Annales de l'institut Fourier

Patrick Sargos

Prolongement méromorphe des séries de Dirichlet associées à des fractions rationnelles de plusieurs variables

Annales de l'institut Fourier, tome 34, nº 3 (1984), p. 83-123
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1984__34_3_83_0>

© Annales de l'institut Fourier, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (http://annalif.ujf-grenoble.fr/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
33, 3 (1984), 83-123

PROLONGEMENT MÉROMORPHE DES SÉRIES DE DIRICHLET ASSOCIÉES À DES FRACTIONS RATIONNELLES DE PLUSIEURS VARIABLES

par Patrick SARGOS

PLAN DE L'ARTICLE

0. INTRODUCTION ET NOTATIONS

a) Soit D le demi-plan complexe $\{z / \operatorname{Re} z > 0\}$. On désigne par $D[X_1, \ldots, X_n]$ l'ensemble des polynômes $P(\underline{X}) = P(X_1, \ldots, X_n)$

dont les coefficients non nuls sont dans D, et par $D(X_1, \dots, X_n)$ l'ensemble des fractions rationnelles $R = P/Q$ où P et Q sont éléments de $D[X_1, \dots, X_n]$. Soient $\underline{x} \in]0, +\infty[^n$ et $R \in D(X_1, \dots, X_n)$ alors $R(\underline{x})$ est dans $\mathbf{C} \setminus]-\infty, 0]$, et, pour tout $s \in \mathbf{C}$, on définit $R(\underline{x})^{-s} = \exp(-s \operatorname{Log} R(\underline{x}))$ au moyen de la détermination principale du logarithme complexe. Pour $\underline{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in \mathbf{N}^n$, on pose :

$$Z(R, \underline{\eta}; s) = \sum_{\nu_1, \dots, \nu_n = 1}^{\infty} \underline{\nu}^{\underline{\eta}} R(\underline{\nu})^{-s}. \tag{0.1}$$

L'étude de la série de Dirichlet $Z(P, \underline{0}; s)$ a été introduite par Mellin :

THEOREME 0.1 (Mellin [12], 1900). – *On suppose que le polynôme* P *dépend effectivement des* n *variables* $x_1, \dots, x_n$. *Alors la série* $Z(P, \underline{0}; s)$ *converge dans un certain demi-plan. La fonction* $s \longmapsto Z(P, \underline{0}; s)$, *définie et holomorphe dans ce demi-plan, admet un prolongement méromorphe à tout le plan complexe, dont les pôles sont situés sur l'axe réel. Si on restreint la variable* s *à une demi-bande du type*

$$B = \{s = \sigma + it / \sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2, \text{ et } t \geqslant 1\},$$

alors, pour tout $\epsilon > 0$, *on a :* $Z(P, \underline{0}; s) = O(e^{(\pi/2 + \epsilon)t})$.

b) Les articles qui ont suivi celui de Mellin ont été consacrés au cas où le polynôme P vérifie la condition d'ellipticité :

$$|P_N(\underline{x})| > 0 \text{ pour } \underline{x} \in [0, +\infty[^n, \underline{x} \neq \underline{0},$$

où P_N est la partie homogène de plus haut degré de P.

THEOREME 0.2 (Mahler [11], 1927). – *Soient* $P \in D[X_1, \dots, X_n]$, *de degré* N, *vérifiant* (0.2), *et* $\underline{\eta} \in \mathbf{N}^n$. *Alors la série* $Z(P, \underline{\eta}; s)$ *converge dans le demi-plan* $\left\{ \operatorname{Re} s > \dfrac{n + |\underline{\eta}|}{N} \right\}$ *(avec la notation* $|\underline{\eta}| = \sum_{j=1}^{n} \eta_j$*), et la fonction* $Z(P, \underline{\eta}; .)$ *admet au plus des pôles simples aux points* $s = (n + |\underline{\eta}| - k) N^{-1}$, *avec* $k \in \mathbf{N}$ *et* $s \notin -\mathbf{N}$.

Dans la demi-bande

$$B_k = \{s = \sigma + it / (n + |\underline{\eta}| - k) N^{-1} < \sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2 \text{ et } t \geqslant 1\},$$

on a $Z(P, \underline{\eta}; s) = O(e^{\rho t})$ *pour un certain* $\rho < \pi/2$; *si* P *est à coefficients positifs, alors* $Z(P, \underline{\eta}; s)$ *est* $O(t^{kn})$ *dans* B_k .

Les propriétés analytiques de $Z(P, \underline{\eta}; s)$, dans le cas elliptique, ont suscité plusieurs travaux récents. Par exemple, P. Cassou-Noguès calcule les valeurs aux entiers négatifs et les résidus aux pôles de $Z(P, \underline{\eta}; s)$ (cf [6]), et en donne des applications arithmétiques (cf [5] et [6]). On trouvera dans ces deux derniers articles un exposé assez complet des motivations et des développements actuels de ce problème.

c) Cet article développe des méthodes et des résultats annoncés par l'auteur en 1981 dans [14]. Les théorèmes essentiels sont énoncés au § 1. A l'exception du théorème 1.4 concernant la majoration du prolongement analytique de la série $Z(R, \underline{\eta}; s)$, tous les résultats figurent déjà dans l'article de référence [14].

Les théorèmes 1.1, 1.2 et 1.4 généralisent le théorème 0.2 au cadre du théorème 0.1. En fait les hypothèses choisies ici sont sensiblement plus générales. On considère une fraction rationnelle à la place d'un polynôme. Le théorème 1.3 généralise le fait que, dans le cas $n = 1$, $Z(P, \underline{\eta}; -\mathbf{N})$ est contenu dans le corps engendré par les coefficients de P. Pour ce dernier point, qui est un cas particulier des résultats de [6], on trouvera une démonstration directe dans [13].

Nous verrons au § 5 que la série $Z(R, \underline{\eta}; s)$ peut être exprimée en fonction d'intégrales du type :

$$Y(T, \underline{\lambda}; s) = \int_{]1, +\infty[^n} \underline{x}^{\underline{\lambda}}\, T(\underline{x})^{-s}\, d\underline{x}\,.$$

Le théorème 2.1 permet de ramener l'étude de ces intégrales au cas où le comportement asymptotique de la fraction rationnelle T est monomial. On en déduit d'abord au § 3 le calcul de l'abscisse de convergence absolue de la série de Dirichlet $Z(P/Q, \underline{\eta}; s)$ en fonction de $\underline{\eta}$ et des monômes extrémaux de P et Q, puis au § 4 la nature du prolongement méromorphe de la fonction $s \longmapsto Y(R, \underline{\eta}; s)$.

Les intégrales Y sont utilisées ici comme des auxiliaires techniques. Elles apparaissent toutefois naturellement dans plusieurs problèmes (voir par exemple [1] et [3]) et leur étude peut présenter un intérêt propre.

Plusieurs modifications ont été apportées à la première version soumise en 1981. En particulier, la démonstration du théorème 2.1 de cet article a été refondue ; les théorèmes 1.4 et 4.8 ont été introduits en vue d'une application qui sera publiée à part. Cette nouvelle présentation permet d'accroître la concision et la clarté des démonstrations des résultats principaux. Elle ne permet pas, en revanche, de simplifier la preuve de la partie 3 du théorème 1 de [14], que nous préférons de ce fait reporter à un travail ultérieur.

Le lien entre les monômes extrémaux du polynôme P et la distribution des pôles de $Z(P, \underline{\eta}; s)$, esquissé au théorème 1.2, a été précisé récemment, dans le cas de deux indéterminées, par P. Cassou-Noguès dans un article à paraître [7].

Notations. – On pose $\mathbf{R}_+ = [0, +\infty[$, $\mathbf{R}_- = -\mathbf{R}_+$, $I =]0, 1[$, et $L =]1, +\infty[$. La lettre s désigne toujours un nombre complexe et on note systématiquement $\sigma = \operatorname{Re} s$ et $t = \operatorname{Im} s$.

Pour $\xi \in \mathbf{C}$, on pose $e(\xi) = \exp(2 i\pi \xi)$. On désigne par $\operatorname{Arg} \xi$ la "fonction argument" définie sur $\mathbf{C} \backslash \mathbf{R}_-$, à valeurs dans $]-\pi, \pi[$, par $\arg \xi$ la fonction argument définie sur $\mathbf{C} \backslash \mathbf{R}_+$, à valeurs dans $]0, 2\pi[$, et par $\operatorname{Log} \xi$ et $\log \xi$ les "fonctions logarithme" qui leur sont respectivement associées ; sauf mention expresse du contraire ξ^s signifie $\exp(s \operatorname{Log} \xi)$.

Les lettres soulignées désignent des vecteurs : $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\underline{1} = (1, \ldots, 1)$, etc ... Pour $\underline{z}$ et $\underline{\alpha} \in \mathbf{C}^n$, on pose $|\underline{z}| = \sum_{j=1}^{n} |z_j|$ et $\underline{z}^{\underline{\alpha}} = z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \ldots z_n^{\alpha_n}$, le sens de $z_j^{\alpha_j}$ étant donné plus haut.

Les symboles :

$$f(\lambda, x) \ll g(x) \qquad (x \in X ; \lambda \in \Lambda), \tag{0.3}$$

et

$$f(\lambda, x) = O(g(x)) \qquad (x \in X ; \lambda \in \Lambda) \tag{0.4}$$

ont le même sens et signifient qu'il existe une constante $A > 0$, ne dépendant ni de x ni de λ, mais pouvant a priori dépendre de tous les autres paramètres du problème considéré, telle qu'on ait : $|f(\lambda, x)| \leqslant A |g(x)|$ pour tout $x \in X$ et tout $\lambda \in \Lambda$.

Le symbole

$$f \overset{\cup}{\underset{\cap}{}} g \tag{0.5}$$

signifie qu'on a à la fois $f \ll g$ et $g \ll f$.

Par convention, nous dirons qu'une fonction f possède un pôle d'ordre $m \in \mathbf{Z}$ en s_0 si m est le plus petit entier tel qu'on ait, au voisinage de s_0

$$f(s) = (s - s_0)^{-m}\, g(s),$$

où g est holomorphe en s_0.

Enfin, nous ferons un usage constant du résultat classique :

LEMME 0.3. – *Soient* μ *une mesure de Radon complexe sur* X *(pour les définitions, cf* [8] *chapitre XIII),* Ω *un ouvert de* $\mathbf{C}^n$, *et* $(\xi, \underline{z}) \longmapsto f(\xi, \underline{z})$ *une application continue sur* $X \times \Omega$, *à valeurs dans* $\mathbf{C}$. *On suppose que :*

(i) *pour chaque* $\xi \in X$, *la fonction* $\underline{z} \longmapsto f(\xi, \underline{z})$ *est holomorphe dans* Ω.

(ii) $\int_X |f(\xi, \underline{z})|\, d|\mu|(\xi) \ll 1$, *uniformément au voisinage de chaque point de* Ω *(*$|\mu|$ *est la valeur absolue de la mesure* μ*).*

Alors la fonction $h(\underline{z}) = \int_X f(\xi, \underline{z})\, d\mu(\xi)$ *est holomorphe dans* Ω.

L'auteur tient à exprimer ses plus vifs remerciements à R. Gay, J. Riss et G. Tenenbaum pour les nombreux conseils dont ils ont bien voulu le faire profiter.

1. LES RESULTATS

Soient $R = P/Q \in D(X_1, \ldots, X_n)$, vérifiant la condition

$$\lim_{\substack{|\underline{x}| \to +\infty \\ x_1, \ldots, x_n \geq 1}} |R(\underline{x})| = +\infty, \tag{1.1}$$

$\underline{\eta} \in \mathbf{N}^n$ et $Z(R, \underline{\eta}; s) = \sum_{\underline{\nu} \in \mathbf{N}^{*n}} \underline{\nu}^{\underline{\eta}}\, R(\underline{\nu})^{-s}$. La condition (1.1) est nécessaire pour que cette série converge dans un demi-plan de la forme $\{\sigma > \sigma_0\}$; le résultat suivant montre qu'elle est suffisante.

THEOREME 1.1. – *Sous la condition (1.1), la série* $Z(R, \underline{\eta} ; s)$ *possède une abscisse de convergence absolue finie* $\sigma_a = \sigma_a(R, \underline{\eta}) \in \mathbf{Q}$ *qui ne dépend que des monômes extrémaux de* P *et* Q, *et de* $\underline{\eta}$. *De plus, il y a divergence absolue pour* $\sigma = \sigma_a$.

D'autres précisions sur le nombre σ_a sont données au § 3 (théorème 3.1 et lemme 3.2) ; la définition des monômes extrémaux figure au § 2.

THEOREME 1.2. – *La série* $Z(R, \underline{\eta} ; s)$ *définit une fonction holomorphe dans le demi-plan* $\{\sigma > \sigma_a\}$ *qui admet un prolongement méromorphe à tout le plan complexe. Les pôles sont d'ordre* $\leqslant n$ *et situés dans un ensemble de la forme :*

$$\sigma_a - \frac{1}{N}\mathbf{N} = \{\sigma_a - k/N \,;\ k = 0, 1, 2, 3, \ldots\},$$

et il existe un entier N^* *ne dépendant que des monômes extrémaux de* P *et* Q *tel que* N *divise* N^*.

L'origine est un pôle d'ordre $\leqslant n-1$; *si* $Q \equiv 1$, *alors tous les entiers négatifs sont des pôles d'ordre au plus* $n-1$.

Ce dernier point généralise le fait que, dans le cas $n = 1$ la fonction $Z(P, \underline{\eta} ; s)$ ne possède pas de pôle aux entiers négatifs. Les exemples 1.5 et 1.6 montrent que, si l'on ne fait aucune hypothèse supplémentaire sur R, on ne peut rien dire de plus sur l'ordre des pôles.

On remarque également que si P et Q sont à coefficients positifs, alors le point σ_a est toujours un pôle pour $Z(R, \underline{\eta} ; .)$; cela résulte d'un théorème général dû à Landau (cf [15]).

THEOREME 1.3. – *Si* s_0 *est un pôle pour* $Z(R, \underline{\eta} ; .)$, *on écrit le développement en série de Laurent au voisinage de* s_0 :

$$Z(R, \underline{\eta} ; s) = \sum_{k=-n}^{+\infty} u_k(s_0)\,(s - s_0)^k ,$$

et on désigne par K *le sous-corps de* $\mathbf{C}$ *engendré par les coefficients de* P *et* Q. *Alors :*

(i) $u_{-n}(s_0)$ *est algébrique sur* K

(ii) $u_{-n+1}(0) \in \mathrm{K}$; *si* $s_0 \in -\mathbf{N}$, *alors* $u_{-n}(s_0) \in \mathrm{K}$

(iii) *si* $\mathrm{Q} \equiv 1$, et si $s_0 \in -\mathbf{N}$, *alors* $u_{-n+1}(s_0) \in \mathrm{K}$.

