

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

ANDRÉ DIDIERJEAN

ANDRÉ LEGRAND

Suites spectrales de Serre en homotopie

Annales de l'institut Fourier, tome 34, n° 2 (1984), p. 227-242

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1984__34_2_227_0

© Annales de l'institut Fourier, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUITES SPECTRALES DE SERRE EN HOMOTOPIE

par **A. DIDIERJEAN** et **A. LEGRAND**

Des approches importantes du calcul des groupes d'homotopie d'espaces fonctionnels, $\pi_n(\text{Hom}((X, x_0), (Y, y_0))) = [S^n X, Y]$, $n \geq 1$ ont été réalisées au moyen de l'homotopie rationnelle [7], ou par l'étude classique du cas stable, c'est-à-dire des groupes

$$H^n(X, S^*Y) = \varinjlim_k [S^{n+k}X, S^kY].$$

Dans ce dernier cas on dispose de la suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch et, plus généralement, si X est un fibré, de la suite spectrale de Serre généralisée [3].

Nous montrons ici qu'il existe également une suite spectrale de Serre dans le cas non stable (théorème 3.3). Cette construction est faite (§ 1, 2 et 3) à partir de suites spectrales non abéliennes limitées du type de celle introduite par Federer [5], H. Cartan et W. Shih [2], et des techniques développées par A. Legrand [9]. Cette suite spectrale redonne la suite spectrale de Shih [2], et dans le domaine stable les suites spectrales classiques de Serre et Atiyah-Hirzebruch. En se plaçant dans les conditions où cette suite spectrale donne une suite exacte de Wang (§ 4), on déduit quelques exemples de calculs de groupes de L-équivalences [13], de Γ_q -structures [6] et de cohomotopie.

Le calcul d'obstructions au lissage topologique de singularités non isolées étudié par A. Didierjean [4] a en partie motivé cette étude. Ces obstructions appartenant à des ensembles de L-équivalences du bord d'un tube, le problème se ramène au calcul de groupes d'homotopie de certains espaces fonctionnels.

1. Suites spectrales non abéliennes limitées.

Ces suites spectrales sont construites pour l'homotopie, elles « sortent » de la catégorie des groupes abéliens.

Les objets considérés sont des groupes, pas forcément abéliens, et des ensembles pointés. Une flèche entre deux groupes est un morphisme de groupes, une flèche d'un groupe dans un ensemble pointé est une opération de ce groupe sur cet ensemble. Une flèche entre ensembles pointés est une application respectant le pointage. Lorsqu'un objet est un groupe, on ne peut également le considérer comme un ensemble.

Une suite de groupes (resp. d'ensembles pointés) est exacte si elle est exacte dans la catégorie des groupes (resp. dans celle des ensembles pointés). Une suite $G \rightarrow G' \rightarrow E$, G, G' étant des groupes et E un ensemble pointé est exacte si l'image de $G \rightarrow G'$ est égale au sous-groupe de G' laissant invariant le point base de E . Une suite $G \rightarrow E \rightarrow E'$, G étant un groupe, E et E' des ensembles pointés, est exacte si les orbites de l'opération de G sur E sont les classes d'équivalences de la relation définie par $E \rightarrow E'$. Par exemple la suite exacte d'homotopie d'une fibration est exacte jusqu'au bout dans le sens précisé ci-dessus.

Définissons un système de données donnant naissance à un type de suite spectrale qu'on appellera suite spectrale non abélienne limitée. Considérons pour $n \leq 0$ et $-\infty \leq p \leq q \leq +\infty$ des objets $H^n(p, q)$. Ces objets étant des groupes pour $n < 0$ et des ensembles pointés pour $n = 0$. Supposons donnée une flèche $H^n(p, q) \rightarrow H^n(p', q')$, pour tout $p' \leq p$, $q' \leq q$ et une flèche $H^n(p, q) \rightarrow H^{n+1}(q, r)$, appelée bord, chaque fois que $p \leq q \leq r$. Ces données vérifient :

1) $H^n(p, q) \rightarrow H^n(p, q)$ est l'identité et lorsque

$$(p, q) \leq (p', q') \leq (p'', q''),$$

la flèche $H^n(p'', q'') \rightarrow H^n(p, q)$ est le composé

$$H^n(p'', q'') \rightarrow H^n(p', q') \rightarrow H^n(p, q).$$

2) Pour $(p, q, r) \leq (p', q', r')$ on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^n(p', q') & \longrightarrow & H^{n+1}(q', r') \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^n(p, q) & \longrightarrow & H^{n+1}(q, r) \end{array}$$

3) Pour $-\infty \leq p \leq q \leq r \leq +\infty$ on a une longue suite exacte limitée à droite

$$H^n(q, r) \rightarrow H^n(p, r) \rightarrow H^n(p, q) \rightarrow H^{n+1}(q, r) \rightarrow \dots \rightarrow H^0(p, r) \rightarrow H^0(p, q).$$

On définit une filtration des objets $H^n = H^n(-\infty, +\infty)$ en posant :

$$F^p H^n = \text{Im} (H^n(p, +\infty) \rightarrow H^n) = \text{Ker} (H^n \rightarrow H^n(-\infty, p)).$$

