

A. ACHOUR

K. TRIMECHE

La g -fonction de Littlewood-Paley associée à un opérateur différentiel singulier sur $(0, \infty)$

Annales de l'institut Fourier, tome 33, n° 4 (1983), p. 203-226

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1983__33_4_203_0

© Annales de l'institut Fourier, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

LA g -FONCTION DE LITTLEWOOD-PALEY ASSOCIÉE À UN OPÉRATEUR DIFFÉRENTIEL SINGULIER SUR $(0, \infty)$

par A. ACHOUR et K. TRIMECHE

I. INTRODUCTION

On considère l'opérateur différentiel L sur $]0, \infty[$ défini par

$$Lu = \frac{1}{A} (Au)'$$

où $A :]0, \infty[\rightarrow \mathbf{R}$ est une fonction de la forme

$$A(t) = t^{2\alpha+1} C(t), \quad \alpha > -\frac{1}{2}$$

C étant une fonction de \mathbf{R} dans \mathbf{R} , strictement positive, paire et de classe C^∞ . On suppose en plus :

- i) A est croissante,
- ii) $\frac{A'}{A}$ est décroissante et tend vers $2\rho > 0$ à l'infini.

Les conditions (i) et (ii) sont vérifiées quand

$$A(t) = 2^{2(\alpha+\beta+1)} (\operatorname{sh} t)^{2\alpha+1} (\operatorname{ch} t)^{2\beta+1}, \quad \alpha > \beta > -\frac{1}{2},$$

l'opérateur L correspondant est alors l'opérateur de Jacobi.

Pour certaines valeurs des paramètres α et β , l'opérateur de Jacobi est la partie radiale de l'opérateur de Laplace-Beltrami sur un espace symétrique de type non compact de rang 1.

On associe à cet opérateur la g -fonction de Littlewood-Paley : Pour tout f dans D_0 , espace des fonctions de classe C^∞ sur \mathbf{R} paires et à

support compact, on pose

$$g(f)(x) = \int_0^\infty t |\nabla P^t f(x)|^2 dt$$

où ∇ est l'opérateur

$$\nabla = \left(\left| \frac{\partial}{\partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial}{\partial x} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

et P^t est le semi-groupe de Poisson associé à l'opérateur $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + L_x$.

On démontre que pour tout $p \in]1, \infty[$, il existe deux constantes C_p et D_p telles que pour tout f dans D_0

$$C_p \|f\|_p \leq \|g(f)\|_p \leq D_p \|f\|_p$$

où $\| \cdot \|_p$ est la norme sur l'espace $L^p((0, \infty), A(x) dx)$.

Ces inégalités ont été conjecturées par Stein ([3], p. 137) lequel ne fait sur A que l'hypothèse : « $\frac{A'}{A}$ est décroissante ».

On énonce aussi un résultat sur les multiplicateurs, semblable à celui obtenu par Stein ([3], p. 121) à l'aide de méthodes probabilistes.

Le plan de ce travail est le suivant :

– On étudie dans le deuxième paragraphe la transformation de Fourier associée à L , les fonctions définies positives ainsi que les opérateurs de translations généralisés associés à L .

– Dans le troisième paragraphe, on étudie le semi-groupe de Poisson associé à L et on démontre l'inégalité

$$|\nabla P^{2t} f|^2 \leq P^t (|\nabla P^t f|^2).$$

Cette inégalité a été obtenue grâce à un principe de maximum pour l'opérateur $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + L_x$, [4].

– Au dernier paragraphe, on démontre, grâce à l'inégalité ci-dessus et en suivant les méthodes de [3], les inégalités concernant la g -fonction de Littlewood-Paley.

II. L'OPÉRATEUR L

On considère l'opérateur différentiel L sur $]0, \infty[$ défini par

$$Lu = \frac{1}{A} (Au)'$$

où $A : [0, \infty[\rightarrow \mathbf{R}$ est une fonction de la forme

$$A(t) = t^{2\alpha+1} C(t), \quad \alpha > -\frac{1}{2},$$

C étant une fonction de \mathbf{R} dans \mathbf{R} strictement positive, paire et de classe C^∞ .

On suppose en plus

- i) A est croissante,
- ii) $\frac{A'}{A}$ est décroissante et tend vers $2\rho > 0$ quand t tend vers l'infini.

Il résulte des théorèmes de Bochner [1] que, pour tout λ dans \mathbf{C} , l'équation

$$\begin{cases} Lu = -(\lambda^2 + \rho^2)u \\ u(0) = 1, \quad u'(0) = 0 \end{cases}$$

possède une solution unique qu'on notera φ_λ . C'est une fonction qui est définie sur \mathbf{R} tout entier et est paire.

Les propriétés suivantes des fonctions φ_λ se trouvent dans [2], [5].

PROPOSITION II.1. — 1) Pour tout $x > 0$, et tout $\lambda \in \mathbf{C}$:

$$\varphi_\lambda(x) = \int_0^x K(x,y) \cos \lambda y \, dy$$

où $K(x, \cdot) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ est une fonction continue sur $] -x, x[$, à support dans $] -x, x[$ positive et intégrale.

2) Pour tout $x > 0$ et tout $\lambda \in \mathbf{C}$

$$|\varphi_\lambda(x)| \leq \varphi_{|\operatorname{Im} \lambda}(x) \leq \exp(|\operatorname{Im} \lambda|x).$$

3) Il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall x \geq 0, \quad \forall \lambda \in \mathbf{R} : \quad |\varphi_\lambda(x)| \leq C(1+x)e^{-\rho x}.$$

4) On a la formule du produit :

$$\varphi_\lambda(x)\varphi_\lambda(y) = \int_0^\infty \varphi_\lambda(z)W(x,y, dz)$$

où $W(x,y, dz)$ est une mesure positive, à support dans $[|x-y|, x+y]$, de masse totale 1 et symétrique en x et y .