Pour chaque polynôme $\mathrm{T}(\underline{x}) = \sum_{\underline{\alpha}} c_{\underline{\alpha}} \underline{x}^{\underline{\alpha}} \in \mathrm{D}[\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n]$, on pose :

$$\rho(\mathrm{T}) = \max_{\underline{\alpha}} |\mathrm{Arg}\, c_{\underline{\alpha}}| . \tag{1.2}$$

THEOREME 1.4. — *Il existe une constante* $\mathrm{A} > 0$ *qui ne dépend que des monômes extrémaux de* P *et* Q *telle que, pour tout* $\epsilon > 0$, *on ait :*

$$\mathrm{Z}(\mathrm{R}, \underline{\eta} ; s) \ll e^{[\rho(\mathrm{P})+\rho(\mathrm{Q})]|t|} (1 + |t|^{\mathrm{A}(\sigma_a - \sigma)+\epsilon}) \tag{1.3}$$

uniformément dans chaque région :

$$\{s/\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2 \, , |t| \geqslant 1\} \ (\sigma_1 \ \textit{et} \ \sigma_2 \in \mathbf{R}).$$

Exemple 1.5. — Soient $\theta \in]0, 1[$, n et N deux entiers $\geqslant 2$. On pose $\mathrm{R}(\underline{x}) = \mathrm{R}(x_1, \ldots, x_n) = \dfrac{(x_1 \ldots x_n)^{\mathrm{N}+1}}{\theta + x_1 \ldots x_n}$, et $\mathrm{Z}(s) = \sum_{\underline{\nu} \in \mathbf{N}^{*n}} \mathrm{R}(\underline{\nu})^{-s}$.

Partant de l'égalité :

$$\mathrm{R}(\underline{x})^{-s} = (x_1 \ldots x_n)^{-\mathrm{N}s} \left(1 + \frac{\theta}{x_1 \ldots x_n}\right)^s$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k \binom{s}{k} (x_1 \ldots x_n)^{-(\mathrm{N}s+k)} ,$$

on obtient :

$$\mathrm{Z}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k \binom{s}{k} \zeta(\mathrm{N}s + k)^n ,$$

où ζ est la fonction zêta de Riemann. L'abscisse de convergence absolue de Z est $\sigma_a = 1/\mathrm{N}$, et les pôles de Z sont exactement les points $\sigma_a, \sigma_a - 1/\mathrm{N}, \sigma_a - 2/\mathrm{N}, \ldots$. L'ordre en chaque pôle est n, sauf à l'origine où il est $n - 1$.

Exemple 1.6. — On choisit θ, n et N comme précédemment, et on pose

$$\mathrm{P}(\underline{x}) = \theta(x_1 \ldots x_n)^{\mathrm{N}-1} + (x_1 \ldots x_n)^{\mathrm{N}} , \text{ et}$$

$$\mathrm{Z}(s) = \sum_{\underline{\nu} \in \mathbf{N}^{*n}} \mathrm{P}(\underline{\nu})^{-s} .$$

Par un calcul semblable à celui de l'exemple 1.6, on trouve :

$$Z(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k \binom{-s}{k} J(Ns + k)^n .$$

L'ensemble des pôles de Z est exactement $\frac{1}{N} - \frac{1}{N}\mathbf{N}$. L'ordre en chaque pôle est n, sauf aux entiers négatifs où il est $n - 1$.

2. REDUCTION DES POLYNOMES PAR CHANGEMENTS DE VARIABLES

Soit $P(\underline{x}) = \sum_{\underline{\alpha}} a_{\underline{\alpha}} \underline{x}^{\underline{\alpha}}$ un polynôme des n variables $x_1, \ldots, x_n$. On appelle monôme de P un monôme $\underline{x}^{\underline{\alpha}}$ tel que $a_{\underline{\alpha}}$ soit non nul, et on désigne par supp P l'ensemble des multi-entiers $\underline{\alpha}$ pour lesquels $a_{\underline{\alpha}}$ est non nul. Soit $\mathcal{E}(P)$ l'enveloppe convexe du sous-ensemble de $\mathbf{R}^n$:

$$\{\underline{\alpha} - \underline{\beta} / \underline{\alpha} \in \operatorname{supp} P, \underline{\beta} \in \mathbf{R}_+^n\}.$$

On dira qu'un monôme $\underline{x}^{\underline{\alpha}}$ de P est extrémal si $\underline{\alpha}$ est un point extrémal de $\mathcal{E}(P)$. Si P n'a qu'un monôme extrémal, alors il possède un plus grand monôme. Dans ce cas, on peut écrire : $P(\underline{x}) = a_{\underline{\alpha}} \underline{x}^{\underline{\alpha}} + \sum_{\underline{\beta} < \underline{\alpha}} a_{\underline{\beta}} \underline{x}^{\underline{\beta}}$, où l'expression $\underline{\beta} < \underline{\alpha}$ signifie $\underline{\alpha} - \underline{\beta} \in \mathbf{R}_+^n \setminus \{\underline{0}\}$.

A chaque famille $\{\underline{\lambda}_1, \ldots, \underline{\lambda}_n\}$ de vecteurs linéairement indépendants de $\mathbf{R}_+^n$, on associe une application $\omega : L^n \longrightarrow L^n$ par

$$\omega \underline{x} = \omega(\underline{\lambda}_1, \ldots \underline{\lambda}_n)(\underline{x}) = (\underline{x}^{\underline{\mu}_1}, \ldots, \underline{x}^{\underline{\mu}_n}), \tag{2.1}$$

où la matrice des vecteurs $\underline{\mu}_i$ est obtenue par transposition de la matrice des vecteurs $\underline{\lambda}_j$, i.e :

$$\lambda_{ji} = \mu_{ij} \quad (1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n).$$

On désigne par Ω_n l'ensemble des applications du type (2.1) qui sont associées à des vecteurs $\underline{\lambda}_k \in \mathbf{N}^n$.

Le jacobien de l'application ω définie par (2.1) peut s'écrire :

$$J_\omega(\underline{x}) = \det((\lambda_{ij})_{i,j}) \frac{(\omega \underline{x})^{\underline{1}}}{x_1 \ldots x_n}. \tag{2.2}$$

En particulier, pour $\omega \in \Omega_n$, $J_\omega(\underline{x})$ est le produit d'un entier par un monôme.

Les applications $\omega \in \Omega_n$ transforment un monôme en un monôme et un polynôme en un polynôme (i.e $P \circ \omega$ est encore un polynôme). Si ω est définie par (2.1), on peut écrire : $(\omega \underline{x})^{\underline{\alpha}} = \underline{x}^{\omega \underline{\alpha}}$, où $\tilde{\omega}$ est la matrice $(\lambda_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq i \leq n}}$, ou encore

$$(\omega \underline{x})^{\underline{\alpha}} = x_1^{\langle \underline{\lambda}_1, \underline{\alpha} \rangle} \ldots x_n^{\langle \underline{\lambda}_n, \underline{\alpha} \rangle}, \tag{2.3}$$

le symbole $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \sum_1^n x_j y_j$ désignant le produit scalaire dans $\mathbf{R}^n$.

On remarque que si P possède un plus grand monôme $\underline{x}^{\underline{\alpha}}$, alors $P \circ \omega$ admet également un plus grand monôme $\underline{x}^{\tilde{\omega} \underline{\alpha}}$.

Nous verrons dans la suite qu'on sait calculer certaines intégrales lorsque les polynômes qui y figurent possèdent tous un plus grand monôme. Le théorème suivant permet de se ramener systématiquement à ce cas.

THEOREME 2.1. — *Soient* $P_1, \ldots, P_r$ *des polynômes à* n *variables, et* $\mathcal{M}_i$ *la famille des monômes extrémaux de* P_i. *Alors on peut associer à* $\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_r$ *des éléments* $\omega_1, \ldots, \omega_m$ *de* Ω_n *tels que les deux propriétés suivantes soient vérifiées :*

(2.4) *La famille* $(\omega_k(L^n))_{1 \leq k \leq m}$ *constitue, à un ensemble de mesure nulle près, une partition de* L^n.

(2.5) *Si* Q_i *est un polynôme à* n *variables admettant* $\mathcal{M}_i$ *comme ensemble de monômes extrémaux, alors chaque polynôme* $Q_i \circ \omega_k$ *possède un plus grand monôme* $(i = 1, \ldots, r;\ k = 1, \ldots, m)$.

Remarque 2.2. — La propriété (2.4) équivaut à l'assertion : "Pour toute fonction ϕ intégrable sur L^n, on a l'égalité :

$$\int_{L^n} \phi(\underline{x})\, d\underline{x} = \sum_{k=1}^{m} \int_{L^n} \phi \circ \omega_k(\underline{x})\, |J_{\omega_k}(\underline{x})|\, d\underline{x}\text{"}. \tag{2.6}$$

La démonstration du théorème 2.1 nécessite un résultat géométrique préliminaire. On considère un cône polyédral de $\mathbf{R}^n$ de sommet $\underline{\alpha} \in \mathbf{R}_+^n \setminus \{\underline{0}\}$ admettant pour écriture minimale (cf [2]; 12.1.5) :

$$E = \{\underline{\beta} \in \mathbf{R}^n / \langle \underline{\lambda}_k , \underline{\beta} \rangle \leqslant 1 , 1 \leqslant k \leqslant n + p\} \tag{2.7}$$

où p est un entier $\geqslant 0$, et où $\underline{\lambda}_k \in \mathbf{R}_+^n$, $1 \leqslant k \leqslant n + p$. On pose :

$$S = \{\underline{x} \in L^n / \underline{x}^{\underline{\alpha}} > \underline{x}^{\underline{\beta}} \text{ pour } \underline{\beta} \in E , \underline{\beta} \neq \underline{\alpha}\} . \tag{2.8}$$

LEMME 2.3. – *Avec les hypothèses et notations précédentes, il existe $p + 1$ changements de variables du type (2.1), $\omega_0 , \omega_1 , \dots , \omega_p$ possédant les deux propriétés suivantes :*

(i) *chaque $\omega_i (0 \leqslant i \leqslant p)$ est associé à une sous-famille $\{\underline{\lambda}_{i_1} , \dots , \underline{\lambda}_{i_n}\}$ de $\{\underline{\lambda}_1 , \dots , \underline{\lambda}_{n+p}\}$*

(ii) *le secteur S est, à un ensemble de mesure nulle près, réunion disjointe des $p + 1$ ensembles $\omega_i(L^n)$ $(0 \leqslant i \leqslant p)$.*

Démonstration du lemme 2.3. – Soit $E^0 = \{\underline{\gamma} \in \mathbf{R}^n / \langle \underline{\beta} , \underline{\gamma} \rangle \leqslant 1$ pour tout $\underline{\beta} \in E\}$ le polaire de E. On définit une application f de S dans E^0 en posant $f(\underline{y}) = \underline{\mu} = (\mu_1 , \dots , \mu_n)$ avec $\mu_j = \operatorname{Log} y_j (\operatorname{Log} \underline{y}^{\underline{\alpha}})^{-1}$ (remarquer qu'on a $\langle \underline{\mu} , \underline{\alpha} \rangle = 1$, et $\langle \underline{\mu} , \underline{\beta} \rangle < 1$ pour tout $\underline{\beta} \in E \setminus \{\underline{\alpha}\}$).

a) On suppose d'abord $p = 0$. Dans ce cas, on doit simplement montrer l'égalité $S = \omega(L^n)$ avec $\omega = \omega(\underline{\lambda}_1 , \dots , \underline{\lambda}_n)$.

L'inclusion $\omega(L^n) \subset S$ découle immédiatement de (2.3).

Pour prouver l'inclusion inverse, on fixe $\underline{y} \in S$ et on cherche $\underline{x} \in L^n$ vérifiant $\omega \underline{x} = \underline{y}$; on pose $\underline{\mu} = f(\underline{y})$.

Comme E est le polaire de $\{\underline{\lambda}_1 , \dots , \underline{\lambda}_n\}$, on sait, par le théorème du bipolaire (cf [4]) que E^0 est l'enveloppe convexe de $\{\underline{0} , \underline{\lambda}_1 , \dots , \underline{\lambda}_n\}$, d'où l'écriture $\underline{\mu} = \sum_{k=1}^{n} \theta_k \underline{\lambda}_k$, avec $\theta_k \geqslant 0$ et $\Sigma\, \theta_k \leqslant 1$. En fait, on a $\Sigma\, \theta_k = 1$ à cause de la condition $\langle \underline{\mu} , \underline{\alpha} \rangle = 0$.

Chaque θ_k est > 0 : si, par exemple, θ_1 était nul, on aurait $\langle \underline{\mu} , \underline{\beta} \rangle = 1$ pour chaque $\underline{\beta}$ situé sur l'arête de E d'équation $\{\underline{\gamma} / \langle \underline{\lambda}_j , \underline{\gamma} \rangle = 1 , j = 2, 3, \dots , n\}$, ce qui est impossible. On pose alors $\underline{x} = (\underline{y}^{\theta_1 \underline{\alpha}} , \dots , \underline{y}^{\theta_n \underline{\alpha}})$; $\underline{x}$ est bien dans L^n et vérifie $\omega \underline{x} = \underline{y}$, ce qui démontie le lemme dans le cas $p = 0$.

b) On suppose maintenant $p \geqslant 1$ (auquel cas on a nécessairement $n \geqslant 3$). Le résultat intermédiaire suivant permet de se ramener au cas $p = 0$.

LEMME 2.4. – *Soit* C *un cône polyédral saillant de* $\mathbf{R}^n$, *de sommet l'origine, admettant* $p + n$ *génératrices extrémales qui sont les demi-droites* $D_1, \ldots, D_{n+p}$. *Alors il existe* $p + 1$ *cônes polyédraux à* n *faces* $C_0, C_1, \ldots, C_p$ *vérifiant les propriétés suivantes :*

(i) *Chaque* C_i *est engendré par une sous-famille*

$$\{D_{i_1}, \ldots, D_{i_n}\} \text{ de } \{D_1, \ldots, D_{n+p}\}$$

(ii) *Le cône* C *est, aux frontières près, réunion disjointe des* $p + 1$ *cônes* $C_0, C_1, \ldots, C_p$.

On admet provisoirement le lemme 2.4, et on poursuit la démonstration en cours.

Soit D_i la demi-droite issue de l'origine et passant par λ_i, et soit C le cône polyédral de $\mathbf{R}_+^n$ engendré par $D_1, \ldots, D_{n+p}$.

Comme l'équation (2.7) est minimale, C admet $\{D_1, \ldots, D_{n+p}\}$ comme ensemble de génératrices extrémales. On peut donc séparer C en $p + 1$ cônes $C_0, C_1, \ldots, C_{n+p}$ comme dans le lemme 2.4. Si C_i est engendré par $\{D_{i_1}, \ldots, D_{i_n}\}$, on pose

$$\omega_i = \omega(\underline{\lambda}_{i_1}, \ldots, \underline{\lambda}_{i_n}), \; E_i = \{\underline{\beta}/\langle \underline{\beta}, \underline{\lambda}_{i_k}\rangle \leqslant 1, \; 1 \leqslant k \leqslant n\},$$

et $S_i = \{\underline{y} \in L^n / \underline{y}^{\underline{\beta}} < \underline{y}^{\underline{\alpha}} \text{ pour tout } \underline{\beta} \in E_i\}$.

D'après le cas $p = 0$, on a $\omega_i(L^n) = S_i$. D'autre part, S_i est, à un ensemble de mesure nulle près, égal à $f^{-1}(C_i \cap E^0)$. Cela montre que la famille $(\omega_i)_{i=0,1,\ldots,p}$ vérifie la propriété (ii) du lemme 2.3, et le cas $p \geqslant 1$ est démontré.

Démonstration du lemme 2.4. – On opère par récurrence sur l'entier p. Le cas $p = 0$ étant évident, on fixe $p \geqslant 1$, et on suppose le lemme démontré jusqu'à l'ordre $p - 1$.

Quitte à effectuer une permutation des indices, on peut supposer que $D_1, \ldots, D_{n-1}$ sont sur une même face de C.

Mais par $D_1, \ldots, D_{n-2}$, il passe exactement deux faces (cf [2], 12.1.12) la deuxième étant engendrée, disons, par $D_1, \ldots, D_{n-2}, D_n$.

