ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

SPYROS N. PNEVMATIKOS

Structures symplectiques singulières génériques

Annales de l'institut Fourier, tome 34, nº 3 (1984), p. 201-218
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1984__34_3_201_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
33, 3 (1984), 201-218

STRUCTURES SYMPLECTIQUES SINGULIÈRES GÉNÉRIQUES

par Spyros N. PNEVMATIKOS

INTRODUCTION

Une *structure symplectique générique* est définie par la donnée d'une variété différentiable M de dimension paire munie d'une 2-forme différentielle ω fermée *générique.* L'apparition éventuelle d'un lieu de dégénérescence du rang de ω est l'obstacle à ce qu'on puisse associer à chaque fonction différentiable h un *champ hamiltonien* X_h sur M solution différentiable de l'équation généralisée de Hamilton-Jacobi :

$$X_h \lrcorner \omega = -dh.$$

L'objet de ce travail est la détermination de l'algèbre des fonctions, dites *hamiltoniennes admissibles* pour (M, ω), pour lesquelles cette résolution est possible, ainsi que l'étude des systèmes hamiltoniens singuliers qui leurs sont associés. Pour ceci, on est amené à étudier de près les propriétés des lieux de dégénérescence du rang des 2-formes différentielles génériques et à déterminer la liste, finie, de leurs modèles locaux algébriques. Nous prouvons que les équations canoniques de ces lieux singuliers possèdent la *propriété des zéros,* propriété essentielle pour la résolution de l'équation de Hamilton-Jacobi aux points singuliers de la structure (M, ω).

L'intérêt de cette étude réside entre autres sur le fait que de telles structures apparaissent dans la situation qui est engendrée par la présence de *"contraintes génériques"* dans les espaces de phases, cf. [12], [13], [2].

I. DIVISIONS SUR LES LIEUX SINGULIERS DES FORMES GENERIQUES

1. Notations – Rappels.

Soit M une variété différentiable à base dénombrable de voisinages de dimension finie n. On désigne par $\Lambda^p(M)$ l'espace des p-formes différentielles à coefficients C^∞ sur M muni de la C^∞-topologie de Whitney; cette topologie fait de $\Lambda^p(M)$ un espace vectoriel topologique localement convexe et de plus un espace de Baire.

Lorsque le fibré $\overset{p}{\wedge} T^* M$ puissance extérieure p-ième du fibré cotangent $T^* M$ est muni d'une stratification dénombrable, l'ensemble des p-formes différentielles qui sont transverses, en tant que sections de $\overset{p}{\wedge} T^* M$, à cette stratification, est partout dense dans $\Lambda^p(M)$; aussi, cet ensemble est ouvert dès que la stratification de $\overset{p}{\wedge} T^* M$ est localement triviale.

Dans ce qui suit, on se servira essentiellement de la *stratification par le rang* du fibré $\overset{2}{\wedge} T^* M$: la fibre type $\overset{2}{\wedge}(\mathbf{R}^n)^*$ de ce fibré reçoit une stratification canonique par le rang dont les strates Σ_c sont exactement les orbites de l'action du groupe linéaire $Gl(n)$ sur l'espace $\overset{2}{\wedge}(\mathbf{R}^n)^*$; chaque strate Σ_c étant invariante sous l'action du groupe structural $Gl(n)$ définit de manière naturelle une sous-variété $\Sigma_c(M)$ dans $\overset{2}{\wedge} T^* M$ fibrée sur M de fibre type Σ_c. Les variétés $\Sigma_c(M)$ forment la stratification par le rang de $\overset{2}{\wedge} T^* M$, stratification qui est finie et localement triviale.

Nous dirons qu'une 2-forme $\omega \in \Lambda^2(M)$ est *générique*, si elle est transverse à la stratification par le rang du fibré $\overset{2}{\wedge} T^* M$. L'ensemble des 2-formes génériques est donc un ouvert dense de l'espace $\Lambda^2(M)$.

Le sous-espace des p-formes différentielles fermées sur M muni de la topologie induite par celle de $\Lambda^p(M)$ est aussi un espace vectoriel topologique localement convexe et un espace de

Baire. Le théorème de transversalité d'une section de $\overset{p}{\wedge} T^* M$ par rapport à une stratification dénombrable de ce fibré s'applique aussi aux p-formes fermées, cf. [8] p. 176. Ainsi, les 2-formes fermées sur M qui sont transverses à la stratification par le rang de $\overset{2}{\wedge} T^* M$ forment un ensemble ouvert dense dans le sous-espace des 2-formes fermées sur M et le comportement générique du rang d'une 2-forme fermée est le même que celui d'une 2-forme quelconque.