En plus des propriétés précédentes, nous aurons besoin de

PROPOSITION II.2. — Il existe des constantes positives C_1, C_2 telles que :

$$1) \quad \forall x \geq 0, \quad \forall \lambda \in \mathbf{R} : \quad |\varphi'_\lambda(x)| \leq C_1(\lambda^2 + \rho^2)(1+x)xe^{-\rho x}.$$

$$2) \quad \forall x \geq 0, \quad \forall \lambda \in \mathbf{R} : \quad |\varphi''_\lambda(x)| \leq C_2(\lambda^2 + \rho^2)(1+x)^2 e^{-\rho x}.$$

Démonstration. — On a

$$\varphi'_\lambda(x) = \frac{1}{A(x)} \int_0^x A(t)L\varphi_\lambda(t) dt = \frac{-(\lambda^2 + \rho^2)}{A(x)} \int_0^x \varphi_\lambda(t) A(t) dt.$$

Il résulte de la proposition II.1 :

$$|\varphi'_\lambda(x)| \leq C \frac{\lambda^2 + \rho^2}{A(x)} (1+x) \int_0^x A(t) e^{-\rho t} dt.$$

Il suffit maintenant de majorer l'intégrale par $x A(x) e^{-\rho x}$, ce qui est possible puisque la fonction $t \rightarrow A(t) e^{-\rho t}$ est croissante. Cela donne la première inégalité. La deuxième est maintenant immédiate.

PROPOSITION II.3. — Pour tout $a > 0$ et tout $n \in \mathbf{N}$, il existe un entier m et une constante $C > 0$ tels que pour tout λ :

$$\sup_{|x| \leq a} \left| \frac{d^n \varphi_\lambda(x)}{dx^n} \right| \leq C |\lambda|^m.$$

Démonstration. — La transformation χ de Riemann-Liouville associée à l'opérateur L ([5]), est un automorphisme de l'espace de Fréchet des

fonctions de classe C^∞ sur \mathbf{R} et paire. La proposition résulte alors du fait que :

$$\varphi_\lambda(x) = \int_0^x K(x,y) \cos \lambda y \, dy = \chi(\cos \lambda \cdot)(x).$$

1. La transformation de Fourier associée à L .

Soit μ la mesure sur $(0, \infty)$ de densité A par rapport à la mesure de Lebesgue.

On note $L^p(\mu)$ l'espace $L^p((0, \infty), \mu)$ muni de la norme $\| \cdot \|_p$ définie par

$$\|f\|_p = \left(\int_0^\infty |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty$$

$$\|f\|_\infty = \sup \text{ess } |f(t)|.$$

La proposition II.1 montre que, pour tout $q > 2$ et tout $\lambda \geq 0$, la fonction φ_λ est dans $L^q(\mu)$. Il résulte de l'inégalité de Hölder que si $f \in L^p(\mu)$, $1 \leq p < 2$, la formule

$$\hat{f}(\lambda) = \int_0^\infty f(x)\varphi_\lambda(x) \, d\mu(x)$$

définit une fonction $\hat{f} : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{C}$ bornée. Cette fonction est appelée transformée de Fourier de f .

Dans [2] l'auteur introduit les espaces $D_0(\mathbf{R})$ et H_0 :

– $D_0(\mathbf{R})$ est l'espace des fonctions $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ de classe C^∞ , paires et à support compact.

– H_0 est l'espace des fonctions $\Psi : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ entières, paires et vérifiant :

$$\exists R t q, \quad \forall m \in \mathbf{N}, \quad \sup_{\lambda \in \mathbf{C}} |(1 + \lambda^2)^m \Psi(\lambda) \exp(-R |\text{Im } \lambda|)| < + \infty$$

et démontre le

THÉORÈME II.1. – 1) *La transformation de Fourier est un isomorphisme d'espaces vectoriels de $D_0(\mathbf{R})$ sur H_0 .*

2) Il existe une mesure tempérée σ sur $(0, \infty)$ telle que pour tout $f \in D_0(\mathbf{R})$

$$f(x) = \int_0^\infty \hat{f}(\lambda) \varphi_\lambda(x) d\sigma(\lambda).$$

3) La transformation de Fourier se prolonge en un isomorphisme d'espaces de Hilbert de $L^2(\mu)$ sur $L^2((0, \infty), \sigma)$.

2. Fonctions définies-positives.

DÉFINITION II.1. — Une fonction paire $\Psi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ continue et bornée est dite définie-positif si, pour tout h dans $\mathcal{S}_0(\mathbf{R})$, espace des fonctions de \mathbf{R} dans \mathbf{C} , de classe C^∞ , paires et à décroissance rapide, on a

$$\forall x, \int_0^\infty h(\lambda) \varphi_\lambda(x) d\sigma(\lambda) \geq 0 \Rightarrow \forall x, \int_0^\infty \Psi(\lambda) h(\lambda) \varphi_\lambda(x) d\sigma(\lambda) > 0.$$

PROPOSITION II.4. — Pour tout $t > 0$, la fonction $\lambda \rightarrow \exp(-t(\lambda^2 + \rho^2))$ est définie-positif.