Alors les demi-droites $D_1, \ldots, D_{n-2}, D_{n+1}$ ne font pas partie d'une même face de C, et l'hyperplan qu'elles engendrent sépare C en deux cônes polyédraux C' et C'' (cf figure 1).

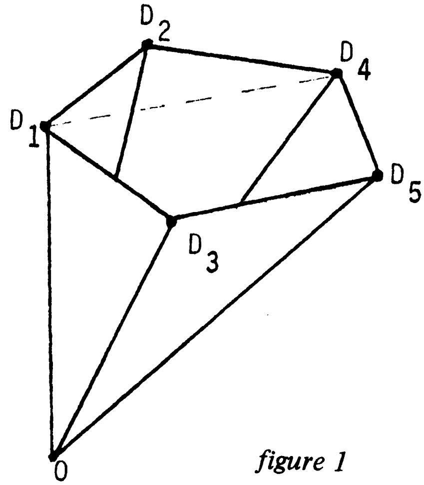


figure 1

Ces deux cônes admettent respectivement :

$$\{D_1, \ldots, D_{n-2}, D_{n+1}, D_{i_1}, \ldots, D_{i_{k'}}\}$$

et $\{D_1, \ldots, D_{n-2}, D_{n+1}, D_{j_1}, \ldots, D_{j_{k''}}\}$ comme ensemble de génératrices extrémales, avec $\{i_1, \ldots, i_{k'}\} \cap \{j_1, \ldots, j_{k''}\} = \emptyset$. En particulier on a $k' + k'' = p + 1$. Par hypothèse de récurrence, on peut décomposer C' et C'' respectivement en k' et k'' cônes à n faces. On obtient ainsi une décomposition de C qui répond à la question. Ceci achève la démonstration du lemme 2.4, et par suite celle du lemme 2.3.

Remarque 2.5. – Soient

$$\omega = \omega(\underline{\lambda}_1, \ldots, \underline{\lambda}_n),\ \omega' = \omega(q_1 \underline{\lambda}_1, \ldots, q_n \underline{\lambda}_n)$$

où les q_i sont des nombres positifs. L'application

$$\omega'' : \underline{x} \longrightarrow (x_1^{q_1}, \ldots, x_n^{q_n})$$

est une bijection de L^n dans L^n, et on a $\omega' = \omega \circ \omega''$. On en déduit l'égalité $\omega(L^n) = \omega'(L^n)$.

Supposons que, dans (2.7), les $\underline{\lambda}_k$ soient à coordonnées rationnelles. En donnant à $q_1, \ldots, q_n$ des valeurs entières convenables, on peut alors remplacer, dans la conclusion du lemme 2.3,

$$\omega_i = \omega(\underline{\lambda}_{i_1}, \ldots, \underline{\lambda}_{i_n}) \text{ par } \omega_i' = \omega(q_1 \underline{\lambda}_{i_1}, \ldots, q_n \underline{\lambda}_{i_n}) \in \Omega_n .$$

Démonstration du théorème 2.1. – On considère d'abord le cas où il y a un seul polynôme P (cas $r = 1$). Soit $\mathfrak{M}$ l'ensemble des monômes extrémaux de P, et soit $\underline{x}^{\underline{\alpha}} \in \mathfrak{M}$. On pose $S_{\underline{\alpha}} = \{\underline{x} \in L^n / \underline{x}^{\underline{\alpha}} > \underline{x}^{\underline{\beta}}$ pour tout $\underline{\beta} \in \mathfrak{M}$, $\underline{\beta} \neq \underline{\alpha}\}$; on désigne par $E_{\underline{\alpha}}$ le cône polyédral de sommet $\underline{\alpha}$ engendré par $\mathcal{E}(P)$; celui-ci admet une écriture du type (2.7) avec des $\underline{\lambda}_k$ à coordonnées rationnelles. On en déduit, par la remarque 2.5, qu'il existe une famille finie $(\omega_{\underline{\alpha},i})_i$ d'éléments de Ω_n telle que $S_{\underline{\alpha}}$ soit réunion disjointe, à un ensemble de mesure nulle près, des $\omega_{\underline{\alpha},i}(L^n)$. On remarque, par ailleurs, que $(\omega_{\underline{\alpha},i}\,\underline{x})^{\underline{\alpha}}$ est nécessairement le plus grand monôme de $P \circ \omega_{\underline{\alpha},i}$.

On procède ainsi pour chaque $\underline{x}^{\underline{\alpha}} \in \mathfrak{M}$, et on aboutit à une famille $(\omega_{\underline{\alpha},i})_{\underline{\alpha},i}$ d'éléments de Ω_n. Comme les $S_{\underline{\alpha}}$ constituent, à un ensemble de mesure nulle près, une partition de L^n, on voit que la famille $(\omega_{\underline{\alpha},i})_{\underline{\alpha},i}$ vérifie les propriétés (2.4) et (2.5).

On suppose maintenant $r = 2$ (le cas $r > 2$ ne présente aucune difficulté supplémentaire). A la famille $\mathfrak{M}_1$ des monômes extrémaux de P_1, on associe la famille $(\omega_1, \dots, \omega_m)$ comme ci-dessus. Puis on recommence pour chaque $P_2 \circ \omega_k$; en remarquant que les monômes extrémaux de $P_2 \circ \omega_k$ ne peuvent provenir que des monômes extrémaux de P_2, on en déduit à nouveau une famille $(\omega'_{k,1}, \dots, \omega'_{k,p_k})$, qui ne dépend que des ω_i et des monômes extrémaux de P_2, vérifiant (2.4), et telle que chaque $P_2 \circ \omega_k \circ \omega'_{k,\ell}$ possède un plus grand monôme. Il est maintenant facile de vérifier que la famille :

$$(\omega_k \circ \omega'_{k,\ell})_{\substack{1 \leq k \leq m \\ 1 \leq \ell \leq p_k}}$$

vérifie (2.4) et (2.5). Le théorème 2.1 est entièrement démontré.

3. EXISTENCE D'UN DEMI-PLAN DE CONVERGENCE

Nous nous proposons ici de préciser les questions de convergence attachées à l'étude de la série $Z(R, \underline{\eta}; s)$. Nous considérons simultanément l'intégrale

$$\mathrm{Y}(\mathrm{R}, \underline{\eta}; s) = \int_{\mathrm{L}^n} \underline{x}^{\underline{\eta}}\, \mathrm{R}(\underline{x})^{-s}\, d\underline{x}, \tag{3.1}$$

dont les propriétés analytiques nous seront utiles plus loin.

THEOREME 3.1. – *Soient* $\underline{\eta} \in \mathbf{R}^n$ *et* $\mathrm{R} = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}$ *une fraction rationnelle de* $\mathrm{D}(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n)$ *satisfaisant à la condition (1.1).*

La série $\mathrm{Z}(\mathrm{R}, \underline{\eta}; s)$ *et l'intégrale* $\mathrm{Y}(\mathrm{R}, \underline{\eta}; s)$ *possèdent une abscisse de convergence absolue commune finie* $\sigma_a = \sigma_a(\mathrm{R}, \underline{\eta})$ *qui ne dépend que de* $\underline{\eta}$ *et des monômes extrémaux de* P *et* Q*; si* $\underline{\eta} \in \mathbf{N}^n$, *alors* σ_a *est un rationnel* > 0. *De plus, dans les deux cas, il y a convergence uniforme dans chaque demi-bande horizontale fermée contenue dans le demi-plan* $\sigma > \sigma_a$ *et il y a divergence absolue pour* $\sigma = \sigma_a$.

Démonstration. – a) On désigne par P^* le polynôme déduit de P en remplaçant les coefficients de P par leur partie réelle. On définit de même Q^*, et on pose $\mathrm{R}^* = \mathrm{P}^*/\mathrm{Q}^*$, et $\rho = \max\{\rho(\mathrm{P}), \rho(\mathrm{Q})\}$ (cf (1.2)) ; on a $\rho < \pi/2$, et

$$\cos\rho\, \mathrm{R}^*(\underline{x}) \leqslant |\mathrm{R}(\underline{x})| \leqslant \frac{1}{\cos\rho}\, \mathrm{R}^*(\underline{x})\ (\underline{x} \in \mathrm{L}^n). \tag{3.2}$$

Utilisant l'égalité $|\mathrm{R}(\underline{x})^{-s}| = |\mathrm{R}(\underline{x})|^{-\sigma}\, e^{t \operatorname{Arg} \mathrm{R}(\underline{x})}$, on obtient l'estimation

$$\mathrm{R}(\underline{x})^{-s} \overset{\cup}{\cap} \mathrm{R}^*(\underline{x})^{-\sigma}\ (\underline{x} \in \mathrm{L}^n\ ; \sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2\ ; |t| \leqslant \mathrm{B}) \tag{3.3}$$

qui montre qu'on peut se restreindre au cas où P et Q sont à coefficients positifs, ce que nous supposerons dans toutes la suite de la démonstration.

b) A l'aide du théorème des accroissements finis, on obtient :

$$\underline{\nu}^{\underline{\eta}}\, \mathrm{R}(\underline{\nu})^{-\sigma} \overset{\cup}{\cap} (\underline{\nu} + \underline{\theta})^{\underline{\eta}}\, \mathrm{R}(\underline{\nu} + \underline{\theta})^{-\sigma} \tag{3.4}$$

uniformément par rapport à $\underline{\nu} \in \mathbf{N}^{*n}$, $\underline{\theta} \in [0, 1]^n$, $\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2$. En intégrant chaque terme de (3.4) sur $[0, 1]^n$ par rapport à la variable $\underline{\theta}$, et en sommant ensuite sur tous les $\underline{\nu} \in \mathbf{N}^{*n}$, on voit que l'intégrale et la série convergent ou divergent en même temps.

c) On suppose donc P et Q à coefficients positifs et on cherche les valeurs de σ pour lesquelles l'intégrale $\mathrm{Y}(\mathrm{R}, \underline{\eta}; \sigma)$ converge.

Soit $(\omega_1, \ldots, \omega_m)$ une famille d'éléments de Ω_n associée aux monômes extrémaux de P et Q vérifiant (2.4) et (2.5). Pour chaque $k, 1 \leqslant k \leqslant m$, $P \circ \omega_k$ et $Q \circ \omega_k$ possèdent un plus grand monôme ; on peut donc écrire $R \circ \omega_k(\underline{x}) = \underline{x}^{\underline{\lambda}_k} f_k(\underline{x})$.

Dans cette identité, f_k désigne une fraction rationnelle en $\dfrac{1}{x_1}, \ldots, \dfrac{1}{x_n}$, à coefficients positifs, non nulle à l'infini, et qui vérifie donc : $f_k(\underline{x}) \underset{\cap}{\cup} 1 \ (\underline{x} \in L^n)$.

De plus, l'hypothèse (1.1) implique que chaque $\lambda_{kj}(1 \leqslant k \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n)$ est un entier > 0.

Maintenant, en utilisant successivement (2.6) et (2.2), on obtient :

$$\begin{aligned}\int_{L^n} \underline{x}^{\underline{\eta}} R(\underline{x})^{-\sigma} d\underline{x} &= \sum_{k=1}^{m} \int_{L^n} R \circ \omega_k(\underline{x})^{-\sigma} (\omega_k \underline{x})^{\underline{\eta}} |J_{\omega_k}(\underline{x})| d\underline{x} \\ &= \sum_{k=1}^{m} C_k \int_{L^n} \underline{x}^{-\sigma\underline{\lambda}_k + \underline{\mu}_k - \underline{1}} f_k(\underline{x})^{-\sigma} d\underline{x}\end{aligned}$$

avec $C_k > 0$ et $\underline{\mu}_k \in \mathbf{R}^n$; si $\underline{\eta} \in \mathbf{N}^n$, alors $\underline{\mu}_k \in \mathbf{N}^n$.

On vérifie alors que toutes les propriétés annoncées sont satisfaites si on prend

$$\sigma_a(R, \underline{\eta}) = \max \{\mu_{kj}(\lambda_{kj})^{-1} / 1 \leqslant k \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n\}.$$

Le résultat suivant découle simplement de l'étude précédente :

LEMME 3.2. – *Le nombre* $\sigma_a(R, \underline{\eta})$ *est le plus petit des réels* σ *satisfaisant à la majoration :*

$$|R(\underline{x})|^{\sigma} \gg \underline{x}^{\underline{\eta}+\underline{1}} \quad (\underline{x} \in L^n).$$

Démonstration. – Avec les notations précédentes, on a :

$$(\omega_k \underline{x})^{\underline{\eta}} (R \circ \omega_k(\underline{x}))^{-\sigma} |J_{\omega_k}(\underline{x})| = C_k \underline{x}^{-\sigma\underline{\lambda}_k + \underline{\mu}_k - \underline{1}} f_k(\underline{x})^{-\sigma}$$

pour chaque $k(1 \leqslant k \leqslant m)$ et $\underline{x} \in L^n$. Mais, pour $\sigma \geqslant \sigma_a$, on a $\mu_{kj} - \sigma\lambda_{kj} \leqslant 0 \ (1 \leqslant k \leqslant m ; 1 \leqslant j \leqslant n)$, d'où :

$$|R \circ \omega_k(\underline{x})|^{\sigma} \gg (\omega_k \underline{x})^{\underline{\eta}} \underline{x}^{\underline{1}} |J_{\omega_k}(\underline{x})| \ (\underline{x} \in L^n)$$

et aussi $\gg (\omega_k\, \underline{x})^{\underline{\eta}+\underline{1}}$ d'après (2.2). On en déduit

$$|R(\underline{x})|^\sigma \gg \underline{x}^{\underline{\eta}+\underline{1}} \quad (\underline{x} \in \omega_k(L^n)). \tag{3.5}$$

Cette dernière majoration, vraie pour $\underline{x} \in \omega_k(L^n)$, l'est aussi pour $\underline{x} \in \bigcup\limits_1^m \omega_k(L^n)$, donc pour $\underline{x} \in L^n$, et pour chaque $\sigma \geqslant \sigma_a$.

D'autre part, pour $\sigma < \sigma_a$, la majoration (3.5) ne peut avoir lieu pour chaque k, d'où le lemme.

Remarque 3.3. – Pour montrer que $\sigma_a(R, \underline{\eta})$ ne dépend que de $\underline{\eta}$ et des monômes extrémaux de P et Q, on peut procéder directement, sans utiliser le théorème 2.1 : on désigne par P_0 le polynôme obtenu en faisant la somme des monômes extrémaux ; définissant de même Q_0, on pose $R_0 = R_0/Q_0$. Notre assertion est alors conséquence de l'estimation élémentaire :

$$R(\underline{x}) \underset{\cap}{\cup} R_0(\underline{x}) \quad (\underline{x} \in L^n).$$

Remarque 3.4. – Si $P \in D[X_1, \ldots, X_n]$ n'est pas à coefficients positifs, il se peut que $\sigma_a = \sigma_a(P, \underline{\eta})$ ne soit pas un pôle pour $Y(s) = Y(P, \underline{\eta}; s)$. Par exemple, si on prend $n = 2$, $P(x_1, x_2) = a x_1 x_2 + b x_2 = (a x_1 + b) x_2$, et $\underline{\eta} = (2, 4)$, alors on a $\sigma_a = 5$, et

$$\begin{aligned} Y(s) &= \int_1^\infty \int_1^\infty x_1^2\, x_2^4\, P(x_1, x_2)^{-s}\, dx_1\, dx_2 \\ &= \left(\int_1^\infty \frac{x_1^2}{(a x_1 + b)}\, s\, dx_1\right) \left(\int_1^\infty x_2^{4-s}\, dx_2\right) = \frac{f(s)}{s-5}, \end{aligned}$$

où f est une fonction holomorphe de s pour $\sigma > 3$. Pour un choix convenable de a et b dans D, on a $f(5) = 0$.