Le *lieu singulier*, i.e. *lieu de dégénerescence du rang,* d'une 2-forme (fermée) ω sur M est constitué des points x de M sur lesquels l'*espace associé* ou *noyau* $\Delta_x(\omega)$ de ω n'est pas réduit à l'élément nul :

$$\Sigma(\omega) = \{x \in M / \dim \Delta_x(\omega) \neq 0\}.$$

On appellera *corang* de ω en un point x la dimension de son espace associé $\Delta_x(\omega)$ et on désignera

$$\Sigma_c(\omega) = \{x \in M / \dim \Delta_x(\omega) = c\}.$$

La stratification de $\overset{2}{\wedge} T^* M$ formée par les variétés $\Sigma_c(M)$ a pour codimension $c(c-1)/2$; en conséquence, une 2-forme (fermée) ω transverse à cette stratification vérifie :

– si $c(c-1)/2 > n$, alors $\Sigma_c(\omega)$ est vide,

– si $c(c-1)/2 \leqslant n$, alors $\Sigma_c(\omega)$ est, si non vide, une sous-variété de codimension $c(c-1)/2$ dans M. L'adhérence de $\Sigma_c(\omega)$ est dans ce cas localement difféomorphe à une sous-variété algébrique de $\mathbf{R}^n$ et vérifie :

$$\overline{\Sigma_c(\omega)} = \bigcup_{c' \geqslant c} \Sigma_{c'}(\omega).$$

La variété M reçoit ainsi une stratification finie et localement triviale.

– En dimension paire, la strate des points réguliers $\Sigma_0(\omega)$ est ouverte dense dans M et le lieu singulier $\Sigma(\omega)$, lorsqu'il apparait, est une hypersurface stratifiée de M dont la partie lisse est constituée par la première strate de dégénerescence $\Sigma_2(\omega)$.

– En dimension impaire, on n'a évidemment que des points singuliers et la première strate de dégénerescence $\Sigma_1(\omega)$ est ouverte dense dans M.

2. Germes Reliés.

Le lemme des "germes reliés" que nous établissons dans ce paragraphe constitue une généralisation d'un lemme classique d'"équivalence locale" pour les matrices génériques, cf. V.I. Arnold [1] et J.N. Mather [9].

Soient M, M' deux variétés defférentiables de dimension n et $\mathfrak{C}$ une variété différentiable de dimension quelconque sur laquelle opère un groupe de Lie G par une action notée $*$. Nous dirons que deux germes d'applications différentiables

$$F : (M, a) \longrightarrow \mathfrak{C} \quad \text{et} \quad F' : (M', a') \longrightarrow \mathfrak{C}$$

sont *reliés*, s'il existe un germe de difféomorphisme

$$\varphi : (M, a) \longrightarrow (M', a')$$

$\varphi(a) = a'$ et un germe d'application différentiable

$$S : (M, a) \longrightarrow G$$

tels qu'au voisinage de a on ait :

$$F' \circ \varphi(x) = S(x) * F(x).$$

LEMME 1 (de "germes reliés"). – *Deux germes d'applications différentiables* $F : (M, a) \longrightarrow \mathfrak{C}$ et $F' : (M', a') \longrightarrow \mathfrak{C}$ *sont reliés dès que les points* $F(a)$, $F'(a')$ *appartiennent à une même orbite de l'action de* G *sur* $\mathfrak{C}$ *et que* F, F' *sont transverses en* a, a' *respectivement à cette orbite.*

Démonstration. – Soient M_0 une sous-variété de M, contenant le point a, de dimension égale à la codimension de l'orbite de $F(a)$, telle que la restriction de F à M_0 soit encore transverse à cette orbite en a, et H une sous-variété de G transverse au stabilisateur de $F(a)$ en l'élément neutre e de G. On considère l'application

$$\Psi : M_0 \times H \longrightarrow \mathfrak{C}$$

$$(x, \Gamma) \longrightarrow \Gamma * F(x)$$

qui visiblement, est un difféomorphisme local en (a, e). Donnons-nous donc des voisinages : U_0 de a dans M_0, W de e dans H, V de $F(a)$ dans $\mathfrak{C}$, de sorte que la restriction de Ψ à $U_0 \times W$, notée ψ, soit un difféomorphisme sur V. Sans perte de généralité on prend $F(a) = F'(a')$ et on choisit des voisinages : U de a dans M et U' de a' dans M' de sorte que les $F(U)$ et $F'(U')$ soient contenus dans V. On considère alors les applications

$$\pi_1 \psi^{-1} F : U \longrightarrow U_0 \quad \text{et} \quad \pi_1 \psi^{-1} F' : U' \longrightarrow U_0$$

où π_i désigne la i-ème projection de $U_0 \times W$, lesquelles, visiblement, sont des submersions. Par conséquent, quitte à restreindre les voisinages U et U', on détermine un difféomorphisme φ qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi_1 \Psi^{-1} F"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & U' \arrow[dl, "\pi_1 \Psi^{-1} F'"] \\ & U_0 & \end{tikzcd}$$

Posons $\Gamma_1(x) = \pi_2 \psi^{-1} F(x)$ et $\Gamma_2(\varphi x) = \pi_2 \psi^{-1} F'(\varphi x)$ pour tout $x \in U$. On vérifie alors facilement que:

$$F(x) = \psi(\pi_1 \psi^{-1} F(x), \Gamma_1(x)) = \Gamma_1(x) * F(\pi_1 \psi^{-1} F(x))$$

et

$$F'(\varphi x) = \psi(\pi_1 \psi^{-1} F'(\varphi x), \Gamma_2(\varphi x)) = \Gamma_2(\varphi x) * F(\pi_1 \psi^{-1} F'(\varphi x)),$$

et en posant

$$S(\chi) = \Gamma_2(\varphi\chi)\,(\Gamma_2(\chi))^{-1}$$

on achève la démonstration du lemme. □

Le lemme de germes reliés s'applique dans le cas des germes de 2-formes génériques, en interprétant, à l'aide d'un système de n champs de vecteurs linéairement indépendants en chaque point x d'un ouvert U de M, $\omega(x)$ comme la matrice à paramètre

$$\Omega(x) = [\omega(x)\,(X_i(x)\,,X_j(x))]_{i,j=1,2,\ldots,n}$$

et en faisant agir sur l'espace $\mathfrak{A}\,(n)$ des matrices antisymétriques le groupe linéaire à paramètre $Gl_x(n)$ par

$$S(x) * \Omega(x) = S(x)\,\Omega(x)\,{}^tS(x)\,.$$

Il en résulte que :

