Annales de l'institut Fourier

Philippe Cassou-Noguès
Martin J. Taylor

Constante de l'équation fonctionnelle de la fonction L d'Artin d'une représentation symplectique et modérée

Annales de l'institut Fourier, tome 33, nº 2 (1983), p. 1-17
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1983__33_2_1_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
33, 2 (1983), 1-17.

CONSTANTE DE L'ÉQUATION FONCTIONNELLE DE LA FONCTION L D'ARTIN D'UNE REPRÉSENTATION SYMPLECTIQUE ET MODÉRÉE

par Ph. CASSOU-NOGUÈS et M. J. TAYLOR

Introduction.

Soient K un corps de nombres ou une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ et N une extension galoisienne, finie et modérément ramifiée de K, de groupe de Galois Γ et d'anneau d'entiers $\mathfrak{O}_N$.

L'action naturelle de Γ sur $\mathfrak{O}_N$ permet de considérer la structure galoisienne de $\mathfrak{O}_N$, c'est-à-dire sa structure de $\mathbf{Z}_p[\Gamma]$-(resp. $\mathbf{Z}[\Gamma]$-) module dans le cas local (resp. global). Sous les hypothèses faites sur la ramification de N sur K nous savons que $\mathfrak{O}_N$ est un $\mathbf{Z}_p[\Gamma]$-(resp. $\mathbf{Z}[\Gamma]$-) module libre (resp. projectif).

Nous associons à la trace de N sur $\mathbf{Q}_p$ (resp. $\mathbf{Q}$), dans le cas local (resp. global), une forme bilinéaire symétrique, non dégénérée, invariante par Γ. Le couple formé par $\mathfrak{O}_N$, considéré comme module galoisien, et par la forme trace, définit sur $\mathfrak{O}_N$ une structure plus fine que la structure galoisienne; nous l'appelons structure hermitienne. Cette structure est définie de façon plus précise dans les paragraphes 1 et 3.

Si K est un corps de nombres nous associons à tout caractère de Γ sa fonction L d'Artin étendue. La constante de l'équation fonctionnelle, satisfaite par cette fonction, est égale à ± 1 lorsque le caractère est symplectique. Nous l'appelons constante symplectique.

Si K est une extension de $\mathbf{Q}_p$, nous savons, grâce à Langlands et Deligne, associer à tout caractère de Γ une constante locale, égale à ± 1 si le caractère est symplectique. Nous l'appelons constante symplectique locale.

Un des principaux intérêts de l'étude des structures galoisiennes et hermitiennes des anneaux d'entiers est le lien mis en évidence par Fröhlich entre cette étude et celle du signe des constantes symplectiques de Γ. De nombreux résultats partiels ont conduit Fröhlich à faire les deux conjectures suivantes, auxquelles nous donnerons une forme plus précise au paragraphe 3.

CONJECTURE A ([3]). — *Le signe des constantes symplectiques de* Γ *détermine la structure galoisienne globale de* $\mathfrak{O}_N$.

Cette conjecture a été démontrée en 1981 par M. J. Taylor, [9]. Le résultat obtenu signifie que la seule obstruction pour que $\mathfrak{O}_N$ soit un $\mathbf{Z}[\Gamma]$-module stablement libre provient du signe des constantes symplectiques de Γ. Par contre, comme on le constate dans des cas particuliers, la structure galoisienne de $\mathfrak{O}_N$ ne suffit pas à déterminer le signe des constantes symplectiques de Γ. C'est la structure hermitienne qu'il faut considérer.

CONJECTURE B ([5]. — *Les constantes symplectiques locales* (*resp. globales*) *sont des invariants associés à la structure hermitienne locale* (*resp. globale*) *de* $\mathfrak{O}_N$.

Cet article contient l'étude de la structure hermitienne globale des anneaux d'entiers. Le nouveau résultat que nous obtenons est la démonstration de la conjecture B dans le cas global. Cette conjecture est démontrée dans le cas local dans [1]. Certains résultats énoncés ne sont qu'une reformulation de résultats déjà contenus dans [6], [9] et [1], néanmoins un des principaux intérêts de cet article est d'unifier, dans le cas global, les théories galoisiennes et hermitiennes des anneaux d'entiers de corps de nombres.

Dans [4] et [5], Fröhlich introduit la notion de groupe des classes hermitien et définit le discriminant d'un module hermitien comme un élément de ce groupe. Nous définissons, § 2, un nouveau sous-groupe du groupe des classes hermitien. Le théorème principal de cet article, § 3, est le calcul du discriminant du module hermitien formé par l'anneau des entiers et la forme trace, qui appartient au sous-groupe introduit précédemment. Nous obtenons une démonstration des conjectures A et B comme corollaire de ce théorème.

Le dernier paragraphe fait un lien entre ces résultats globaux et les résultats locaux de [1].

L'interprétation des constantes symplectiques que nous obtenons en démontrant la conjecture B est à rapprocher de l'interprétation donnée par Deligne ([2]) des constantes locales d'un caractère orthogonal de degré 0 et de déterminant 1.