4. PROLONGEMENT MEROMORPHE DE LA FONCTION $Y(R, \underline{\eta}; s)$

On établit maintenant l'analogue des théorèmes 1.2, 1.3 et 1.4 pour l'intégrale Y, en vue de l'étude de la série Z qui sera faite aux paragraphes 5 et 6.

4.1. Préliminaires.

Le prolongement méromorphe de la fonction

$$\lambda \longrightarrow \int_0^1 x^\lambda f(x)\, dx$$

s'obtient naturellement au moyen d'intégrations par parties (cf [9]). La généralisation au cas des intégrales multiples :

$$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \longrightarrow \int_0^1 \ldots \int_0^1 x_1^{\lambda_1} \ldots x_n^{\lambda_n} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$$

implique des écritures extrêmement lourdes; aussi est-il préférable, dans le cas où f est analytique, d'utiliser les "contours de Hankel", dont on rappelle maintenant les propriétés essentielles.

Pour $\epsilon > 0$ assez petit, on définit le contour de Hankel I_ϵ comme étant le "chemin limite" dans $\mathbf{C}\backslash\mathbf{R}_+$ qui part du point $1 + i0$, suit l'axe réel jusqu'au point $\epsilon + i0$, décrit le cercle C_ϵ de centre 0 et de rayon ϵ dans le sens direct, puis suit à nouveau l'axe réel de $\epsilon - i0$ à $1 - i0$. Rappelant la convention, concernant la notation ξ^s, établie au § 0, on obtient le :

LEMME 4.1. – *Soient $f(z_1, \ldots, z_n)$ une fonction holomorphe au voisinage de $[0, 1]^n$ dans $\mathbf{C}^n$, et $\underline{\lambda}$ un élément de $\mathbf{C}^n$ vérifiant $\operatorname{Re} \lambda_j > 0$ et $\lambda_j \notin \mathbf{N}$ pour chaque j. Alors pour $\epsilon > 0$ assez petit, on a :*

$$\int_{I^n} \underline{x}^{\underline{\lambda}} f(\underline{x}) \frac{dx_1}{x_1} \cdots \frac{dx_n}{x_n}$$

$$= \frac{1}{\prod_{j=1}^{n} [e(\lambda_j) - 1]} \int_{I_\epsilon^n} \underline{z}^{\underline{\lambda}} f(\underline{z}) \frac{dz_1}{z_1} \cdots \frac{dz_n}{z_n},$$

où, dans l'intégrale de droite, on doit prendre $\underline{z}^{\underline{\lambda}}$ égal à

$$\exp\left(\sum_1^n \lambda_j \log z_j\right).$$

La démonstration du lemme 4.1 se déduit, par itération, de celle, classique, du cas $n = 1$ (cf [15], § 4.41).

On achève ces préliminaires par l'énoncé de quelques résultats extrêmement simples ; ceux-ci ont été introduits pour alléger les démonstrations du § 4.2, dans lesquelles on en fera, sans le mentionner, un usage constant.

LEMME 4.2. – *Soient* $z_1, \dots, z_n \in \mathrm{D}$ *vérifiant*

$$\operatorname{Arg} z_j \leqslant \rho < \pi/2 \ (j = 1, \dots, m).$$

Alors on a $\left|\operatorname{Arg}\left(\sum_1^m z_j\right)\right| \leqslant \rho$, et $\left|\sum_1^m z_j\right| \geqslant \cos\rho \ \sum_1^m |z_j|$.

On rappelle que la fonction $\xi \longrightarrow \operatorname{Arg}\xi$ a été définie, au § 0, dans $\mathbf{C}\backslash\mathbf{R}_-$. On obtient un prolongement naturel de la fonction $\xi \longrightarrow |\operatorname{Arg}\xi|$ à $\mathbf{C}\backslash\{0\}$ en posant $|\operatorname{Arg}\xi| = \pi$ lorsque ξ est un réel négatif.

LEMME 4.3. – *Soient* u *et* v *deux nombres complexes de module* 1. *Pour tout* $\mathrm{K} > 1$, *on a :*

$$|\operatorname{Arg}(u + v/\mathrm{K})| \leqslant |\operatorname{Arg} u| + \frac{\pi}{2\mathrm{K}}.$$

LEMME 4.4. – *Soient* u *et* $v \in \mathrm{D}$, *de module* 1, *vérifiant* $|\operatorname{Arg} v| \leqslant |\operatorname{Arg} u| + \theta$ $(0 \leqslant \theta < \pi/2 - \operatorname{Arg} u)$. *Pour tout* $\mathrm{K} > 1$, *on a :* $|\operatorname{Arg}(u + v/\mathrm{K})| \leqslant |\operatorname{Arg} u| + \theta/\mathrm{K}$.

En particulier, si $u \in \mathrm{D}$ et $v \in \mathbf{C}$ ont même module, on a, pour tout $\rho \in [0, \pi/2[$,

$$|\operatorname{Arg}(u + v/\mathrm{K})| \leqslant |\operatorname{Arg} u| + \mathrm{O}(\theta/\mathrm{K}), \tag{4.1}$$

uniformément pour $\theta \geqslant 0$, $\mathrm{K} > 1$,

$$|\operatorname{Arg} u| \leqslant \rho, \ |\operatorname{Arg} v| \leqslant |\operatorname{Arg} u| + \theta.$$

4.2. Cas où P et Q ont chacun un plus grand monôme.

Nous nous proposons de construire le prolongement méromorphe de la fonction $s \longmapsto \mathrm{Y}(\mathrm{R}, \underline{\eta}\,; s)$ dans le cas le plus simple : celui où P et Q possèdent chacun un plus grand monôme. On pose :

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{P}(\underline{x}) = a_{\underline{\alpha}}\, \underline{x}^{\underline{\alpha}} + \sum\limits_{\underline{\gamma}<\underline{\alpha}} a_{\underline{\gamma}}\, \underline{x}^{\underline{\gamma}},\ \mathrm{Q}(\underline{x}) = b_{\underline{\beta}}\, \underline{x}^{\underline{\beta}} + \sum\limits_{\underline{\gamma}<\underline{\beta}} b_{\underline{\gamma}}\, \underline{x}^{\underline{\gamma}} \\ (a_{\underline{\alpha}} \neq 0\,,\ b_{\underline{\beta}} \neq 0\,;\, \alpha_j > \beta_j\,, j = 1\,,\ldots, n) \\ \underline{\lambda} = \underline{\alpha} - \underline{\beta}\,, \underline{\mu} = \underline{\eta} + \underline{1}\,, \mathrm{N} = \ \ \mathrm{p.p.c.m}(\lambda_1\,,\ldots,\lambda_n). \end{array}\right. \tag{4.2}$$

D'autre part, si $\mathrm{H}(\underline{x}) = c_{\underline{\delta}}\, \underline{x}^{\underline{\delta}} + \sum\limits_{\underline{\gamma}<\underline{\delta}} c_{\underline{\gamma}}\, \underline{x}^{\underline{\gamma}}$ est un polynôme possédant un plus grand monôme $\underline{x}^{\underline{\delta}}$, on pose

$$\hat{\mathrm{H}}(\underline{x}) = \underline{x}^{\underline{\delta}}\, \mathrm{H}\left(\frac{1}{x_1}\,,\ldots,\frac{1}{x_n}\right) = c_{\underline{\delta}} + \sum_{\substack{\underline{\gamma}\leq\underline{\delta} \\ \underline{\gamma}\neq\underline{0}}} c_{\underline{\delta}-\underline{\gamma}}\, \underline{x}^{\underline{\gamma}}\,. \tag{4.3}$$

Soit également $\hat{\mathrm{R}} = \hat{\mathrm{P}}/\hat{\mathrm{Q}}$.

Par le changement de variables $(x_1\,,\ldots,x_n) \longmapsto \left(\frac{1}{x_1}\,,\ldots,\frac{1}{x_n}\right)$ on obtient, pour $\sigma > \sigma_a$:

$$\mathrm{Y}(\mathrm{R}\,,\underline{\eta}\,;s) = \int_{\mathrm{I}^n} \underline{x}^{s\underline{\lambda}-\underline{\mu}}\, \hat{\mathrm{R}}(\underline{x})^{-s}\, \frac{dx_1}{x_1} \cdots \frac{dx_n}{x_n}\,. \tag{4.4}$$

On cherche maintenant à appliquer le lemme 4.1. Soit

$$\mathrm{V}_\epsilon = \{\xi \in \mathbf{C}/|\xi| \leq \epsilon \ \text{ ou bien } \ \xi \in [0\,,1]\}.$$

Pour $\underline{z} \in \mathrm{V}_\epsilon^n$, on peut écrire $\hat{\mathrm{P}}(\underline{z}) = u(\underline{z}) + \mathrm{O}(\epsilon)$, avec $|\mathrm{Arg}\, u(\underline{z})| \leq \rho(\mathrm{P})$, d'où $|\mathrm{Arg}\, \hat{\mathrm{P}}(\underline{z})| \leq \rho(\mathrm{P}) + \mathrm{O}(\epsilon)$, et de même $|\mathrm{Arg}\, \hat{\mathrm{Q}}(\underline{z})| \leq \rho(\mathrm{Q}) + \mathrm{O}(\epsilon)$. Pour $\epsilon > 0$ assez petit, $\hat{\mathrm{P}}(\underline{z})$ et $\hat{\mathrm{Q}}(\underline{z})$ sont dans D lorsque $\underline{z}$ reste dans un voisinage de V_ϵ^n dans $\mathbf{C}^n$, et la fonction $\underline{z} \longmapsto \hat{\mathrm{R}}(\underline{z})^{-s} = \exp(-s\, \mathrm{Log}\, \hat{\mathrm{R}}(\underline{z}))$ est holomorphe dans ce voisinage. On obtient donc, pour $\epsilon > 0$ assez petit et $\sigma > \sigma_a$:

$$\mathrm{Y}(\mathrm{R}\,,\underline{\eta}\,;s) = \prod_{j=1}^{n} (e(s\lambda_j) - 1)^{-1} \int_{\mathrm{I}_\epsilon^n} \underline{z}^{s\underline{\lambda}-\underline{\mu}}\, \hat{\mathrm{R}}(\underline{z})^{-s}\, \frac{dz_1}{z_1} \cdots \frac{dz_n}{z_n}\,, \tag{4.5}$$

où l'on a posé $\underline{z}^{s\underline{\lambda}-\underline{\mu}} = \exp\left(\sum\limits_{j=1}^{n} (s\lambda_j - \mu_j) \log z_j\right)$.

L'intégrale figurant au second membre de (4.5) est bien définie pour toutes les valeurs de s, et représente une fonction entière. D'autre part, la fonction $s \longmapsto \prod\limits_{j=1}^{n} (e(s\lambda_j) - 1)^{-1}$ est une fonction méromorphe dans $\mathbf{C}$; ses pôles sont d'ordre $\leq n$ et situés aux points $s = k/\mathrm{N}$, $k \in \mathbf{Z}$. La formule (4.5) constitue donc une écriture du prolongement méromorphe de $\mathrm{Y}(\mathrm{R}, \underline{\eta}\,;.)$. Nous avons prouvé le résultat suivant :

LEMME 4.5. – *Conservons les notations* (4.2). *La fonction* $\mathrm{Y}(\mathrm{R}, \underline{\eta}\,; s)$, *définie et holomorphe dans le demi-plan* $\sigma > \sigma_a$, *admet un prolongement méromorphe à tout le plan complexe, explicité par la formule* (4.5). *Ses pôles sont réels, d'ordre* $\leqslant n$, *et situés dans l'ensemble* $\sigma_a - \frac{\mathbf{N}}{\mathrm{N}}$.

On veut maintenant majorer $\mathrm{Y}(\mathrm{R}, \underline{\eta}\,; s)$ lorsque la variable s reste dans une demi-bande verticale située en deçà de l'abscisse de convergence absolue. Pour les besoins des § 5 et 6, on cherche des majorations uniformes par rapport aux coefficients de P et Q.

On conserve les notations (4.2) ; on pose également $\rho = \rho(\mathrm{P}) + \rho(\mathrm{Q})$ (cf (1.2)) et

$$\mathrm{M} = \max\{|a_{\underline{\gamma}}|, |b_{\underline{\delta}}|\,; \underline{\gamma} \in \operatorname{supp} \mathrm{P}, \underline{\delta} \in \operatorname{supp} \mathrm{Q}\}\ ;$$

On suppose enfin qu'on a $\operatorname{Re} a_{\underline{\alpha}} \geqslant 1$ et $\operatorname{Re} b_{\underline{\beta}} \geqslant 1$.

LEMME 4.6. – *Dans ces conditions, on a la majoration*

$$\mathrm{Y}(\mathrm{R}, \underline{\eta}\,; s) \ll e^{\rho|t|}\, \mathrm{M}^{|\sigma|+|\underline{\eta}|+2n}\,(1 + \mathrm{M}^{-\sigma|\underline{\lambda}|}) \tag{4.6}$$

uniformément pour $|t| \geqslant 1, \sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2, \mathrm{M} \geqslant 1$, $\rho(\mathrm{P})$ *et* $\rho(\mathrm{Q}) \leqslant \rho_0 < \pi/2$.

Démonstration. – a) Le point de départ est la formule (4.5) dans laquelle on choisit $\epsilon = (\mathrm{KM})^{-1}$, K étant une constante assez grande, qui ne dépend que de ρ_0 et de $\underline{\alpha}$, à fixer ultérieurement.