Si $\omega \in \Lambda^2\,(M)$, $\omega' \in \Lambda^2\,(M')$ *sont génériques et* $a \in M$, $a' \in M'$ *sont deux points fixés, alors les germes correspondants de* ω, ω' *en ces points sont reliés, si et seulement si,* $\text{rang}_a\ \omega = \text{rang}_{a'}\ \omega'$. On en déduit immédiatement l'existence d'un difféomorphisme φ d'un voisinage U de a sur un voisinage U' de a' qui transforme la stratification du lieu singulier de ω/U en la stratification du lieu singulier de ω'/U' : autrement dit, *le type local différentiable du lieu singulier d'une 2-forme générique ne dépend que de la valeur de son rang au point considéré.*

La classification complète des germes de 2-formes génériques se réalise à l'aide d'un simple modèle défini dans une carte $(U\,;x_1\,,x_2\,,\ldots,x_n)$ centrée en un point de la variété M :

LEMME 2. – *Si* ω *est une 2-forme générique sur une variété* M *alors son germe en un point où son rang est* $2s$ *est relié à*

$$\omega_s = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4 + \ldots + dx_{2s-1} \wedge dx_{2s} + \sum_{2s<i<j\leqslant n} x_{\tau(i,j)}\, dx_i \wedge dx_j$$

où $\tau : \{(i,j) \in \mathbf{N}^2/2s < i < j \leqslant n\} \longrightarrow \{1\,,2\,,\ldots,n\}$ *est une application injective fixée quelconque.*

Le lemme n'a évidemment de sens que si $c(c-1)/2 \leqslant n$ où $c = n - 2s$, condition sous laquelle on peut choisir τ injective

et assurer ainsi la généricité du modèle ω_s. Notons que ω_s n'est pas fermée en général, mais son utilisation en tant que modèle est valable pour les 2-formes génériques fermées ou non.

Si M est une variété orientable de dimension paire $n = 2m$ et $\omega \in \Lambda^2$ (M), on appelle *coefficient de volume* de ω la fonction G_ω qui est définie à l'aide d'un élément de volume v sur M par la relation :

$$\omega^m = G_\omega \, v .$$

Il est clair que les zéros du coefficient de volume G_ω définissent le lieu singulier $\Sigma(\omega)$. On vérifie facilement, en se servant du lemme de germes reliés, que si ω est générique le germe de son coefficient de volume en un point où son rang est $2s$ est conjugué par un difféomorphisme local au germe du coefficient de volume du modèle ω_s, à une unité près. On peut donc, par un simple calcul, en déduire la liste finie des modèles d'équations algébriques qui définissent localement les lieux singuliers des 2-formes génériques :

THEOREME 3 (Equations canoniques des lieux singuliers). – *Si ω est une 2-forme générique sur une variété* M *de dimension $2m$, alors son lieu singulier $\Sigma(\omega)$ est défini au voisinage d'un point où le rang de ω est $2s$ et dans une carte appropriée centrée en ce point, par l'équation :*

$$\sum_P \prod_{\{i,j\} \in P} x_{\tau(\{i,j\})} = 0$$

où P parcourt l'ensemble des partitions de $\{2s+1, 2s+2, \ldots, 2m\}$ en parties de deux éléments et

$$\tau : \{(i,j) \in \mathbf{N}^2 / 2s < i < j \leqslant 2m\} \longrightarrow \{1, 2, \ldots, 2m\}$$

est une application injective arbitraire fixée avec $\tau(\{i,j\}) = \tau(i,j)$ si $i < j$ et $\tau(\{i,j\}) = \tau(j,i)$ si $i > j$.

Le lieu singulier d'une 2-forme générique est donc défini localement par les zéros d'un polynôme homogène et affine par rapport à chacune de ses variables de degré m-s ; en particulier, au voisinage d'un point de la première strate de dégénerescence, le lieu singulier est défini, dans une carte appropriée, par l'équation $x_1 = 0$. Par le même procédé, on peut obtenir la liste des systèmes d'équations algébriques qui définissent localement chaque strate $\Sigma_c(\omega)$ de la stratification de $\Sigma(\omega)$.