1. Groupe des classes hermitien.

La notion de groupe des classes hermitien et de discriminant de modules hermitiens a été introduite par Fröhlich. Nous nous contentons dans ce paragraphe de rappeler les définitions que nous utilisons dans les paragraphes suivants. Pour une étude plus complète de ces groupes, le lecteur peut se reporter à [4], chapitre II, et pour une lecture rapide à [6].

Si A est un anneau, A^* désigne le groupe des éléments inversibles. Un A-module sera toujours un A-module à droite, de manière à ce que les notations de cet article soient celles déjà utilisées dans [1].

Soit Γ un groupe fini. Nous considérons la catégorie des $\mathbf{Z}[\Gamma]$-modules hermitiens donnés par (M,h) où M est un $\mathbf{Z}[\Gamma]$-module localement libre, $V = M \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ et h une forme hermitienne non dégénérée de :

$$V \times V \to \mathbf{Q}[\Gamma]$$

telle que :

a) h est $\mathbf{Q}$-linéaire en chaque variable et l'on a :

$$h(m,n\alpha) = h(m,n)\alpha, \qquad \forall m, n \in V, \qquad \alpha \in \mathbf{Q}[\Gamma].$$

b) $$h(m,n) = \overline{h(n,m)}, \qquad \forall m,n \in V$$

où $-$ est l'involution standard de $\mathbf{Q}[\Gamma]$ définie par :

$$\overline{\sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma \gamma} = \sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma \gamma^{-1}.$$

On désigne par $K_0H(\mathbf{Z}[\Gamma])$ le groupe de Grothendieck des classes d'isométrie des $\mathbf{Z}[\Gamma]$-modules hermitiens et des sommes orthogonales. Ce groupe est difficile à étudier, nous allons dans ce qui suit en définir une bonne « approximation », plus simple à étudier.

On note $\bar{\mathbf{Q}}$ la clôture algébrique de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{C}$, $\Omega_{\mathbf{Q}}$ le groupe de Galois de $\bar{\mathbf{Q}}$ sur $\mathbf{Q}$, $J(\bar{\mathbf{Q}})$ le groupe des idèles de $\bar{\mathbf{Q}}$, $U(\bar{\mathbf{Q}})$ le groupe des idèles unités de $\bar{\mathbf{Q}}$ et $U_+(\bar{\mathbf{Q}})$ le groupe des idèles unités, réelles et positives en toute place à l'infini.

Soit r une représentation de Γ dans $\mathrm{GL}_n(\bar{\mathbf{Q}})$ de caractère χ. Pour toute place p de $\mathbf{Q}$, r se prolonge en un homomorphisme d'algèbre de $\mathbf{Q}_p[\Gamma]$ dans $\mathrm{M}_n(\bar{\mathbf{Q}}\otimes_{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}_p)$. Si α appartient à $\mathbf{Q}_p[\Gamma]^*$ le déterminant de $r(\alpha)$ est un élément de $(\bar{\mathbf{Q}}\otimes_{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}_p)^*$, qui ne dépend que de χ; on le note $\mathrm{Det}_\chi(\alpha)$. Soit R_Γ le groupe des caractères virtuels de Γ, l'application $(\chi\to\mathrm{Det}_\chi(\alpha))$ se prolonge par linéarité à R_Γ. C'est un élément du groupe $\mathrm{Hom}_{\Omega_{\mathbf{Q}}}(\mathrm{R}_\Gamma,(\bar{\mathbf{Q}}\otimes_{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}_p)^*)$.

Pour tout corps de nombres L, d'anneau d'entiers $\mathfrak{O}_{\mathrm{L}}$, notons $\hat{\mathfrak{O}}_{\mathrm{L}}[\Gamma] = \overline{\prod_{\mathfrak{p}}}\,\mathfrak{O}_{\mathrm{L},\mathfrak{p}}[\Gamma]$ où $\mathfrak{p}$ parcourt les places de L et où $\mathfrak{O}_{\mathrm{L},\mathfrak{p}}$ désigne le complété de $\mathfrak{O}_{\mathrm{L}}$ (resp. L) en $\mathfrak{p}$ si $\mathfrak{p}$ est fini (resp. infini). Soit $\alpha = (\alpha_p)$ un élément de $\hat{\mathbf{Z}}[\Gamma]^*$, nous notons $\mathrm{Det}(\alpha)$ l'élément de $\mathrm{Hom}_{\Omega_{\mathbf{Q}}}(\mathrm{R}_\Gamma,\mathrm{J}(\bar{\mathbf{Q}}))$ défini par :

$$\mathrm{Det}(\alpha)(\chi)_p = \mathrm{Det}(\alpha_p)(\chi), \qquad \forall\chi\in\mathrm{R}_\Gamma,$$

pour toute place p de $\mathbf{Q}$.

Nous rappelons que le caractère de la représentation r de Γ est dit symplectique si r laisse invariante une forme bilinéaire alternée, non dégénérée de $\bar{\mathbf{Q}}^n$. Nous notons R_Γ^s le sous-groupe de R_Γ des caractères virtuels symplectiques de Γ, c'est-à-dire des caractères de Γ, différence de caractères de représentations symplectiques.