Dans un premier temps, on remarque que, pour $\underline{z} \in \mathrm{V}_\epsilon^n$, on a, grâce à la condition $\operatorname{Re} a_{\underline{\alpha}} \geqslant 1$ et $\operatorname{Re} b_{\underline{\beta}} \geqslant 1$:

$$|\operatorname{Arg} \hat{\mathrm{P}}(\underline{z})| \leqslant \rho(\mathrm{P}) + \mathrm{O}(1/\mathrm{K}),$$

et

$$|\operatorname{Arg} \hat{\mathrm{Q}}(\underline{z})| \leqslant \rho(\mathrm{Q}) + \mathrm{O}(1/\mathrm{K}).$$

Ceci montre que pour $\mathrm{K} \geqslant \mathrm{K}_1$ (K_1 ne dépendant que de $\underline{\alpha}$), la formule (4.5) est justifiée comme précédemment.

b) Pour transformer l'intégrale $\int_{\mathrm{I}_\epsilon^n} f(\underline{z})\, d\underline{z}$ qui apparaît dans le deuxième membre de (4.5), on décompose I_ϵ en trois parties : le segment orienté $[1 + i0, \epsilon + i0]$ que, pour des raisons qui apparaîtront plus loin, nous noterons I', le segment orienté $[\epsilon - i0, 1 - i0]$ noté I'', et le cercle C_ϵ parcouru dans le sens direct, noté I^*, de façon à obtenir la décomposition :

$$\int_{\mathrm{I}_\epsilon} = \int_{\mathrm{I}'} + \int_{\mathrm{I}''} + \int_{\mathrm{I}^*} .$$

On procède ainsi pour chacune des n intégrations successives dans l'expression $\int_{\mathrm{I}_\epsilon^n}$. On obtient alors $\int_{\mathrm{I}_\epsilon^n} f(\underline{z})\, d\underline{z}$ comme la somme des 3^n termes qui sont tous, moyennant une permutation des coordonnées, de la forme :

$$\int_{\mathrm{I}'^{n'}} d\underline{z}' \int_{\mathrm{I}''^{n''}} d\underline{z}'' \int_{\mathrm{I}^{*n^*}} f(\underline{z}', \underline{z}'', \underline{z}^*)\, d\underline{z}^* ; \tag{4.7}$$

dans cette écriture, n', n'' et n^* désignent trois entiers $\geqslant 0$ dont la somme est n, et on a posé $\underline{z}' = (z_1', \dots, z_{n'}') = (z_1, \dots, z_{n'})$, $\underline{z}'' = (z_1'', \dots, z_{n''}'') = (z_{n'+1}, \dots, z_{n'+n''}')$, et

$$\underline{z}^* = (z_1^*, \dots, z_{n^*}^*) = (z_{n'+n''+1}, \dots, z_n).$$

c) Pour des raisons de symétrie, on peut, pour prouver (4.6), se restreindre au cas où t est positif. On suppose donc dans toute la suite $t \geqslant 1$. Alors on a $\prod_{j=1}^{n} (e(s\lambda_j) - 1)^{-1} = \mathrm{O}(1)$, et il suffit de majorer l'intégrale

$$\int_{\mathrm{I}_\epsilon^n} \underline{z}^{s\underline{\lambda}-\underline{\mu}}\, \mathrm{R}(\underline{z})^{-s} \frac{dz_1}{z_1} \cdots \frac{dz_n}{z_n} .$$

On pose, pour simplifier, $\underline{\chi} = \underline{\eta} + \underline{2} = \underline{\mu} + \underline{1}$. Etant donnés n', n'' et n^* comme précédemment, on pose $\underline{z} = (\underline{z}', \underline{z}'', \underline{z}^*)$, $\underline{\lambda} = (\underline{\lambda}', \underline{\lambda}'', \underline{\lambda}^*)$ et $\underline{\chi} = (\underline{\chi}', \underline{\chi}'', \underline{\chi}^*)$ ($\underline{\lambda}'$ étant défini comme $\underline{z}'$, etc...). Le terme correspondant à (4.7) s'écrit :

$$\int_{\mathrm{I}'^{n'}} \underline{z}'^{s\underline{\lambda}'-\underline{\chi}'}\, d\underline{z}' \int_{\mathrm{I}''^{n''}} \underline{z}''^{s\underline{\lambda}''-\underline{\chi}''}\, d\underline{z}'' \int_{\mathrm{I}^{*n^*}} \underline{z}^{*s\underline{\lambda}^*-\underline{\chi}^*}\, \widehat{\mathrm{R}}(\underline{z})^{-s}\, d\underline{z}^* \tag{4.8}$$

Il reste à vérifier que le terme (4.8) vérifie la majoration (4.6).

d) Soit $\underline{z} = (\underline{z}', \underline{z}'', \underline{z}^*) \in \mathrm{I}'^{n'} \times \mathrm{I}''^{n''} \times \mathrm{I}^{*n^*}$. On pose
$\underline{z}^* = (\epsilon\, e^{i\theta_1}, \ldots, \epsilon\, e^{i\theta_{n^*}})$ $(0 < \theta_\ell < 2\pi, \ell = 1, \ldots, n^*)$.

On regroupe les termes de $\hat{\mathrm{P}}(\underline{z})$ en deux parties : la première est formée de tous les monômes où n'apparaît aucun des $z_\ell^*(\ell = 1, \ldots, n^*)$, la deuxième étant constituée des autres monômes. On obtient alors l'écriture $\hat{\mathrm{P}}(\underline{z}) = u(\underline{z}', \underline{z}'') + v(\underline{z})$, avec $|\mathrm{Arg}\, u(\underline{z}', \underline{z}'')| \leqslant \rho(\mathrm{P})$, $|u(\underline{z}', \underline{z}'')| \geqslant 1$,

$$|\mathrm{Arg}\, v(\underline{z})| \leqslant \rho(\mathrm{P}) + \sum_{\ell=1}^{n^*} \alpha_\ell^*\, \theta_\ell ,$$

et $v(\underline{z}) = \mathrm{O}(1/\mathrm{K})$. On en déduit :

$$|\mathrm{Arg}\, \hat{\mathrm{P}}(\underline{z})| \leqslant \rho(\mathrm{P}) + \mathrm{O}\Big(\frac{1}{\mathrm{K}} \sum_1^{n^*} \alpha_\ell^*\, \theta_\ell\Big).$$

Si on fait de même pour $\hat{\mathrm{Q}}$, on trouve

$$|\mathrm{Arg}\, \hat{\mathrm{R}}(\underline{z})| \leqslant \rho + \mathrm{O}\Big(\frac{1}{\mathrm{K}} \sum_1^{n^*} (\alpha_\ell^* + \beta_\ell^*)\, \theta_\ell\Big).$$

Pour $\mathrm{K} \geqslant \mathrm{K}_2$ (K_2 ne dépendant que de $\underline{\alpha}$ et de ρ_0), on obtient
$|\mathrm{Arg}\, \hat{\mathrm{R}}(\underline{z})| \leqslant \rho + 1/2 \sum_1^{n^*} \theta_\ell$, pour $\underline{z} \in \mathrm{I}'^{n'} \times \mathrm{I}''^{n''} \times \mathrm{I}^{*n^*}$.
D'autre part, on a $\mathrm{M}^{-1} \ll \hat{\mathrm{R}}(\underline{z}) \ll \mathrm{M}$ $(\underline{z} \in \mathrm{I}^n)$, d'où finalement :

$$\hat{\mathrm{R}}(\underline{z})^{-s} \ll e^{\rho t}\, \mathrm{M}^{|\sigma|} \exp\Big(\frac{t}{2} \sum_1^{n^*} \theta_\ell\Big) \tag{4.9}$$

uniformément pour $t \geqslant 1$, $\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2$, $\underline{z} \in \mathrm{I}'^{n'} \times \mathrm{I}''^{n''} \times \mathrm{I}^{*n^*}$, $\mathrm{M} \geqslant 1$. On majore maintenant $|\underline{z}^{s\underline{\lambda} - \underline{\mu}}|$; on a

$$|\underline{z}'^{s\underline{\lambda}' - \underline{x}'}| \leqslant \prod_{j=1}^{n'} (1 + \epsilon^{\sigma\lambda_j' - x_j'}),$$

$$|\underline{z}''^{s\underline{\lambda}'' - \underline{x}''}| \leqslant e^{-2\pi t|\underline{\lambda}''|} \prod_{k=1}^{n''} (1 + \epsilon^{\sigma\lambda_k'' - x_k''}),$$

et

$$|\underline{z}^{*s\underline{\lambda}^* - \underline{x}^*}| \leqslant \epsilon^{\sigma|\underline{\lambda}^*| - |\underline{x}^*|} \exp\Big(-t \sum_1^{n^*} \lambda_\ell^*\, \theta_\ell\Big),$$

d'où

$$|\underline{z}^{s\underline{\lambda} - \underline{\mu}}| \leqslant 2^n\, \epsilon^{-|\underline{x}|} (1 + \epsilon^{\sigma|\underline{\lambda}|}) \exp\Big(-t \sum_1^{n^*} \theta_\ell\Big) \tag{4.10}$$

pour $\underline{z} \in \mathrm{I}'^{n'} \times \mathrm{I}''^{n''} \times \mathrm{I}^{*n^*}$ et $t > 0$. Si on reporte (4.9) et

(4.10) dans (4.8), en remplaçant ϵ par $(\mathrm{KM})^{-1}$, on obtient la majoration annoncée, et le lemme 4.6 est démontré.

4.3. Cas général.

Soient $\mathrm{R} = \mathrm{P}/\mathrm{Q} \in \mathrm{D}(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n)$ vérifiant (1.1), et $\underline{\eta} \in \mathbf{N}^n$. Nous allons voir que le cas général où P et Q ne possèdent pas nécessairement un plus grand monôme se ramène à l'étude faite à la section précédente.

A la famille des monômes extrémaux de P et à celle de Q, on associe $\omega_1, \ldots, \omega_m \in \Omega_n$, vérifiant (2.4), de façon que chacun des polynômes $\mathrm{P} \circ \omega_k$ et $\mathrm{Q} \circ \omega_k$ possède un plus grand monôme. D'après (2.6), on a :

$$\mathrm{Y}(\mathrm{R}, \underline{\eta}; s) = \sum_{k=1}^{m} \int_{\mathrm{L}^n} (\omega_k \underline{x})^{\underline{\eta}} \, \mathrm{R} \circ \omega_k(\underline{x})^{-s} \, |\mathrm{J}_{\omega_k}(\underline{x})| \, d\underline{x}.$$

Mais $(\omega_k \underline{x})^{\underline{\eta}}$ est un monôme, et $\mathrm{J}_{\omega_k}(\underline{x})$ est le produit d'un entier par un monôme ; on peut donc poser :

$$(\omega_k \underline{x})^{\underline{\eta}} |\mathrm{J}_{\omega_k}(\underline{x})| = c_k \, \underline{x}^{\underline{\eta}_k} \; ; \; \mathrm{P} \circ \omega_k = \mathrm{P}_k \; ; \; \mathrm{Q} \circ \omega_k = \mathrm{Q}_k \; ; \; \mathrm{R}_k = \frac{\mathrm{P}_k}{\mathrm{Q}_k}. \tag{4.11}$$

Avec ces notations, on obtient la formule :

$$\mathrm{Y}(\mathrm{R}, \underline{\eta}; s) = \sum_{k=1}^{m} c_k \int_{\mathrm{L}^n} \underline{x}^{\underline{\eta}_k} \, \mathrm{R}_k(\underline{x})^{-s} \, d\underline{x} = \sum_{k=1}^{m} c_k \, \mathrm{Y}(\mathrm{R}_k, \underline{\eta}_k; s),$$

qui permet de ramener l'étude de $\mathrm{Y}(\mathrm{R}, \underline{\eta}; s)$ à celle du cas déjà traité où P et Q ont chacun un plus grand monôme. On remarque que si R vérifie (1.1), il en est de même de chaque R_k, et qu'on a $\sigma_a(\mathrm{R}, \underline{\eta}) = \max_k \sigma_a(\mathrm{R}_k, \underline{\eta}_k)$. Comme conséquence immédiate de (4.12) et du lemme 4.5, on obtient le

THEOREME 4.7. – *Soient* $\mathrm{R} = \mathrm{P}/\mathrm{Q} \in \mathrm{D}(\mathrm{X}_1, \ldots \mathrm{X}_n)$ *vérifiant (1.1),* $\underline{\eta} \in \mathbf{N}^n$ *et* $\sigma_a = \sigma_a(\mathrm{R}, \underline{\eta})$.

La fonction $\mathrm{Y}(\mathrm{R}, \underline{\eta}; s)$, *définie et holomorphe dans le demi-plan* $\sigma > \sigma_a$, *admet un prolongement méromorphe à tout le plan complexe. Ses pôles sont réels, d'ordre* $\leqslant n$, *et situés dans un* *ensemble de la forme* $\sigma_a - \frac{1}{N}\mathbf{N}$, *et il existe un entier* N^*, *ne dépendant que des monômes extrémaux de* P *et* Q, *tel que* N *divise* N^*.

La formule (4.12) permet également de généraliser le lemme 4.6. On introduit d'abord les notations :

$$\left\{\begin{array}{l} P(\underline{x}) = \sum_{\underline{\alpha}} a_{\underline{\alpha}} \underline{x}^{\underline{\alpha}}, Q(\underline{x}) = \sum_{\underline{\beta}} a_{\underline{\beta}} \underline{x}^{\underline{\beta}} \\ M = \max \{ |a_{\underline{\alpha}}|, |b_{\underline{\beta}}| / \underline{\alpha} \in \operatorname{supp} P, \underline{\beta} \in \operatorname{supp} Q\} \\ \rho = \rho(P) + \rho(Q). \end{array}\right. \tag{4.13}$$

On suppose en outre que si $\underline{x}^{\underline{\alpha}}$ est un monôme extrémal de P (resp. de Q), alors on a $\operatorname{Re} a_{\underline{\alpha}} \geqslant 1$ (resp. $\operatorname{Re} b_{\underline{\alpha}} \geqslant 1$).

THEOREME 4.8. – *Sous l'hypothèse précédente, il existe une constante* $B_1 > 0$ *qui ne dépend que des monômes extrémaux de* P *et* Q, *et une constante* $B_2 > 0$ *qui dépend en outre de* $\underline{\eta}$, *telles que, pour chaque* σ_1 *et* $\sigma_2 \in \mathbf{R}$ $(\sigma_1 < \sigma_2)$ *et chaque* $\rho_0 \in [0, \pi/2[$, *on ait*

$$Y(R, \underline{\eta}; s) \ll e^{\rho|t|}(1 + M^{-B_1\sigma}) M^{|\sigma| + B_2} \tag{4.14}$$

uniformément pour $|t| \geqslant 1$, $\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2$, $M \geqslant 1$, $\rho(P)$ et $\rho(Q) \leqslant \rho_0$.

4.4. Coefficients de la série de Laurent de la fonction Y aux pôles.

Nous allons maintenant établir les résultats concernant l'ordre des pôles aux entiers négatifs et la nature de certains coefficients du développement en série de Laurent de Y aux pôles. Nous montrerons au § 5 que, dans le cas $n \geqslant 2$, ces coefficients sont les mêmes pour Y et pour Z.

THEOREME 4.9. – *Soit* K *le sous-corps de* $\mathbf{C}$ *engendré par les coefficients de* P *et* Q. *Si* s_0 *est un pôle pour* $Y(R, \underline{\eta}; .)$, *on pose :* $Y(R, \underline{\eta}; s) = \sum_{\ell \geqslant -n} v_\ell(s_0)(s - s_0)^\ell$. *Alors*

(i) $v_{-n}(s_0)$ *est algébrique sur* K

(ii) $v_{-n}(0) = 0$ *et* $v_{-n+1}(0) \in K$; *si* $s_0 \in -\mathbf{N}$ *alors* $v_{-n}(s_0) \in K$

(iii) *si* $Q \equiv 1$, *et si* s_0 *est un entier négatif, alors* $v_{-n}(s_0) = 0$ *et* $v_{-n+1}(s_0) \in K$.

Démonstration. – La formule (4.12) permet de se ramener au cas où P et Q possèdent chacun un plus grand monôme, hypothèse que nous supposerons vérifiée dans la suite. On adopte alors les notations (4.2), et on prend comme point de départ la formule (4.5).