Démonstration. — La formule du produit pour des fonctions φ_λ montre que, pour tout $x > 0$, la fonction $\lambda \rightarrow \varphi_\lambda(x)$ est définie-positif. On en déduit aussitôt que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction $\lambda \rightarrow \varphi_\lambda^n(x)$ est définie-positif et qu'il en est alors de même pour les fonctions $\lambda \rightarrow \exp(b\varphi_\lambda(x))$, $b > 0$. Ainsi pour tout $t > 0$, la fonction

$$\lambda \rightarrow \exp\left((2\alpha + 1)t \frac{\varphi_\lambda(x) - 1}{x^2}\right)$$

est définie-positif. Il suffit de faire tendre x vers 0 pour obtenir le résultat.

LEMME II.1. — Soit v une fonction dans $D_0(\mathbf{R})$, positive, à support dans $[-1, 1]$ et vérifiant $\|v\|_1 = 1$. Alors, pour tout $\varepsilon \in]0, 1]$, la fonction v_ε définie par

$$v_\varepsilon(x) = (\varepsilon A(x))^{-1} A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) v\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

est à support dans $[-\varepsilon, \varepsilon]$ et vérifie $\|v_\varepsilon\|_1 = 1$.

En outre, il existe $K > 0$ tel que

$$\forall \lambda, |\hat{v}_\varepsilon(\lambda) - 1| \leq \varepsilon K(\lambda^2 + \rho^2).$$

Démonstration. — On a

$$\hat{v}_\varepsilon(\lambda) - 1 = \int_0^\varepsilon v_\varepsilon(x)(\varphi_\lambda(x) - 1) d\mu(x).$$

Il suffit de majorer $|\varphi_\lambda(x) - 1|$ à l'aide de la formule des accroissements finis et de la proposition II.2.

THÉORÈME II.2. — La fonction $E : \mathbf{R} \times]0, \infty[\rightarrow \mathbf{R}$ définie par

$$E(x, t) = E_t(x) = \int_0^\infty e^{-t(\lambda^2 + \rho^2)} \varphi_\lambda(x) d\sigma(\lambda)$$

est positive.

Démonstration. — Avec les notations du lemme II.1, on a

$$v_\varepsilon(x) = \int_0^\infty \hat{v}_\varepsilon(\lambda) \varphi_\lambda(x) d\sigma(\lambda).$$

La fonction \hat{v}_ε est dans $\mathcal{S}_0(\mathbf{R})$, v_ε est positive et

$$\lambda \rightarrow \exp(-t(\lambda^2 + \rho^2))$$

est définie-positive. On en déduit :

$$\int_0^\infty \hat{v}_\varepsilon(\lambda) e^{-t(\lambda^2 + \rho^2)} \varphi_\lambda(x) d\sigma(\lambda) \geq 0.$$

Le lemme montre que cette dernière intégrale tend vers $E(x, t)$ quand ε tend vers 0, cela démontre le théorème.

3. Opérateurs de translation généralisée.

Soit $x \geq 0$. On pose pour tout f dans $D_0(\mathbf{R})$

$$T_x f(y) = \int_0^\infty f(z) W(x, y, dz).$$

D'après [2], la mesure produit $W(x, y, dz) d\mu(y)$ est symétrique par rapport à y et z :

$$W(x, y, dz) d\mu(y) = W(x, z, dy) d\mu(z).$$

On en déduit que pour tout $p \in [1, \infty]$

$$\|T_x f\|_p \leq \|f\|_p$$

et, en utilisant la formule du produit,

$$(\widehat{T_x f})(\lambda) = \varphi_\lambda(x) \widehat{f}(\lambda).$$

D'autre part, l'écriture

$$T_x f(y) = \int_0^\infty \varphi_\lambda(x) \varphi_\lambda(y) \widehat{f}(\lambda) d\sigma(\lambda)$$

montre que l'application $(x, y) \rightarrow T_x f(y)$ est continue sur $[0, \infty[\times [0, \infty[$.

PROPOSITION II.5. — 1) Soit f un élément de $D_0(\mathbf{R})$ à support dans $[-a, a]$. Pour tout $x \geq 0$, $T_x f$ est un élément de $D_0(\mathbf{R})$ à support inclus dans $[-x-a, a+x]$.

2) Soit f une fonction dans $L^p(\mu)$, $1 \leq p < \infty$. L'application de $[0, \infty[$ dans $L^p(\mu)$ qui à x associe $T_x f$ est continue.

3) Soit f une fonction dans $\mathcal{C}_0(\mathbf{R})$, espace des fonctions paires continues sur \mathbf{R} et tendant vers 0 à l'infini. L'application de $[0, \infty[$ dans $\mathcal{C}_0(\mathbf{R})$ qui à x associe $T_x f$ est continue quand $\mathcal{C}_0(\mathbf{R})$ est muni de la norme $\| \cdot \|_\infty$.

Démonstration. — 1) D'après la proposition II.1

$$\forall x \geq 0, \quad \forall \lambda \in \mathbf{C}, \quad |\varphi_\lambda(x)| \leq \exp x |\operatorname{Im} \lambda|.$$

Puisque f est dans $D_0(\mathbf{R})$, le théorème II.1 montre que $(\widehat{T_x f})$ est dans H_0 si bien que $T_x f$ est dans $D_0(\mathbf{R})$. En ce qui concerne le support de $T_x f$, il suffit d'utiliser le fait que le support de la mesure $W(x, y, dz)$ est dans $[|x-y|, x+y]$.

