

J. H. DAVENPORT

**Intégration algorithmique des fonctions  
élémentairement transcendentes sur une  
courbe algébrique**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 34, n° 2 (1984), p. 271-276

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1984\\_\\_34\\_2\\_271\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1984__34_2_271_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# INTÉGRATION ALGORITHMIQUE DES FONCTIONS ÉLÉMENTAIREMENT TRANSCENDANTES SUR UNE COURBE ALGÈBRIQUE

par J. H. DAVENPORT

## 1. Introduction.

Les équations différentielles ordinaires dites « de Risch » sont très liées au problème de l'intégration formelle. En fait, le problème d'intégration  $\int ge^h dx$  est équivalent à la résolution d'une équation de Risch  $z' + h'z = g$  (l'intégrale étant alors  $ze^h$ ). Risch [6] a donné un théorème et un algorithme qui résolvent les problèmes d'intégration et d'équations de Risch sur un corps  $K(x, \theta_1, \dots, \theta_n)$ , où chaque  $\theta_i$  est élémentairement transcendant sur  $K(x, \theta_1, \dots, \theta_{i-1})$ . Malgré des remarques de Risch [7], le problème plus général, sans la condition de transcendance des  $\theta_i$ , me semble être non résolu.

Le but de cet article est de résoudre un cas plus général que le cas étudié en [6] bien qu'il n'ait pas encore toute la généralité souhaitée. Plus précisément, on résoudra les mêmes problèmes sur un corps  $K(x, y, \theta_1, \dots, \theta_n)$ , où  $y$  est algébrique sur  $K(x)$ , et chaque  $\theta_i$  est élémentairement transcendant sur  $K(x, y, \theta_1, \dots, \theta_{i-1})$ . Avant de pouvoir le faire il nous faudra une définition des équations de Risch et une formulation de son théorème qui se prête à généralisation.

## 2. Théorème de Risch.

Le théorème principal (« Main Theorem », p. 179) de [6] peut être présenté de la façon suivante (qui sera plus adaptée à nos besoins). Soient  $F$  un corps différentiel, où l'opérateur de dérivation est  $'$ , et  $K$  son corps de constantes (ensemble des éléments à dérivée nulle), tels que  $F$  et  $K$

soient effectifs (ce qui veut dire que sur eux, on peut calculer et trouver les factorisations). On suppose que  $x \in F$ , avec  $x' = 1$ . On rappelle la définition de Risch selon laquelle  $\theta$  est un *monôme* sur  $F$  si  $\theta$  est transcendant sur  $F$ ,  $F(\theta)$  a les mêmes constantes que  $F$ , et  $\theta$  est un logarithme ou une exponentielle d'un élément de  $F$ .

*Le problème d'intégration* de  $F$  est : étant donné  $f \in F$ , déterminer (par un nombre fini d'opérations) s'il existe (et trouver)  $v_0 \in F$ ,  $v_1, \dots, v_m \in \bar{K}F$ , et  $c_1, \dots, c_m \in \bar{K}$  ( $\bar{K}$  étant la clôture algébrique de  $K$ ) tels que  $f = \left( v_0 + \sum_{i=1}^m c_i \log v_i \right)'$ . On sait d'après les théorèmes de Liouville que, si  $f$  a une intégrale élémentaire, elle est d'une telle forme.

*Le problème des équations différentielles ordinaires de Risch* de  $F$  est : étant donné  $f, g_1, \dots, g_m \in F$ , trouver (en un nombre fini d'opérations)  $h_1, \dots, h_r \in F$  et un ensemble  $S$  de  $m + r$  équations linéaires sur  $K$  tels que l'équation  $z' + fz = \sum_{i=1}^m c_i g_i$  soit satisfaite avec  $z \in F$  et  $c_1, \dots, c_m \in K$  si et seulement si,  $z = \sum_{i=1}^r z_i h_i$  où  $z_1, \dots, z_r \in K$  et  $c_1, \dots, c_m, z_1, \dots, z_r$  satisfont  $S$ .

PROPOSITION 1. — *Le problème d'intégration de  $K(x)$  est résolu.*  
En fait, cette résolution est bien connue [6].