On pose $Y(s) = Y(R, \underline{\eta}\,; s) = f(s)\, g(s)$, avec

$$f(s) = \frac{(2i\pi)^n}{\prod_{j=1}^{n} (e(s\lambda_j) - 1)}, \text{ et}$$

$$g(s) = \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{\Gamma_\epsilon^n} \underline{z}^{s\underline{\lambda} - \underline{\mu}}\, \hat{R}(\underline{z})^{-s} \frac{dz_1}{z_1} \cdots \frac{dz_n}{z_n}$$

(on rappelle que les λ_j et μ_j sont des entiers > 0) ;

a) On suppose que s_0 est un pôle d'ordre n pour f, ou, ce qui est équivalent, que $s_0\, \lambda_j$ est entier pour chaque j. On a alors, au voisinage de s_0,

$$f(s) = \frac{1}{\lambda_1 \ldots \lambda_n} (s - s_0)^{-n} + O(|s - s_0|^{-n+1}),$$

et donc

$$Y(s) = \frac{g(s_0)}{\lambda_1 \ldots \lambda_n} (s - s_0)^{-n} + O(|s - s_0)|^{-n+1}). \quad (4.15)$$

Pour calculer $g(s_0)$, on remarque que, d'après l'hypothèse "$s_0^{\lambda_j} \in \mathbf{Z}$ pour chaque j", la fonction $\underline{z} \longrightarrow \underline{z}^{s_0 \underline{\lambda} - \underline{\mu}}$, définie au moyen de la fonction "log" (cf lemme 4.1), est holomorphe dans $(\mathbf{C} \setminus \{0\})^n$; par conséquent :

$$g(s_0) = \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{C_\epsilon^n} \underline{z}^{s_0 \underline{\lambda} - \underline{\mu}}\, \hat{R}(\underline{z})^{-s_0} \frac{dz_1}{z_1} \cdots \frac{dz_n}{z_n},$$

où C_ϵ désigne le cercle de centre 0 et de rayon ϵ parcouru dans le sens direct. Pour que s_0 soit un pôle pour Y, il est nécessaire d'avoir $s_0 \leqslant \sigma_a$, ou encore $\mu_j - s_0\, \lambda_j \geqslant 0$ pour chaque j.

On a donc, pour $s_0 \leqslant \sigma_a$,

$$g(s_0) = \frac{1}{(\underline{\mu} - s_0\,\underline{\lambda})!}\; d_{\underline{x}}^{\underline{\mu} - s_0 \underline{\lambda}} \left(\hat{R}(\underline{x})^{-s_0}\right)\Big|_{\underline{x}=\underline{0}} \tag{4.16}$$

$\left(\text{avec la notation } \underline{\alpha}! = \alpha_1 ! \dots \alpha_n ! \text{ et } d_{\underline{x}}^{\underline{\alpha}} = \dfrac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}\right)$.

De (4.16), on déduit que, dans tous les cas, $g(s_0)$ est algébrique sur K, puisque s_0 est rationnel. Si de plus s_0 est un entier négatif, alors $g(s_0)$ est dans K. D'autre part, $g(0)$ s'exprime comme la dérivée d'ordre > 0 d'une fonction constante, et $g(0)$ est nul.

Enfin, si on suppose $Q \equiv 1$ et $s_0 = -q \in -\mathbf{N}$, alors $g(s_0)$ s'exprime comme une dérivée, d'ordre $\mu_j + q\lambda_j$ par rapport à chaque x_j, d'un polynôme dont le degré par rapport à x_j est $q\lambda_j$; cela implique que $g(s_0)$ est encore nul dans ce cas.

Par (4.15), toutes ces propriétés établies pour $g(s_0)$ sont également valables pour $v_{-n}(s_0)$.

Il reste à voir que $v_{-n+1}(0)$ est dans K, et que, si $Q \equiv 1$ et $q \in \mathbf{N}$, alors $v_{-n+1}(-q)$ est dans K. Nous nous contenterons de démontrer ce dernier point, le premier pouvant être établi par un raisonnement analogue.

b) On suppose $Q \equiv 1$ et $n \geqslant 2$, renvoyant à [13] pour le cas $n = 1$. On fixe $q \in \mathbf{N}$, et on va montrer que $v_{-n+1}(-q)$ est dans K.

D'après l'égalité $v_{-n}(-q) = 0$ démontrée ci-dessus, on a, au voisinage de $-q$:

$$Y(s) = \frac{g'(-q)}{\lambda_1 \dots \lambda_n}\,(s+q)^{-n+1} + O(|s+q|^{-n+2}).$$

Il faut donc montrer que $g'(-q)$ est dans K. En dérivant g, on obtient $g'(s) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j h_j(s) - h(s)$, où on a posé

$$h_j(s) = \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{I_\epsilon^n} \underline{z}^{s\underline{\lambda} - \underline{\mu}}\, \hat{P}(\underline{z})^{-s} \log z_j \,\frac{dz_1}{z_1} \dots \frac{dz_n}{z_n},$$

et

$$h(s) = \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{I_\epsilon^n} \underline{z}^{s\underline{\lambda} - \underline{\mu}}\, \hat{P}(z)^{-s}\, \mathrm{Log}\, \hat{P}(\underline{z}) \,\frac{dz_1}{z_1} \dots \frac{dz_n}{z_n}.$$

On étudie successivement les termes $h_j(-q)$ et $h(-q)$.

On remarque d'abord que la fonction $\underline{z} \longmapsto \underline{z}^{s\underline{\lambda}-\underline{\mu}}$ est holomorphe dans $(\mathbf{C}\setminus\{0\})^n$ et donc que, dans l'écriture de $h(-q)$, l'intégrale sur I_ϵ^n se réduit à une intégrale sur C_ϵ^n. La formule de Cauchy implique alors :

$$h(-q) = \frac{1}{(q\underline{\lambda}+\underline{\mu})!}\,[d_{\underline{x}}^{q\underline{\lambda}+\underline{\mu}}\,(\hat{\mathrm{P}}(\underline{x})^q\ \mathrm{Log}\ \hat{\mathrm{P}}(\underline{x}))]_{\underline{x}=\underline{0}}\,.$$

Si on pose $d^{q\underline{\lambda}+\underline{\mu}}(uv) = \sum_{\underline{\alpha}+\underline{\beta}=q\underline{\lambda}+\underline{\mu}} c_{\underline{\alpha},\underline{\beta}}\, d^{\underline{\alpha}} u\, d^{\underline{\beta}} v$, les $c_{\underline{\alpha},\underline{\beta}}$ étant des entiers, on obtient :

$$\begin{aligned} h(-q) = {} & \frac{1}{(q\underline{\lambda}+\underline{\mu})!}\ \mathrm{Log}\ \hat{\mathrm{P}}(\underline{0})\ [d_{\underline{x}}^{q\underline{\lambda}+\underline{\mu}}\ (\hat{\mathrm{P}}(\underline{x}))^q]_{\underline{x}=\underline{0}} \\ & + \frac{1}{(q\underline{\lambda}+\underline{\mu})!} \sum_{\substack{\underline{\alpha}+\underline{\beta}=q\underline{\lambda}+\underline{\mu} \\ \underline{\beta}\neq\underline{0}}} c_{\underline{\alpha},\underline{\beta}}\,[d_{\underline{x}}^{\underline{\alpha}}\ \hat{\mathrm{P}}(\underline{x})^q]_{\underline{x}=\underline{0}}\ [d_{\underline{x}}^{\underline{\beta}}\ \mathrm{Log}\ \hat{\mathrm{P}}(\underline{x})]_{\underline{x}=\underline{0}}\,. \end{aligned}$$

Le premier terme du membre de droite est nul et le second est dans K, car chacun des termes $[d_{\underline{x}}^{\underline{\alpha}}\ \hat{\mathrm{P}}(\underline{x})^q]_{\underline{x}=\underline{0}}$ et $[d_{\underline{x}}^{\underline{\beta}}\ \mathrm{Log}\ \hat{\mathrm{P}}(\underline{x})]_{\underline{x}=\underline{0}}$, pour $\underline{\beta}\neq\underline{0}$, est dans K.

Il reste à montrer que $h_j(-q)$ est dans K, par exemple pour $j=1$. Comme on a supposé $n \geqslant 2$, on peut écrire $\underline{z}=(\underline{z}', z_n)$, avec $\underline{z}'=(z_1,\dots,z_{n-1})$. On pose $\underline{\lambda}=(\underline{\lambda}',\lambda_n)$, etc..., et on obtient :

$$\begin{aligned} h_1(-q) = {} & \frac{1}{(2i\pi)^{n-1}} \int_{\mathrm{I}_\epsilon^{n-1}} \underline{z}'^{-q\underline{\lambda}'-\underline{\mu}'} \\ & \log z_1 \left(\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathrm{I}_\epsilon} z_n^{-q\lambda_n-\mu_n}\ \hat{\mathrm{P}}(\underline{z})^q\ \frac{dz_n}{z_n}\right) \frac{dz_1}{z_1} \cdots \frac{dz_{n-1}}{z_{n-1}}\,. \end{aligned}$$

Mais l'intégrale entre parenthèses est égale à

$$\frac{1}{(q\lambda_n+\mu_n)!}\left[\frac{\partial^{q\lambda_n+\mu_n}}{\partial z_n^{q\lambda_n+\mu_n}}\ \hat{\mathrm{P}}(\underline{z}', z^n)^q\right]_{z_n=0},$$

toujours parce que l'ordre de dérivation dépasse le degré. Cela achève la démonstration du théorème 4.9.

5. DEMONSTRATION DES THEOREMES 1.2 ET 1.3

5.1. Une formule sommatoire.

Dans cette section, on exprime la série $\sum_{\underline{\nu} \in \mathbf{N}^{*n}} f(\underline{\nu})$ sous forme d'une intégrale complexe (formule (5.5)), moyennant certaines conditions sur l'analyticité et la croissance de la fonction f ; puis on décompose cette intégrale pour se ramener soit à des intégrales réelles, soit à des intégrales qui "convergent bien" (formule (5.6)). Par souci de clarté, on expose d'abord le cas $n = 1$.

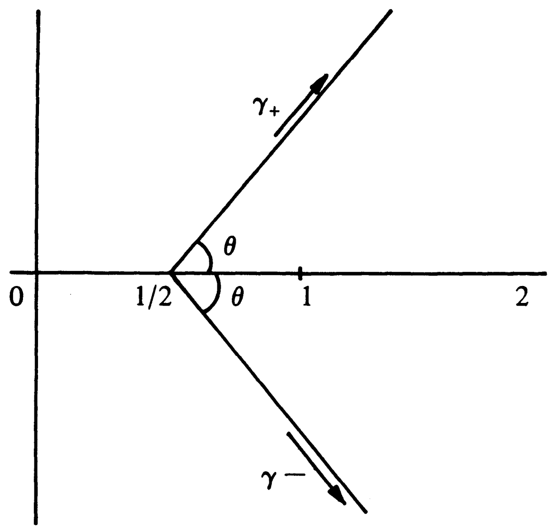
a) Soit $f(z)$ une fonction holomorphe au voisinage de l'ensemble

$$\Gamma = \Gamma_\theta = \frac{1}{2} + \{z \in \mathbf{C} / |\mathrm{Arg}\, z| \leqslant \theta\}$$

où θ est un réel donné $\in]0, \pi/2]$. On définit les deux chemins γ_+ et γ_- de la figure 2, de façon à avoir

$$\int_{\partial\Gamma} = -\int_{\gamma_+} + \int_{\gamma_-} ,$$

figure 2



$\partial\Gamma$ désignant le bord orienté de Γ. On suppose que, pour un certain $\delta > 0$, f vérifie la majoration : $f(z) \ll |z|^{-1-\delta}$ $(z \in \Gamma)$. Par un calcul de résidus, on obtient la formule :

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} f(\nu) = \int_{\partial\Gamma} \frac{f(z)}{e(z)-1}\, dz \tag{5.1}$$

(cette formule est bien connue dans le cas $\theta = \pi/2$; voir par exemple [10]). On décompose alors :

$$\int_{\gamma+} \frac{f(z)}{1-e(z)}\, dz = \int_{\gamma+} f(z)\, dz + \int_{\gamma+} f(z)\, \frac{e(z)}{1-e(z)}\, dz$$

et on écrit

$$-\int_{\gamma-} \frac{f(z)}{1-e(z)}\, dz = \int_{\gamma-} f(z)\, \frac{e(-z)}{1-e(-z)}\, dz\ ;$$

finalement, grâce au théorème de Cauchy, on trouve :

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=1}^{\infty} f(\nu) &= \int_{1/2}^{\infty} f(x)\, dx \\ &\quad + \int_{\gamma+} f(z)\, \frac{e(z)}{1-e(z)}\, dz + \int_{\gamma-} f(z)\, \frac{e(-z)}{1-e(-z)}\, dz.\end{aligned} \tag{5.2}$$

L'intérêt de cette décomposition réside dans le comportement asymptotique de la fonction $z \longmapsto \dfrac{e(\pm z)}{1-e(\pm z)}$ pour $z \in \gamma_{\pm}$; on a

$$\begin{cases} \dfrac{e(z)}{1-e(z)} = O(e^{-2\pi|z|\sin\theta}) & (z \in \gamma_+) \\[2ex] \dfrac{e(-z)}{1-e(-z)} = O(e^{-2\pi|z|\sin\theta}) & (z \in \gamma_-). \end{cases} \tag{5.3}$$

b) Soit $f(z_1, \ldots, z_n)$ une fonction holomorphe au voisinage de Γ^n dans $\mathbf{C}^n$ vérifiant, pour un certain $\delta > 0$, la majoration :

$$f(\underline{z}) \ll |z_1 \ldots z_n|^{-1-\delta} \quad (\underline{z} \in \Gamma^n). \tag{5.4}$$

Une utilisation répétée de (5.1) donne :

$$\sum_{\underline{\nu} \in \mathbf{N}^{*n}} f(\underline{\nu}) = \int_{\partial\Gamma} \cdots \int_{\partial\Gamma} \frac{f(z_1, \ldots, z_n)}{\prod_{j=1}^{n} [e(z_j)-1]}\, dz_1 \ldots dz_n. \tag{5.5}$$

La décomposition qui permet de passer de (5.1) à (5.2) peut être appliquée à chacune des n intégrations successives ci-dessus. On obtient alors $\sum_{\underline{\nu}} f(\underline{\nu})$ comme la somme de 3^n termes qui sont chacun, moyennant une permutation des coordonnées, de la forme :

$$\underbrace{\int_{\gamma_\pm} \cdots \int_{\gamma_\pm}}_{n'} \Big(\underbrace{\int_{1/2}^{\infty} \cdots \int_{1/2}^{\infty}}_{n''} f(z_1, \ldots, z_{n'}, x_1, \ldots, x_{n''}) \, dx_1 \ldots dx_{n''} \Big) \frac{e(\pm z_1)}{1 - e(\pm z_1)} \cdots \frac{e(\pm z_{n'})}{1 - e(\pm z_{n'})} \, dz_1 \ldots dz_{n'} \tag{5.6}$$

où n' et n'' sont deux entiers de somme n. Le terme qui correspond à $n' = 0$ est

$$\int_{1/2}^{\infty} \cdots \int_{1/2}^{\infty} f(\underline{x})\, d\underline{x} = 2^{-n} \int_{L^n} f\Big(\frac{\underline{x}}{2}\Big)\, d\underline{x}.$$

5.2. Application à la série $Z(R, \underline{\eta}\,; s)$.

On veut maintenant montrer que la fonction $\underline{z} \longmapsto \underline{z}^{\underline{\eta}} R(\underline{z})^{-s}$ peut être définie dans un certain $(\Gamma_\theta)^n$ et qu'elle y vérifie une majoration du type (5.4) pour $\sigma > \sigma_a$.

LEMME 5.1 – *Soient* $R = \dfrac{P}{Q} \in D(X_1, \ldots, X_n)$ *vérifiant* (1.1), $\underline{\eta} \in \mathbf{N}^n$, *et* $\sigma_a = \sigma_a(R, \underline{\eta})$. *Alors il existe des réels* $\theta > 0$ *et* $\rho_0 < \pi/2$ *tels que* :

(i) $\max(|\operatorname{Arg} P(\underline{z})|, |\operatorname{Arg} Q(\underline{z})|) \leqslant \rho_0 \quad (\underline{z} \in (\Gamma_\theta)^n)$

(ii) $R(\underline{z}) \gg |z_1^{\eta_1 + 1} \ldots z_n^{\eta_n + 1}|^{1/\sigma_a} \quad (\underline{z} \in (\Gamma_\theta)^n)$.