2) Il suffit de considérer le cas où f est dans $D_0(\mathbf{R})$. Pour tout $x_0 \geq 0$, il existe $A > 0$ tel que

$$x > 0 \quad \text{et} \quad |x - x_0| \leq 1 \Rightarrow \operatorname{supp} T_x f \subset [-A, A],$$

d'où

$$\|T_x f - T_{x_0} f\|_p \leq \left(\int_0^{\wedge} d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in [0, A]} |T_x f(y) - T_{x_0} f(y)|.$$

La continuité de l'application $(x, y) \rightarrow T_x f(y)$ sur $[0, \infty[\times [0, \infty[$ montre que le second membre tend vers 0 quand x tend vers x_0 .

3) Cela se fait comme (2).

A l'aide des opérateurs de translation $(T_x)_{x \geq 0}$, on peut définir un produit de convolution :

PROPOSITION II.6. — 1) Soient $f \in L^1(\mu)$ et $g \in L^p(\mu)$, $1 \leq p \leq \infty$. L'application $f * g$ définie presque partout par

$$f * g(x) = \int_0^{\infty} T_x f(y) g(y) d\mu(y)$$

est un élément de $L^p(\mu)$ et

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p.$$

2) Pour tout f dans $L^1(\mu)$ et tout g dans $L^p(\mu)$, $1 \leq p \leq 2$, on a :

$$(f * g)^{\wedge} = \hat{f} \hat{g}.$$

III. — LE SEMI-GROUPE DE POISSON ASSOCIÉ À L'OPÉRATEUR L

1. Équation de la chaleur.

On a vu dans le théorème II.2, que la fonction $E : \mathbf{R} \times]0, \infty[\rightarrow \mathbf{R}$ définie par

$$E(x, t) = E_t(x) = \int_0^{\infty} e^{-t(\lambda^2 + \rho^2)} \varphi_{\lambda}(x) d\sigma(\lambda)$$

est positive. Par ailleurs, la proposition II.3 montre que E est de classe C^{∞} et vérifie

$$\frac{\partial}{\partial t} E = L_x E.$$

PROPOSITION III.1. — Il existe un entier n_0 tel que :

$$\forall x_0 > 0, \quad \forall \eta > 0, \quad \exists C > 0,$$

$$tq \ x \geq x_0 \Rightarrow E_t(x) \leq C \frac{e^{+t\eta^2}}{t^{n_0 + \frac{1}{2}}} e^{(\rho - \eta)x}.$$

Démonstration. — Comme la mesure σ est tempérée, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{(1 + \lambda^2 + \rho^2)^{n_0}} < +\infty.$$

En procédant comme dans [2], on obtient pour tout $\eta > 0$

$$E_t(x) = \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty + i\eta}^{+\infty + i\eta} w(z) \varphi_1(x, z) m(z) dz$$

$$+ \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty - i\eta}^{+\infty - i\eta} w(z) \varphi_2(x, z) m(z) dz$$

où on a posé

$$w(z) = (1 + z^2 + \rho^2)^{n_0} \exp[-t(z^2 + \rho^2)]$$

$$m(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{(\lambda - z)(1 + \lambda^2 + \rho^2)^{n_0}},$$

et φ_1, φ_2 sont deux fonctions telles que pour tout $x, x > x_0 > 0$, et tout $z, \operatorname{Im} z = \eta$,

$$|\varphi_1(x, z)| < Ce^{(\rho - \eta)x}, \quad |\varphi_2(x, \bar{z})| < Ce^{(\rho - \eta)x},$$

C étant une constante ne dépendant que de x_0 et de η .
La proposition est maintenant immédiate.

COROLLAIRE III.1. — 1) Pour tout $p \geq 1$ et tout $t > 0$, la fonction E_t est dans $L^p(\mu)$.

2) Pour tout $t > 0$, on a :

$$\|E_t\|_1 = 1.$$

3) Pour $t > 0$ et $s > 0$, on a :

$$E_t * E_s = E_{t+s}.$$

Démonstration. — La première assertion résulte de la proposition précédente. Pour le reste, il suffit d'utiliser :

$$\|E_t\|_1 = \hat{E}_t(i\rho) = 1, \quad \hat{E}_t \cdot \hat{E}_s = \hat{E}_{t+s}.$$

COROLLAIRE III.2. — Soient $p \in [1, 2[$ et $f \in L^p(\mu)$. Posons pour $t > 0$ et $x \in \mathbf{R}$:

$$u(x, t) = E_t * f(x).$$

On a

$$1) u(x, t) = \int_0^\infty e^{-t(\lambda^2 + \rho^2)} \hat{f}(\lambda) \varphi_\lambda(x) d\sigma(\lambda).$$

2) u est de classe C^∞ sur $\mathbf{R} \times]0, \infty[$ et vérifie :

$$\frac{\partial}{\partial t} u = L_x u.$$

Démonstration. — On a :

$$u(x, t) = \int_0^\infty T_x E_t(y) f(y) d\mu(y).$$

Notons q le conjugué de p . L'inégalité de Hölder donne

$$|u(x, t) - u(x', t)| \leq \|f\|_p \|T_x E_t - T_{x'} E_t\|_q.$$

La proposition II.5 montre alors que l'application $x \rightarrow u(x, t)$ est pour tout $t > 0$, une application continue.

D'autre part, il résulte de la proposition II.6 que

$$(E_t * f)^\wedge(\lambda) = e^{-t(\lambda^2 + \rho^2)} \hat{f}(\lambda)$$

comme \hat{f} est bornée, on a pour tout $t > 0$,

$$u(x, t) = \int_0^\infty e^{-t(\lambda^2 + \rho^2)} \hat{f}(\lambda) \varphi_\lambda(x) d\sigma(\lambda) \quad \text{p.p.}$$

L'assertion (1) résulte alors du fait que les deux membres ci-dessus sont continus en x .

L'assertion (2) résulte de la proposition II.3.

