmétique”*, Publ. Math. Besançon Algèbre Théorie Nr., vol. 2012/1, Presses Univ. Franche-Comté, Besançon, 2012, p. 5–17.
- [2] M. ASGHARI-LARIMI & A. MOVAHHEDI – « Bounds for étale capitulation kernels. II », *Ann. Math. Blaise Pascal* **16** (2009), no. 1, p. 151–163.
- [3] J. ASSIM – « Codescente en K -théorie étale et corps de nombres », *Manuscripta Math.* **86** (1995), no. 4, p. 499–518.
- [4] ———, « Analogues étales de la p -tour des corps de classes », *J. Théor. Nombres Bordeaux* **15** (2003), no. 3, p. 651–663.
- [5] J. ASSIM & A. MOVAHHEDI – « Galois co-descent in motivic cohomology », Prépublication.
- [6] ———, « Bounds for étale capitulation kernels », *K-Theory* **33** (2004), no. 3, p. 199–213.
- [7] ———, « Norm index formula for the Tate kernels and applications », *J. K-Theory* **9** (2012), no. 2, p. 359–383.
- [8] J. W. S. CASSELS & A. FRÖHLICH (éds.) – *Algebraic number theory*, Proceedings of an instructional conference organized by the London Mathematical Society (a NATO Advanced Study Institute) with the support of the International Mathematical Union., Academic Press, London ; Thompson Book Co., Inc., Washington, D.C., 1967.
- [9] T. CHINBURG, M. KOLSTER, G. PAPPAS & V. SNAITH – « Galois structure of K -groups of rings of integers », *K-Theory* **14** (1998), no. 4, p. 319–369.
- [10] W. G. DWYER & E. M. FRIEDLANDER – « Algebraic and étale K -theory », *Trans. Amer. Math. Soc.* **292** (1985), no. 1, p. 247–280.

- [11] R. GREENBERG – « A note on K_2 and the theory of \mathbf{Z}_p -extensions », *Amer. J. Math.* **100** (1978), no. 6, p. 1235–1245.
- [12] R. A. GRIFFITHS – « A genus formula for étale hilbert kernels in a cyclic p -power extension », Thèse, McMaster University, Canada, 2005.
- [13] B. KAHN – « Descente galoisienne et K_2 des corps de nombres », *K-Theory* **7** (1993), no. 1, p. 55–100.
- [14] M. KOLSTER & A. MOVAHHEDI – « Galois co-descent for étale wild kernels and capitulation », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **50** (2000), no. 1, p. 35–65.
- [15] M. KOLSTER – « An idelic approach to the wild kernel », *Invent. Math.* **103** (1991), no. 1, p. 9–24.
- [16] ———, « Remarks on étale K -theory and Leopoldt’s conjecture », in *Séminaire de Théorie des Nombres, Paris, 1991–92*, Progr. Math., vol. 116, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1993, p. 37–62.
- [17] ———, « K -theory and arithmetic », in *Contemporary developments in algebraic K-theory*, ICTP Lect. Notes, XV, Abdus Salam Int. Cent. Theoret. Phys., Trieste, 2004, p. 191–258 (electronic).
- [18] J. MILNOR – *Introduction to algebraic K-theory*, Princeton University Press, Princeton, N.J. ; University of Tokyo Press, Tokyo, 1971, Annals of Mathematics Studies, No. 72.
- [19] A. MOVAHHEDI & T. NGUYEN QUANG DO – « Sur l’arithmétique des corps de nombres p -rationnels », in *Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1987–88*, Progr. Math., vol. 81, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990, p. 155–200.
- [20] T. NGUYEN QUANG DO – « Analogues supérieurs du noyau sauvage », *Sém. Théor. Nombres Bordeaux (2)* **4** (1992), no. 2, p. 263–271.
- [21] ———, « Théorie d’Iwasawa des noyaux sauvages étales d’un corps de nombres », in *Théorie des nombres, Années 1998/2001*, Publ. Math. UFR Sci. Tech. Besançon, Univ. Franche-Comté, Besançon, 2002, p. 9.
- [22] P. SCHNEIDER – « Über gewisse Galoiscohomologiegruppen », *Math. Z.* **168** (1979), no. 2, p. 181–205.
- [23] C. SOULÉ – « K -théorie des anneaux d’entiers de corps de nombres et cohomologie étale », *Invent. Math.* **55** (1979), no. 3, p. 251–295.

Hassan ASENSOUYIS

- [24] J. TATE – « Relations between K_2 and Galois cohomology », *Invent. Math.* **36** (1976), p. 257–274.
- [25] D. VAUCLAIR – « Noyaux de Tate et capitulation », *J. Number Theory* **128** (2008), no. 3, p. 619–638.
- [26] V. VOEVODSKY – « On motivic cohomology with \mathbf{Z}/l -coefficients », *Ann. of Math. (2)* **174** (2011), no. 1, p. 401–438.

HASSAN ASENSOUYIS
Département de Mathématiques
et Informatique
Université Moulay Ismail
B.P 11201 Zitoune
50000 Meknès, Morocco
hassan_asensouyis@yahoo.fr