Il est clair que si α appartient à $\hat{\mathbf{Z}}[\Gamma]^*$ alors $\mathrm{Det}(\alpha)$ appartient au groupe $\mathrm{Hom}^+_{\Omega_{\mathbf{Q}}}(\mathrm{R}_\Gamma,\mathrm{U}(\bar{\mathbf{Q}}))$ des homomorphismes f tels que $f(\chi)$ appartienne à $\mathrm{U}(\bar{\mathbf{Q}})$ (resp. $\mathrm{U}_+(\bar{\mathbf{Q}})$) pour tout caractère (resp. caractère symplectique) χ de Γ.

Soit le groupe :

$$\text{(1.1)} \qquad \frac{\mathrm{Hom}_{\Omega_{\mathbf{Q}}}(\mathrm{R}_\Gamma,\mathrm{J}(\bar{\mathbf{Q}}))}{\mathrm{Det}(\hat{\mathbf{Z}}[\Gamma]^*)} \times \mathrm{Hom}_{\Omega_{\mathbf{Q}}}(\mathrm{R}_\Gamma^s\Lambda\bar{\mathbf{Q}}^*)$$

et l'homomorphisme Δ de $\mathrm{Hom}_{\Omega_{\mathbf{Q}}}(\mathrm{R}_\Gamma,\bar{\mathbf{Q}}^*)$ dans ce groupe, défini par :

$$\Delta(f) = (f^{-1}\,(\mathrm{mod.}\ \mathrm{Det}(\hat{\mathbf{Z}}[\Gamma]^*),f^s)$$

où f^s désigne la restriction de f à R_Γ^s.

(1.2) Le groupe des classes hermitien $\mathrm{HCl}(\mathbf{Z}[\Gamma])$ de $\mathbf{Z}[\Gamma]$ est par définition le conoyau de Δ.

A tout module hermitien, Fröhlich associe un élément de $\mathrm{HCl}(\mathbf{Z}[\Gamma])$

qu'il appelle discriminant de ce module. Cette définition tient compte des deux propriétés des modules hermitiens : être localement libre, posséder une forme hermitienne. Par passage au quotient il en déduit un homomorphisme de groupe de $K_0H(\mathbf{Z}[\Gamma])$ dans $HCl(\mathbf{Z}[\Gamma])$ que nous appelons encore discriminant et notons d. Tout homomorphisme de groupe de Grothendieck, induit par extension ou restriction des scalaires, changement de groupe Γ, possède une traduction naturelle, via le discriminant, dans le groupe des classes hermitien.

Soit $K_0(\mathbf{Z}[\Gamma])$ (resp. $K_0(\bar{\mathbf{Q}}[\Gamma])$) le groupe de Grothendieck des $\mathbf{Z}[\Gamma]$-(resp. $\bar{\mathbf{Q}}[\Gamma]$-) modules projectifs. L'extension des scalaires induit un homomorphisme de $K_0(\mathbf{Z}[\Gamma])$ dans $K_0(\bar{\mathbf{Q}}[\Gamma])$ dont le noyau est appelé le groupe des classes de $\mathbf{Z}[\Gamma]$. Nous le notons $K'_0(\mathbf{Z}[\Gamma])$. Nous définissons le groupe $K'_0H(\mathbf{Z}[\Gamma])$ comme le noyau de l'extension des scalaires de $K_0H(\mathbf{Z}[\Gamma])$ dans $K_0H(\bar{\mathbf{Q}}[\Gamma])$, groupe de Grothendieck des $\bar{\mathbf{Q}}[\Gamma]$-modules hermitiens.

Le foncteur d'oubli $(M,h) \to (M)$ induit un homomorphisme de groupe de $K_0H(\mathbf{Z}[\Gamma])$ (resp. $K_0H(\bar{\mathbf{Q}}[\Gamma])$) dans $K_0(\mathbf{Z}[\Gamma])$ (resp. $K_0(\bar{\mathbf{Q}}[\Gamma])$), qu'on note δ (resp. $\bar{\delta}$), tel que les diagrammes suivants soient commutatifs :

$$(1.3)\qquad \begin{array}{ccccccc} \{0\} \to & K'_0H(\mathbf{Z}[\Gamma]) & \to & K_0H(\mathbf{Z}[\Gamma]) & \to & K_0H(\bar{\mathbf{Q}}[\Gamma]) \\ & \downarrow \delta' & & \downarrow \delta & & \downarrow \bar{\delta} \\ \{0\} \to & K'_0(\mathbf{Z}[\Gamma]) & \to & K_0(\mathbf{Z}[\Gamma]) & \to & K_0(\bar{\mathbf{Q}}[\Gamma]). \end{array}$$

Nous savons, [3], appendice A.I, ou [4], chapitre I, qu'il existe un isomorphisme de $K'_0(\mathbf{Z}[\Gamma])$ dans le groupe $Cl(\mathbf{Z}[\Gamma])$ défini par l'égalité :

$$(1.4)\qquad \mathrm{Hom}_{\Omega_\mathbf{Q}}(R_\Gamma, J(\bar{\mathbf{Q}}))/\mathrm{Det}(\tilde{\mathbf{Z}}[\Gamma]^*).\mathrm{Hom}_{\Omega_\mathbf{Q}}(R_\Gamma, \bar{\mathbf{Q}}^*).$$

En outre la projection de (1.1) sur sa première composante induit un homomorphisme évident de $HCl(\mathbf{Z}[\Gamma])$ dans $Cl(\mathbf{Z}[\Gamma])$, noté δ''.