Pour $n \leq 0$ $F^{p+1} H^n$ est distingué dans $F^p H^n$ et on définit pour $p + q < 0$ le groupe bigradué $F^p H^{p+q} / F^{p+1} H^{p+q}$. On pose pour $p + q < 0$

$$E_r^{p,q} = \text{Im} (H^{p+q}(p, p+r) \rightarrow H^{p+q}(p-r+1, p+1))$$

et pour $p + q = 0$

$$E_r^{p,q} = \text{Im} (H^0(p, p+1) \rightarrow H^0(p-r+1, p+1)).$$

Pour $p + q < 0$ le bord $H^{p+q}(p-r+1, p+1) \rightarrow H^{p+q+1}(p+1, p+r+1)$ induit un opérateur

$$d_r : E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+r, q-r+1}.$$

De manière similaire au cas classique on montre [9] :

THÉORÈME 1.1. — La famille (E_r, d_r) définie ci-dessus à partir d'un système de données $H^n(p, q)$, $n \leq 0$, vérifiant les axiomes 1), 2), 3), détermine une suite spectrale appelée suite spectrale non abélienne et limitée. Cette suite spectrale commence en

$$E_1^{p,q} = H^{p+q}(p, p+1) \quad p + q \leq 0.$$

Les termes $E_r^{p,q}$ sont des groupes pour $p + q < 0$ et des ensembles pointés pour $p + q = 0$. La différentielle d_1 est l'opérateur bord de la suite exacte associée par l'axiome 3) au triplet $(p, p+1, p+2)$. Pour $p + q < 0$ les groupes bigradués $E_\infty^{p,q}$ et $F^p H^{p+q} / F^{p+1} H^{p+q}$ sont isomorphes.

Pour une telle suite spectrale non abélienne et limitée, E_{r+1} est l'homologie de (E_r, d_r) dans le sens suivant :

Pour $p + q < 0$, $\text{Im}(d_r)$ est un sous-groupe distingué de $\text{Ker}(d_r)$ et

$$E_{r+1} = \text{Ker}(d_r) / \text{Im}(d_r).$$

Pour $p + q = 0$, $d_r : E_r^{p-r, -p+r-1} \rightarrow E_r^{p, -p}$ est une opération du groupe $E_r^{p-r, -p+r-1}$ sur $E_r^{p, -p}$ et $E_{r+1}^{p, -p}$ est l'espace des orbites de cette opération.

Remarque 1.2. — Les données $H^n(p, q)$ et les termes $E_r^{p, q}$ de la suite spectrale non abélienne limitée du théorème 1.1 étaient notés respectivement $H_{-n}(p, q)$ et $E_r^{p, p+q}$ dans [9], IV, 1. De plus on a choisi ici $n = 0$ comme indice limite du système $H^n(p, q)$ parce que cela correspondait naturellement aux applications en vue. On peut prendre n'importe quelle autre valeur limite. En particulier on obtient une suite spectrale limitée en « tronquant » à l'indice $n = n_0$ des données $H^n(p, q)$ abéliennes classiques. Les termes d'indice (p, q) des suites classiques et limitées déduites coïncident alors pour $p + q \leq n_0 - 1$.

2. Homotopie de l'espace des sections d'un fibré.

Pour des raisons de fonctorialité on se place dans le cadre simplicial. Soit $Y \subset \Xi \rightarrow B$ un fibré de Kan. On note $\Gamma_B \Xi$ l'espace des sections de ce fibré, espace que l'on suppose non vide. On se fixe une section $e : B \rightarrow \Xi$. Soit B_{p+1} le p -ième squelette de B , c'est-à-dire l'ensemble simplicial engendré par les p -simplexes de B . Désignons par $\Gamma_{B_q, B_p} \Xi$, $p \leq q$, l'espace des sections de Ξ au-dessus de B_q dont la restriction à B_p coïncide avec e . On pose :

$$\bar{H}^n(p, q) = \pi_{-n}(\Gamma_{B_q, B_p} \Xi), \quad n \leq 0;$$

$\bar{H}^n(p, q)$ est donc un groupe abélien pour $n \leq -2$. Il est nul pour $q < 0$. Il résulte du lemme suivant que les $\bar{H}^n(p, q)$ font parties d'un système de données vérifiant les axiomes 1), 2), 3).

LEMME 2.1. — Pour $p \leq q \leq r$, on a des fibrations de Kan

$$\Gamma_{B_r, B_q} \Xi \rightarrow \Gamma_{B_r, B_p} \Xi \rightarrow \Gamma_{B_q, B_p} \Xi.$$

Démonstration. — Notons Ξ_p le sous-espace de Ξ se projetant sur B_p et $\text{Hom}(X, X')$ (resp. $\text{Hom}((X, A), (X', A'))$) les ensembles simpliciaux associés aux applications simpliciales $X \rightarrow X'$ (resp. $(X, A) \rightarrow (X', A')$). Le carré fibré ([11], p. 31)

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(B_r, \Xi_r) & \longrightarrow & \text{Hom}(B_q, \Xi_r) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Hom}(B_r, B_r) & \longrightarrow & \text{Hom}(B_q, B_r) \end{array}$$

induit par restriction à $\text{Hom}((B_q, B_p), (B_r, B_p))$ le carré fibré

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}((B_r, B_p), (\Xi_r, \Xi_p)) & \longrightarrow & \text{Hom}((B_q, B_p), (\Xi_r, \Xi_p)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Hom}((B_r, B_p), (B_r, B_p)) & \longrightarrow & \text{Hom}((B_q, B_p), (B_r, B_p)) \end{array}$$

La fibration du lemme est alors la fibration induite sur les fibres au-dessus de 1_{B_r} et 1_{B_q} des fibrations verticales de ce deuxième carré fibré.

