

MIREILLE MARTIN-DESCHAMPS

**Propriétés de descente des variétés à fibré
cotangent ample**

Annales de l'institut Fourier, tome 34, n° 3 (1984), p. 39-64

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1984__34_3_39_0

© Annales de l'institut Fourier, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROPRIÉTÉS DE DESCENTE DES VARIÉTÉS À FIBRE COTANGENT AMPLE

par Mireille MARTIN-DESCHAMPS

Introduction.

Manin ([10]), puis Grauert ([5]), ont démontré pour les corps de fonctions l'analogue de la conjecture de Mordell pour les corps de nombres: "Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique 0, L un corps de fonctions algébriques sur k , C une courbe propre, lisse et géométriquement intègre, de genre $g \geq 2$ sur L , dont l'ensemble des points L -rationnels est infini; alors C se redescend sur k , c'est-à-dire est L -isomorphe à une courbe C_0 définie sur k ; de plus, $C(L) - C_0(k)$ est fini".

Ces résultats ont été complétés par Samuel ([12], [13]) dans le cas d'un corps de caractéristique non nulle.

Dans cet article, nous nous proposons de démontrer un résultat analogue pour des variétés de dimension quelconque. La propriété pour une courbe d'être de genre supérieur ou égal à 2 sera remplacée par la propriété pour une variété de dimension quelconque d'avoir un fibré cotangent ample — propriété qui coïncide bien avec la précédente dans le cas d'une courbe —. La notion d'amplitude pour des fibrés de rang quelconque sur une variété a été introduite par Hartshorne en 1966 ([6]), et dans les années 70 quelques articles ont été consacrés à l'étude de ces fibrés. Récemment, de nouveaux chercheurs se sont intéressés aux variétés à fibré cotangent ample (Miyaoaka, Bogomolov, Noguchi, Sunada...).

Nous démontrons ici le Théorème suivant: *Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique 0, L un corps de fonctions algébriques sur k , X une variété propre*

et lisse, géométriquement intègre sur L , à fibré cotangent $\Omega_{X/L}^1$ ample. Si l'ensemble des points L -rationnels de X est Zariski-dense dans X , il existe une variété X_0 sur k , et un L -isomorphisme $X_0 \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } L \xrightarrow{\sim} X$. De plus, $X(L) - X_0(k)$ est fini.

Notre résultat contient en particulier le Théorème de Noguchi et Sunada ([11]): "Si X est une variété propre et lisse sur k , à fibré cotangent ample, et R une courbe algébrique, l'ensemble des applications rationnelles séparables non constantes de R dans X est fini".

Le paragraphe 1 est consacré à l'étude des suites exactes de fibrés de la forme: $0 \longrightarrow \mathcal{O}_S \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow 0$ sur un schéma S de type fini sur un corps k , où F est ample, suites exactes qui apparaîtront à maintes reprises dans la suite. Nous montrons en particulier que si E n'est pas ample, il existe un schéma Z de dimension strictement positive, un morphisme $Z \longrightarrow S$ fini, birationnel sur son image, tels que l'image réciproque de la suite soit scindée sur Z .

Le paragraphe 2 rappelle un critère d'amplitude dû à Gieseker ([4]), pour un fibré engendré par ses sections globales, et en donne une démonstration plus simple que la démonstration originale.

Le paragraphe 3 est consacré à des remarques concernant les variétés à fibré cotangent ample, et essentiellement à la construction explicite d'un exemple.

Au paragraphe 4, nous démontrons le Théorème. L'idée de la démonstration est analogue à celle de Grauert et utilise la remarque suivante: soit L un corps de fonctions d'une variable sur k , — corps algébriquement clos de caractéristique 0 — X une variété sur L , $\pi: X \longrightarrow \text{Spec } L$ sur le morphisme structural. On a une suite exacte de \mathcal{O}_X — modules:

$$0 \longrightarrow \pi^* \Omega_{L/k} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X \longrightarrow \Omega_{X/k} \longrightarrow \Omega_{X/L} \longrightarrow 0.$$

Alors, si X provient d'une k -variété X_0 , la suite est scindée, ce qui définit un champ de vecteurs tangent aux points rationnels de X provenant de points fermés de X_0 .

En tenant compte du fait que $\Omega_{X/L}$ est ample et que $X(L)$

est Zariski-dense dans X , nous construisons un scindage de la suite exacte, ce qui prouve que la fibration $\pi: X \longrightarrow L$ est isotriviale. En utilisant un plongement m -canonique de X , on montre ensuite que X se redescend.

Dans le cas général, la démonstration se fait par récurrence sur le degré de transcendance de L sur k .

Notation. — Si E est un faisceau sur un schéma S , on note E^\vee le fibré dual, $V(E)$ le fibré vectoriel associé à E , $P(E)$ le fibré projectif associé à E , et $\mathcal{O}_P(1)$ le faisceau inversible canonique sur $P(E)$. Dans le cas où $E = \mathcal{O}_S^{m+1}$, on note $P(E) = P_{n,S}$ et $V(E) = A_{n+1,S}$.

Enfin, on conviendra avec Hartshorne ([6]) que le fibré E est ample sur S si et seulement si le faisceau $\mathcal{O}_P(1)$ est ample sur $P(E)$.

1. Extensions du faisceau structural par un fibré ample.

Soit S un schéma de type fini sur un corps k et :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S \xrightarrow{s} E \xrightarrow{q} F \longrightarrow 0$$

une suite exacte de fibrés vectoriels sur S .

PROPOSITION 1. — *Le sous-schéma fermé $P(F)$ est un diviseur dans $P(E)$. Le sous-schéma ouvert $P(E) - P(F)$ est un toseur sous $V(F)$, qui représente le foncteur "des rétractions de s ".*

Démonstration. — Par adjonction, s définit une section globale s' sur $P(E)$ du faisceau $\mathcal{O}_P(1)$, dont le diviseur est le fermé $P(F)$, c'est-à-dire qu'on obtient une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_P \xrightarrow{s'} \mathcal{O}_P(1) \longrightarrow \mathcal{O}_{P(F)}(1) \longrightarrow 0.$$

Sur la catégorie des S -schémas, $P(E)$ (resp. $P(F)$) représente le foncteur (resp. le sous-foncteur fermé) des quotients inversibles de E (resp. de F) modulo isomorphisme. Soit $u: T \longrightarrow S$ un S -schéma.

$$\text{Hom}_S(T, P(E) - P(F)) = \{u \mid u \in \text{Hom}_S(T, P(E)), u^{-1}(P(F)) = \emptyset\}.$$

Soit $p: u^*E \rightarrow \mathcal{L}$ un quotient inversible de u^*E qui représente u ; $u^{-1}(\mathbf{P}(F))$ est le support du diviseur défini par l'homomorphisme composé $p \circ u^*(s)$.

Donc

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_S(T, \mathbf{P}(E) - \mathbf{P}(F)) &= \{(p, \mathcal{L}) \mid p: u^*E \rightarrow \mathcal{L}, p \text{ surjectif,} \\ &\quad \mathcal{L} \text{ inversible, } p \circ u^*(s) \text{ bijectif}\} \\ &= \{p \mid p: u^*E \rightarrow \mathcal{O}_T, p \circ u^*(s) = \mathrm{Id}\}. \end{aligned}$$

De plus, le schéma en groupes $\mathbf{V}(F)$ — qui représente le foncteur des sections de F^\vee —, agit sur $\mathbf{P}(E) - \mathbf{P}(F)$ de façon simplement transitive, ce qui revient à dire que si r_1 et r_2 sont deux rétractions de s , il existe un unique $\alpha: F \rightarrow \mathcal{O}_X$ tels que $r_1 - r_2 = \alpha \circ q$ (et ceci de manière fonctorielle). Donc $\mathbf{P}(E) - \mathbf{P}(F)$ est un espace principal homogène, ou encore un tore, sous $\mathbf{V}(F)$.

COROLLAIRE 1. — $\mathbf{P}(E) - \mathbf{P}(F)$ est affine sur X .