Le diagramme suivant est commutatif :

$$(1.5)\qquad \begin{array}{ccc} K'_0H(\mathbf{Z}[\Gamma]) & \xrightarrow{\delta'} & K'_0(\mathbf{Z}[\Gamma]) \\ \big\downarrow d & & \big\downarrow \wr \\ HCl(\mathbf{Z}[\Gamma]) & \xrightarrow{\delta''} & Cl(\mathbf{Z}[\Gamma]) \end{array}$$

Nous identifions dans ce qui suit les groupes $K'_0(\mathbf{Z}[\Gamma])$ et $Cl(\mathbf{Z}[\Gamma])$.

2. Sous-groupes remarquables du groupe des classes hermitien.

Par restriction à R_Γ^s des éléments de $\mathrm{Det}(\tilde{\mathbf{Z}}[\Gamma]^*)$ nous définissons un sous-groupe de $\mathrm{Hom}_{\Omega_\mathbf{Q}}(R_\Gamma^s, U_+(\bar{\mathbf{Q}}))$, noté $\mathrm{Det}^s(\tilde{\mathbf{Z}}[\Gamma]^*)$. Si nous identifions -1 avec l'élément de $U_+(\bar{\mathbf{Q}})$ dont les composantes en toutes places finies (resp. infinies) sont égales à -1 (resp. 1), nous pouvons considérer $\mathrm{Hom}(R_\Gamma^s, \pm 1)$ comme un sous-groupe de $\mathrm{Hom}(R_\Gamma^s, U_+(\bar{\mathbf{Q}}))$. Nous déduisons de la proposition 6.1 de [1] la proposition suivante, fondamentale pour notre étude.

PROPOSITION 2.1. — $\mathrm{Hom}(R_\Gamma^s, \pm 1) \cap \mathrm{Det}^s(\tilde{\mathbf{Z}}[\Gamma]^*) = \{1\}$.

C'est en utilisant cette proposition que nous allons définir un sous-groupe de $\mathrm{HCl}(\mathbf{Z}[\Gamma])$ qui joue un rôle important dans le cas arithmétique.

Dans [3], § 12, Fröhlich a introduit le groupe suivant :

$$\mathrm{Hom}_{\Omega_\mathbf{Q}}(R_\Gamma^s/T(R_\Gamma), \pm 1) \tag{2.2}$$

où T désigne l'homomorphisme de R_Γ dans R_Γ^s défini par $T(\chi) = \chi + \bar{\chi}$; $\Omega_\mathbf{Q}$ opère trivialement sur $\{\pm 1\}$.

Nous définissons le groupe $\tilde{G}(\mathbf{Z}[\Gamma])$ par l'égalité :

$$\tilde{G}(\mathbf{Z}[\Gamma]) = \mathrm{Hom}_{\Omega_\mathbf{Q}}(R_\Gamma^s/T(R_\Gamma), \pm 1) \times \mathrm{Hom}_{\Omega_\mathbf{Q}}(R_\Gamma^s, \mathbf{Q}^*). \tag{2.3}$$

Soit u le plongement de (2.2) dans $\mathrm{Hom}_{\Omega_\mathbf{Q}}(R_\Gamma, J(\bar{\mathbf{Q}}))$ défini sur les caractères irréductibles de Γ par :

(2.4) $u(f)(\chi) = f(\chi(\mathrm{mod}\, T(R_\Gamma)))$ (resp. 1) si χ est symplectique (resp. non symplectique).

Nous en déduisons un homomorphisme u' de $\tilde{G}(\mathbf{Z}[\Gamma])$ dans

$$\frac{\mathrm{Hom}_{\Omega_\mathbf{Q}}(R_\Gamma, J(\bar{\mathbf{Q}}))}{\mathrm{Det}(\tilde{\mathbf{Z}}[\Gamma]^*)} \times \mathrm{Hom}_{\Omega_\mathbf{Q}}(R_\Gamma^s, \bar{\mathbf{Q}}^*)$$

défini par :

$$u'((f,h)) = (u(f)\,(\mathrm{mod.}\ \mathrm{Det}(\tilde{\mathbf{Z}}[\Gamma]^*)), h) \tag{2.5}$$

et par passage au quotient un homomorphisme, que nous notons i, de $\tilde{G}(\mathbf{Z}[\Gamma])$ dans $\mathrm{HCl}(\mathbf{Z}[\Gamma])$.

Proposition 2.6. — *L'homomorphisme* i *de* $\tilde{\mathrm{G}}(\mathbf{Z}[\Gamma])$ *dans* $\mathrm{HCl}(\mathbf{Z}[\Gamma])$ *est injectif.*

Le groupe $\tilde{\mathrm{G}}(\mathbf{Z}[\Gamma])$ peut donc être considéré comme un sous-groupe du groupe des classes hermitien.

Démonstration de la proposition 2.6. — C'est une conséquence des deux lemmes suivants :

Lemme 1. — u' *est injectif.*

Soit f un élément de (2.2) dont l'image par u appartient à $\mathrm{Det}(\tilde{\mathbf{Z}}[\Gamma]^*)$. La restriction de $u(f)$ à R_Γ^s appartient au groupe

$$\mathrm{Hom}_{\Omega_{\mathbf{Q}}}(\mathrm{R}_\Gamma^s, \pm 1) \cap \mathrm{Det}^s(\tilde{\mathbf{Z}}[\Gamma]^*)$$

qui est réduit à $\{1\}$, ce qui montre que f est égal à 1.