Les autres données du système $\bar{H}^n(p, q)$ sont déduites des suites exactes d'homotopie des fibrations de Kan du lemme 2.1, et la filtration induite sur $\pi_m(\Gamma_B \Xi)$ est

$$\bar{F}^p \pi_m(\Gamma_B \Xi) = \text{Ker} [\pi_m(\Gamma_B \Xi) \rightarrow \pi_m(\Gamma_{B_p} \Xi)].$$

D'après le théorème 1.1, il existe une suite spectrale non abélienne limitée, (\bar{E}_r, \bar{d}_r) commençant en

$$\bar{E}_1^{p,q} = \pi_{-p-q}(\Gamma_{B_{p+1}, B_p} \Xi) \quad p + q \leq 0.$$

Le calcul des termes $E_2^{p,q}$ de cette suite spectrale peut se déduire directement du système de données précédent [8]. On préfère utiliser ici la comparaison avec une autre suite spectrale non abélienne limitée, celle-ci déduite d'une décomposition en tour de Postnikov. De manière précise notons $\Xi^q \rightarrow B$ le q -ième système de Postnikov du fibré $\Xi \rightarrow B$ ([11], p. 34). On pose $\Xi^q = B$ pour $q < 0$. Fixons un point-base $b_0 \in B$ et pointons Ξ en $e(b_0)$.

Rappelons que $\Xi^q \rightarrow \Xi^p$, $p \leq q$, est un fibré dont l'homotopie de la fibre Y_p^q vérifie les relations

$$\begin{array}{ll} \pi_i(Y_p^q) = \pi_i(Y) & \text{pour } p \leq i < q \\ \text{et } \pi_i(Y_p^q) = 0 & \text{sinon.} \end{array}$$

On omet d'écrire le point-base dans les groupes d'homotopie.

On désigne par Ξ_p^q le fibré image réciproque du fibré $\Xi^q \rightarrow \Xi^p$ par la section $B \rightarrow \Xi^p$ induite par e . On définit alors un second système de données en posant pour $n \leq 0$:

$$H^n(p, q) = \pi_{-n}(\Gamma_B \Xi_p^q).$$

Pour $p \leq q \leq r$, on a la fibration $\Xi_q^r \rightarrow \Xi_p^r \rightarrow \Xi_p^q$ d'où un fibré

$$\Gamma_B \Xi_q^r \rightarrow \Gamma_B \Xi_p^r \rightarrow \Gamma_B \Xi_p^q.$$

La longue suite exacte d'homotopie de cette fibration détermine toutes les données du système $H^n(p, q)$. A ce système correspond la filtration de $\pi_m(\Gamma_B \Xi)$:

$$F^p \pi_m(\Gamma_B \Xi) = \text{Ker} [\pi_m(\Gamma_B \Xi) \rightarrow \pi_m(\Gamma_B \Xi^p)].$$

On remarque que cette filtration F^p est différente de la filtration précédente \bar{F}^p . D'autre part le fibré $\Xi_p^{p+1} \rightarrow B$ est un fibré dont la fibre est de type $K(\pi_p(Y), p)$ admettant une section et donc on a [12], [1], [9] :

$$\pi_i(\Gamma_B \Xi_p^{p+1}) \simeq H^{p-i}(B, \pi_p(Y)),$$

les groupes de cohomologies étant ici à valeurs dans le système de coefficients locaux défini par l'opération du groupe fondamental de la base sur les groupes d'homotopie de la fibre. Remarquons que lorsque Y n'est pas simple cette opération dépend du choix de la section e .

Au système $H^n(p, q)$ est associée une suite spectrale non abélienne et limitée commençant en

$$E_1^{p,q} = H^{2p+q}(B, \pi_p(Y)), \quad p + q \leq 0.$$

Comme ces suites spectrales sont limitées au degré total $n \leq 0$ on peut appliquer le théorème IV-2 de [9]. En effet seule la première relation du lemme VI-3 de [9], dont se déduit le théorème VI-2, est alors utilisée et cette relation est vérifiée par tout fibré admettant une section.

On en déduit que les deux suites spectrales définies précédemment sont isomorphes. Plus précisément, pour $r \geq 1$, on a une famille d'isomorphismes :

$$\Psi_r^{p,q} : E_r^{p,q} \rightarrow E_{r+1}^{2p+q, -p}$$

isomorphismes qui commutent avec les différentielles d_r et \bar{d}_{r+1} .