LEMME III.1. — On a

$$\forall a > 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \int_a^{+\infty} E_t(y) d\mu(y) = 0.$$

Démonstration. — Il suffit de montrer que les mesures $E_t(y) d\mu(y)$ convergent étroitement vers la masse de Dirac δ_0 . Soit f dans $D_0(\mathbf{R})$, on a

$$\int_0^{\infty} E_t(y) f(y) d\mu(y) = \int_0^{\infty} e^{-t(\lambda^2 + \rho^2)} \hat{f}(\lambda) d\sigma(\lambda)$$

si bien que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^{\infty} E_t(y) f(y) d\mu(y) = \int_0^{\infty} \hat{f}(\lambda) d\sigma(\lambda) = f(0).$$

PROPOSITION III.2. — 1) Soit $f \in \mathcal{C}_0(\mathbf{R})$ une fonction continue sur \mathbf{R} , paire et tendant vers 0 à l'infini. Pour tout $x \geq 0$, on a :

$$\lim_{t \rightarrow 0} E_t * f(x) = f(x).$$

En outre la convergence est uniforme sur $[0, \infty[$.

2) Soient $p \in [1, \infty[$ et $f \in L^p(\mu)$; on a :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|E_t * f - f\|_p = 0.$$

Démonstration. — 1) D'après la proposition II.5, l'application $x \rightarrow T_x f$ est continue.

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists a > 0, \quad \text{tel que } 0 \leq x \leq a \Rightarrow \|T_x f - f\|_{\infty} < \varepsilon.$$

La première assertion résulte de

$$\begin{aligned} |E_t * f(x) - f(x)| &= \left| \int_0^{\infty} (T_y f(x) - f(x)) E_t(y) d\mu(y) \right| \\ &\leq \int_0^a |T_y f(x) - f(x)| E_t(y) d\mu(y) + 2\|f\|_{\infty} \int_a^{\infty} E_t(y) d\mu(y). \end{aligned}$$

2) La démonstration se fait comme pour l'assertion précédente.

THÉORÈME III.1. — 1) Les applications T^t , $t > 0$, définies par

$$T^t f = E_t * f$$

sont des opérateurs positifs et bornés de $L^p(\mu)$, $1 \leq p \leq \infty$.

2) La famille $(T^t)_{t>0}$ est un semi-groupe fortement continu d'opérateurs de $L^p(\mu)$, $1 \leq p < \infty$.

3) Pour tout f dans $L^2(\mu)$

$$(T^t f)^\wedge(\lambda) = e^{-t(\lambda^2 + \rho^2)} \hat{f}(\lambda).$$

En particulier, dans $L^2(\mu)$, les opérateurs T^t sont auto-adjoints.

4) Soient $p \in [1, 2[$ et $f \in \mathcal{C}_0(\mathbf{R}) \cap L^p(\mu)$. La fonction

$$u : \mathbf{R} \times [0, \infty[\rightarrow \mathbf{C}$$

définie par :

$$u(x, t) = T^t f(x)$$

est paire en x , de classe C^∞ et est solution du système :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u &= L_x u \\ u(x, 0) &= f(x). \end{cases}$$

Démonstration. — Les assertions 1, 2, et 3 sont immédiates. L'assertion 4 résulte du corollaire III.2 et de la proposition III.2.

2. Le semi-groupe de Poisson.

Le semi-groupe de Poisson $(P^t)_{t>0}$ associé à l'opérateur L est obtenu à partir du semi-groupe de Gauss $(T^t)_{t>0}$ par la formule

$$P^t = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} T^{4u} du.$$

Les propriétés du semi-groupe de Gauss montrent que

1) Pour tout $t > 0$, P^t est un opérateur auto-adjoint de $L^2(\mu)$.

2) Soit $t > 0$. Pour tout $p \in [1, \infty]$, P^t est un opérateur positif de

$L^p(\mu)$, et si $f \in L^p(\mu)$:

$$P^t f = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} T^{4u} f \, du.$$

3) La famille $(P^t)_{t>0}$ est un semi-groupe fortement continu d'opérateurs de $L^p(\mu)$, $1 \leq p < \infty$.

4) Si f est dans $\mathcal{C}_0(\mathbf{R})$, $P^t f$ est dans $\mathcal{C}_0(\mathbf{R})$ et

$$P^t f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} T^{4u} f(x) \, du.$$

En outre, quand t tend vers 0, $P^t f$ converge vers f uniformément sur \mathbf{R} .

D'autre part, puisque

$$T^t f = E_t * f$$

on a

$$5) \quad P^t f = p_t * f$$

où

$$p_t(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} E_{t^2}^{4u}(x) \, du.$$

Les propriétés de E_t montrent que :

$$6) \|p_t\|_1 = 1 \text{ et } p_t > 0.$$

$$7) \hat{p}_t(\lambda) = \exp(-t(\lambda^2 + \rho^2)^{\frac{1}{2}}).$$

$$8) p_t * p_s = p_{t+s}.$$

PROPOSITION III.3. — Soient $p \in [1, 2[$ et $f \in L^p(\mu)$. Posons pour $t > 0$ et $x \in \mathbf{R}$

$$u(x, t) = p_t * f(x).$$

1) On a

$$a) u(x, t) = \int_0^\infty e^{-t(\lambda^2 + \rho^2)^{\frac{1}{2}}} \hat{f}(\lambda) \phi_\lambda(x) \, d\sigma(\lambda),$$

b) u est de classe C^∞ sur $\mathbf{R} \times]0, \infty[$ et vérifie :

$$\Delta u = \frac{\partial^2}{\partial t^2} u + L_x u = 0.$$

2) Si on suppose de plus que f est dans $\mathcal{C}_0(\mathbf{R})$, alors u se prolonge par continuité à $\mathbf{R} \times [0, \infty[$ et :

$$u(x, 0) = f(x).$$

Démonstration. — La démonstration de (1) est identique à celle du corollaire III.2. — La deuxième assertion résulte de la propriété 4 ci-dessus.