3. Divisions sur les lieux singuliers.

On désigne par $\mathcal{E}(M)$ l'anneau des fonctions différentiables sur une variété M qu'on supposera dorénavant de dimension paire $2m$. Si $\omega \in \Lambda^2(M)$, on appellera *idéal associé* à ω l'idéal $\mathfrak{J}(\omega)$ qui est engendré dans l'anneau $\mathcal{E}(M)$ par les fonctions $\omega^m(X_1, X_2, \ldots, X_{2m})$ lorsque les X_i parcourent le module $\mathfrak{X}(M)$ des champs de vecteurs différentiables sur M. Dans le cas où la variété M est orientable, le coefficient de volume G_ω défini à l'aide d'un élément de volume sur M, constitue un générateur global de $\mathfrak{J}(\omega)$. Nous nous placerons dorénavant dans le cas naturel où l'idéal $\mathfrak{J}(\omega)$ est de type fini dans $\mathcal{E}(M)$ et nous démontrerons que génériquement il possède la *propriété des zéros* i.e. tout élément de $\mathcal{E}(M)$ qui est nul sur les zéros de $\mathfrak{J}(\omega)$ appartient à $\mathfrak{J}(\omega)$. Visiblement, l'ensemble des zéros de $\mathfrak{J}(\omega)$ est exactement le lieu singulier $\Sigma(\omega)$.

THEOREME 4 (Propriété des zéros). – *Si ω est une 2-forme générique et f une fonction différentiable sur une variété* M *de dimension paire alors* :

$$f/\Sigma(\omega) = 0 \Leftrightarrow f \in \mathfrak{J}(\omega).$$

Démonstration. – Soit f une fonction différentiable sur M nulle sur le lieu singulier $\Sigma(\omega)$. Sur un ouvert U assez petit de M nous prouverons que f est divisible par le coefficient de volume de la restriction de ω à U et puis par une partition de l'unité on peut parvenir facilement au résultat global sur M. Comme nous l'avons démontré dans le paragraphe précédent, ce coefficient de volume est un polynôme affine par rapport à chacune de ses variables et donc le lemme général qui suit assure l'affirmation du théorème.

LEMME 5. – *Si $f : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ est une fonction différentiable nulle sur les zéros d'un polynôme, affine par rapport à chacune de ses variables,* $P : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ *alors f est divisible par ce polynôme dans l'anneau $\xi(\mathbf{R}^n)$.*

Démonstration. – Nous prouverons le lemme par récurrence sur le nombre des variables de P. Le cas d'une variable étant trivial, supposons la propriété vraie jusqu'à l'ordre $n-1$ et prouvons que f est divisible par P dans l'anneau $\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$. Par

une translation on se ramène tout d'abord à l'origine de $\mathbf{R}^n$ et on constate que le polynôme translaté est encore affine par rapport à chacune de ses variables. Notons qu'au cas où P est nul sur les plans de coordonnées alors à une constante multiplicative près il est égal à $x_1 x_2 \ldots x_n$ et donc son idéal possède la propriété des zéros. Ce cas étant réglé, on peut supposer l'existence d'un hyperplan de coordonnées, soit $x_1 = 0$, qui n'est pas contenu dans l'ensemble $P^{-1}(0)$. Posons alors : $y = (y_2, y_3, \ldots, y_n)$ où $y_i = x_i + \epsilon_i x_1$, $\epsilon_i > 0$, $i = 2, 3, \ldots, n$, et ordonnons le polynôme

$$P'(x_1, y) = (P(x_1, y_2 - \epsilon_2 x_1, \ldots, y_n - \epsilon_n x_1)$$

suivant les puissances décroissantes de la variable x_1, soit :

$$P'(x_1, y) = c\, x_1^k + \sum_{i=1}^{k-1} c_i(y)\, x_1^i + c_0(y) \text{ où } c \in \mathbf{R}; \qquad (1)$$

les coefficients $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1} \in \mathbf{R}[y]$ sont visiblement affines en chaque variable et on a

$$c_0(y) = P'(0, y). \qquad (2)$$

D'après le théorème de division différentiable et la relation (1), au voisinage de l'origine, on peut écrire

$$f(x_1, y) = Q(x_1, y)\, P'(x_1, y) + \sum_{i=1}^{k-1} R_i(y)\, x_1^i + R_0(y).$$

La fonction R_0 est nulle sur les zéros de $P'(0, y)$ et d'après la relation (2) et l'hypothèse de récurrence, il existe un germe de fonction différentiable $S(y)$ tel que $R_0(y) = S(y)\, c_0(y)$. Il s'ensuit que $R_0(y) = S(y)\,(P'(x_1, y) - c\, x_1^k - \sum_{i=1}^{k-1} c_i(y)\, x_1^i)$ et la fonction f s'écrit

$$f(x_1, y) = Q'(x_1, y)\, P'(x_1, y) + x_1\Big(\sum_{i=1}^{k-1} R_i'(y)\, x_1^i + R_0'(y)\Big).$$

Le germe de f en 0 appartient donc à la somme des idéaux engendrés par P' et x_1 :

$$f \in (P')_{,0} + (x_1)_{,0}.$$

Montrons maintenant que R_0' est nul sur les zéros de $P'(0, y)$; il suffit pour cela de prouver l'égalité

$$\overline{P'^{-1}(0) - \{x_1 = 0\}} = P'^{-1}(0). \qquad (3)$$

Soit $a = (0, a_2, \ldots, a_n) \in P'^{-1}(0)$. De la décomposition

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 u(x_2, \ldots, x_n) + v(x_2, \ldots, x_n),$$