On a ainsi :

THÉORÈME 2.2. — Soient $Y \subset \Xi \rightarrow B$ un fibré de Kan et $\Gamma_B \Xi$ l'espace de ses sections supposé non vide et pointé par le choix d'une section $e : B \rightarrow \Xi$.

1) Il existe une E_2 -suite spectrale non abélienne et limitée commençant en

$$E_2^{p,q} = H^p(B, \pi_{-q}(Y)) \quad p + q \leq 0$$

(cohomologie à coefficients locaux définis par la section e).

2) Les filtrations définies sur $\pi_m(\Gamma_B \Xi)$, $m < 0$, par la décomposition en squelette de B ou par la décomposition de Postnikov de $\Xi \rightarrow B$ donnent des bigradués isomorphes.

3) Si B est de dimension finie, cette suite spectrale converge vers ces bigradués.

3. Relation avec le cas stable.

Soient F un espace topologique pointé par un point f_0 et G un groupe d'automorphismes de F laissant fixe le point f_0 . On considère un fibré localement trivial $\varphi : Z \rightarrow B$ de fibre F et de groupe structural G associé à un fibré principal $P \rightarrow B$. Ce fibré admet ainsi une section $s : B \rightarrow Z$. On identifiera dans la suite B et $s(B)$. Si B est pointé par b_0 , on pointe l'espace Z par $s(b_0)$. Désignons par SF la suspension réduite de F . Le groupe G opère naturellement sur SF . On note $S_B Z \rightarrow B$ le fibré localement trivial de fibre SF et de groupe structural G associé au fibré principal $P \rightarrow B$.

PROPOSITION 3.1. — On a des isomorphismes

$$(S_B Z)/B \simeq S(Z/B)$$

où S désigne la suspension réduite.

On note $[\cdot, \cdot]$ les classes d'homotopie d'applications pointées.

De la proposition précédente on déduit que l'espace $\text{Hom}((Z, B), (M, m_0))$ des applications continues de Z dans un espace connexe M , envoyant le sous-espace B sur le point base m_0 de M , vérifie

COROLLAIRE 3.2. — $\pi_i(\text{Hom}((Z, B), (M, m_0))) \simeq [(S_B^i Z)/B, M]$.

De façon naturelle au fibré $Z \rightarrow B$ on associe le fibré $\Xi \rightarrow B$ de fibre $\text{Hom}((F, f_0), (M, m_0))$. L'espace des sections $\Gamma_B \Xi$ de ce fibré s'identifie à l'espace $\text{Hom}((Z, B), (M, m_0))$. Suivant le paragraphe précédent, on considère la filtration du groupe $\pi_*(\text{Hom}((Z, B), (M, m_0))) \simeq [(S_B^* Z)/B, M]$ induite par la décomposition en squelette de B :

$$F^p([(S_B^* Z)/B, M]) = \text{Ker}([(S_B^* Z)/B, M] \rightarrow [(S_{B_p}^* Z)/B_p, M])$$

où $S_{B_p}^* Z$ désigne la suspension fibrée de la restriction du fibré Z au-dessus du p -ième squelette B_p de B . Le groupe $\pi_1(B, b_0)$ opère sur $[S^* F, M]$, on note φ_m cette opération. Le théorème 2.1 du paragraphe précédent nous donne :

THÉORÈME 3.3 (suite spectrale de Serre en homotopie). — *Considérons $\varphi : Z \rightarrow B$ un fibré localement trivial de fibre F pointée en f_0 et de groupe structural G , un groupe d'automorphismes de F laissant invariant le point f_0 . On suppose que B et F sont des complexes cellulaires localement compacts. A ces données on associe, pour tout espace M , une suite spectrale limitée commençant en*

$$E_2^{\alpha, \beta} = H_{\varphi_{-\beta}}^{\alpha}(B, [S^{-\beta} F, M]), \quad \alpha + \beta \leq 0, \quad \alpha \geq 0.$$

Lorsque B est de dimension finie, cette suite spectrale converge pour $\alpha + \beta \leq -1$ vers le bigradué

$$F^{\alpha}([(S_B^{-\alpha-\beta} Z)/B, M]) / F^{\alpha+1}([(S_B^{-\alpha-\beta} Z)/B, M])$$

($\varphi_{-\beta}$ désigne le système de coefficients locaux définis ci-dessus).

Dans la suite lorsque les hypothèses du théorème 3.3 sont satisfaites, on notera

$$E_2^{\alpha, \beta} = H_{\varphi_{-\beta}}^{\alpha}(B, [S^{-\beta} F, M]) \xrightarrow{\alpha + \beta \leq -1} [(S_B^{-\alpha-\beta} Z)/B, M]$$

une telle suite spectrale.

Établissons la relation entre cette suite spectrale et la suite spectrale de Serre pour la théorie de cohomologie généralisée associée à un Ω -spectre E . Soit $(E_n)_{n \geq 0}$ un Ω -spectre. Pour tout entier N fixé on a :

$$[(S_B^k Z)/B, E_N] = [S^k(Z/B), E_N] = \tilde{H}^{N-k}(Z/B, E)$$

où $\tilde{H}^{N-k}(\cdot, E)$ désigne la théorie de cohomologie généralisée réduite associée au spectre E .