LEMME III.2. — Il existe une constante M telle que pour tout $t > 0$:

$$t \left\| \frac{\partial}{\partial t} p_t \right\|_1 \leq M.$$

Démonstration. — En posant $y = \frac{t^2}{4u}$ dans l'expression

$$p_t(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} E_{t^2/4u}(x) du$$

on obtient

$$p_t(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty t y^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{t^2}{4y}} E_y(x) dy.$$

La proposition III.1 permet de dériver par rapport à t sous le signe somme, et on a alors

$$t \left| \frac{\partial}{\partial t} p_t(x) \right| \leq \frac{1}{t^2} \int_0^\infty \Psi\left(\frac{y}{t^2}\right) E_y(x) dy$$

où on a posé

$$\Psi(u) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} u^{-\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{1}{2u}\right) e^{-\frac{1}{4u}}.$$

Le lemme découle maintenant du fait que

$$\int_0^\infty E_y(x) d\mu(x) = 1.$$

LEMME III.3. — Soit f un élément de $D_0(\mathbf{R})$. Posons :

$$u(x,t) = P^t f(x).$$

1) Pour tout $x \geq 0$ et $t > 0$, on a :

$$\left| A(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \right| \leq \|Lf\|_1.$$

2) Il existe une constante C telle que pour tout $x > 0$, $t > 0$ et $n = 1, 2$:

$$\left| \frac{\partial^n u}{\partial t^n}(x,t) \right| + \left| \frac{\partial^n u}{\partial x^n}(x,t) \right| \leq C(1+x)^2 e^{-\rho(x+t)}.$$

Démonstration. — 1) On a

$$A(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \int_0^x L_y u(y,t) A(y) dy,$$

si bien que

$$\begin{aligned} \left| A(x) \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \right| &\leq \int_0^\infty |L_y u(y,t)| A(y) dy \\ &\leq \int_0^\infty \int_0^\infty p_t(z) |T_z(Lf)(y)| d\mu(y) d\mu(z) \\ &\leq \|Lf\|_1. \end{aligned}$$

2) On a

$$u(x,t) = \int_0^\infty e^{-t(\lambda^2 + \rho^2)^{\frac{1}{2}}} \hat{f}(\lambda) \varphi_\lambda(x) d\sigma(\lambda).$$

Il suffit alors de tenir compte du fait que \hat{f} est à décroissance rapide et des majorations données dans les propositions II.1 et II.2.

Dans la suite, on désignera par ∇ l'opérateur $\left(\left| \frac{\partial}{\partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial}{\partial x} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

LEMME III.4. — Soit f une fonction à valeurs réelles et appartenant à $D_0(\mathbf{R})$. Considérons les fonctions u et F définies sur $\mathbf{R} \times [0, \infty[$ par :

$$u(x,t) = P^t f(x)$$

et

$$F(x,t) = |\nabla u(x,t)|^2 = \left| \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \right|^2.$$

Alors

1) F est continue sur $\mathbf{R} \times [0, \infty[$, de classe C^∞ sur $\mathbf{R} \times]0, \infty[$, paire par rapport à x et vérifie :

$$\Delta F \geq 0.$$

2) Il existe une constante M telle que pour tout $x > 0$ et $t > 0$:

$$F(x, t) \leq M(1+x)^4 e^{-2\rho(x+t)}.$$

Démonstration. — 1) La première partie résulte de la proposition III.3. Montrons que $\Delta F > 0$.

On utilisera l'identité :

$$L(uv) = uLv + vLu + 2 \frac{du}{dx} \cdot \frac{dv}{dx}.$$

Posons maintenant :

$$X = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad Y = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Puisque $\Delta u = 0$, on a :

$$\Delta X = 0, \quad \Delta Y = - \left(\frac{A'}{A} \right)' Y.$$

On en déduit

$$\Delta F = \Delta X^2 + \Delta Y^2 = 2|\nabla X|^2 + 2|\nabla Y|^2 - 2 \left(\frac{A'}{A} \right)' Y^2.$$

Comme $\frac{A'}{A}$ est décroissante, ΔF est positif.

2) C'est une conséquence du lemme III.3.

PROPOSITION III.4. — Soit $h : \mathbf{R} \times [0, \infty[\rightarrow \mathbf{R}$ une application continue, de classe C^∞ sur $\mathbf{R} \times]0, \infty[$ et vérifiant :

$$1) h(x, t) = h(-x, t).$$

$$2) h(x, 0) = 0 \text{ et } \lim_{x^2 + t^2 \rightarrow +\infty} h(x, t) = 0,$$

$$3) \Delta h \leq 0.$$

Alors h est positive ou nulle.

Démonstration. — Il existe une application $k : \mathbf{R} \times [0, \infty[\rightarrow \mathbf{R}$ telle que :

$$k(x^2, t) = h(x, t).$$

Cette fonction k vérifie :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 4r \frac{\partial^2}{\partial r^2} + 4(\alpha + 1 + D(r)) \frac{\partial}{\partial r} \right] k(r, t) \leq 0$$

où

$$D(x^2) = \frac{x C'(x)}{2C(x)}.$$

Si la fonction k n'est pas positive ou nulle, son minimum ne peut, d'après le principe du maximum de Hopf, être atteint que sur l'axe $r = 0$. Mais puisque $4(\alpha + 1 + D(0))$ est strictement positif, il résulte de ([4] lemme, p. 1205) que la fonction k est constante. D'où la contradiction.