Remarque. — Soit $\mathfrak{M}$ un ordre maximal de $\mathbf{Q}[\Gamma]$ contenant $\mathbf{Z}[\Gamma]$. On sait, [4], chap. V, 6-4, que le groupe $\mathrm{Hom}^+_{\Omega_{\mathbf{Q}}}(\mathrm{R}_\Gamma, \mathrm{U}(\bar{\mathbf{Q}}))/\mathrm{Det}(\tilde{\mathbf{Z}}[\Gamma]^*)$ s'interprète comme le noyau de l'extension des scalaires de $\mathrm{K}_0\mathrm{T}(\mathbf{Z}[\Gamma])$ dans $\mathrm{K}_0\mathrm{T}(\mathfrak{M})$ où $\mathrm{K}_0\mathrm{T}(\Lambda)$ désigne, pour tout ordre Λ de $\mathbf{Q}[\Gamma]$, le groupe de Grothendieck de la catégorie des $\mathbf{Z}$-modules de torsion, quotients de deux Λ-modules localement libres. Le lemme 1 permet de considérer le groupe (2.2) comme un sous-groupe de ce noyau qu'il serait intéressant d'interpréter algébriquement.

Soit u'' la surjection canonique du groupe (1.1) sur $\mathrm{HCl}(\mathbf{Z}[\Gamma])$.

Lemme 2. — *La restriction de* u'' *à l'image de* u' *est injective.*

Soit (f,h) un élément de $\tilde{\mathrm{G}}(\mathbf{Z}[\Gamma])$ dont l'image par u' appartient à $\mathrm{Ker}\, u''$. Il existe g de $\mathrm{Hom}_{\Omega_{\mathbf{Q}}}(\mathrm{R}_\Gamma, \bar{\mathbf{Q}}^*)$ tel qu'on ait :

$$\text{et} \quad \begin{cases} (2.7) & u(f) \equiv g^{-1} \bmod. \mathrm{Det}(\mathbf{Z}[\Gamma]^*) \\ (2.8) & h = g^s. \end{cases}$$

Nous déduisons de (2.7) que g^s appartient à $\mathrm{Hom}_{\Omega_{\mathbf{Q}}}(\mathrm{R}_\Gamma^s, \mathrm{U}_+(\bar{\mathbf{Q}}))$ et grâce à (2.8) qu'il appartient à $\mathrm{Hom}_{\Omega_{\mathbf{Q}}}(\mathrm{R}_\Gamma^s, \mathbf{Q}^*)$. Ceci démontre que g^s est égal à 1 et, en utilisant (2.7), que $u(f)^s$ appartient à

$$\mathrm{Hom}_{\Omega_{\mathbf{Q}}}(\mathrm{R}_\Gamma^s, \pm 1) \cap \mathrm{Det}^s(\tilde{\mathbf{Z}}[\Gamma]^*).$$

En utilisant la proposition 2.1 nous obtenons que f est égal à 1.

Nous définissons $\tilde{K}_0H(\mathbf{Z}[\Gamma])$ comme le sous-groupe des éléments de $K_0H(\mathbf{Z}[\Gamma])$ dont le discriminant appartient à $\tilde{G}(\mathbf{Z}[\Gamma])$. En composant d avec la projection de $\tilde{G}(\mathbf{Z}[\Gamma])$ sur chacune de ses composantes nous obtenons les homomorphismes θ et η :

$$(2.9) \qquad \theta : \tilde{K}_0H(\mathbf{Z}[\Gamma]) \to \mathrm{Hom}_{\Omega_{\mathbf{Q}}}(R_\Gamma^s/T(R_\Gamma), \pm 1)$$

$$(2.10) \qquad \eta : \tilde{K}_0H(\mathbf{Z}[\Gamma]) \to \mathrm{Hom}_{\Omega_{\mathbf{Q}}}(R_\Gamma^s, \mathbf{Q}^*)$$

et, par évaluation en χ, des homomorphismes θ_χ et η_χ de $\tilde{K}_0H(\mathbf{Z}[\Gamma])$ dans $\{\pm 1\}$ et $\tilde{K}_0H(\mathbf{Z}[\Gamma])$ dans $\mathbf{Q}^*$.

3. Le théorème principal.

Nous fixons le corps de nombres K. Nous considérons les caractères virtuels de Ω_K qui sont obtenus par inflation à partir de caractères virtuels du groupe de Galois d'une extension galoisienne finie de K. Cette définition nous conduit à la définition naturelle de caractère modérément ramifié, ou caractère symplectique de Ω_K.

Nous rappelons quelques définitions ([8], chap. I et II).

A tout caractère virtuel χ de Ω_K nous associons la fonction L d'Artin étendue $\Lambda(\,,\chi)$. Elle satisfait l'équation fonctionnelle :

$$(3.1) \qquad \Lambda(s,\chi) = W(\chi).\Lambda(1-s,\bar{\chi})$$

où $\bar{\chi}$ est le caractère complexe conjugué de χ. La constante $W(\chi)$ est la constante d'Artin.