En prenant pour espace $M = E_N$ la suite spectrale du théorème précédent s'écrit :

$$E_2^{\alpha, \beta} = H_{\Phi_{-\beta}}^{\alpha}(B, \tilde{H}^{N+\beta}(F, E)) \xrightarrow{\alpha+\beta \leq -1} \tilde{H}^{N+\alpha+\beta}(Z/B, E).$$

D'autre part, en suivant [8], p. 105, on montre que l'on peut extraire « au-dessous de N » une suite spectrale limitée d'une suite spectrale classique de la façon suivante :

Soit N un entier positif et pour $-\infty < m < +\infty$ et $-\infty \leq p \leq q \leq +\infty$, supposons donnés des groupes $K^m(p, q)$ vérifiant le système d'axiomes habituel qui permet de construire une suite spectrale. On extrait de ces données une famille $H^n(p, q)$ satisfaisant au système d'axiomes d'une suite spectrale limitée en posant pour $n \leq 0$

$$H^n(p, q) = K^{N+n}(p, q).$$

Les termes $E_r^{p, q}$ et $d_r^{p, q}$ de la suite spectrale limitée construite à partir des $H^n(p, q)$ et les termes $F_r^{p, q}$ et $\delta_r^{p, q}$ de la suite classique construite à partir des $K^m(p, q)$ vérifient pour $n < 0$

$$E_r^{p, q} = F_r^{p, q+N} \quad \text{et} \quad d_r^{p, q} = \delta_r^{p, q+N}.$$

Dans notre cas en prenant $\alpha = p$ et $\beta = q$, on a :

PROPOSITION 3.4. — *Pour tout entier N positif, la suite spectrale limitée*

$$E_2^{\alpha, \beta} = H_{\Phi_{-\beta}}^{\alpha}(B, \tilde{H}^{N+\beta}(F, E)) \xrightarrow{\alpha+\beta \leq -1} \tilde{H}^{N+\alpha+\beta}(Z/B, E)$$

coïncide avec la suite spectrale « extraite » au-dessous de N de la suite spectrale de Serre pour la théorie $\tilde{H}(\cdot, E)$ (voir figure 1).

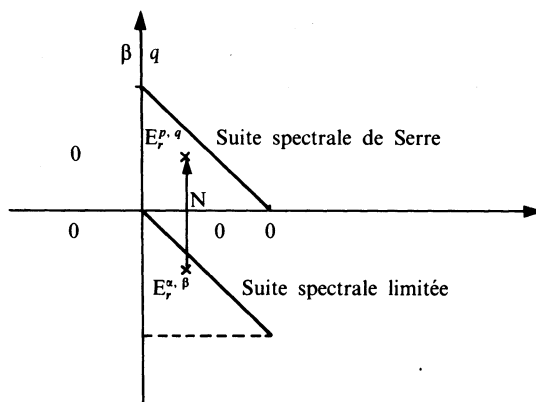


Fig. 1.

Dans le cadre « non B-pointé », on a un équivalent au théorème 3.3. Rappelons que $\text{Hom}(X, M)$ désigne l'espace des applications continues non pointées $X \rightarrow M$.

PROPOSITION 3.5. — Soit $\varphi: Z \rightarrow B$ un fibré localement trivial de groupe structural G , de fibre F , B et F étant des complexes cellulaires localement compacts, et soit M un espace pointé. A ces données on associe une suite spectrale non abélienne limitée

$$E_2^{\alpha, \beta} = H_{\varphi - \beta}^{\alpha}(B, \pi_{-\beta}(\text{Hom}(F, M))) \xrightarrow{\alpha + \beta \leq -1} \pi_{-\alpha - \beta}(\text{Hom}(Z, M))$$

le point base des groupes d'homotopie étant l'application constante sur le point base de M .

Cette proposition se déduit du théorème 3.3 en considérant le fibré constitué de la réunion disjointe de Z et d'un exemplaire de l'espace B .

Remarque 3.6. — a) En prenant $\varphi = 1_B$ dans la proposition 3.5 on retrouve la suite spectrale de Shih [2] pour les groupes $\pi_{\star}(\text{Hom}(B, \Omega M))$, c'est-à-dire

$$E_2^{\alpha, \beta} = H^{\alpha}(B, \pi_{-\beta}(M)) \xrightarrow{\alpha + \beta \leq -1} \pi_{-\alpha - \beta}(\text{Hom}(B, M)).$$

De plus par le procédé d'extraction décrit dans la proposition 3.4 on obtient la suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch pour les théories cohomologiques généralisées.

b) Pour tout espace pointé (X, x_0) on a des isomorphismes

$$\pi_k(\text{Hom}(X, M)) \simeq [S^k X, M] \oplus \pi_k(M)$$

(\oplus est un produit semi-direct pour $k = 1$) qui se déduisent de la suite exacte d'homotopie de la fibration

$$\text{Hom}((X, x_0), (M, m)) \rightarrow \text{Hom}(X, M) \rightarrow M$$

qui admet une section naturelle. Si M est 1-connexe et si on suppose de plus que dans la proposition 3.5 le fibré $Z \rightarrow B$ admet une section, alors la suite spectrale de cette proposition est somme directe d'une suite spectrale du type de celle du théorème 3.3 et d'une suite spectrale de Shih (voir a). Ce qui donne

$$H_{\varphi_{-\beta}}^{\alpha}(B, [S^{-\beta} F, M]) \oplus H_{\varphi_{-\beta}}^{\alpha}(B, \pi_{-\beta}(M)) \xrightarrow{\alpha + \beta \leq -1} [(S_B^{-\alpha - \beta} Z)/B, M] \oplus \pi_{-\alpha - \beta}(\text{Hom}(B, M)).$$