Démonstration. – Soit $m = \max\{|\underline{\alpha}|\,;\, \underline{\alpha} \in \operatorname{supp} P\}$. On choisit $\theta > 0$ tel que $\max\{\rho(P), \rho(Q)\} + m\theta < \pi/2$, et on pose $\rho_0 = \max\{\rho(P) + \rho(Q)\} + m\theta$. Il est facile de voir que la propriété (i) est vérifiée pour un tel choix de θ et ρ_0. La propriété (ii) découle facilement des lemmes 3.2 et 4.2.

Le point (i) du lemme 5.1 nous permet de définir la fonction $\underline{z} \longmapsto \underline{z}^{\underline{\eta}} R(\underline{z})^{-s}$ dans $(\Gamma_\theta)^n$ au moyen de la détermination principale du logarithme. La partie (ii) montre que pour $\sigma > \sigma_a$, elle vérifie la majoration (5.4), et qu'on peut lui appliquer la formule sommatoire (5.5).

Finalement, on a montré que $Z(R, \underline{\eta}\,; s)$ est la somme de 3^n termes, qui sont tous, moyennant une permutation des coordonnées de la forme

$$h(s) = \underbrace{\int_{\gamma_\pm} \cdots \int_{\gamma_\pm}}_{n'} \underline{z}^{\underline{\eta}'}\, Y_0(R(\underline{z}, .\,).\,\underline{\eta}''\,; s) \prod_{j=1}^{n'} \frac{e(\pm z_j)}{1 - e(\pm z_j)}\, dz_1 \ldots dz_{n'} ,$$

où on a posé (5.7)

$$Y_0(R(\underline{z}, .\,), \underline{\eta}''\,; s) = \int_{1/2}^{\infty} \cdots \int_{1/2}^{\infty} \underline{x}^{\underline{\eta}''}\, R(\underline{z}, x_1, \ldots, x_{n''})^{-s}\, dx_1 \ldots dx_{n''} ,$$

$$\underline{\eta} = (\underline{\eta}', \underline{\eta}''), \underline{z}^{\underline{\eta}'} = z_1^{\eta_1} \ldots z_n^{\eta_{\eta'}} , \quad \underline{x}^{\underline{\eta}''} = x_1^{\eta_{n'+1}} \ldots x_{n''}^{\eta_n} . \tag{5.8}$$

Grâce à l'écriture :

$$Y_0(R, \underline{\eta}\,; s) = \int_{1/2}^{\infty} \cdots \int_{1/2}^{\infty} \underline{x}^{\underline{\eta}}\, R(\underline{x})^{-s}\, d\underline{x}$$

$= 2^{-n-|\underline{\eta}|} \int_{L^n} \underline{x}^{\underline{\eta}}\, R\left(\frac{\underline{x}}{2}\right)^{-s} d\underline{x}$ (la première égalité étant une définition)

on voit que les théorèmes 4.7, 4.8 et 4.9, établis pour la fonction Y, sont encore valables pour la fonction Y_0.

Démonstration des théorèmes 1.2 et 1.3. — Nous allons montrer que chaque terme $h(s)$ défini par (5.7) vérifie les conclusions des théorèmes 1.2 et 1.3.

a) Si $n' = 0$, le terme (5.7) correspondant est $h(s) = Y_0(R, \underline{\eta}\,; s)$ qui vérifie les propriétés annoncées d'après les théorèmes 4.7 et 4.9.

b) Si $n'' = 0$, les termes (5.7) correspondants sont de la forme :

$$h(s) = \underbrace{\int_{\gamma_\pm} \cdots \int_{\gamma_\pm}}_{n} \underline{z}^{\underline{\eta}}\, R(\underline{z})^{-s} \prod_{j=1}^{n} \frac{e(\pm z_j)}{1 - e(\pm z_j)}\, d\underline{z} .$$

D'après (5.3), cette intégrale converge uniformément au voisinage de chaque point s, et représente une fonction entière de s. Dans le cas $n \geqslant 2$, toutes les propriétés annoncées sont trivialement vérifiées. Dans le cas $n = 1$, on doit encore prouver les parties (ii) et (iii) du théorème 1.3 ; le lecteur en trouvera une démonstration directe dans [13] (cette dissymétrie entre le cas $n = 1$ et le cas $n > 1$ s'explique ainsi : prenons l'exemple de la propriété (iii) du théorème 1.3 ; pour $n = 2$, elle signifie que les résidus aux entiers négatifs sont dans K, ce qui est trivialement vérifié par la fonction entière $h(s)$, alors que pour $n = 1$, elle signifie que la fonction prend, aux entiers négatifs, ses valeurs dans K).

c) Les théorèmes 1.2 et 1.3 sont maintenant conséquences du résultat suivant, qui combine les arguments des deux cas extrêmes ci-dessus.

LEMME 5.2. – *On suppose* n' *et* $n'' \neq 0$. *La fonction* $h(s)$, *définie par (5.7), est holomorphe dans le demi-plan* $\sigma > \sigma_a$, *et admet un prolongement méromorphe à tout le plan complexe. Ses pôles sont d'ordre* $\leqslant n''$ *et situés dans un ensemble de la forme* $\sigma_a - \frac{1}{N}\mathbf{N}$, *ou l'entier* N *ne dépend que des monômes extrémaux de* P *et* Q.

De plus, l'ordre du pôle à l'origine est au plus $n'' - 1$, *et sous l'hypothèse* $Q \equiv 1$, *l'ordre du pôle à chaque entier négatif est au plus* $n'' - 1$.

Démonstration. – D'après (4.12) et (4.5), on peut trouver un entier N, qui ne dépend que des monômes extrémaux de P et Q, tel que, si on pose $g(s) = (e(\mathrm{N}s) - 1)^{n''}$, la fonction $(s, \underline{z}) \longmapsto g(s)\, Y_0(R(\underline{z}, .), \underline{\eta}''; s)$ soit continue dans $\mathbf{C} \times (\Gamma_\theta)^{n'}$, et holomorphe par rapport à s pour chaque $\underline{z}$ fixé. On pose :

$$f(s, \underline{z}) = g(s)\, Y_0(R(\underline{z}, .), \underline{\eta}''; s) \left(\prod_{j=1}^{n} \frac{e(\pm z_j)}{1 - e(\pm z_j)}\right) \underline{z}^{\underline{\eta}'} .$$

On va montrer que

$$h(s)\, g(s) = \int_{\gamma_\pm} \dots \int_{\gamma_\pm} f(s, \underline{z})\, dz_1 \dots dz_n$$

est une fonction entière de s ; par le lemme 0.3, il suffit pour cela d'obtenir une majoration convenable de $f(s, \underline{z})$ dans chaque ensemble de la forme $E \times \gamma_\pm \times \dots \times \gamma_\pm$, où E désigne un compact quelconque du plan des s.

Soit $P(\underline{z}, \underline{x}) = \sum_{\underline{\alpha} \in \operatorname{supp} P} a_{\underline{\alpha}}\, \underline{z}^{\underline{\alpha}'} \underline{x}^{\underline{\alpha}''}$, avec la notation $\underline{\alpha} = (\underline{\alpha}', \underline{\alpha}'')$. Pour $\underline{z} \in \gamma_\pm \times \dots \times \gamma_\pm$, les coefficients du polynôme $\underline{x} \longmapsto P(\underline{z}, \underline{x})$ ont un argument compris entre $-\rho_0$ et ρ_0, et un module qui est $O\left(\prod_1^{n'} |z_j|^m\right)$ (m et ρ_0 sont choisis comme dans la démonstration du lemme 5.1) ; le même résultat vaut pour Q, et le théorème 4.8 donne alors :

$$g(s)\, Y_0(R(\underline{z},.),\underline{\eta}'';s) \ll \prod_{j=1}^{n'} |z_j|^k \quad (s \in E,\ \underline{z} \in \gamma_\pm \times \ldots \times \gamma_\pm) \tag{5.9}$$

pour un certain $k > 0$ (en fait, le théorème 4.8 ne considère que le cas $|t| \geqslant 1$, en raison des pôles de la fonction Y ; cette restriction n'est plus nécessaire ici, puisqu'on a multiplié Y par $g(s)$). De (5.3) et (5.9) on déduit la majoration

$$f(s,\underline{z}) \ll e^{-\delta \sum_1^{n'} |z_j|} \quad (s \in E,\ \underline{z} \in \gamma_\pm \times \ldots \times \gamma_\pm)$$

pour un certain $\delta > 0$, et ceci prouve que $h(s)\,g(s)$ est une fonction entière.

Pour achever la démonstration du lemme, il reste à vérifier trois points :

(i) h n'a pas de pôle dans le demi-plan $\sigma > \sigma_a$

(ii) l'ordre du pôle en 0 est au plus $n'' - 1$

(iii) si R est un polynôme, alors l'ordre des pôles aux entiers négatifs est au plus $n'' - 1$.

Pour prouver (i), on procède à une majoration directe. En effet, d'après la propriété (ii) du lemme 5.1, l'intégrale

$$h(s) = \int_{\gamma_\pm} \ldots \int_{\gamma_\pm} \underline{z}^{\underline{\eta}'}\left(\prod_{j=1}^{n'} \frac{e(\pm z_j)}{1 - e(\pm z_j)}\right) d\underline{z} \int_{1/2}^{\infty} \ldots \int_{1/2}^{\infty} \underline{x}^{\underline{\eta}''} R(\underline{z},\underline{x})^{-s}\, d\underline{x}$$

est absolument et uniformément convergente pour $s \in E$, où E est un compact arbitraire du demi-plan $\sigma > \sigma_a$.

Pour prouver (ii), on remarque que, d'après le théorème 4.9, $f(0,\underline{z})$ est nul pour tout $\underline{z}$, et donc qu'on a $g(0)\,h(0) = 0$. Le même raisonnement prouver également (iii).

Cela achève la démonstration du lemme 5.2 et des théorèmes 1.2 et 1.3.

6. DEMONSTRATION DU THEOREME 1.4

a) On commence par une application du théorème de Phragmen-Lindelöf qui permet d'importantes simplifications de calculs.

LEMME 6.1. – *Soit $f(s)$ une fonction holomorphe au voisinage du demi-plan $t \geqslant 1$, et soit $\sigma_a \in \mathbf{R}$. On suppose qu'il existe deux constantes* A *et* $B > 0$ *telles que les deux propriétés suivantes soient vérifiées :*

(i) *pour chaque σ_1 et $\sigma_2 \in \mathbf{R}$, on a*

$$f(s) \ll 1 + t^{-A\sigma + B} (\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2 \; ; t \geqslant 1)$$

(ii) *pour chaque $\sigma > \sigma_a$, on a $f(s) = O(1)$ $(t \geqslant 1)$. Alors, pour tout $\epsilon > 0$, et pour chaque σ_1 et $\sigma_2 \in \mathbf{R}$, on a*

$$f(s) \ll 1 + t^{A(\sigma_a - \sigma) + \epsilon} \; (\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2 \; ; t \geqslant 1).$$

Démonstration. – Soit $\mu(\sigma) = \inf \{\alpha > 0 / f(s) \ll t^{\alpha} \; (t \geqslant 1)\}$. Alors [15, § 5.65], $\mu(\sigma)$ est une fonction convexe. Comme $\mu(\sigma) = 0$ pour $\sigma > \sigma_a$, on a, par continuité, $\mu(\sigma_a) = 0$. Pour $\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_a$, l'inégalité de convexité s'écrit :

$$\mu(\sigma) \leqslant \frac{\sigma_a - \sigma}{\sigma_a - \sigma_1} \mu(\sigma_1) \leqslant \frac{-\sigma_1}{\sigma_a - \sigma_1} A(\sigma_a - \sigma) + B \frac{\sigma_a - \sigma}{\sigma_a - \sigma_1}.$$

Prenant $-\sigma_1$ arbitrairement grand, on obtient :
$\mu(\sigma) \leqslant A(\sigma_a - \sigma)$ pour chaque $\sigma \leqslant \sigma_a$, d'où :

$$f(s) \ll 1 + t^{A(\sigma_a - \sigma) + \epsilon} \; (t \geqslant 1),$$

pour chaque $\epsilon > 0$ et chaque $\sigma \in \mathbf{R}$.

Une nouvelle utilisation du théorème de Phragmen-Lindelöf montre que cette dernière estimation est uniforme par rapport à $\sigma \in [\sigma_1 , \sigma_2]$, d'où le lemme.

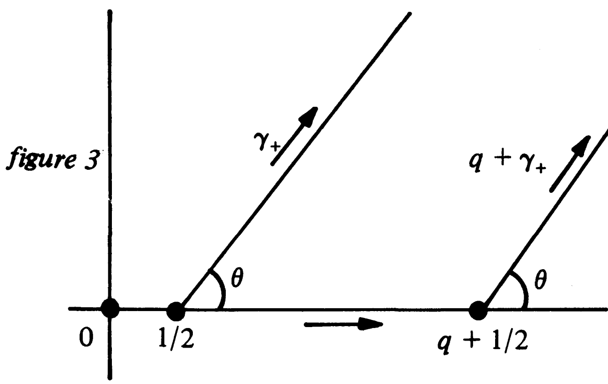
b) une majoration directe de (5.7) ne permet pas d'obtenir (1.3). Il faut d'abord modifier la formule sommatoire établie au § 5.1.

Pour le cas $n = 1$, on part de (5.2), et on écrit l'identité :

$$\frac{e(z)}{1-e(z)} = \sum_{\nu=1}^{q-1} e(\nu z) + \frac{e(qz)}{1-e(z)} \tag{6.1}$$

q étant un entier arbitraire $\geqslant 1$. Par le théorème de Cauchy, on transforme l'intégrale (cf figure 3) :

$$\int_{\gamma+} f(z)\, e(\nu z)\, dz = \int_{1/2}^{q+1/2} f(x)\, e(\nu x)\, dx + \int_{q+\gamma+} f(z)\, e(\nu z)\, dz.$$



La formule (5.2) devient alors :

$$\left\{\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{\infty} f(\nu) &= \int_{1/2}^{\infty} f(x)\, dx + 2 \sum_{\nu=1}^{q-1} \int_{1/2}^{q+1/2} f(x) \cos 2\pi\nu x\, dx \\ &+ \sum_{\nu=1}^{q-1} \int_{q+\gamma+} f(z)\, e(\nu z)\, dz + \sum_{\nu=1}^{q-1} \int_{q+\gamma_-} f(z)\, e(-\nu z)\, dz \\ &+ \int_{\gamma+} f(z) \frac{e(qz)}{1-e(z)}\, dz + \int_{\gamma_-} f(z) \frac{e(-qz)}{1-e(-z)}\, dz. \end{aligned}\right. \tag{6.2}$$

On obtient ainsi $\sum_{\nu=1}^{\infty} f(\nu)$ comme la somme de $O(q)$ termes qui sont de l'un des quatre types suivants :

$$\int_{1/2}^{\infty} f(x)\, dx\,, \int_{1/2}^{q+1/2} f(y) \cos 2\pi ry\,, \int_{\gamma_\pm} f(u) \frac{e(\pm qu)}{1-e(\pm u)}\, du$$

ou $\int_{q+\gamma_\pm} f(v)\, e(\pm rv)\, dv$, où r est un entier compris entre 1 et $q-1$.