PROPOSITION 2. — *Supposons que S soit propre sur k , et F ample sur S . Soit Z un fermé de $\mathbf{P}(E)$, disjoint de $\mathbf{P}(F)$. Alors il existe un nombre fini de points de Z dont le complémentaire est fini et radiciel sur S .*

Démonstration. — Z étant fermé à la fois dans $\mathbf{P}(E)$ et dans $\mathbf{P}(E) - \mathbf{P}(F)$ est propre et affine sur S , donc fini sur S .

D'après le critère d'amplitude de Grauert ([6]), il existe une variété W affine sur k , un point rationnel w de $W(k)$, et un morphisme $\varphi: \mathbf{V}(F) \rightarrow W$ qui contracte la section nulle de $\mathbf{V}(F)$ sur le point w et induit un isomorphisme de $\mathbf{V}(F) - \{\text{section nulle}\}$ sur $W - \{w\}$. Considérons l'image d'une composante connexe Z_i de $Z \times_S Z$ par la suite de morphismes :

$$\begin{aligned} (\mathbf{P}(E) - \mathbf{P}(F)) \times_S (\mathbf{P}(E) - \mathbf{P}(F)) &\xrightarrow{\Psi} \\ (\mathbf{P}(E) - \mathbf{P}(F)) \times_S \mathbf{V}(F) &\xrightarrow{\mathrm{pr}_2} \mathbf{V}(F) \xrightarrow{\varphi} W \end{aligned}$$

où l'isomorphisme Ψ exprime le fait que $\mathbf{P}(E) - \mathbf{P}(F)$ est un tore sous $\mathbf{V}(F)$, et pr_2 est la deuxième projection. En particulier, l'image réciproque de la section nulle de $\mathbf{V}(F)$ par $\mathrm{pr}_2 \circ \Psi$ est la diagonale.

L'image de Z_i est propre et affine sur k , donc réduite à un point. Donc :

— ou bien l'image de Z_i dans $V(F)$, donc dans S , est un point, et Z_i est un point,

— ou bien l'image de Z_i dans $V(F)$ est contenue dans la section nulle, et Z_i est contenu dans la diagonale de $Z \times_S Z$.

Donc en dehors d'un nombre fini de points de S , $Z \times_S Z$ est contenu dans sa diagonale, donc est radiciel sur S .

Autre démonstration (due à L. Moret-Bailly). — Sur $P(E) - P(F)$ on a une rétraction universelle de s . On en déduit par image réciproque deux rétractions de s sur

$$(P(E) - P(F)) \times_S (P(E) - P(F))$$

qui diffèrent par une section de l'image réciproque de F^\vee . On vérifie facilement que le lieu des zéros de cette section est la diagonale — ceci découle formellement du fait que $P(E) - P(F)$ est un tore sous $V(F)$. Sur une composante connexe Z_i de $Z \times_S Z$ qui est de dimension positive, l'image réciproque de F est ample, donc son dual n'a pas de section globale non nulle. On en déduit comme ci-dessus que Z_i est contenu dans la diagonale de $Z \times_S Z$.

PROPOSITION 3. — *Sous les hypothèses de la Proposition 2, il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, les sections globales du faisceau $\mathcal{O}_P(n)$ définissent un morphisme*

$$\varphi : P(E) \longrightarrow P_k(H^0(\mathcal{O}_P(n))),$$

quasi-fini en dehors d'un fermé disjoint de $P(F)$.

Démonstration. — $D = P(F) \hookrightarrow P = P(E)$.

$$\begin{array}{c} \downarrow p \\ S \end{array}$$

De la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_P \xrightarrow{s'} \mathcal{O}_P(1) \longrightarrow \mathcal{O}_D(1) \longrightarrow 0$$

on déduit pour tout entier n une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_P(n-1) \longrightarrow \mathcal{O}_P(n) \longrightarrow \mathcal{O}_D(n) \longrightarrow 0$$

et une suite exacte de cohomologie :

$$0 \longrightarrow H^0(P, \mathcal{O}_P(n-1)) \longrightarrow H^0(P, \mathcal{O}_P(n)) \longrightarrow H^0(D, \mathcal{O}_D(n)) \\ \longrightarrow H^1(P, \mathcal{O}_P(n-1)) \longrightarrow H^1(P, \mathcal{O}_P(n)) \longrightarrow H^1(D, \mathcal{O}_D(n)).$$

Puisque F est ample, il existe un entier m_0 tel que, pour tout $n \geq m_0$, les sections globales de $\mathcal{O}_D(n)$ définissent un plongement $D \rightarrow \mathbf{P}_k(H^0(D, \mathcal{O}_D(n)))$ et $H^1(D, \mathcal{O}_D(n)) = 0$. On en déduit une suite décroissante :

$$\dim_k H^1(P, \mathcal{O}_P(n-1)) \geq \dim_k H^1(P, \mathcal{O}_P(n)) \\ \geq \dots \geq \dim_k H^1(P, \mathcal{O}_P(n+m)) \geq \dots$$

qui est nécessairement stationnaire à partir d'un certain rang n_0 .

Donc pour tout $n \geq n_0$, $H^0(P, \mathcal{O}_P(n)) \rightarrow H^0(D, \mathcal{O}_D(n))$ est surjectif. En tout point de D , il existe une section inversible de $\mathcal{O}_D(n)$, qui se relève en une section inversible de $\mathcal{O}_P(n)$. D'autre part, $\mathcal{O}_P(n)$ étant engendré par ses sections globales en tout point de $P - D$, l'est également sur P . On a donc un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\varphi} & \mathbf{P}_k(H^0(P, \mathcal{O}_P(n))) \\ \uparrow & & \uparrow \\ D & \xrightarrow{\varphi|_D} & \mathbf{P}_k(H^0(D, \mathcal{O}_D(n))) \end{array}$$

où les flèches verticales sont des immersions fermées, et $\varphi|_D$ est un plongement. Soit Z l'ensemble des points de P où φ n'est pas quasi-fini. Puisque D est ensemblistement l'image réciproque par φ d'un hyperplan, $Z \cap D$ est vide.

COROLLAIRE 2. — Soit S un schéma propre sur un corps k , et $0 \rightarrow \mathcal{O}_S \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow 0$ une suite exacte de fibrés sur S , où F est ample. Alors si E n'est pas ample, il existe un schéma Z de dimension strictement positive, fini sur S , radiciel en dehors d'un nombre fini de points, sur lequel la suite est scindée.

Démonstration. — Avec les notations de la démonstration précédente, si Z est vide, φ est un morphisme fini, donc le faisceau $\mathcal{O}_P(n)$ est ample sur P , et E est ample sur S .

Dans le cas particulier où S est une courbe, ce résultat

prend une forme particulièrement simple. (Il se trouve également dans [4] dans le cas d'un corps de caractéristique 0, démontré de manière différente).

COROLLAIRE 3. — *Soit C une courbe lisse et propre, géométriquement intègre, sur un corps k , et*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

une suite exacte de fibrés sur C , où F est ample.

Si car $k = 0$, ou bien E est ample, ou bien la suite est scindée.

Si car $k \neq 0$, ou bien E est ample, ou bien l'image réciproque de la suite par une puissance convenable du morphisme de Frobenius de C est scindée.

Remarque 1. — On généralise ainsi en caractéristique non nulle, un exemple construit par Serre de suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

non scindée où F est ample et E ne l'est pas, mais où la suite se scinde après transformation par Frobenius ([4]).

2. Critère d'amplitude pour un fibré engendré par ses sections.

Ce critère est dû à Gieseker ([4]). Nous l'utiliserons au paragraphe suivant sous une forme un peu différente, et nous en donnons ci-dessous une démonstration plus simple que celle de Gieseker.

PROPOSITION 4. — *Soit S un schéma propre sur un corps k algébriquement clos, et E un fibré vectoriel sur S , engendré par ses sections globales. On a les équivalences :*

- (1) E est ample
- (2) Pour toute courbe C intègre de S , $E|_C$ est ample.
- (3) Pour toute courbe C intègre de S , de normalisée \tilde{C} , $H^0(E^\vee|_{\tilde{C}}) = 0$
- (4) Pour toute courbe C intègre de S , $H^0(E^\vee|_C) = 0$
- (5) Pour toute courbe C intègre de S , $E|_C$ n'a pas de quotient isomorphe à \mathcal{O}_C .