PROPOSITION 2. — *Le problème des équations différentielles de Risch de  $K(x)$  est résolu.*

PROPOSITION 3. — *Si les deux problèmes sont résolus pour un corps  $F$ , et si  $\theta$  est un monôme sur  $F$ , alors le problème d'intégration est résolu sur  $F(\theta)$ .*

PROPOSITION 4. — *Si le problème des équations différentielles ordinaires de Risch de  $F$  est résolu, si  $\theta$  est un monôme sur  $F$  tel que le problème d'intégration est résolu pour  $F(\theta)$ , alors le problème des équations différentielles de Risch est résolu pour  $F(\theta)$ .*

Une récurrence démontre que les problèmes d'intégration et d'équations différentielles ordinaires de Risch sont résolus sur toute extension élémentaire transcendant de  $K(x)$  par un nombre fini de monômes. On peut aussi trouver cette présentation dans [4] chapitre 5.

### 3. La généralisation.

On veut traiter  $K(x, y)$ , où  $y$  est algébrique sur  $K(x)$ . Dans cette section, on suppose que  $K$  est algébriquement clos. On remarque d'abord que si  $K$  est effectif  $K(x, y)$  est effectif [5, 9]. La solution donnée par Risch est fondée sur les décompositions en éléments simples, mais si on la réexprime avec les notions de *place* et de *valuation* [1], elle se généralise assez facilement.

PROPOSITION 2'. — *Le problème des équations différentielles de Risch de  $K(xy)$  est résolu.*

On peut réécrire l'équation sous la forme

$$(1) \quad dz + fz \, dx = (\sum c_i g_i) \, dx.$$

Si nous prenons une variable autre que  $x$ , soit  $t$ , les données changent, en ce sens que l'on multiplie  $f$  et les  $g_i$  par  $dx/dt$  mais la forme de l'équation n'est pas changée.

Alors, soient  $p$  une place de  $K(x, y)$ ,  $t$  une uniformisante de  $p$ , et  $v$  la valuation correspondante. Si l'on écrit (1) en fonction de  $t$  plutôt que de  $x$ , on trouve

$$dz + \hat{f}z \, dt = \sum c_i \hat{g}_i \, dt$$

où  $\hat{f}$  et les  $\hat{g}_i$  sont les nouvelles valeurs de  $f$  et des  $g_i$ , ce qui peut être écrit sous la forme

$$(2) \quad \frac{dz}{dt} + \hat{f}z = \sum c_i \hat{g}_i.$$

Soient  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  les valuations de  $z$ , de  $\hat{f}$  et de la partie droite de (2) respectivement (notez que notre notation a des signes négatifs par rapport à celle de Risch).  $\alpha$  est à trouver,  $\beta$  est connue, et bien que  $\gamma$  soit inconnue, sa valeur est bornée  $\gamma \geq \min(v(\hat{g}_i))$ . Appelons cette borne  $\gamma'$ . Si  $\alpha$  est négative, ce qui est la seule possibilité qui nous intéresse, on a  $v(dz/dt) = \alpha - 1$ . On sait aussi que  $v(fz) = \alpha + \beta$ . Il existe trois possibilités pour la valuation de la partie gauche de (2).

(i)  $\alpha - 1 < \alpha + \beta$ . Alors la valuation de la partie gauche de (2) est  $\alpha - 1$  et on a  $\alpha - 1 = \gamma \geq \gamma'$ .

(ii)  $\alpha - 1 > \alpha + \beta$ . Alors la valuation de la partie gauche de (2) est  $\alpha + \beta$ , et on a  $\alpha + \beta = \gamma \geq \gamma'$ .

(iii)  $\alpha - 1 = \alpha + \beta$ . Ici, *a priori*, l'on ne connaît pas la valuation de la partie gauche. Mais, s'il n'y a pas d'annulation entre les deux termes, la valuation de la partie gauche est  $\alpha + \beta$ , et l'analyse du cas précédent s'applique. Alors, supposons que les valeurs de  $zt^{-\alpha}$  et  $\hat{f}t^{-\beta}$  dans le corps de résidus soient  $Z$  et  $F$  respectivement. L'annulation a lieu si, et seulement si  $\alpha Z + ZF = 0$ , c'est-à-dire  $F = -\alpha$ .

On déduit donc une borne

$$(3) \quad \alpha \geq \min(\gamma' + 1, \gamma' - \beta, -F), (*)$$

où  $F$  n'apparaît que si c'est un entier, et aux places où  $\beta = -1$ . On voit aussi que la valuation de  $z$  n'est négative qu'aux places où l'une des  $\beta$  ou  $\gamma$  est négative. Les bornes (3) déterminent donc un diviseur  $D$  tel que  $(z)$ , le diviseur de  $z$ , satisfasse  $(z) \geq D$ . L'algorithme de Coates [2, 3] nous permet de calculer une base de solutions de cette inégalité. Cette base est  $(h_1, \dots, h_r)$ , et les équations pour les  $z_i$  sont déterminées par substitution d'une solution générale  $z = \sum z_i h_i$  dans l'équation donnée.