il résulte que ou bien $P^{-1}(0)$ est, au voisinage de a, le graphe de la fonction $x_1 = -(v/u)(x_2, \ldots, x_n)$ lorsque $u(a_2, \ldots, a_n) \neq 0$, ou bien $P^{-1}(0)$ contient la droite $\mathbf{R} \times (a_2, \ldots, a_n)$. Dans les deux cas l'égalité (3) est bien vérifiée. Après cette remarque et d'après la relation (2) et l'hypothèse de récurrence, il existe un germe de fonction différentiable $S'(y)$ tel que $R'_0(y) = S'(y) c_0(y)$. Par conséquent,

$$f(x_1, y) = Q''(x_1, y) P'(x_1, y) + x_1^2 \left(\sum_{i=1}^{k-1} R''_i(y) x_1^i + R''_0(y) \right)$$

et ainsi,

$$f \in (P')_{,0} + (x_1)^2_{,0}.$$

On vérifie alors que pour tout $\ell > 0$,

$$f \in (P')_{,0} + (x_1)^\ell_{,0}$$

et donc

$$f \in (P')_{,0} + \bigcap_\ell (x)^\ell_{,0}.$$

Si $\hat{f}$ et $\hat{P}'$ sont les séries de Taylor en 0 des fonctions f et P' respectivement, nous avons donc

$$\hat{f} \in (\hat{P}')_{,0} \subset \mathbf{R}[[x_1, y]].$$

La démonstration du lemme s'achève par application directe du critère formel de divisibilité de Łojasiewicz, [6] p. 87, [7] p. 72 selon lequel la divisibilité formelle de f par P implique la divisibilité différentiable. □

Si M est une variété orientable et ω une 2-forme générique sur M, la propriété des zéros de l'idéal $\mathfrak{I}(\omega)$ permet l'obtention d'un critère formel de divisibilité d'une fonction différentiable par n'importe quelle puissance du coefficient de volume G_ω dans l'anneau $\mathcal{E}(M)$:

COROLLAIRE 6. – *Soit ω une 2-forme générique sur une variété orientable M de dimension paire. L'équation*

$$G^k_\omega(x) X(x) = B(x), \quad k \in \mathbf{N}^*$$

où B est une fonction différentiable sur M, admet une solution différentiable sur M dès qu'elle possède une solution formelle en chaque point d'une partie dense de la partie lisse de $\Sigma(\omega)$.

Démonstration. – La fonction B est nulle sur la partie lisse de $\Sigma(\omega)$ et par continuité sur $\Sigma(\omega)$ tout entier. Ainsi, B appartient à l'idéal $\mathfrak{I}(\omega)$ qui possède la propriété des zéros et par conséquent il existe une fonction différentiable Q sur M telle que

$$B(x) = G_\omega(x) Q(x). \tag{1}$$

En procédant par récurrence sur $k \in \mathbf{N}^*$ supposons l'assertion vraie jusqu'à l'ordre $k-1$. Il suffira alors de prouver l'existence d'une fonction différentiable Q' sur M telle que

$$Q(x) = G_\omega^{k-1}(x) Q'(x). \tag{2}$$

Or, en chaque point d'une partie dense de $\Sigma_2(\omega)$, on peut effectuer la division formelle de $\hat{B}$ par $\hat{G}_\omega^k$ alors Q est divisible formellement par $\hat{G}_\omega^{k-1}$ et l'hypothèse de récurrence assure l'existence de Q'. □

Cette propriété, dite de G_ω^k*-densité de la partie lisse de* $\Sigma(\omega)$ *dans* M, se généralise facilement dans le cas non orientable à une propriété globale de $\mathfrak{I}(\omega)$*-densité de la partie lisse de* $\Sigma(\omega)$ *dans* M, au sens de B. Malgrange [15].

II. EQUATION DE HAMILTON-JACOBI EN PRESENCE DE SINGULARITES

1. Structures symplectiques génériques.

Une *structure symplectique générique* est définie sur une variété différentiable M de dimension paire par la donnée d'une 2-forme différentielle ω fermée générique sur M. Dans le contexte d'une telle structure (M, ω) l'équation de Hamilton-Jacobi s'écrit :

$$X_h \lrcorner \omega = -dh \tag{*}$$

où h est une fonction différentiable sur M. Sur la strate des points réguliers de (M, ω) on retrouve la situation classique d'une structure symplectique et l'équation (*) est résoluble. A la fonction h est alors associé un champ de vecteurs unique X_h solution différentiable de l'équation (*) sur la strate régulière, mais celle-ci n'est pas toujours différentiablement prolongeable sur toute la variété M. Nous dirons que h est une *hamiltonienne admissible* pour la structure (M, ω) si cette extension différen-

tiable est réalisable et dans ce cas le champ unique X_h constituera son *champ hamiltonien.* Nous caractériserons par des conditions ponctuelles portant sur la partie lisse du lieu singulier $\Sigma(\omega)$ de la structure (M, ω) l'ensemble de ses hamiltoniennes admissibles, ensemble qui sera ensuite muni d'une structure naturelle d'algèbre de Lie.