Démonstration. — Puisque l'image réciproque d'un fibré ample par un morphisme fini de schémas propres est ample, et que tout fibré quotient d'un fibré ample est ample, on a évidemment: $(1) \implies (2) \implies (3) \implies (4) \implies (5)$. Montrons que $(5) \implies (1)$:

Puisque E est engendré par ses sections globales, il existe une surjection: $\mathcal{O}_S^{N+1} \longrightarrow E$ qui définit une immersion fermée $j: P(E) \hookrightarrow P_N \times S$.

Soient L le faisceau inversible $\mathcal{O}_P(1)$ sur $P(E)$ et t un point fermé de P_N . On a un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccccc}
 S_t = j^{-1} p_1^{-1}(t) & \hookrightarrow & S & \xrightarrow{\quad} & k(t) \\
 \downarrow & & \downarrow \alpha_t & & \downarrow \\
 P(E) & \xrightarrow{j} & P_N \times S & \xrightarrow{p_1} & P_N \\
 & & \downarrow p_2 & & \\
 & & S & &
 \end{array}$$

où p_1 et p_2 sont les deux projections et α_t est défini par $\alpha_t(x) = (t, x)$. Par construction, la restriction de L à S_t est triviale.

Puisque α_t est une section de p_2 , S_t s'identifie à un sous-schéma de S au-dessus duquel E a un quotient trivial, donc S_t est un schéma fini. Le morphisme $p_1 \circ j: P(E) \longrightarrow P_N$ est donc fini, et le fibré L , image réciproque du faisceau $\mathcal{O}_P(1)$ de P_N , est ample sur $P(E)$, donc E est ample.

Remarque 2. — Si on remplace l'hypothèse: “ E est engendré par ses sections globales sur S ” par: “il existe un entier $n \geq 1$ tel que le faisceau $\mathcal{O}_P(n) = L^n$ soit engendré par ses sections globales sur $P(E)$ ”, on a encore l'équivalence de (1) et (2).

Démonstration. — Par hypothèse, il existe un morphisme $\varphi: P(E) \longrightarrow P_N$ tel que $\varphi^* \mathcal{O}_P(1) = L^n$. Comme à la démonstration précédente, il suffit de montrer que φ ne contracte aucune courbe.

Soit Γ une courbe intègre de $P(E)$ contractée par φ . Alors $L|_\Gamma$ n'est pas ample.

$$\begin{array}{ccc} \Gamma \subset \mathbf{P}(E) & \xrightarrow{\varphi} & \mathbf{P}_N \\ \downarrow p & & \\ S & & \end{array}$$

— Si $p(\Gamma)$ est un point, Γ est contenu dans une fibre de p , mais la restriction de L aux fibres de p est très ample.

— Si $p(\Gamma)$ est une courbe intègre C contenue dans S , le morphisme $p: \Gamma \longrightarrow C$ est fini, donc $L|_{\Gamma}$ est ample.

3. Variétés à fibré cotangent ample — Remarques et exemples.

Soit C une courbe propre et lisse, géométriquement intègre. Il est bien connu que $\Omega_{C/k}^1$ est ample si et seulement si le genre de C est supérieur ou égal à 2.

En dimension plus grande que un, la notion de variété à fibré cotangent ample a encore été peu étudiée, et nous allons en donner quelques propriétés et des exemples.

PROPOSITION 5. — *Si X est une variété propre et lisse à fibré cotangent ample :*

- 1) X est de type général
- 2) X ne possède pas de sous-variété rationnelle
- 3) toute application rationnelle $Y \cdots \longrightarrow X$ est un morphisme, si Y est une variété lisse.

Démonstration. — Si X contient une variété rationnelle, elle contient une courbe rationnelle C . Soit $\pi: \tilde{C} = \mathbf{P}^1 \longrightarrow C$ la normalisation de C .

Alors la différentielle $d\pi$ est un homomorphisme non nul : $\pi^* \Omega_X^1 \longrightarrow \Omega_{\tilde{C}}^1 = \mathcal{O}_{\tilde{C}}(-2)$. Son image est un sous-faisceau inversible de $\mathcal{O}_{\tilde{C}}(-2)$ quotient d'un fibré ample, ce qui est contradictoire.

Soient Y une variété lisse et $f: Y \cdots \longrightarrow X$ une application rationnelle. Il existe un composé d'éclatements de sous-schémas lisses $\sigma: \tilde{Y} \longrightarrow Y$ tel que f se prolonge en un morphisme $\tilde{f}: \tilde{Y} \longrightarrow X$. D'après ce qui précède, tous les diviseurs exceptionnels

sont contractés dans X , donc l'image du morphisme produit $\tilde{f} \times \sigma: \tilde{Y} \rightarrow X \times \tilde{Y}$ est finie sur Y et birationnelle à Y , donc isomorphe à Y , d'où le résultat.

Le premier exemple est dû à Bogomolov, qui a construit une surface propre et lisse à fibré cotangent ample, et dont le groupe fondamental est nul, en contre-exemple à une assertion de Miyaoka.

PROPOSITION 6. — *Soit X une surface lisse, intersection complète dans \mathbf{P}_4 d'hypersurfaces de degrés assez grands pour que $c_1^2(X) - c_2(X) > 0$. On considère un diviseur H très ample sur le produit $X^d (d \geq 6)$. Alors si H_1, \dots, H_{2d-2} sont des diviseurs assez généraux linéairement équivalents à H , l'intersection $Y = H_1 \cap \dots \cap H_{2d-2}$ est une surface propre et lisse à fibré cotangent ample.*

Démonstration. — Voir [1].

L'idée du deuxième exemple nous a été suggérée par L. Szpiro. Nous aurons besoin pour la construire du résultat suivant :

PROPOSITION 7. — *Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique 0. Il existe une courbe C propre et lisse de genre $\gamma \geq 2$, et une fibration $f: X \rightarrow C$ à fibres propres, lisses et irréductibles de genre $g \geq 2$, telle que l'application de Kodaira-Spencer ([9]): $T_C \rightarrow R^1 f_* \omega_{X/C}$ soit partout non nulle sur C .*

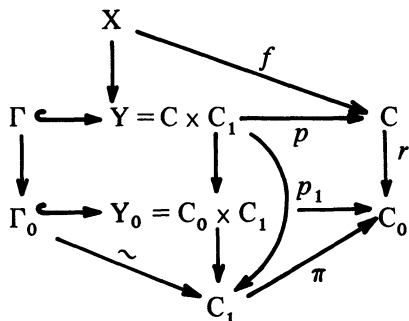
Démonstration. — Le procédé, dû à Kodaira ([8]), permet de construire des fibrations non isotriviales par des courbes lisses de genre $g \geq 2$. Rappelons la construction: soient n et g_0 deux entiers ≥ 2 , C_0 une courbe propre, lisse et irréductible sur k , de genre g_0 , $\pi: C_1 \rightarrow C_0$ un revêtement étale et fini de degré n . Soient $Y_0 = C_0 \times C_1$ et Γ_0 le graphe de π .

LEMME 1. — *Il existe un revêtement $r: C \rightarrow C_0$ étale connexe, et un faisceau inversible L sur $Y = C \times C_1$ tel que si Γ est l'image réciproque de Γ_0 par le morphisme $r \times \text{Id}: Y \rightarrow Y_0$, on ait $\mathcal{O}_Y(\Gamma) = L^n$.*

Démonstration. — Voir [3].

Soit alors $\rho: X \rightarrow Y$ le revêtement de Y ramifié n fois le long de Γ et tel que $\rho_* \mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y \oplus L^{-1} \oplus \dots \oplus L^{-n+1}$.