PROPOSITION 1'. — *Le problème d'intégration de  $K(x, y)$  est résolu.*

Nous avons déjà donné cette résolution [3].

Les propositions 3 et 4 restent encore valables, et donc, par la même récurrence, on voit que les problèmes d'intégration et d'équations différentielles ordinaires de Risch sont résolus sur toute extension de  $K(x, y)$  par un nombre fini de monômes.

#### 4. Cas de $K(x)$ .

La méthode énoncée ci-dessus est, en fait, une simplification de la méthode due à Risch, parce que le cas de l'infini n'est pas traité séparément.

(\*) En fait, on peut démontrer  $\alpha \geq \min(\max(\gamma' + 1, \gamma' - \beta), -F)$  par une considération plus détaillée.

Dans le cas de  $K(x)$ , il n'est pas nécessaire de supposer que  $K$  est algébriquement clos pour les raisons suivantes. Si on n'est pas dans le cas (iii), tout ce qui nous intéresse est le degré de  $f$  et des  $g_i$ , et les places auxquelles les degrés ont des valeurs déterminées peuvent être calculées en prenant des décompositions quadrat-frei, ce qui se calcule sur le corps de définition de  $f$  et des  $g_i$  sans aucune extension. Dans le troisième cas, on peut supposer qu'il serait nécessaire de factoriser, mais, en fait  $F$  est le résidu de  $f$  à la place  $t$ , et nous ne sommes intéressés que par les résidus qui sont des entiers. Or, après factorisation du dénominateur de  $f$  sur les nombres rationnels, les résidus correspondant à un facteur sont ou bien des nombres rationnels, auquel cas ils sont tous égaux et l'élément simple correspondant a la forme  $kp'/p$ , ou bien non-rationnels [8, Theorem 5.2].

Actuellement, il n'existe aucune théorie correspondante pour le cas général, et il est nécessaire de supposer  $K$  algébriquement clos. On peut espérer qu'une telle théorie sortira des travaux (non-publiés) de Trager sur les bases d'intégrité dans les anneaux des fonctions algébriques.

Il existe une autre remarque intéressante. Dans la preuve de la proposition 4 pour  $\theta$  logarithmique [4, 6], les places finies sont traitées exactement comme dans le cas rationnel, mais la place à l'infini est beaucoup plus difficile. Vu le fait que l'on ne peut pas poser  $\eta = 1/\theta$  et garder la nature logarithmique de l'indéterminée, cette difficulté paraît normale.

Je tiens à remercier B. M. Trager pour d'instructives discussions, et le referee pour ses bons conseils.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] C. CHEVALLEY, Introduction to the Theory of Algebraic Functions of one Variable, *A.M.S. Surveys*, VI (1951).
- [2] J. COATES, Construction of Rational Functions on a Curve, *Proc. Cam. Phil. Soc.*, 68 (1970), 105-113.
- [3] J. H. DAVENPORT, On the Integration of Algebraic Functions, *Springer Lecture Notes in Computer Science*, 102 (1981).
- [4] J. H. DAVENPORT. *Intégration Formelle*, Rapport de Recherche IMAG, Mai 1983.
- [5] J. H. DAVENPORT and B. M. TRAGER, Factorization over Finitely Generated Fields. *Proc. SYMSAC 81* (ed. P. S. Wang), A.C.M., New York, 1981.

- [6] R. H. Risch. The Problem of Integration in Finite Terms, *Trans. A.M.S.*, 139 (1969), 167-189.
- [7] R. H. Risch, The Solution of the Problem of Integration in Finite Terms, *Bull. A.M.S.*, 76 (1970), 605-608.
- [8] B. M. TRAGER, Algebraic Factoring and Rational Function Integration, *Proc. SYMSAC 76* (ed. R. D. Jenks), A.C.M., New York, 1976.
- [9] B. L. van der WAERDEN, *Modern Algebra*, F. Ungar, New York, 1949 (trad. de *Moderne Algebra* 2nd ed., Springer, Berlin, 1937).

Manuscrit reçu le 23 mars 1983.

J. H. DAVENPORT,  
Emmanuel College  
Cambridge (Grande-Bretagne).

---