La somme de Gauss galoisienne associée au caractère χ, notée $\tau(\chi)$, est définie par l'égalité :

$$(3.2) \qquad \tau(\chi) = W(\bar{\chi}).N\mathfrak{f}(\chi)^{\frac{1}{2}}W_\infty(\chi)^{-1}$$

où $N\mathfrak{f}(\chi)^{\frac{1}{2}}$ est la racine carrée positive de la norme absolue du conducteur d'Artin de χ, $W_\infty(\chi)$ la constante d'Artin à l'infini, ([8], chap. II, définition 7.1).

Si $\chi = \bar{\chi}$, ce qui est bien sûr le cas si χ est symplectique, $W(\chi)$ est égal à ± 1. Si χ est symplectique, $W_\infty(\chi)$ est égal à ± 1 ; si en outre χ

est modérément ramifié, $N\mathfrak{f}(\chi)$ est un carré de $\mathbf{Q}$ et l'on a :

(3.3) $$W(\chi^{\omega}) = W(\chi), \qquad \forall \omega \in \Omega_{\mathbf{Q}}$$

(cf. [3], théorème 9 et [8], chap. II, théorème 7.4).

Enfin on a l'égalité :

(3.4) $$W(\chi+\bar{\chi}) = 1,$$

pour tout caractère virtuel de Ω_K (cf. [1]).

Soit N une extension galoisienne, finie et modérément ramifiée de K, de groupe de Galois Γ. Compte tenu de (3.3) et (3.4) on peut associer à N un élément $W_{N|K}$ de $\mathrm{Hom}_{\Omega_{\mathbf{Q}}}(R_\Gamma^s/T(R_\Gamma), \pm 1)$ défini par :

(3.5) $$W_{N|K}(\chi(\text{mod. } T(R_\Gamma))) = W(\chi), \qquad \forall \chi \in R_\Gamma^s$$

et un élément $\mathfrak{f}_{N|K}$ de $\mathrm{Hom}_{\Omega_{\mathbf{Q}}}(R_\Gamma^s, \mathbf{Q}^*)$ défini par :

(3.6) $$\mathfrak{f}_{N|K}(\chi) = N\mathfrak{f}(\chi)^{\frac{1}{2}}.W_\infty(\chi), \qquad \forall \chi \in R_\Gamma^s.$$

Si L est un corps de nombres $\mathrm{Tr}_{L|\mathbf{Q}}$ désigne la trace de L sur $\mathbf{Q}$.

Nous considérons les $\mathbf{Z}[\Gamma]$-modules hermitiens $(\mathfrak{O}_N, \mathrm{Tr})$ et $(\mathfrak{O}_N[\Gamma], \xi)$ où Tr est la forme hermitienne de :

$$N \times N \to \mathbf{Q}[\Gamma]$$

définie par :

(3.7) $$\mathrm{Tr}(m,n) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \mathrm{Tr}_{N|\mathbf{Q}}(m.n^{\gamma})\gamma^{-1}$$

et ξ la forme hermitienne de :

$$K[\Gamma] \times K[\Gamma] \to \mathbf{Q}[\Gamma]$$

définie par :

(3.8) $$\xi(m,n) = \mathrm{Tr}_{K|\mathbf{Q}}(\bar{m}.n).$$

Nous définissons l'élément $X_{N|K}$ de $K_0H(\mathbf{Z}[\Gamma])$ par l'égalité :

(3.9) $$X_{N|K} = [\mathfrak{O}_N, \mathrm{Tr}] - [\mathfrak{O}_K[\Gamma], \xi]$$

où nous notons $[M,h]$ l'élément de $K_0H(\mathbf{Z}[\Gamma])$ défini par le module hermitien (M,h).

Remarque. — L'introduction de $X_{N|K}$ signifie que pour étudier $[\mathfrak{O}_N, \mathrm{Tr}]$ nous voulons le comparer à $[\mathfrak{O}_K[\Gamma],\xi]$. Cette idée est naturelle car les $\bar{\mathbf{Q}}[\Gamma]$-modules hermitiens qu'ils définissent par extension des scalaires sont isométriques. En effet, si $K = \mathbf{Q}$, l'application φ de $\bar{N} = N \otimes_{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{Q}}$ sur $\bar{\mathbf{Q}}[\Gamma]$ définie par :

$$\varphi(n \otimes \alpha) = \alpha \sum_{\gamma \in \Gamma} n^{\gamma}\gamma^{-1} \tag{3.10}$$

est une isométrie de $(\bar{N}, \mathrm{Tr})$ sur $(\bar{\mathbf{Q}}[\Gamma],\xi)$ où Tr (resp. ξ) est naturellement étendue à $\bar{N}$ (resp. $\bar{\mathbf{Q}}[\Gamma]$). L'élément $X_{N|K}$ appartient donc au sous-groupe $K_0'H(\mathbf{Z}[\Gamma])$ de $K_0H(\mathbf{Z}[\Gamma])$ défini en (1.3); son image par le foncteur d'oubli est l'élément $[\mathfrak{O}_N] - [\mathfrak{O}_K[\Gamma]]$ du groupe des classes de $\mathbf{Z}[\Gamma]$ que nous notons $U_{N|K}$.