Puisque Γ est lisse, X est lisse. On a le diagramme commutatif :



D'autre part, puisque Γ est étale sur C et sur C_1 , X est lisse sur C et sur C_1 . Soit t un point fermé de C , X_t et Y_t les fibres de X et Y . On a un diagramme commutatif de suite exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 \longrightarrow & f^* \Omega_{C|X_t} = \mathcal{O}_{X_t} & \xleftarrow{\rho^*(dp)} & \rho^* \Omega_{Y|Y_t} & \xrightleftharpoons[\rho^*(dp_1)]{\rho^*(r)} & \rho^* \Omega_{Y_t} & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow S & & \downarrow dp & & \downarrow & \\
 0 \longrightarrow & f^* \Omega_{C|X_t} = \mathcal{O}_{X_t} & \xleftarrow[r']{df} & \Omega_{X|X_t} & \longrightarrow & \Omega_{X_t} & \longrightarrow 0 \quad (S_t)
 \end{array}$$

La première suite est canoniquement scindée. Supposons que (S_t) le soit aussi et soit r' une rétraction de df . Alors $r' \circ dp$ et $\rho^*(r)$ sont deux rétractions de $\rho^*(dp)$, donc différent par un homomorphisme $\rho^* \Omega_{Y_t} \rightarrow \mathcal{O}_{X_t}$, qui est nul puisque $\rho^* \Omega_{Y_t}$ est ample. Donc $r' \circ dp = \rho^*(r)$. Par construction $r \circ dp_1 = 0$.

Soit $f_1 = p_1 \circ \rho$. Alors $r' \circ df_1 = r' \circ dp \circ \rho^*(dp_1) = 0$, c'est-à-dire que r' se factorise par le conoyau de df_1 , qui n'est autre que $\Omega_{X/C_1|X_t}$.

$$\begin{array}{ccccc}
 f^* \Omega_{C|X_t} & \longrightarrow & \Omega_{X|X_t} & \longrightarrow & \Omega_{X/C_1|X_t} \\
 & & & \searrow & \downarrow \\
 & & & & \mathcal{O}_{X_t}
 \end{array}$$

Mais alors le faisceau $\Omega_{X/C_1|X_t}$ est nécessairement isomorphe à \mathcal{O}_{X_t} , l'homomorphisme $\rho^* \Omega_{Y/C_1|X_t} \rightarrow \Omega_{X/C_1|X_t}$ est un isomorphisme, et son conoyau est nul. Or ce conoyau n'est autre que $\Omega_{X/Y|X_t}$ dont le support est égal à $\rho^{-1}(\Gamma) \cap X_t$, et qui n'est pas nul. Donc la suite exacte (S_t) n'est pas scindée.

La suite exacte duale :

$$0 \rightarrow T_{X_t} \rightarrow T_{X|X_t} \rightarrow f^* T_{C,t} \rightarrow 0$$

induit une suite exacte de cohomologie :

$$0 \rightarrow H^0(T_{X|X_t}) \rightarrow H^0(T_{C,t}) = k \xrightarrow{\delta_t} H^1(T_{X_t})$$

où δ_t n'est autre que la fibre en t de l'application de Kodaira-Spencer de f . La suite (S_t) n'est pas scindée si et seulement si $H^0(T_{X|X_t})$ est nul, donc si et seulement si δ_t est non nul.

Remarque 3. — Dans [3] et [8], on démontre seulement que la fibration f n'est pas isotriviale, c'est-à-dire que l'application de Kodaira-Spencer n'est pas nulle.

On déduit du Corollaire 3 le :

COROLLAIRE 4. — *Pour tout point t de C , $\Omega_{X|X_t}^1$ est ample.*

PROPOSITION 8. — *Il existe n tel que sur $P = P(\Omega_X^1)$ le faisceau $\mathcal{O}_P(n)$ soit engendré par ses sections globales.*

Démonstration. — On a une suite exacte de modules de différentielles :

$$0 \rightarrow f^* \Omega_C^1 \rightarrow \Omega_X^1 \rightarrow \omega_{X/C} \rightarrow 0$$

et le faisceau inversible $\omega_{X/C}$ est ample ([14]).

$$\begin{array}{ccc} D = P(\omega_{X/C}) & \hookrightarrow & P(\Omega_X^1) = P \\ & \searrow \sim & \downarrow p \\ & & X \end{array}$$

D est un diviseur sur P tel que $\mathcal{O}_P(D) = \mathcal{O}_P(1) \otimes p^* f^* (\Omega_C^1)^\vee$.

Pour tout $n \geq 1$, on a une suite exacte de \mathcal{O}_X -modules :

$$0 \longrightarrow f^* \Omega_C^1 \otimes S^{n-1} \Omega_X^1 \longrightarrow S^n \Omega_X^1 \longrightarrow \omega_{X/C}^{\otimes n} \longrightarrow 0$$

et une suite exacte de cohomologie :

$$\begin{aligned} H^0(S^n \Omega_X^1) &\longrightarrow H^0(\omega_{X/C}^{\otimes n}) \longrightarrow H^1(f^* \Omega_C^1 \otimes S^{n-1} \Omega_X^1) \\ &\xrightarrow{\alpha_n} H^1(S^n \Omega_X^1) \longrightarrow H^1(\omega_{X/C}^{\otimes n}). \end{aligned}$$

D'autre part, soit F le diviseur formé de $2\gamma - 2$ fibres réduites et distinctes, image réciproque sur X d'un diviseur équivalent à Ω_C^1 . On a les suites exactes :

$$0 \longrightarrow S^{n-1} \Omega_X^1 \longrightarrow S^{n-1} \Omega_X^1 \otimes f^* \Omega_C^1 \longrightarrow S^{n-1} \Omega_{X|F}^1 \longrightarrow 0$$

et

$$H^1(S^{n-1} \Omega_X^1) \xrightarrow{\beta_n} H^1(S^{n-1} \Omega_X^1 \otimes f^* \Omega_C^1) \longrightarrow H^1(S^{n-1} \Omega_{X|F}^1).$$

Puisque $\omega_{X/C}$ est ample sur X et $\Omega_{X|F}^1$ ample sur F , il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $\mathcal{O}_D(n)$ soit engendré par ses sections globales sur D , et

$$H^1(\omega_{X/C}^{\otimes n}) = H^1(S^{n-1} \Omega_{X|F}^1) = 0,$$

donc α_n et β_n sont surjectives, et

$$\dim_k H^1(S^{n-1} \Omega_X^1) \geq \dim_k H^1(S^n \Omega_X^1).$$

On conclut comme à la démonstration de la Proposition 3, qu'il existe n_1 tel que pour tout $n \geq n_1$, $\alpha_n \circ \beta_n$ soit un isomorphisme, ainsi que α_n et β_n . On en déduit que pour $n \geq n_1$, l'homomorphisme de restriction :

$$\begin{array}{ccc} H^0(S^n \Omega_X^1) & \longrightarrow & H^0(\omega_{X/C}^{\otimes n}) \\ \parallel & & \parallel \\ H^0(P, \mathcal{O}_P(n)) & \longrightarrow & H^0(D, \mathcal{O}_D(n)) \end{array}$$

est surjectif. Alors sur D , le faisceau $\mathcal{O}_P(n)$ est engendré par ses sections globales.

Soit z un point de $P - D$. Puisque Ω_C^1 est engendré par ses sections globales sur C , il existe un diviseur Δ linéairement équivalent à $p^* f^* \Omega_C^1$, qui ne passe pas par z . Alors $n(D + \Delta)$, qui est équivalent à $\mathcal{O}_P(n)$, ne passe pas par z . Donc $\mathcal{O}_P(n)$ est engendré par ses sections globales partout.

COROLLAIRE 5. — Ω_X^1 est ample.

Démonstration. — D'après la Remarque 2, il suffit de vérifier que pour toute courbe intègre Γ de X , $\Omega_{X|\Gamma}^1$ est ample. On a déjà vu que la restriction de Ω_X^1 aux fibres de f est ample. Soit alors une courbe Γ de X , finie sur C . On a la suite exacte :

$$0 \longrightarrow f^* \Omega_{C|\Gamma}^1 \longrightarrow \Omega_{X|\Gamma}^1 \longrightarrow \omega_{X/C|\Gamma} \longrightarrow 0$$

et $\Omega_{X|\Gamma}^1$ est ample, comme extension de deux faisceaux amples.