THÉORÈME III.2. — Pour tout f dans $D_0(\mathbf{R})$, on a :

$$|\nabla P^{2t} f(x)|^2 \leq P^t |\nabla P^t f(x)|^2.$$

Démonstration. — On peut supposer que f est à valeurs réelles. Soit $s \in]0, \infty[$; posons

$$h(x, t) = P^t F(x, s) - F(x, t + s)$$

où F est la fonction du lemme III.4. Ce lemme montre que l'application g définie par

$$g(x) = F(x, s)$$

est dans $L^p(\mu)$, $1 < p \leq +\infty$. Il résulte de la proposition III.3 que

$$P^t g(x) = P^t F(x, s) = \int_0^\infty e^{-t(\lambda^2 + \rho^2)^{\frac{1}{2}}} \hat{g}(\lambda) \varphi_\lambda(x) d\sigma(\lambda).$$

Comme \hat{g} est bornée, on a :

$$\lim_{x^2 + t^2 \rightarrow +\infty} P^t F(x, s) = 0$$

et par suite

$$\lim_{x^2 + t^2 \rightarrow +\infty} h(x, t) = 0.$$

Le lemme III.4 montre que g est dans $\mathcal{C}_0(\mathbf{R})$. Il résulte donc de la proposition III.3 que h est continue sur $\mathbf{R} \times]0, \infty[$, de classe C^∞ sur $\mathbf{R} \times]0, \infty[$ et vérifie

$$h(x, 0) = 0$$

et

$$\Delta h(x, t) = \Delta P^t g(x) - \Delta F(x, t+s) \leq 0 \quad (\text{lemme III.4}).$$

La proposition III.4 montre que h est positive. Il suffit de faire maintenant $s = t$.

PROPOSITION III.5. — Soient f et g deux éléments de $D_0(\mathbf{R})$ positifs et non identiquement nuls.

Posons :

$$u(x, t) = P^t f(x), \quad v(x, t) = P^t g(x).$$

Pour tout $p > 1$, on a :

$$1) \int_0^\infty \int_0^\infty t \Delta u^p(x, t) d\mu(x) dt = \int_0^\infty f^p d\mu.$$

$$2) \int_0^\infty \int_0^\infty t \Delta(u^p v)(x, t) d\mu(x) dt = \int_0^\infty f^p g d\mu.$$

Démonstration. — 1) Comme $\Delta u = 0$, on a

$$\Delta u^p = p(p-1)u^{p-2}|\nabla u|^2 > 0.$$

Cela permet d'écrire

$$\int_0^\infty \int_0^\infty t \Delta u^p d\mu dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \int_0^n t \Delta u^p d\mu dt.$$

Le lemme III.3 permet de montrer, en intégrant par parties, que

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(\int_0^n t \frac{\partial^2 u^p}{\partial t^2} dt \right) d\mu = \int_0^\infty f^p d\mu.$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n t \left(\int_a^n L_x u^p d\mu \right) dt = 0.$$

Cela démontre la première formule. Pour la deuxième formule, l'égalité

$$\Delta u^p v = v \Delta u^p + 2 \left\{ \frac{\partial u^p}{\partial t} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial u^p}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right\}$$

permet de montrer que $\Delta u^p v$ est intégrable (chaque terme du second membre est intégrable). On peut alors procéder comme pour la première formule.

IV. INÉGALITÉ DE LITTLEWOOD-PALEY

1. Les g -fonctions de Littlewood-Paley.

On pose pour tout f dans $D_0(\mathbf{R})$,

$$g_i(f)(x) = \left(\int_0^\infty t^{2i-1} \left| \frac{\partial^i}{\partial t^i} P^t f(x) \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

et

$$g(f)(x) = \left(\int_0^\infty t |\nabla P^t f(x)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Nous allons établir certaines inégalités.

LEMME IV.1. — Soient f et h deux éléments de $D_0(\mathbf{R})$ positifs et non identiquement nuls. On a :

$$\int_0^\infty g^2(f)h \, d\mu \leq 4 \int_0^\infty \int_0^\infty t |\nabla P^t f(x)|^2 P^t h(x) \, d\mu(x) \, dt$$

et

$$\int_0^\infty g^2(f)h \, d\mu \leq 8 \left\{ \int_0^\infty f^2 h \, d\mu + \int_0^\infty f^* g(f)g(h) \, d\mu \right\}$$

où

$$f^*(x) = \sup_{t>0} |P^t f(x)|.$$

Démonstration. — On a

$$\int_0^\infty g^2(f)h \, d\mu = \int_0^\infty \int_0^\infty s |\nabla P^s f(x)|^2 h(x) \, d\mu(x) \, ds.$$

Il résulte du théorème III.2 que :

$$\int_0^\infty g^2(f)h \, d\mu \leq \int_0^\infty \int_0^\infty s P^{\frac{s}{2}} |\nabla P^{\frac{s}{2}} f(x)|^2 h(x) \, d\mu(x) \, ds.$$

Il suffit maintenant de poser $t = \frac{s}{2}$ et d'utiliser le fait que P' est autoadjoint.