THÉORÈME. — *Si* N *est une extension galoisienne finie et modérément ramifiée d'un corps de nombres* K, *de groupes de Galois* Γ, *alors* $X_{N|K}$ *appartient à* $\tilde{K}_0H(\mathbf{Z}[\Gamma])$ *et l'on a :*

(i) $\theta(X_{N|K}) = W_{N|K}$

(ii) $\eta(X_{N|K}) = \mathfrak{f}_{N|K}$.

Ce théorème démontre les conjectures A et B.

Soit t la restriction au groupe $\mathrm{Hom}_{\Omega_{\mathbf{Q}}}(R_\Gamma^s/T(R_\Gamma), \pm 1)$ de l'homomorphisme δ'' défini en (1.5). Nous déduisons du théorème, (i), et de la commutativité du diagramme (1.5) le corollaire suivant :

COROLLAIRE A. — *Dans le groupe* $\mathrm{Cl}(\mathbf{Z}[\Gamma])$ *on a l'égalité :*

$$U_{N|K} = t(W_{N|K}).$$

Remarque. — Ce corollaire démontre la conjecture A. Néanmoins il ne donne pas une nouvelle démonstration de cette conjecture car pour démontrer notre théorème nous utilisons les résultats obtenus dans [9] sur les sommes de Gauss galoisiennes qui étaient à la base de la démonstration donnée par Taylor de cette conjecture.

Si χ est un caractère symplectique et modérément ramifié de Ω_K, χ est un caractère symplectique du groupe de Galois Γ d'une extension modérément ramifiée N de K. Nous obtenons ainsi la conjecture B.

COROLLAIRE B. — *Soit* χ *un caractère symplectique et modérément ramifié de* Ω_K, *alors :*

(i) $W(\chi) = \theta_\chi(X_{N|K})$

(ii) $N\mathfrak{f}(\chi)^{\frac{1}{2}}W_\infty(\chi) = \eta_\chi(X_{N|K})$.

Démonstration du théorème. — Nous déduisons de [4] (chap. V, théorème 14 et chap. VI, théorème 20) que $d(X_{N|K})$ est représenté dans $HCl(\mathbf{Z}[\Gamma])$ par $(g\,(\mathrm{mod}\,\mathrm{Det}(\hat{\mathbf{Z}}[\Gamma]^*)),h)$ avec : $h = \mathfrak{f}_{N|K}$ et $g = W_{N|K}g'$ où g' est défini par :

$$g'(\chi)_\ell = \mathfrak{N}_{K|Q}(a|\chi).\tau(\chi)_\ell^{-1} \text{ (resp. 1)}, \quad \forall\chi \in R_\Gamma, \tag{3.11}$$

pour toute place finie ℓ qui divise (resp. infinie ou qui ne divise pas) l'ordre de Γ. Dans cette égalité $\mathfrak{N}_{K|Q}(a|\chi)$ désigne la norme au sens de [3], appendice A.VI, de la résolvante $(a|\chi)$ où a est un entier de N qui engendre une base normale de N sur K et têl que

$$\mathfrak{O}_N \otimes_Z \mathbf{Z}_\ell = a(\mathfrak{O}_K \otimes_Z \mathbf{Z}_\ell)[\Gamma] \tag{3.12}$$

pour la place infinie de $\mathbf{Q}$ et pour toute place finie de $\mathbf{Q}$ qui divise l'ordre de Γ.

Nous remarquons que $(g', \mathfrak{f}_{N|K})$ est congru à

$$(g'', \mathfrak{f}_{N|K}), \text{ modulo } \Delta(\mathrm{Hom}_{\Omega_Q}(R_\Gamma,\bar{Q}^*),$$

où g'' se déduit de g' en remplaçant la somme de Gauss $\tau(\chi)$ par la somme de Gauss modifiée $\tau^*(\chi)$ introduite dans [9], 3.9, qui diffère de $\tau(\chi)$ par une racine de l'unité, égale à 1 pour les caractères symplectiques. Nous savons par le théorème 2 de [9] que pour toute place ℓ qui divise l'ordre de Γ il existe un élément α_ℓ de $\mathbf{Z}_\ell[\Gamma]^*$ tel que

$$g''(\chi)_\ell = \mathrm{Det}_\chi(\alpha_\ell), \quad \forall\chi \in R_\Gamma. \tag{3.13}$$

Nous en déduisons que $d(X_{N|K})$ est représenté par $(W_{N|K}, \mathfrak{f}_{N|K})$, c'est-à-dire que nous avons :

$$d(X_{N|K}) = i((W_{N|K}, \mathfrak{f}_{N|K}))$$

et cette égalité démontre le théorème grâce à la proposition (2.6).

Remarque. — Si χ est un caractère symplectique et modérément ramifié de Ω_K, nous déduisons de (3.2) et du corollaire B

$$\tau(\chi) = (\theta_\chi.\eta_\chi)(X_{N|K}).$$

Ainsi les sommes de Gauss associées à des caractères symplectiques et modérément ramifiés de Ω_K sont des invariants de structures hermitiennes d'anneaux d'entiers.