Remarque 3. — 1) Soient C_1, \dots, C_n ($n \geq 2$) des courbes propres et lisses sur k , $X = C_1 \times \dots \times C_n$. Alors Ω_X^1 n'est pas ample.

2) Soit C une courbe propre et lisse sur k , et $Y = C^{(n)}$ ($n \geq 2$) le n -ième produit symétrique. Alors Ω_Y^1 n'est pas ample.

Démonstration. — *Cas 1 :* $\Omega_X^1 = p_1^* \Omega_{C_1}^1 \oplus \dots \oplus p_n^* \Omega_{C_n}^1$, p_i étant la projection de X sur le i -ième facteur. Pour tout $i = 1, \dots, n$, le faisceau $p_i^* \Omega_{C_i}^1$ n'est pas ample, puisqu'il est trivial sur les fibres de p_i .

Cas 2 : Faisons la démonstration pour $n = 2$ pour simplifier les notations :

$$\begin{array}{ccccc} & & & C & \\ & & p_1 \nearrow & & \\ C \times C & & \xrightarrow{\pi} & C^{(2)} = Y. & \\ & & p_2 \searrow & & \\ & & & C & \end{array}$$

La différentielle de π est un homomorphisme injectif :

$$d\pi : \pi^* \Omega_Y^1 \longrightarrow \Omega_{C \times C}^1 = p_1^* \Omega_C^1 \oplus p_2^* \Omega_C^1.$$

Par composition, on obtient deux homomorphismes non nuls $\pi^* \Omega_Y^1 \longrightarrow p_i^* \Omega_C^1$ ($i = 1, 2$). Si Ω_Y^1 est ample, $\pi^* \Omega_Y^1$ l'est aussi puisque π est fini, et sur chaque fibre de p_i , le fibré $p_i^* \Omega_C^1$ est trivial, donc ne peut contenir un sous-fibré ample, d'où une contradiction.

4. Théorème de descente pour les variétés à fibré cotangent ample.

Notation. — Dans toute la suite du paragraphe, sauf mention explicite du contraire, k désigne un corps algébriquement clos de caractéristique 0, C une courbe propre lisse et irréductible sur k , $L = k(C)$ le corps des fonctions rationnelles de C . Le L -module $\Omega_{L/k}^1$ est de rang 1, et on en fixe un générateur α , ce qui permet d'identifier $\Omega_{L/k}^1$ et L (par D_0 défini par $D_0 \alpha = 1$).

Soit X un schéma propre et lisse sur L , $\pi: X \rightarrow \text{Spec } L$ le morphisme structural. On a une suite exacte de modules de différentielles :

$$(*) \quad 0 \rightarrow \pi^* \Omega_{L/k}^1 \simeq \mathcal{O}_X \rightarrow \Omega_{X/k}^1 \rightarrow \Omega_{X/L}^1 \rightarrow 0.$$

On note $F = \mathbf{P}(\Omega_{X/k}^1) - \mathbf{P}(\Omega_{X/L}^1)$ et $p: F \rightarrow X$ la projection.

Nous nous proposons, moyennant certaines hypothèses sur X , de redescendre X sur k , et l'idée de la démonstration résulte de la remarque suivante :

Remarque 4. — Soient X_0 un schéma propre et lisse sur k , et $X = X_0 \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } L$. Il existe sur X un champ de vecteurs "horizontal" défini par D_0 . De plus, un point rationnel de $X(L)$ est tangent au champ de vecteurs si et seulement s'il provient d'un point fermé de X_0 .

Démonstration. — L'existence du champ de vecteurs résulte du fait que dans ce cas la suite exacte (*) est canoniquement scindée. Localement, si U_0 est un ouvert affine de X_0 de la forme $U_0 = \text{Spec } k[t_1, \dots, t_n]_{/I}$, $U = \text{Spec } L[t_1, \dots, t_n]_{/I}$ l'ouvert correspondant de X , le champ de vecteurs correspond à une k -dérivation D de \mathcal{O}_U définie par $Dt_i = 0$, $D|_L = D_0$. Soit $\sigma: \text{Spec } L \rightarrow U$ un point rationnel défini par $t_i = \lambda_i$. Il est tangent au champ de vecteurs si et seulement si $D_0 \lambda_i = 0$, c'est-à-dire si les λ_i sont des éléments de k , puisque la caractéristique est nulle.

Pour descendre X , nous allons donc chercher à construire un scindage de la suite exacte (*), ou ce qui revient au même, une section de $F = \mathbf{P}(\Omega_{X/k}^1) - \mathbf{P}(\Omega_{X/L}^1)$ au-dessus de X .

PROPOSITION 9. — Si $\Omega_{X/L}^1$ est ample, il existe un fermé Z de F tel que la restriction $p|_Z$ soit un morphisme fini et birationnel sur son image, et un morphisme propre $\varphi: F \rightarrow \mathbf{A}_N \times \text{Spec } L$, qui est un plongement en-dehors de Z .

Démonstration. — D'après la Proposition 3, les sections globales sur $P = P(\Omega_{X/k}^1)$ du faisceau $\Theta_P(n)$ (resp. sur $D = P(\Omega_{X/L}^1)$ du faisceau $\Theta_D(n)$) permettent de construire un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} P = P(\Omega_{X/k}^1) & \xrightarrow{\varphi} & P_L(H^0(P, \Theta_P(n))) = P_{N,L} \\ \uparrow & & \uparrow \\ D = P(\Omega_{X/L}^1) & \xrightarrow{\varphi|_D} & P_L(H^0(D, \Theta_D(n))) \end{array}$$

où φ est un morphisme quasi-fini en dehors d'un fermé Z qui, s'il est non vide, est disjoint de D , de dimension au moins un, fini sur X , et radiciel en-dehors d'un nombre fini de points. Puisque D est l'image réciproque d'un hyperplan, la restriction de φ à F est un morphisme $F \rightarrow \mathbf{A}_N \times \text{Spec } L$, qui est propre et quasi-fini en-dehors de Z . Quitte à remplacer l'image par sa normalisée, on peut supposer que $\varphi|_{F-Z}$ est un isomorphisme sur son image.

Remarque 5. — Soient Y_0 un k -schéma de type fini, $Y = Y_0 \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } L$, et $f: Y \cdots \rightarrow X$ une application rationnelle. Alors f se relève en $\tilde{f}: Y \cdots \rightarrow F$, définie sur le même ouvert.

Démonstration. — Sur U , l'ouvert de définition de f , on a le diagramme de suites exactes de modules de différentielles :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Theta_U & \longrightarrow & f^* \Omega_{X/k}^1 & \longrightarrow & f^* \Omega_{X/L}^1 \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow df & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \Theta_U & \longrightarrow & \Omega_{Y/k}^1 & \longrightarrow & \Omega_{Y/L}^1 \longrightarrow 0 \end{array}$$

et la deuxième suite est canoniquement scindée, donc aussi la première. Ce scindage correspond à un morphisme $\tilde{f}: U \rightarrow F$ qui relève f .

Cas particulier. — Tout point rationnel σ de $X(L)$ se relève en $\tilde{\sigma}$ de $F(L)$, et nous allons étudier son image par φ .

PROPOSITION 10. — *L'ensemble des σ de $X(L)$ tels que $\tilde{\sigma}(L)$ n'appartient pas à Z , est fini.*

Démonstration. — On peut prolonger X en un k -schéma lisse X' , propre sur C . Soient $\pi': X' \rightarrow C$ le morphisme qui prolonge π , $F' = \mathbf{P}(\Omega_{X'/k}^1) - \mathbf{P}(\Omega_{X'/C}^1)$ qui prolonge F , et $p': F' \rightarrow X'$ la projection.

Soient $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ les composantes de φ . Ce sont des sections rationnelles de $\mathcal{O}_{F'}$ qui ont des pôles en des points de codimension un de F' contenus dans des fibres du morphisme $F' \xrightarrow{p'} X' \xrightarrow{\pi'} C$. Il existe donc un diviseur Δ positif sur C tel que les diviseurs $p'^* \pi'^*(\Delta) + \text{div } \varphi_i$ ($i = 1, \dots, N$) soient positifs en tout point de codimension un de F' , donc partout.