La deuxième inégalité s'obtient à partir de la première comme dans [3, p. 53]. — Posons

$$u(x,t) = P'f(x), \quad v(x,t) = P'h(x).$$

On a

$$2|\nabla u|^2 v = \Delta(u^2 v) - 4u \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

L'inégalité précédente donne

$$\int_0^\infty g^2(f)h \, d\mu \leq 2 \int_0^\infty \int_0^\infty t \Delta(u^2 v) \, d\mu + 8 \int_0^\infty \int_0^\infty tu|\nabla u| |\nabla v| \, d\mu \, dt.$$

La deuxième inégalité résulte donc de la proposition III.5, et de l'inégalité de Schwarz qui donne

$$\int_0^\infty \int_0^\infty tu|\nabla u| |\nabla v| \, d\mu \, dt \leq \int_0^\infty f^*g(f)g(h) \, d\mu.$$

THÉORÈME IV.1. — Soit $p \in]1, \infty[$. Il existe une constante D_p telle que pour tout f dans $D_0(\mathbf{R})$:

$$\|g(f)\|_p \leq D_p \|f\|_p.$$

Démonstration. — Il suffit puisque g est sous-additive

$$(g(f_1 + f_2)) \leq g(f_1) + g(f_2)$$

de considérer le cas où f est positive. On va considérer d'abord le cas où $p < 2$. On a, en posant $u(x,t) = P'f(x)$,

$$\Delta u^p = p(p-1)u^{p-2}|\nabla u|^2$$

si bien que

$$\int_0^\infty |g(f)|^p \, d\mu = \left(\frac{1}{p(p-1)} \right)^{\frac{p}{2}} \int_0^\infty \left| \int_0^\infty tu^{2-p}(x,t) \Delta u^p(x,t) \, dt \right|^{\frac{p}{2}} \, d\mu.$$

Posons

$$I(x) = \int_0^\infty t \Delta u^p(x,t) \, dt.$$

L'inégalité de Hölder donne

$$\|g(f)\|_p^p \leq \left(\frac{1}{p(p-1)} \right)^{\frac{p}{2}} \|\Pi\|_1^{\frac{p}{2}} \|f^*\|_p^{p \frac{2-p}{2}}.$$

Il est bien connu [3, p. 73] qu'il existe une constante A_p indépendante de f telle que :

$$\|f^*\|_p \leq A_p \|f\|_p.$$

La proposition III.5 permet de conclure.

En procédant comme dans [3, p. 44], on peut, grâce au lemme IV.1, démontrer le théorème pour $p \geq 4$. Le cas où $p \in]2, 4[$ résulte alors du théorème d'interpolation de Marcinkiewicz [6].

LEMME IV.2. — On a, pour tout f dans $D_0(\mathbf{R})$,

$$\|f\|_2 = 2\|g_1(f)\|_2.$$

Démonstration. — En posant

$$a_t(\lambda) = -(\lambda^2 + \rho^2)^{\frac{1}{2}} e^{-t(\lambda^2 + \rho^2)^{\frac{1}{2}}} \hat{f}(\lambda)$$

on obtient

$$\frac{\partial}{\partial t} P^t f(x) = \int_0^\infty a_t(\lambda) \varphi_\lambda(x) d\sigma(\lambda).$$

Il résulte alors du théorème II.1 :

$$\|g_1(f)\|_2^2 = \int_0^\infty t \left\| \frac{\partial}{\partial t} P^t f \right\|_2^2 dt = \int_0^\infty t \|a_t\|_2^2 dt = \frac{1}{4} \|f\|_2^2.$$

En procédant maintenant comme dans [3, p. 56], on obtient :

PROPOSITION IV.1. — Soient $p \in]1, \infty[$ et D_p la constante du théorème IV.1. On a, pour tout f dans $D_0(\mathbf{R})$,

$$(4 D_p)^{-1} \|f\|_p \leq \|g_1(f)\|_p \leq \|g(f)\|_p.$$

PROPOSITION IV.2. — Pour tout f dans $D_0(\mathbf{R})$, on a :

$$g_1(f) \leq g_2(f).$$

Démonstration. — Il suffit de considérer le cas où f est réelle. Le lemme III.3 montre

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t \frac{\partial}{\partial t} P^t f(x) = 0.$$

On obtient alors en intégrant par parties

$$\int_0^\infty t \left| \frac{\partial}{\partial t} P^t f(x) \right|^2 dt = - \int_0^\infty t^2 \frac{\partial}{\partial t} P^t f(x) \frac{\partial^2}{\partial t^2} P^t f(x) dt.$$

L'inégalité de Schwarz montre que

$$g_1^2(f) \leq g_1(f)g_2(f).$$

PROPOSITION IV.3. — Soit $p > 2$. Il existe une constante X_p telle que pour tout f dans $D_0(\mathbf{R})$:

$$\|g_2(f)\|_p \leq X_p \|g(f)\|_p.$$

Démonstration. — Le lemme III.2 permet de faire la même démonstration que celle de [3, p. 61].

2. Fonctions de type transformée de Laplace.

Soit $m: (0, \infty) \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction mesurable et bornée, la formule

$$(T_m f)^\wedge = m \hat{f}$$

définit, d'après le théorème II.1, une application linéaire $T_m: D_0 \rightarrow L^2(\mu)$. On dira que m est un multiplicateur de $L^p(\mu)$, $1 < p < \infty$, s'il existe une constante M_p telle que pour tout f dans $D_0(\mathbf{R})$:

$$\|T_m f\|_p \leq M_p \|f\|_p.$$

DÉFINITION. — Une fonction $m: (0, \infty) \rightarrow \mathbf{C}$ est dite de type transformée de Laplace si :

$$m(\lambda) = (\lambda^2 + \rho^2)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty e^{-t(\lambda^2 + \rho^2)^{\frac{1}{2}}} a(t) dt$$

où a est une fonction mesurable et bornée.