Nous nous plaçons tout d'abord dans un contexte plus général :

THEOREME 7. – *L'équation*

$$X \lrcorner \omega = \eta \qquad (**)$$

où ω *est une 2-forme générique et* η *une forme de Pfaff sur une variété* M *de dimension paire, admet une solution différentiable* X *sur* M, *si et seulement si, en chaque point* x *d'une partie dense de la partie lisse du lieu singulier* $\Sigma(\omega)$ *est satisfaite la condition des noyaux :*

$$\Delta_x(\omega) \subset \Delta_x(\eta).$$

Démonstration. – Si l'équation (**) est résoluble sur la variété M, il est clair que la condition des noyaux est satisfaite en tout point de M. Réciproquement, nous nous plaçons sur un ouvert U de la variété M muni d'un système de coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_{2m})$ centré en un point a de la partie lisse de $\Sigma(\omega)$ sur lequel nous supposons la condition des noyaux satisfaite. L'équation (**) s'interprète matriciellement sur U par :

$$\Omega(x)\, X(x) = H(x). \qquad (1)$$

On utilise le modèle ω_s des germes reliés de 2-formes génériques introduit dans la première partie de cet article et on désigne Ω_s son champ de matrices associé sur U. En posant $s = m - 1$, on a $\Omega(\varphi x) = S(x)\,\Omega_s(x)\,{}^tS(x)$ et l'équation (1) s'écrit

$$\Omega_s(x)\, X'(x) = H'(x) \qquad (2)$$

où $X'(x) = {}^tS(x)\, X(\varphi x)$ et $H'(x) = S^{-1}(x)\, H(\varphi x)$, ou encore

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} 0 & 1 & & \mathbf{0} & & \\ -1 & 0 & \ddots & & & \mathbf{0} \\ & & 0 & 1 & & \\ \mathbf{0} & & -1 & 0 & & \\ \hline & & \mathbf{0} & & 0 & x_1 \\ & & & & -x_1 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} X'_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \\ X'_{2m} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} H'_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \\ H'_{2m} \end{array}\right]$$

Les inconnus $X'_1, X'_2, \ldots, X'_{2m-2}$ sont déterminés immédiatement et pour les inconnus X'_{2m-1}, X'_{2m} on a :

$$\left| \begin{array}{l} x_1 X'_{2m} = H'_{2m-1} \\ x_1 X'_{2m-1} = -H'_{2m} \end{array} \right. \tag{3}$$

Comme, en tout point d'une partie dense de l'hypersurface $x_1 = 0$, la condition des noyaux implique $\operatorname{Ker} \Omega_s(x) \subset \operatorname{Ker} {}^t H'(x)$, on en déduit qu'en tout point de cette hypersurface $H'_{2m-1}(x) = H'_{2m}(x) = 0$. Les fonctions H'_{2m-1}, H'_{2m} sont donc divisibles par x_1 et la détermination des inconnus X'_{2m-1}, X'_{2m} est claire.

Nous venons de prouver que l'équation (1) et donc l'équation

$$\det \Omega(x) X(x) = {}^{\prime}\Omega(x) H(x) \tag{4}$$

où ${}^{\prime}\Omega(x)$ désigne la comatrice de $\Omega(x)$, admet une solution différentiable au voisinage de tout point de $\Sigma_2(\omega) \cap U$. Vu qu'à une unité près le déterminant de $\Omega(x)$ est identifié au carré du coefficient de volume de la restriction de ω à U (cf. lemme 8), ainsi que ce coefficient ne s'annule pas sur une partie dense de U, la résolution de l'équation (4) équivaut à celle de

$$G^2_\omega(x) X(x) = {}^{\prime}\Omega(x) H(x). \tag{5}$$

Le critère formel de divisibilité d'une fonction différentiable par une puissance de G_ω, obtenu dans la première partie de cet article (cf. corollaire 6), s'applique directement à cette équation et nous conduit à sa résolution et par conséquent à la résolution locale de l'équation (**).

La démonstration du théorème s'achève en effectuant un recollement des solutions locales à l'aide d'une simple partition de l'unité.

LEMME 8. — *Si ω est une 2-forme générique sur une variété* M *de dimension* $2m$ *et* $X_1, X_2, \ldots, X_{2m}$ *un système de champs de vecteurs linéairement indépendants en chaque point d'un ouvert* U *de* M, *alors :*

a) *En chaque point de l'ouvert* U *on a l'égalité :*

$$\det[\omega(x)(X_i(x), X_j(x))] = (\omega^m(x)(X_1(x), \ldots, X_{2m}(x)))^2 .$$

b) *Dans l'anneau des fonctions différentiables sur* U *on a l'égalité des idéaux* :

$$(\det \Omega) = (G^2_\omega).$$

Démonstration. – La vérification ponctuelle de la première égalité sur l'ouvert dense des formes de rang maximal de $\overset{2}{\wedge}(\mathbf{R}^{2m})^*$ s'effectue sans peine et alors par continuité l'égalité est vraie partout. Il en résulte immédiatement l'égalité des idéaux correspondants. □

Il est intéressant de remarquer que la satisfaction de la condition des noyaux aux points de la première strate de dégénérescence implique sa satisfaction immédiate sur les strates les plus dégénerées, implication a priori non visible. Notons que sur les points de la première strate de dégénerescence $\Sigma_2(\omega)$ la condition des noyaux s'écrit :

$$\eta \wedge \omega^{m-1} = 0.$$

COROLLAIRE 9. – *Soit* ω *une* 2-*forme générique sur une variété* M *de dimension paire. Si une forme de Pfaff* η *satisfait la condition des noyaux*

$$\Delta_x(\omega) \subset \Delta_x(\eta)$$

en chaque point d'une partie dense de la partie lisse du lieu singulier $\Sigma(\omega)$, *alors cette condition est satisfaite en tout point de* M.