Soit $\sigma: \text{Spec } L \rightarrow X$. Puisque C est une courbe lisse, σ se prolonge en $\sigma': C \rightarrow X'$, et comme à la Remarque 5, on montre qu'on peut relever σ' en $\tilde{\sigma}': C \rightarrow F'$.

Alors $\tilde{\sigma}'^*(p'^* \pi'^*(\Delta) + \text{div } \varphi_i) = \Delta + \text{div}(\varphi_i \tilde{\sigma}') \geq 0$ pour $i = 1, \dots, N$ donc les composantes de $\varphi \circ \tilde{\sigma}'$ sont contenues dans $H^0(C, \mathcal{O}_C(\Delta)) \subset L$.

Notons G l'image (fermée) de φ dans $A_{N,L}$, E l'image de Z : E est propre et affine sur L , donc finie sur L : $E = \{z_1, \dots, z_r\}$. Soit

$$V = G(L) \cap H^0(C, \mathcal{O}_C(\Delta))^N \subset L^N.$$

On vient de voir que pour tout point σ de $X(L)$, $\varphi \circ \tilde{\sigma}$ appartient à V . Plus précisément, l'application $\sigma \mapsto \tau = \varphi \circ \tilde{\sigma}$ est une bijection de l'ensemble $\{\sigma \mid \sigma \in X(L), \tilde{\sigma}(L) \notin Z\}$ sur l'ensemble $\{\tau \mid \tau \in V, \tau(L) \notin E, \varphi^{-1} \circ \tau = p \circ \varphi^{-1} \circ \tau\}$, la bijection inverse étant définie par $\sigma = p \circ \varphi^{-1} \circ \tau$.

La suite de la démonstration nécessite les résultats techniques suivants :

LEMME 2. — *Soit S_0 un schéma de type fini sur k , et T un sous-schéma fermé réduit de $S_0 \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } L$. Il existe*

un sous-schéma fermé réduit T_0 de S_0 , une immersion fermée $T_0 \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } L \hookrightarrow T$, qui identifie les points de $T_0(k)$ à l'ensemble des points de $T(L)$ dont l'image est un point fermé de S_0 . En particulier, si cet ensemble est dense dans $T(L)$, $T_0 \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } L$ est isomorphe à T .

Démonstration :

$$\begin{array}{ccc} T & \hookrightarrow & S_0 \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } L \xrightarrow{p_1} S_0 \\ & & \downarrow p_2 \\ & & \text{Spec } L \\ \\ \bar{T} & \hookrightarrow & S_0 \times C \xrightarrow{p_1} S_0 \\ & & \downarrow p_2 \\ & & C \end{array}$$

Soit \bar{T} l'adhérence de T dans $S_0 \times C$.

$\mathcal{G} = \{\sigma \mid \sigma \in T(L), p_1 \circ \sigma(L) \text{ est un point fermé de } S_0\}$ est en bijection avec l'ensemble des points s de S_0 tels que $\{s\} \times C$ soit contenu dans \bar{T} . Soit $T_0 = S_0 - p_1(S_0 \times C - \bar{T})$. Puisque p_1 est plat et de type fini, donc ouvert, T_0 est fermé. C'est le plus grand fermé T' de S_0 tel que $T' \times C$ soit contenu dans \bar{T} . Munissons-le de sa structure réduite. Par construction, $T_0 \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } L$ est contenu dans T et $T_0(k)$ s'identifie à \mathcal{G} .

LEMME 3. — Il existe un k -schéma de type fini Σ_0 et une application rationnelle : $\Sigma_0 \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } L \cdots \rightarrow G - E$ définie sur un ouvert rencontrant toutes les fibres de $\Sigma \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } L$ au-dessus des points fermés de Σ , qui établit une bijection entre $\Sigma(k)$ et $\{\tau \mid \tau \in V, \tau(L) \notin E\}$.

Démonstration. — $V = G(L) \cap H^0(C, \mathcal{O}_C(\Delta))^N \subset L^N$.

Soient $(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ une base sur k de $H^0(C, \mathcal{O}_C(\Delta))$ et v le morphisme défini par :

$$\begin{array}{ccc} v : \text{Spec } L[\lambda_{ij}] & \longrightarrow & A_{N,L} \\ & & 1 \leq i \leq N \\ & & 1 \leq j \leq m \\ (\lambda_{ij}) & \longmapsto & \left(\sum_j \lambda_{ij} \alpha_j \right)_i \end{array}$$

v établit une bijection entre l'ensemble des points de $v^{-1}(G)(L)$ dont les coordonnées (λ_{ij}) appartiennent à k , et V . D'après le lemme 2, il existe un sous-schéma fermé Σ' de $\text{Spec } k[\lambda_{ij}]$ tel que $\Sigma' \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } L$ soit contenu dans $v^{-1}(G)$ et tel que les points de $\Sigma'(k)$ soient en bijection avec l'ensemble de points cherchés. Donc le morphisme composé :

$$\Sigma' \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } L \hookrightarrow v^{-1}(G) \longrightarrow G$$

identifie $\Sigma'(k)$ à V .

Chaque point z_i de E , rationnel sur L correspond donc à un unique point λ_i de $\Sigma'(k)$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_{r'}$ ($r' \leq r$) ces points et $\Sigma = \Sigma' - \{\lambda_1, \dots, \lambda_{r'}\}$. Puisque

$$v^{-1}(E) \cap (\Sigma' \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } L)$$

ne contient pas d'autre fibre fermée que celles des points $\lambda_1, \dots, \lambda_{r'}$, la restriction

$$v|_{\Sigma \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } L} : \Sigma \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } L \cdots \longrightarrow G - E$$

satisfait aux conditions cherchées.

LEMME 4. — *Il existe un sous-schéma Σ_0 de Σ tel que $\Sigma_0 \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } L \longrightarrow G - E$ soit défini sur un ouvert qui rencontre toutes les fibres fermées de $\Sigma_0 \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } L$ et induise une bijection entre $\Sigma_0(k)$ et*

$$\{\tau \mid \tau \in V, \tau(L) \notin E, \varphi^{-1} \circ \tau = \widetilde{p \circ \varphi^{-1} \circ \tau}\}.$$

Démonstration :

$$\begin{array}{ccccc} \Sigma \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } L \cdots & \xrightarrow{v} & G - E & \xrightarrow{\varphi^{-1}} & F - Z \\ & \searrow \bar{\Psi} & & & \downarrow p \\ & & & & X \end{array}$$

Soient $\bar{\Psi} = \varphi^{-1} \circ v$ et $\Psi = p \circ \bar{\Psi}$.

D'après la Remarque 5, l'application rationnelle Ψ se relève en $\tilde{\Psi} : \Sigma \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } L \cdots \longrightarrow F$ définie sur le même ouvert,

et on vérifie que pour tout point λ de $\Sigma(k)$ d'image τ dans V et $\sigma = p \circ \varphi^{-1} \circ \tau$ dans $X(L)$, alors $\tilde{\sigma} = \tilde{\Psi}(\lambda)$ et $\varphi^{-1} \circ \tau = \bar{\Psi}(\lambda)$. Les deux applications rationnelles $\bar{\Psi}$ et $\tilde{\Psi}$ sont définies sur un même ouvert qui rencontre toutes les fibres fermées de

$$\Sigma \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } L \longrightarrow \Sigma.$$

Soit Σ_0 le sous-schéma réduit des coïncidences de $\bar{\Psi}$ et $\tilde{\Psi}$, et $\bar{\Sigma}'_0$ son adhérence dans $\Sigma \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } L$. Puisque $\bar{\Sigma}'_0 - \Sigma'_0$ ne contient aucune fibre fermée de $\Sigma \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } L$, les points de $\Sigma'_0(L)$ contractés dans Σ sont ceux de $\bar{\Sigma}'_0(L)$ contractés dans Σ . D'après le lemme 2, il existe un sous-schéma Σ_0 de Σ tel que $\Sigma_0 \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } L$ soit contenu dans $\bar{\Sigma}'_0$ et induise une bijection entre $\Sigma_0(k)$ et les points λ de $\Sigma(k)$ tel que $\bar{\Psi}\lambda = \tilde{\Psi}\lambda$. D'où le résultat.