Si l'espace B est une sphère de cohomologie de dimension k et si les opérations φ_m de $\pi_1(B)$ sur $[S^m F, M]$ induites par le fibré $Z \rightarrow B$ sont triviales, des suites spectrales du théorème 3.3 et de la proposition 3.5, on tire les longues suites exactes de Wang suivantes :

PROPOSITION 3.7. — Soit $\varphi : Z \rightarrow B$ un fibré localement trivial de fibre F pointée en f_0 et de groupe structural G , un groupe d'automorphismes de F laissant invariant le point f_0 . On suppose que F est un complexe cellulaire de dimension finie, que B est une sphère de cohomologie de dimension k et que les opérations φ_m décrites précédemment sont triviales. Alors pour tout espace pointé M , la longue suite suivante est exacte :

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow [S^{n+1} F, M] \xrightarrow{d_k} [S^{n+k} F, M] \rightarrow [(S_B^{\alpha} Z)/B, M] \rightarrow [S^n F, M] \xrightarrow{d_k} \dots \\ \dots \rightarrow [(S_B Z)/B, M] \rightarrow [S F, M] \rightarrow [S^k F, M], \end{aligned}$$

où d_k est la k -ième différentielle de la suite spectrale du théorème 3.3.

PROPOSITION 3.8. — Soit $\varphi : Z \rightarrow B$ un fibré localement trivial de fibre F un complexe cellulaire de dimension finie et de base B une sphère de cohomologie de dimension k . On suppose de plus que les opérations φ_m

précédentes sont triviales. Alors pour tout espace M pointé la longue suite suivante est exacte :

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow [S^{n+1}F, M] \xrightarrow{d_k} [S^{n+k}F, M] \oplus \pi_{n+k}(M) \rightarrow [S^n Z, M] \rightarrow [S^n F, M] \\ \xrightarrow{d_k} \cdots \rightarrow [SZ, M] \rightarrow [SF, M] \rightarrow [S^k F, M] \oplus \pi_k(M), \end{aligned}$$

où d_k est la k -ième différentielle de la suite spectrale de la proposition 3.5.

4. Quelques applications.

On va effectuer quelques calculs à partir de ces suites exactes de Wang, en particulier dans le cas de fibrés de fibre un espace F homotopiquement équivalent à une sphère de dimension p et de base une sphère de cohomologie B de dimension k . Pour de tels fibrés d'espace total Z et pour tout espace M , si les opérations φ_m de $\pi_1(B)$ sur $\pi_{m+p}(M)$ induites par le fibré considéré sont triviales, les propositions 3.7 et 3.8 nous donnent les longues suites exactes suivantes :

4.1. Dans le cas où le fibré Z admet une section :

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \pi_{n+p+1}(M) \xrightarrow{d_k} \pi_{n+p+k}(M) \rightarrow [(S_B^n Z)/B, M] \rightarrow \pi_{n+p}(M) \xrightarrow{d_k} \\ \cdots \rightarrow [(S_B Z)/B, M] \rightarrow \pi_{p+1}(M) \rightarrow \pi_{p+k}(M). \end{aligned}$$

4.2. Dans le cas où le fibré Z n'admet pas de section :

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \pi_{n+p+1}(M) \xrightarrow{d_k} \pi_{n+p+k}(M) \oplus \pi_{n+k}(M) \rightarrow [S^n Z, M] \rightarrow \pi_{n+p}(M) \\ \xrightarrow{d_k} \cdots \rightarrow [SZ, M] \rightarrow \pi_{p+1}(M) \rightarrow \pi_{p+k}(M) \oplus \pi_k(M). \end{aligned}$$

Application aux ensembles de L -équivalences.

Les ensembles de L -équivalences $L_{n-\ell}(X, Z/2Z)$ introduits par R. Thom [13] sont les ensembles de classes de cobordisme non orienté des sous-variétés fermées de dimension $n-1$ d'une variété C^∞ compacte X

de dimension n . Ces ensembles sont la version « non stable » des groupes de cobordisme non orienté et R. Thom montre que l'on a la représentation ([14], théorème IV-6) : $L_{n-\ell}(X, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq [X, \text{MO}(\ell)]$.

Soit $\varphi: Z \rightarrow B$ un fibré C^∞ de fibre F une variété C^∞ compacte de dimension p et de base B , une variété C^∞ de dimension k . Si ce fibré admet une section, la suite spectrale de Serre pour ces ensembles de L-classes s'écrit (théorème 3.3) :

$$E_2^{\alpha, \beta} = H_{\varphi-\beta}^\alpha(B, L_{p-\beta-\ell}(S^{-\beta}F, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})) \xrightarrow{\alpha+\beta \leq -1} L_{p+k-\alpha-\beta}[(S_B^{-\alpha-\beta}Z)/B, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}].$$

Cette suite spectrale redonne dans le cas stable la suite spectrale de Serre du cobordisme non orienté (proposition 3.4).