Remarque. – Le théorème que nous venons de démontrer est aussi valable dans le cas où ω est 2-forme *fermée* générique sur M. En effet, le modèle ω_s n'est pas fermé en général mais la résolution du système linéaire $X \lrcorner \omega = \eta$ où ω est une 2-forme fermée générique de rang $2s$ à l'origine, η une forme de Pfaff donnée et X un champ inconnu, est *linéairement* équivalente à celle de l'équation $X' \lrcorner \omega_s = \eta'$. Notons que toutes les propriétés des 2-formes génériques établies dans la première partie de cet article sont aussi valables dans le contexte des 2-formes fermées génériques. On est donc en mesure, en appliquant ces résultats aux structures symplectiques génériques, d'en déduire leurs hamiltoniennes admissibles.

2. L'algèbre des hamiltoniennes admissibles d'une structure symplectique générique.

THEOREME 10. – *L'ensemble des hamiltoniennes admissibles d'une structure symplectique générique* (M, ω) *est constitué des fonctions différentiables* h *sur* M *dont la différentielle*

annule le noyau de ω *en chaque point d'une partie dense de la partie lisse du lieu singulier* $\Sigma(\omega)$.

L'ensemble des hamiltoniennes admissibles de (M, ω) reçoit une structure naturelle d'algèbre de Lie lorsqu'il est muni du *crochet générique* défini par :

$$\{\{h, h'\}\} = \omega(X_h, X_{h'}).$$

Le crochet générique généralise le crochet de Poisson classique et ces deux crochets sont visiblement identifiés sur la strate régulière de (M, ω).

L'ensemble des champs hamiltoniens admissibles de (M, ω), c'est-à-dire, l'ensemble des champs hamiltoniens associés aux hamiltoniennes admissibles de (M, ω), constitue une sous-algèbre de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs différentiables sur M.

La correspondance qui à chaque hamiltonienne admissible h associe son champ hamiltonien X_h défini un homomorphisme d'algèbres de Lie dont le noyau se compose des hamiltoniennes admissibles localement sur M.

PROPOSITION 11. – *Soit* (M, ω) *une structure symplectique générique et* h *une hamiltonienne admissible. Alors :*

a) *Le flot du champ hamiltonien* X_h *conserve la structure* (M, ω) *et* h *en est une intégrale première.*

b) *Les orbites du champ hamiltonien* X_h *partant d'une strate* $\Sigma_c(\omega)$ *sont entièrement contenues dans cette même strate.*

Notons que sur la strate régulière de (M, ω) toute fonction différentiable h est admissible comme hamiltonienne et son champ hamiltonien X_h s'exprime dans une carte appropriée $(U ; q_1, \ldots, q_m, p_1, \ldots, p_m)$ par :

$$X_h = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial h}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial h}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right).$$

Cette écriture n'est plus valable sur les points du lieu singulier de (M, ω), mais si la généricité de ω s'exprime par transversalité de son 1-jet à la stratification par le rang du fibré des 1-jets de sections de $\overset{2}{\wedge} T^* M$, cf. [8], alors on peut obtenir les modèles locaux des hamiltoniennes admissibles au voisinage des points de l'ensemble

$$\Sigma_{20}(\omega) = \{x \in \Sigma_2(\omega) / \Delta_x(\omega) \pitchfork T_x \Sigma_2(\omega)\}$$

qui, dans ce cas, est un ouvert dense de la partie lisse de $\Sigma(\omega)$. J. Martinet prouve dans [8] qu'au voisinage de chaque point de cet ensemble toute 2-forme fermée vérifiant la condition de transversalité précitée peut s'écrire

$$\omega = p_1\, dp_1 \wedge dq_1 + \sum_{i=2}^{m} dp_i \wedge dq_i$$

et que ce modèle est analytiquement stable. Le lieu singulier $\Sigma(\omega)$ est localement défini par l'équation $p_1 = 0$ et en explicitant la condition des noyaux on obtient :

PROPOSITION 12. – *Soit* (M, ω) *une structure symplectique générique de dimension* $2m$, *la généricité étant exprimée sur le* 1-*jet de* ω. *Alors, au voisinage des points de* $\Sigma_{20}(\omega)$, *les hamiltoniennes et champs hamiltoniens admissibles de* (M, ω) *peuvent s'écrire :*

$$h(q_1, \ldots, q_m, p_1, \ldots, p_m) = p_1^2\, \mathfrak{a}(q_1, \ldots, q_m, p_1, \ldots, p_m) + \mathfrak{b}(q_2, \ldots, q_m, p_2, \ldots, p_m)$$

où $\mathfrak{a}$ *et* $\mathfrak{b}$ *sont des fonctions différentiables quelconques et*

$$X_h = \frac{1}{p_1}\left(\frac{\partial h}{\partial p_1}\frac{\partial}{\partial q_1} - \frac{\partial h}{\partial q_1}\frac{\partial}{\partial p_1}\right) + \sum_{i=2}^{m}\left(\frac{\partial h}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial h}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}\right).$$