Fin de la démonstration de la Proposition 10. — Supposons que Σ_0 ne soit pas fini, et soit Γ une courbe lisse irréductible contenue dans Σ_0 , et Γ_1 une complétion projective et lisse de Γ . Les deux applications rationnelles $\bar{\Psi}$ et $\tilde{\Psi}$ sont définies et coïncident sur un ouvert non vide de $\Gamma \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } L$.

$$\begin{array}{ccccccc} \Gamma \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } L & \hookrightarrow & \Sigma_0 \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } L & \hookrightarrow & \Sigma \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } L & \begin{array}{c} \xrightarrow{\bar{\Psi}} \\ \xrightarrow{\tilde{\Psi}} \end{array} & F \xrightarrow{\varphi} G \\ & & & & \searrow \Psi & \downarrow p & \\ & & & & & & X \end{array}$$

Puisque Γ_1 est propre sur k , $\Psi|_{\Gamma \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } L}$ se prolonge en $\Psi_1: \Gamma_1 \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } L \longrightarrow X$, qui se relève en

$$\tilde{\Psi}_1: \Gamma_1 \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } L \longrightarrow F$$

prolongeant $\tilde{\Psi}$. L'image de $\varphi \circ \Psi_1$ est propre et affine sur L , donc formée d'un point.

Alors: — ou bien $\Psi_1(\Gamma_1 \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } L)$ est contenu dans Z , alors $\tilde{\Psi}(\Gamma \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } L) = \bar{\Psi}(\Gamma \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } L)$ est contenu dans Z , ce qui est exclu par construction,

— ou bien $\Psi_1(\Gamma_1 \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } L)$ est isomorphe à $\text{Spec } L$, ainsi que $\Psi(\Gamma \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } L)$ ce qui contredit le fait que $\Gamma(k)$ s'injecte dans $X(L)$.

COROLLAIRE 6. — Si $X(L)$ est Zariski-dense dans X , il existe un champ de vecteurs sur X prolongeant D_0 , tangent à tous les points rationnels de X sauf un nombre fini.

Démonstration. — Si $X(L)$ est Zariski-dense, le morphisme $p|_Z: Z \rightarrow X$ est dominant, fini et birationnel, donc est un isomorphisme et réalise une section de $p: F \rightarrow X$, qui correspond à un scindage de la suite exacte (*) c'est-à-dire à un champ de vecteurs sur X prolongeant D_0 . Pour un point rationnel σ de $X(L)$, les 3 propriétés sont équivalentes :

- (1) $\tilde{\sigma}(L) \in Z$
- (2) le champ de vecteurs est tangent à σ
- (3) le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X & \xrightarrow{D} & \mathcal{O}_X \\ \downarrow \sigma & & \downarrow \sigma \\ L & \xrightarrow{D_0} & L \end{array}$$

où D est la k -dérivation de \mathcal{O}_X correspondant au champ, commute.

Pour le vérifier, il suffit de se placer sur un ouvert $U = \text{Spec } L[t_1, \dots, t_n]_{/I}$ de X .

$$(*) : 0 \longrightarrow \mathcal{O}_U \xleftarrow{r} \Omega_{U/k} \longrightarrow \Omega_{U/L} \longrightarrow 0.$$

Soit r la rétraction correspondant à Z . La dérivation D est définie par $D|_L = D_0$ et $Dt_i = r(dt_i)$ pour $i = 1, \dots, n$.

$\mathbf{P}(\Omega_{U/k}^1)$ se plonge dans $\text{Proj } \mathcal{O}_U[T_0, \dots, T_n]$, et Z est défini par les équations $T_i = (Dt_i) T_0$. Soit σ un point rationnel de U défini par $t_i = \lambda_i$. Le point $\tilde{\sigma}$ est défini par $T_0 = 1$, $T_i = D_0 \lambda_i$. On vérifie alors facilement les équivalences annoncées.

PROPOSITION 11. — Soit X un schéma propre, lisse et géométriquement intègre sur L , tel que $\bigwedge^{\max} \Omega_{X/L}^1 = \omega_{X/L}$ soit ample, et possédant un champ de vecteurs prolongeant D_0 , tangent à un ensemble dense de points L -rationnels de X . Alors il existe un k -schéma X_0 , et un L -isomorphisme

$X_0 \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } L \xrightarrow{\sim} X$, tel que les points de $X_0(k)$ s'identifient aux points de $X(L)$ tangents au champ de vecteurs.

Démonstration. — Fixons un plongement projectif de X , donné par les sections globales d'une puissance convenable de $\omega_{X/L} : j : X \rightarrow \mathbf{P}_L(H^0(\omega_X^{\otimes m})) = \mathbf{P}_{r,L}$. Choisissons la base de $H^0(\omega_X^{\otimes m})$ de sorte que les points de base de $\mathbf{P}_{r,L}$ soient images de points rationnels de X tangents au champ de vecteurs, et soit $Y = j(X)$ le modèle m -canonique de X . On peut donc transporter sur Y les hypothèses vérifiées par X .

Soient $L((T))$ le corps de fractions de l'anneau de séries formelles en T à coefficients dans L et λ le k -automorphisme de $Y \times_{\text{Spec } L} \text{Spec } L((T))$ défini par l'homomorphisme d'algèbres :

$$\lambda^* : \mathcal{O}_Y \otimes_L L((T)) \rightarrow \mathcal{O}_Y \otimes_L L((T))$$

$$a \mapsto a + T \frac{Da}{1!} + T^2 \frac{D^2a}{2!} + \dots + T^n \frac{D^na}{n!} + \dots$$

qui se restreint en un k -automorphisme λ_0 de $L((T))$.

Soit $Y^* = Y_{\text{Spec } L} \text{Spec } L((T))$ le schéma obtenu à partir de Y par changement de base, et Y' le schéma obtenu à partir de Y^* en faisant agir λ_0 sur les coefficients; explicitement, dans l'ouvert affine de \mathbf{P}_r défini par $X_0 \neq 0$:

Y correspond à $\text{Spec } L[x_1, \dots, x_r]_{/(P_1, \dots, P_s)}$,

Y^* correspond à $\text{Spec } L((T))[x_1, \dots, x_r]_{/(P_1, \dots, P_s)}$,

Y' correspond à $\text{Spec } L((T))[x_1, \dots, x_r]_{/(\lambda_{0P_1}, \dots, \lambda_{0P_s})}$,

λ_{0P_i} étant le polynôme obtenu à partir de P_i en faisant agir λ_0 sur les coefficients.

L'isomorphisme λ définit un $L((T))$ -isomorphisme

$$\tilde{\lambda} : Y^* \rightarrow Y',$$

et puisque Y^* et Y' sont des variétés de type général plongées m -canoniquement, $\tilde{\lambda}$ est induit par un $L((T))$ -automorphisme linéaire μ de $\mathbf{P}_{r,L} \times_{\text{Spec } L} \text{Spec } L((T))$. De plus tout point $\sigma = (\sigma_0, \dots, \sigma_r)$ de $Y(L)$ qui est tangent au champ de vecteurs induit un point σ^* de $Y^*(L((T)))$, et on vérifie que :

$$\begin{aligned}\mu\sigma^* &= (\lambda_0\sigma_1, \dots, \lambda_0\sigma_r) \\ &= (\sigma_1 + T \frac{D\sigma_1}{1!} + \dots, \sigma_r + T \frac{D\sigma_r}{1!} + \dots).\end{aligned}$$

En particulier, tous les points de base du repère $((1, 0, \dots, 0) \dots, (0, \dots, 0, 1)$ et $(1, 1, \dots, 1))$ sont laissés invariants par μ , donc dans ce repère, μ est l'identité.