D'autre part, dans le cas d'un fibré Z de fibre un espace homotopiquement équivalent à une sphère de dimension p et de base une sphère de cohomologie de dimension k , si les opérations φ_m sont triviales, la suite exacte 4.2 et le fait que l'espace de Thom $\text{MO}(\ell)$ est $\ell - 1$ connexe nous donne :

PROPOSITION 4.3. — Pour $n + p + 1 < \ell$, $n \geq 1$ on a

$$L_{n+p+k-\ell}(S^n Z, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq \pi_{n+p+k}(\text{MO}(\ell)) \oplus \pi_{n+k}(\text{MO}(\ell)).$$

Pour $p + 2 < \ell$ et $k < \ell - 1$ on a

$$L_{k+p+1-\ell}(SZ, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \simeq \pi_{k+p+1}(\text{MO}(\ell)).$$

L-équivalences et lissage de singularités.

Soit Y^{k+p} une sous-variété singulière d'une variété $C^\infty X^{p+k+\ell}$, dont le lieu singulier B^k est une sous-variété C^∞ compacte de X . On dit que la variété Y est lissable si elle est « approximable » par une famille de sous-variétés C^∞ de X (voir [4], [9]). L'obstruction au lissage de la sous-variété singulière Y se trouve dans l'ensemble des L-équivalences du bord d'un tube T autour du lieu singulier B . Réciproquement ([4], p. 25) toute classe de L-équivalence du bord de ce tube ∂T est l'obstruction au lissage d'une sous-variété singulière de la variété X , sous-variété de lieu singulier B . Les ensembles $L_{k+p-1}(\partial T, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ classifient ainsi les sous-variétés singulières de la variété X de lieu singulier B fixé.

Ainsi on s'intéresse au calcul des ensembles $L_{k+p-1}(\partial T, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ où ∂T est l'espace total d'un fibré linéaire sur B de fibre une sphère $S^{p+\ell-1}$.

Pour $k < p + \ell - 2$ le fibré $\partial T \rightarrow B$ est isomorphe à la B -suspension réduite d'un fibré $Z \rightarrow B$ de fibre une sphère $S^{p+\ell-2}$, fibré muni d'une section. L'espace B étant de dimension k et $M(O\ell)$ étant $\ell - 1$ connexe, pour $k < \ell - 1$ on a $[Z/B, M] \simeq [Z, M]$. La proposition 3.1 et la représentation des ensembles de L -équivalences ([13], théorème IV-6) nous donnent :

PROPOSITION 4.4. — Pour $k < \ell - 1$ on a

$$L_{k+p-1}(\partial T, Z/2Z) \simeq [S(Z/B), MO(\ell)].$$

Ainsi les ensembles de L -équivalences du bord d'un tel tube sont naturellement munis d'une structure de groupe.

La suite spectrale de Serre du théorème 3.3 s'écrit dans ce cas :

$$E_2^{\alpha, \beta} = H_{\varphi_{-\beta}}^{\alpha}(B, L_{p-2-\beta}(S^{p+\ell-2-\beta}, Z/2Z)) \\ \xrightarrow{\alpha+\beta \leq -1} L_{k+p-\alpha-\beta}(S_B^{-\alpha-\beta-1} \partial T, Z/2Z).$$

Si de plus B est une sphère de cohomologie de dimension k et si les opérations φ_m sont triviales, l'extrémité de la suite exacte de Wang 4.1 nous donne :

$$\dots \xrightarrow{d_k} \pi_{p+k+\ell-1}(MO(\ell)) \rightarrow L_{p+k-1}(\partial T, Z/2Z) \rightarrow \pi_{p+\ell-1}(MO(\ell)) \\ \xrightarrow{d_k} \pi_{p+\ell+k-2}(MO(\ell)).$$

Application aux Γ_q -structures.

L'ensemble des classes d'homotopie des Γ_q -structures d'un espaces X , noté $\Gamma_q(X)$ est classifié par le classifiant de Haefliger ([6], théorème 1) : $\Gamma_q(X) \simeq [X, B\Gamma_q]$. Ainsi pour tout fibré localement trivial $Z \rightarrow B$ de fibre F , tel que les espaces F et B soient de dimension finie, on a la suite spectrale (proposition 3.5) :

$$E_2^{\alpha, \beta} = H_{\varphi_{-\beta}}^{\alpha}(B, \Gamma_q(S^{-\beta}F)) \oplus H_{\varphi_{-\beta}}^{\alpha}(B, \pi_{-\beta}(B\Gamma_q)) \\ \xrightarrow{\alpha+\beta \leq -1} \Gamma_q(S^{-\alpha-\beta}Z) \times \pi_{-\alpha-\beta}(B\Gamma_q).$$