Lorsque la généricité de ω s'exprime par transversalité de son 2-jet à la stratification par le rang du fibré des 2-jets de sections de $\overset{2}{\wedge}\, T^* M$, cf. [8], alors l'ensemble $\Sigma_{22}(\omega) = \Sigma_2(\omega) - \Sigma_{20}(\omega)$ est une sous-variété de codimension deux dans $\Sigma_2(\omega)$ et l'ensemble

$$\Sigma_{220}(\omega) = \{x \in \Sigma_{22}(\omega) / \Delta_x(\omega) \pitchfork T_x\, \Sigma_{22}(\omega) \text{ dans } T_x\, \Sigma_2(\omega)\}$$

est un ouvert dense de cette sous-variété. R. Roussarie prouve dans [14] qu'en dimension 4, au voisinage de chaque point de cet ensemble, toute 2-forme fermée vérifiant la condition de transversalité précitée peut s'écrire

$$\omega = dp_1 \wedge d(q_1 q_2 + \epsilon p_1 p_2 - q_2^3/3) + dp_2 \wedge d(q_1 - q_2^2/2)$$

où $\epsilon = \pm 1$ et que ce modèle est C^∞-stable. Un calcul dont on trouvera les détails dans [11], détermine l'expression des hamiltoniennes et champs hamiltoniens analytiques admissibles au voisinage des points de $\Sigma_{220}(\omega)$. Voici, à titre d'exemple, les expressions correspondantes en dimension quelconque :

$$h(q_1, \ldots, q_m, \; p_1, \ldots, p_m) = q_1^2 \, \mathfrak{a}(q_1, \ldots, q_m, \; p_1, \ldots, p_m)$$
$$+ \mathfrak{b}(q_2^2 + \epsilon p_1^2, \; q_3, \ldots, q_m, \; p_3, \ldots, p_m)$$
$$- 2q_1 \frac{\partial \mathfrak{b}}{\partial u}(u, q_3, \ldots, q_m, \; p_3, \ldots, p_m)$$

où $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont des fonctions analytiques quelconques et

$$X_h = \frac{1}{q_1}\Big(q_2 \Big(\frac{\partial h}{\partial p_1}\frac{\partial}{\partial q_1} - \frac{\partial h}{\partial q_1}\frac{\partial}{\partial p_1}\Big) - q_2\Big(\frac{\partial h}{\partial p_2}\frac{\partial}{\partial q_2} - \frac{\partial h}{\partial q_2}\frac{\partial}{\partial p_2}\Big)$$
$$+ \epsilon p_1 \Big(\frac{\partial h}{\partial q_1}\frac{\partial}{\partial q_2} - \frac{\partial h}{\partial q_2}\frac{\partial}{\partial q_1}\Big) + \Big(\frac{\partial h}{\partial p_1}\frac{\partial}{\partial q_2} - \frac{\partial h}{\partial q_2}\frac{\partial}{\partial p_1}\Big)$$
$$- (q_2^2 - q_1)\Big(\frac{\partial h}{\partial p_2}\frac{\partial}{\partial q_1} - \frac{\partial h}{\partial q_1}\frac{\partial}{\partial p_2}\Big)\Big)$$
$$+ \sum_{i=3}^{m} \Big(\frac{\partial h}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial h}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}\Big).$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] V.I. ARNOLD, On matrices depending on parameters, *Russian Math. Surveys,* 26 (1971), 29-43.

[2] V.I. ARNOLD, Lagrangian manifolds with singularities, asymptotic rays and the open swallowtail, *Funct. Anal. and Appl.,* 15, 4 (1981), 235-246.

[3] E. CARTAN, *Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications en Géométrie,* Hermann, Paris,1945.

[4] P.A.M. DIRAC, Generalized Hamiltonian Dynamics, *Canad. J. Math.,* 2 (1950), 129-148.

[5] A. LICHNEROWICZ, Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées, *Journal Diff. Geometry,* 12 (1977), 253-300.

[6] S. ŁOJASIEWICZ, Sur le problème de division, *Studia Mathematica,* 18 (1959), 87-136.

[7] B. MALGRANGE, *Ideals of differentiable functions,* Oxford Univ. Press, London, 1966.

[8] J. MARTINET, Sur les singularités des formes différentielles, *Ann. Inst. Fourier,* 20-1 (1970), 95-178.

[9] J.N. MATHER, Solutions of generic linear equations, *Salvador Symp. Dynamical Systems,* 185-193, IMPA, Rio de Janeiro, 1973.

[10] F. PELLETIER, *Singularités d'ordre supérieur de formes différentielles,* Thèse, Univ. Dijon, Dijon, 1980.

[11] S.N. PNEVMATIKOS, Singularités en géométrie symplectique *Publ. Math. Univ. Dijon,* Dijon, 1979.

[12] S.N. PNEVMATIKOS, Structures hamiltoniennes en présence de contraintes, *C.R.A.S.,* Paris, 289A (1979), 799-802.

[13] S.N. PNEVMATIKOS, Singularités dans les espaces de phases dues à la présence de contraintes génériques, *Journées Relativistes 81,* Inst. Fourier Univ. Grenoble, Grenoble, 1981.

[14] R. ROUSSARIE, Modèles locaux de champs et de formes. *Astérisque,*30, Paris,1975.

[15] J.C. TOUGERON, *Idéaux de fonctions différentiables,* Springer Verlag, Berlin, 1972.

Manuscrit reçu le 6 avril 1983
révisé le 25 novembre 1983.

Spyros N. PNEVMATIKOS,
Université de Dijon
Département de Mathématiques
21100 Dijon (France).