On passe maintenant au cas $n \geqslant 2$. En procédant comme au § 5.1, on voit que la série $\sum_{\underline{\nu} \in \mathbf{N}^{*n}} f(\underline{\nu})$ s'exprime comme la somme de $O(q^n)$ termes, qui sont chacun, moyennant une permutation des coordonnées, de la forme :

$$\underbrace{\int_{\gamma_\pm} \cdots \int_{\gamma_\pm}}_{n'} \left(\prod_{j=1}^{n'} \frac{e(\pm q u_j)}{1 - e(\pm u_j)} \right) d\underline{u} \underbrace{\int_{q+\gamma_\pm} \cdots \int_{q+\gamma_\pm}}_{n''} \left(\prod_{j=1}^{n''} e(\pm r_j v_j) \right) d\underline{v}$$

$$\underbrace{\int_{1/2}^{q+1/2} \cdots \int_{1/2}^{q+1/2}}_{n'''} \left(\prod_{j=1}^{n'''} \cos 2\pi r_j' y_j \right) d\underline{y} \underbrace{\int_{1/2}^{\infty} \cdots \int_{1/2}^{\infty}}_{n^*} f(\underline{u}, \underline{v}, \underline{y}, \underline{x})\, d\underline{x} \tag{6.3}$$

où n', n'', n''' et n^* sont des entiers $\geqslant 0$ vérifiant $n' + n'' + n''' + n^* = n$, où on a posé $\underline{u} = (u_1, \dots, u_{n'})$, $\underline{v} = (v_1, \dots, v_{n''})$, $\underline{y} = (y_1, \dots, y_{n'''})$, et $\underline{x} = (x_1, \dots, x_{n^*})$, et où les entiers r_j et r_j' vérifient $1 \leqslant r_j, r_j' \leqslant q - 1$.

c) On prend $R, \underline{\eta}$ et σ_a comme dans le théorème 1.4. On pose $\rho = \rho(P) + \rho(Q)$ et $m = \max\{|\underline{\alpha}| / \underline{\alpha} \in \operatorname{supp} P\}$.

Dans la formule sommatoire ci-dessus, on fixe un $\theta > 0$ vérifiant $\max(\rho(P), \rho(Q)) + m\theta < \pi/2$. Etant donnés n', n'', n''' et n^* comme ci-dessus, on pose $\underline{r} = (r_1, \dots, r_{n''})$ et $\underline{r}' = (r_1', \dots, r_{n'''}')$. Soit enfin $h(q, \underline{r}, \underline{r}'; s)$ le terme (6.3) dans lequel on a remplacé $f(\underline{z})$ par $\underline{z}^{\underline{\eta}} R(\underline{z})^{-s}$, avec $\sigma > \sigma_a$. D'après les résultats du § 5, on sait que la fonction $h(q, \underline{r}, \underline{r}'; s)$ est holomorphe au voisinage du demi-plan $\{s / t \geqslant 1\}$.

LEMME 6.2. – *Avec les notations précédentes, il existe deux constantes* A *et* $B > 0$ *qui ne dépendent que des monômes extrémaux de* P *et* Q (B *pouvant dépendre aussi de* $\underline{\eta}$), *telles que, pour chaque* $\sigma_1 \leqslant \sigma_a$, *on ait :*

$$h(q, \underline{r}, \underline{r}'; s) \ll e^{\rho t} (1 + q^{-A\sigma + B}) \tag{6.4}$$

uniformément pour $\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_a + 1$, $t \geqslant 1$, q *entier* $> mt$, *et* $1 \leqslant r_j, r_j' \leqslant q - 1$.

On admet provisoirement le lemme 6.2, et on montre comment on peut en déduire le théorème 1.4. Pour des raisons de symétrie, on peut se restreindre au cas $t > 0$; on suppose donc $t \geqslant 1$ dans toute la suite.

Soient $\sigma_1 \leqslant \sigma_a$ et $\sigma_2 \geqslant \sigma_a + 1$ fixés. Pour chaque t donné, on pose $q = [mt] + 1$ ($[mt] =$ partie entière de mt). On sait que $Z(R, \underline{\eta}\,; s)$ est la somme de $O(q^n)$ termes qui sont chacun $O(e^{\rho t}\,(1 + q^{-A\sigma + B}))$, d'où

$$Z(R, \underline{\eta}\,; s) \ll e^{\rho t}\, t^n\,(1 + t^{-A\sigma+B})\,(\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_a + 1\,,\, t \geqslant 1)\,,$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$Z(R, \underline{\eta}\,; s) \ll e^{\rho t}\,(1 + t^{-A\sigma+B'})(\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_a + 1\,,\; t \geqslant 1)\,, \qquad (6.5)$$

avec $B' = n + \max(B\,, A(\sigma_a + 1))$.

D'autre part, pour $\sigma \geqslant \sigma_a + 1$, une majoration directe de la série absolument convergente $\Sigma\, \underline{\nu}^{\underline{\eta}}\, R(\underline{\nu})^{-s}$ fournit immédiatement l'estimation :

$$Z(R, \underline{\eta}\,; s) \ll e^{\rho t}\,(\sigma_a + 1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2\,,\, t \geqslant 1)\,. \qquad (6.6)$$

Comme conséquence de (6.5) et (6.6), on a finalement

$$Z(R, \underline{\eta}\,; s)\; e^{\rho t}\,(1 + t^{-A\sigma+B'})\,(\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2\,,\, t \geqslant 1)\,.$$

Si on applique le lemme 6.2 à la fonction

$$s \longmapsto e^{i\rho s}\, Z(R, \underline{\eta}\,; s)\,,$$

on obtient exactement (1.3), et le théorème 1.4 est démontré.

d) Etant donnés n', n'', n''', $n^* \in \mathbf{N}$, de somme n, on pose

$$\left\{\begin{aligned} h(s) = &\underbrace{\int_{\gamma_\pm} \cdots \int_{\gamma_\pm}}_{n'} \Big(\prod_{j=1}^{n'} \frac{e(\pm q u_j)}{1 - e(u_j)}\Big)\, d\underline{u} \qquad\qquad (6.7)\\ &\qquad\qquad \underbrace{\int_{q+\gamma_\pm} \cdots \int_{q+\gamma_\pm}}_{n''} \Big(\prod_{k=1}^{n''} e(\pm r_k v_k)\Big)\, d_{\underline{v}} \\ &\underbrace{\int_{1/2}^{q+1/2} \cdots \int_{1/2}^{q+1/2}}_{n'''} \Big(\prod_{\ell=1}^{n'''} \cos(2\pi r'_\ell\, y_\ell)\Big)\, \underline{u}^{\underline{\eta}'}\, \underline{v}^{\underline{\eta}''}\, \underline{y}^{\underline{\eta}'''} \\ &\qquad\qquad Y_0(R(\underline{u}, \underline{v}, \underline{y}, .), \underline{\eta}^*\,; s)\, d\underline{y} \end{aligned}\right.$$

avec $Y_0(R(\underline{u}, \underline{v}, \underline{y}, .), \underline{\eta}^*; s)$

$$= \begin{cases} R(\underline{u}, \underline{v}, \underline{y})^{-s} & \text{si } n^* = 0 \\ \displaystyle\int_{1/2}^{\infty} \cdots \int_{1/2}^{\infty} \underline{x}^{\underline{\eta}^*} R(\underline{u}, \underline{v}, \underline{y}, \underline{x})^{-s} \, d\underline{x} & \text{si } n^* > 0 . \end{cases}$$

On doit montrer que $h(s)$ vérifie (6.4). Pour le cas $n^* = 0$, on procède à une majoration directe qui ne présente pas de difficulté. On suppose donc $n^* > 0$, on fixe $\sigma_1 \leqslant \sigma_a$, et on pose

$$\underline{u} = \underline{u}(\underline{\xi}) = \left(\frac{1}{2} + \xi_1 e^{\pm i\theta}, \ldots, \frac{1}{2} + \xi_{n'} e^{\pm i\theta}\right) = (u_1, \ldots, u_{n'}),$$

et

$$\underline{v} = \underline{v}(\underline{\tau}) = \left(\frac{1}{2} + q + \tau_1 e^{\pm i\theta}, \ldots, \frac{1}{2} + q + \tau_{n''} e^{\pm i\theta}\right) = (v_1, \ldots, v_{n''}),$$

avec $\xi_j \in \mathbf{R}_+$ et $\tau_k \in \mathbf{R}_+$. On a alors

$$\left.\begin{aligned} |\operatorname{Arg} u_j| &= \operatorname{Arc\,tg} \frac{\xi_j \sin\theta}{1/2 + \xi_j \cos\theta} \leqslant 2\,\xi_j \sin\theta \\ \text{et} \qquad |\operatorname{Arg} v_j| &= \operatorname{Arc\,tg} \frac{\tau_k \sin\theta}{1/2 + q + \tau_k \cos\theta} \leqslant \frac{\tau_k \sin\theta}{q} \end{aligned}\right\}$$

Soit :

$$M = \left(\prod_{j=1}^{n'} (1 + \xi_j)^m\right)\left(\prod_{k=1}^{n''} (1 + \tau_k)^m\right) q^m . \tag{6.8}$$

On considère le polynôme

$$\underline{x} \longmapsto P(\underline{u}, \underline{v}, \underline{y}, \underline{x}) = \sum_{\underline{\alpha}} a_\alpha \, \underline{u}^{\underline{\alpha}'} \, \underline{v}^{\underline{\alpha}''} \, \underline{y}^{\underline{\alpha}'''} \, \underline{x}^{\underline{\alpha}^*} .$$

Ses coefficients sont $\ll M$ et ont des arguments majorés en valeur absolue par

$$\rho(P) + \sum_j \alpha_j |\operatorname{Arg} u_j| + \sum_k \alpha_{n'+k} |\operatorname{Arg} v_k|$$
$$\leqslant \rho(P) + 2m\sin\theta \sum_{j=1}^{n'} \xi_j + \frac{m\sin\theta}{q} \sum_{k=1}^{n''} \tau_k ,$$

et aussi par $\rho(P) + m\,\theta < \pi/2$. Le même résultat vaut encore pour le polynôme $\underline{x} \longmapsto Q(\underline{u}, \underline{v}, \underline{y}, \underline{x})$ quand on remplace $\rho(P)$ par $\rho(Q)$.

On applique maintenant le théorème 4.8 à $(R, \underline{\eta})$, et à tous les couples $(R(\underline{u}, \underline{v}, \underline{y}, .), \underline{\eta}^*)$ déduits du précédent en fixant une ou plusieurs variables. Il existe donc deux constantes B_1 et $B_2 > 0$ qui ne dépendent que des monômes extrémaux de P et Q (B_2 dépendant en outre de $\underline{\eta}$) telles que l'on ait :

$$Y_0\,(R(\underline{u}\,,\underline{v}\,,\underline{y}\,,\,.\,)\,,\underline{\eta}''\,;s) \ll M^{-B_1\sigma+B_2}$$
$$\times \exp\left(\rho + 4m\sin\theta\ \sum_1^{n'} \xi_j + \frac{2\,m\sin\theta}{q}\ \sum_1^{n''} \tau_k\right)\ t \qquad (6.9)$$

uniformément pour $\underline{u} \in \gamma_\pm \times \ldots \times \gamma_\pm\,, v \in (q + \gamma_\pm) \times \ldots \times (q+\gamma_\pm)$, $\underline{y} \in [1/2\,, q + 1/2]^{n'''}$, q entier $\geqslant 1$, $\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_a + 1$ et $t \geqslant 1$. D'autre part, on a les majorations :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{e(\pm\, qu_j)}{1 - e(\pm\, u_j)} \ll e^{-2\pi q\,\xi_j \sin\theta} \quad (u_j \in \gamma_\pm) \\ &\qquad e(\pm\, r_k\, v_k) \ll e^{-2\pi\tau_k \sin\theta} \quad (v_k \in q + \gamma_\pm\,,\, r_k \geqslant 1) \end{aligned}\right\} \quad (6.10)$$
$$|u_j| \leqslant 1 + \xi_j \ \text{ et } \ |v_k| \leqslant q(1 + \tau_k).$$

On reporte (6.8), (6.9) et (6.10) dans (6.7), et on trouve

$$h(s) \ll q^{-m\,B_1\sigma + m\,B_2 + |\eta| + n}\ e^{\rho t}$$
$$\prod_{j=1}^{n'}\left(\int_0^\infty (1 + \xi_j)^{-m\,B_1\sigma + m\,B_2 + \eta_j}\, e^{(4mt - 2\pi q)\xi_j \sin\theta}\ d\xi_j\right)$$
$$\prod_{k=1}^{n''}\left(\int_0^\infty (1 + \tau_k)^{-m\,B_1\sigma + m\,B_2 + \eta_{n'+k}}\ e^{2\frac{mt}{q} - \pi\,\tau_k \sin\theta}\ d\tau_k\right) \qquad (6.11)$$

uniformément pour $q \geqslant 1$, r_j et $r'_k \leqslant q - 1$, $\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_a + 1$, et $t \geqslant 1$. Pour $q > mt$, les quantités $2\pi q - 4mt$ et $\pi - \dfrac{mt}{q}$ restent minorées par un nombre fixe > 0, et les intégrales figurant dans (6.11) sont $O(1)$. La majoration (6.4) est donc vérifiée avec $A = m\,B_1$ et $B = m\,B_2 + |\underline{\eta}| + n$; le théorème 1.4 est entièrement démontré.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M.F. ATIYAH, Resolution of singularities and division of distribution, *Comm. Pure Appli. Math.*, 23, 2 (1970), 145-150.

[2] M. BERGER, *Géométrie,* volume 3, Cedic – Fernand Nathan, Paris, (1978).

[3] I.N. BERNSTEIN and S.I. GEL'FAND, Meromorphic property of the function P^{λ}, *Funkts. Analiz,* 3, N° 1 (1969), 84-86.

[4] N. BOURNAKI, *Espaces vectoriels topologiques,* chapitre 2, Hermann, Paris, 1966.

[5] P. CASSOU-NOGUES, Applications arithmétiques de l'étude des valeurs aux entiers négatifs des séries de Dirichlet associées à un polynôme, *Ann. Inst. Fourier,* 31-4 (1981), 1-36.

[6] P. CASSOU-NOGUES, Séries de Dirichlet, Journées Arithmétiques de Metz, *Astérisque,* 94 (1982), 1-15.

[7] P. CASSOU-NOGUES, Prolongement des séries de Dirichlet associées à un polynôme à deux indéterminées (à paraître).

[8] J. DIEUDONNE, *Eléments d'analyse,* tome 2, Gauthier-Villars, 1974.

[9] I.M. GEL'FAND and G.E. SHILOV, *Generalized Functions,* Vol. 1, Academic Press, New-York, 1964.

[10] E. LINDELOF, *Le Calcul des Résidus,* Chelsea Publishing Company, 1947.

[11] K. MAHLER, Uber einer Satz von Mellin, *Math. Ann,* 100 (1928), 384-395.

[12] H. MELLIN, Eine Formel für den Logarithmus transcendenter Funktionen von endlichem Geshlecht, *Acta Soc. Scient. Fennicae,* 29, N° 4 (1900).

[13] O. MOUSSA, Prolongement méromorphe des séries de Dirichlet associées à un polynôme, Mémoire de D.E.A, Université de Dakar (1983).

[14] P. SARGOS, Séries de Dirichlet associées à des fractions rationnelles de plusieurs variables, Séminaire de Théorie des nombres, exposé N° 1, Public. Univ. Bordeaux (1981 – 1982).

[15] E.C. TITCHMARSH, *The Theory of Functions,* Clarendon Press, Oxford, 1949.

Manuscrit reçu le 18 janvier 1982
révisé le 1er décembre 1983.

Patrick SARGOS,
Faculté des Sciences
Université de Dakar – Fann
Dakar (Sénégal).