Si la base est une sphère de cohomologie de dimension k et si les opérations φ_m sont triviales, on a la longue suite exacte de Wang :

$$\dots \rightarrow \Gamma_q(S^{n+1}F) \xrightarrow{d_k} \Gamma_q(S^{n+k}F) \oplus \pi_{n+k}(B\Gamma_q) \rightarrow \Gamma_q(S^n Z) \rightarrow \Gamma_q(S^n F) \\ \xrightarrow{d_k} \dots \rightarrow \Gamma_q(SZ) \rightarrow \Gamma_q(SF) \rightarrow \Gamma_q(S^k F) \oplus \pi_k(B\Gamma_q).$$

Dans le cas des fibrés de fibre un espace homotopiquement équivalent à une sphère de dimension p et de base une sphère de cohomologie de dimension k , si les opérations φ_m sont triviales, la longue suite exacte 4.2 et le fait que l'application canonique $B\Gamma_q \rightarrow BO(q)$ est $q+1$ connexe [6] nous donnent pour $k+2 \leq q$ et $p+3 \leq q$ la longue suite exacte :

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \pi_{p+2}(BO(q)) \xrightarrow{d_k} \pi_{p+k+1}(B\Gamma_q) \oplus \pi_{k+1}(BO(q)) \\ \rightarrow \Gamma_q(SZ) \rightarrow \pi_{p+1}(BO(q)) \rightarrow . \end{aligned}$$

Les cas de nullité des groupes d'homotopie de $O(n)$ nous donnent :

PROPOSITION 4.5. — Pour $p \equiv 4, 5 \pmod{8}$ et $q \geq \sup \{k+1, p+3\}$ on a

$$\Gamma_q(SZ) \simeq \pi_{p+k+1}(B\Gamma_q) \oplus \pi_{k+1}(BO(q)).$$

Si de plus $k \equiv 2, 4, 5, 6 \pmod{8}$ on a

$$\Gamma_q(SZ) \simeq \pi_{p+k+1}(B\Gamma_q).$$

Cas de la cohomotopie.

On considère les ensembles de cohomotopie éventuellement « non stable », c'est-à-dire $\pi'(X) = [X, S']$. Comme dans les exemples précédents, pour un fibré Z de fibre un espace homotopiquement équivalent à une sphère de dimension p et de base une sphère de cohomologie de dimension k , les opérations φ_m étant supposées triviales, l'extrémité de la suite exacte 4.2 nous donne :

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \pi_{p+k+1}(S') \oplus \pi_{k+1}(S') \rightarrow \pi'(SZ) \rightarrow \pi_{p+1}(S') \\ \rightarrow \pi_{p+k}(S') \oplus \pi_k(S'). \end{aligned}$$

Et en utilisant des cas de nullité des groupes d'homotopie stable des sphères, on a :

PROPOSITION 4.6. — Si $p = \ell + 3$ et $\ell \geq 7$ on a

$$\pi'(SZ) \simeq \pi_{p+k+1}(S') \oplus \pi_{k+1}(S').$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] H. J. BAUES, Obstruction theory, *Lecture Notes in Mathematics*, 628 (1977), Springer Verlag.
- [2] H. CARTAN et W. SHIH, Classes d'applications d'un espace dans un groupe topologique, *Séminaire E.N.S., H. Cartan*, 1962/1963.
- [3] E. DYER, *Cohomology theories*, New York, Benjamin, 1969.
- [4] A. DIDIERJEAN, Cobordisme fibré et approximation d'une sous-variété singulière par des sous-variétés C^∞ , *Ann. Inst. Fourier*, 33, 1 (1983), 277-306.
- [5] FEDERER, A study of function spaces by spectral sequence, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 82 (1956), 340-361.
- [6] A. HAEFLIGER, Feuilletages sur les variétés ouvertes, *Topology*, 9 (1970), 183-194.
- [7] A. HAEFLIGER, Rational homotopy of the space of sections of a nilpotent bundle, *Trans. A.M.S.*, 273 (1982), 609-620.
- [8] A. LEGRAND, Sur les groupes d'homotopie de l'espace des applications continues d'un espace fibré dans un groupe topologique, *C.R.A.S.*, Paris, 281 (1975), 609-611.
- [9] A. LEGRAND, Homotopie des espaces de sections, *Lecture Notes in Mathematics*, 941 (1982), Springer Verlag.
- [10] A. LEGRAND et A. DIDIERJEAN, Calculs d'ensembles de L-équivalences, *C.R.A.S.*, Paris, 294 (1982), 103-106.
- [11] J. P. MAY, Simplicial objects in algebraic topology, Van Nostrand, *Math. Studies* (1967).
- [12] J. SIEGEL, Higher order cohomology operations in local coefficient theory, *Amer. J. Math.*, 89 (1967), 909-931.
- [13] R. THOM, Quelques propriétés globales des variétés différentiables, *Comm. Math. Helv.*, 28 (1954), 17-86.

Manuscrit reçu le 25 mars 1983.

A. LEGRAND,
Université Paul Sabatier
Département de Mathématiques
118, route de Narbonne
31077 Toulouse Cedex.

A. DIDIERJEAN,
Université de Strasbourg I
Département de Mathématiques
7, rue René Descartes
67084 Strasbourg Cedex.