Dans l'ouvert affine de \mathbf{P}_r défini par $X_0 \neq 0$, $\tilde{\lambda}$ est défini par :

$$\tilde{\lambda}(x_i) = x_i + T \frac{Dx_i}{1!} + \dots + T^n \frac{D^n x_i}{n!} + \dots$$

Donc le champ de vecteurs sur Y est induit par le champ de vecteurs "horizontal" de $\mathbf{P}_{r,L}$ défini par $Dx_i = 0$ et $D|_L = D_0$, et un point σ de $Y(L)$ est tangent au champ de vecteurs si et seulement si pour tout couple (i, j) tels que $\sigma_j \neq 0$, $D_0 \frac{\sigma_i}{\sigma_j}$ est nul, c'est-à-dire si et seulement si l'image de ce point dans $\mathbf{P}_{r,k}$ par la projection $\mathbf{P}_{r,L} \rightarrow \mathbf{P}_{r,k}$ est un point fermé. D'après le lemme 2, il existe donc un sous-schéma fermé réduit Y_0 de $\mathbf{P}_{r,k}$, une immersion fermée $Y_0 \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } L \hookrightarrow Y \hookrightarrow \mathbf{P}_{r,L}$, qui induit une bijection entre $Y_0(k)$ et l'ensemble des points de $Y(L)$ tangents au champ de vecteurs, d'où le résultat puisque l'immersion fermée $Y_0 \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } L \hookrightarrow Y$ est nécessairement un isomorphisme.

THEOREME. — Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique 0, L une extension de degré de transcendance fini sur K . Soit X un schéma propre, lisse et géométriquement intègre sur L , tel que $\Omega_{X/L}^1$ soit ample. Alors si $X(L)$ est Zariski-dense dans X , il existe un k -schéma X_0 , et un L -isomorphisme $X_0 \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } L \xrightarrow{\sim} X$. De plus, $X(L) - X_0(k)$ est fini.

Démonstration. — Elle se fait par récurrence sur le degré de transcendance d de L sur k :

— si $d = 1$, cela résulte des Propositions 10 et 11.

— supposons $d \geq 2$. La démonstration est analogue à celle qui se trouve dans [13]. Soit K une extension intermédiaire :

$k \subset K \subset L$, telle que L soit de degré de transcendance 1 sur K . Il existe un corps de fonctions d'une variable L'' sur la clôture intégrale \bar{K} de K , qui contient L . D'après l'hypothèse de récurrence pour $d = 1$, il existe un schéma X' sur \bar{K} , et un L'' -isomorphisme :

$$X \times_{\text{Spec } L} \text{Spec } L'' \xrightarrow{\sim} X' \times_{\text{Spec } \bar{K}} \text{Spec } L''$$

et $X(L'') - X''(\bar{K})$ est fini.

On peut supposer que X' est défini sur une extension finie K' de K , et que l'isomorphisme est défini sur un corps de fonctions d'une variable L' sur K' contenu dans L'' :

$$\begin{array}{ccc} K & \hookrightarrow & L \\ \downarrow & & \downarrow \\ K' & \hookrightarrow & L' \\ \downarrow & & \downarrow \\ K & \hookrightarrow & L'' \end{array}$$

Alors

$$X'(L') - X'(K') = X'(L') - X'(L') \cap X''(\bar{K}) \subset X'(L'') - X'(\bar{K})$$

donc l'ensemble $X'(K')$ est dense dans X' . On peut appliquer l'hypothèse de récurrence à X' : il existe un schéma X_0 sur k , un K' -isomorphisme $X_0 \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } K' \xrightarrow{\sim} X'$, et

$$X'(K') - X_0(k)$$

est fini.

Il existe donc un K' -isomorphisme

$$\gamma : X_0 \times_{\text{Spec } k} \text{Spec } L' \xrightarrow{\sim} X \times_{\text{Spec } L} \text{Spec } L'$$

et $X(L') - X_0(k)$ est fini. Pour terminer, il nous reste à montrer que l'isomorphisme γ est défini sur L .

Puisque le faisceau $\omega_{X/L}$ est ample sur X , il en est de même de $\omega_{X_0/k}$ sur X_0 . Fixons un plongement m -canonique de X (resp. de X_0) :

$$j : X \longrightarrow \mathbf{P}_L(H^0(\omega_X^{\otimes m})) = \mathbf{P}_{r,L} \text{ (resp. } j_0 : X_0 \longrightarrow \mathbf{P}_k(H^0(\omega_{X_0}^{\otimes m})) = \mathbf{P}_r).$$

γ définit un isomorphisme $\gamma_1 : X_0(L') \xrightarrow{\sim} X(L')$

$$\begin{array}{ccc} \cup & & \cup \\ X_0(k) & & X(L) \end{array}$$

Puisque $X(L') - \gamma_1(X_0(k))$ est fini, et $X(L)$ dense dans X , on peut choisir la base de $H^0(\omega_X^{\otimes m})$ de sorte que les points de base de $P_{r,L}$ soient les images par j de points de

$$X(L) \cap \gamma_1(X_0(k)).$$

Puisque X et X_0 sont des variétés de type général, il existe un isomorphisme projectif γ' qui fait commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} X_0 \times \text{Spec } k & \xrightarrow{j_0 \times 1} & P_{r,k} \times \text{Spec } k \\ \downarrow \gamma & & \downarrow \gamma' \\ X \times \text{Spec } L & \xrightarrow{j \times 1} & P_{r,L} \times \text{Spec } L \end{array}$$

et par construction γ' est défini dans les bases choisies, par une matrice à coefficients dans k (à une constante multiplicative non nulle près), donc γ est composé de morphismes définis sur L , et est défini sur L .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] F.A. BOGOMOLOV, Counter-example to Miyaoka's claim on surfaces with ample Ω^1 , Preprint.
- [2] M. DESCHAMPS-MARTIN, Etude des extensions d'un faisceau ample par le faisceau trivial sur un schéma de type fini sur un corps, *C.R.A.S.*, t. 281, série A 35 (1975).
- [3] M. FLEXOR, Nouveaux contre-exemples aux énoncés d'annulation "à la Kodaira" en caractéristique $p > 0$. Séminaire sur les pinceaux de courbes de genre au moins 2. Exposé n° 4, *Astérisque*, n° 86 (1981).
- [4] D. GIESEKER, P-ample bundles and their Chern classes, *Nagoya Math. J.*, Vol. 43 (1971).
- [5] H. GRAUERT, Mordell's Vermutung über rationale Punkte auf algebraischen Kurven und Funktionenkörper, *Publ. Math. I.H.E.S.*, n° 25 (1965).

- [6] R. HARTSHORNE, Ample vector bundles, *Publ. Math. I.H.E.S.*, n° 29 (1966).
- [7] R. HARTSHORNE, Ample vector bundles on curves, *Nagoya Math. J.*, Vol. 43 (1971).
- [8] K. KODAIRA, A certain type of irregular algebraic surface, *Journal d'Analyse Mathématique*, Vol. 19 (1967).
- [9] K. KODAIRA et D.C. SPENCER, On deformations of complex analytic structures, *Ann. of Math.*, n° 67 (1958).
- [10] Ju. I. MANIN, Rational points of algebraic curves over function fields, *Transl. Amer. Math. Soc.*, n° 50 (1966).
- [11] J. NOGUCHI et T. SUNADA, Finiteness of the family of rational and meromorphic mappings into algebraic varieties, *Amer. J. of Math.*, Vol. 104 (1982).
- [12] P. SAMUEL, Compléments à un article de H. Grauert sur la conjecture de Mordell, *Publ. Math. I.H.E.S.*, n° 29 (1966).
- [13] P. SAMUEL, On old and new results on algebraic curves, Tata Institute Bombay.
- [13] L. SZPIRO, Propriétés numériques du faisceau dualisant relatif. Séminaire sur les pinceaux de courbes de genre au moins 2. Exposé n° 3, *Astérisque*, n° 86 (1981).

Manuscrit reçu le 6 juillet 1983.

Mireille MARTIN-DESCHAMPS,
Centre de Mathématiques
Ecole Normale Supérieure
45 rue d'Ulm
75230 Paris Cedex 05.