4. Lien avec les résultats locaux.

La décomposition en produit de facteurs locaux des constantes et des conducteurs d'Artin induit, grâce au théorème principal, une décomposition en produit de $\theta(X_{N|K})$ et $\eta(X_{N|K})$.

Nous nous proposons, dans ce paragraphe, d'interpréter algébriquement chaque facteur de ce produit à l'aide de la structure hermitienne locale des anneaux d'entiers. Ce paragraphe fait donc le lien entre les résultats locaux de [1] et le résultat global obtenu dans le théorème principal. Il est nécessaire pour cela de « projeter » les résultats de ce théorème dans le groupe des classes adéliques de $\mathbf{Z}[\Gamma]$ car il n'y a pas en général de flèche naturelle du groupe de Grothendieck (resp. groupe des classes) des modules hermitiens locaux dans le groupe de Grothendieck (resp. des classes) des modules hermitiens globaux.

Groupe des classes adéliques.

Nous considérons la catégorie des $\tilde{\mathbf{Z}}[\Gamma]$-modules hermitiens donnés par (M,h) où M est un $\tilde{\mathbf{Z}}[\Gamma]$-module libre, $V = M \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$ et h une forme hermitienne, non dégénérée, de $V \times V$ dans $\mathrm{Ad}(\mathbf{Q})[\Gamma]$, où $\mathrm{Ad}(\mathbf{Q})$ désigne l'anneau des adèles de $\mathbf{Q}$. Nous désignons par $K_0H(\tilde{\mathbf{Z}}[\Gamma])$ le groupe de Grothendieck des classses d'isométrie des $\tilde{\mathbf{Z}}[\Gamma]$-modules hermitiens et des sommes orthogonales. Nous définissons le groupe des classes adéliques de $\mathbf{Z}[\Gamma]$, que nous notons $\mathrm{AHCl}(\mathbf{Z}[\Gamma])$, comme le groupe quotient :

$$\mathrm{Hom}_{\Omega_{\mathbf{Q}}}(R_\Gamma^s, J(\bar{\mathbf{Q}}))/\mathrm{Det}^s(\tilde{\mathbf{Z}}[\Gamma]^*)\,.$$

Fröhlich dans [5] et [6] définit un homomorphisme $\tilde{\partial}$, appelé discriminant, de $K_0H(\tilde{\mathbf{Z}}[\Gamma])$ dans $\mathrm{AHCl}(\mathbf{Z}[\Gamma])$.

Comme dans le paragraphe 2 nous pouvons définir un isomorphisme canonique du groupe $\mathrm{AG}(\mathbf{Z}[\Gamma])$ défini par :

$$\mathrm{AG}(\mathbf{Z}[\Gamma]) = \mathrm{Hom}_{\Omega_{\mathbf{Q}}}(R_\Gamma^s, \pm 1) \times \mathrm{Hom}_{\Omega_{\mathbf{Q}}}(R_\Gamma^s, \mathbf{Q}^*)$$

sur un sous-groupe de $\mathrm{AHCl}(\mathbf{Z}[\Gamma])$ auquel nous l'identifions désormais.

Soit F un corps de nombres modérément ramifié en 2. Le groupe $\mathscr{S}_{\mathrm{F}}$ défini par :

$$\mathscr{S}_{\mathrm{F}} = \frac{\mathrm{Det}^s(\hat{\mathfrak{O}}_{\mathrm{F}}[\Gamma]^*)\,\mathrm{Hom}_{\Omega_{\mathbf{Q}}}(\mathrm{R}_\Gamma^s, \mathrm{U}_+(\bar{\mathbf{Q}}))}{\mathrm{Det}^s(\hat{\mathbf{Z}}[\Gamma]^*)}$$

est un sous-groupe de $\mathrm{AHCl}(\mathbf{Z}[\Gamma])$. Nous déduisons de la proposition 6.1 de [1] l'égalité :

$$\widehat{\mathrm{AG}}(\mathbf{Z}[\Gamma]) \cap \mathscr{S}_{\mathrm{F}} = \{1\}.$$

Soit $\mathscr{S} = \varinjlim \mathscr{S}_{\mathrm{F}}$, lorsque F parcourt les corps de nombres, modérément ramifiés en 2. Nous avons l'égalité

$$\widehat{\mathrm{AG}}(\mathbf{Z}[\Gamma]) \cap \mathscr{S} = \{1\}.$$

Nous désignons par $\tilde{\mathrm{K}}_0\tilde{\mathrm{H}}(\mathbf{Z}[\Gamma])$ le sous-groupe des éléments de $\mathrm{K}_0\mathrm{H}(\hat{\mathbf{Z}}[\Gamma])$ dont le discriminant appartient à $\widehat{\mathrm{AG}}(\mathbf{Z}[\Gamma]) \times \mathscr{S}$. Par projection sur chacun des facteurs de $\widehat{\mathrm{AG}}(\mathbf{Z}[\Gamma])$ nous définissons des homomorphismes θ et η :

$$\theta : \tilde{\mathrm{K}}_0\mathrm{H}(\hat{\mathbf{Z}}[\Gamma]) \to \mathrm{Hom}_{\Omega_{\mathbf{Q}}}(\mathrm{R}_\Gamma^s, \pm 1)$$
$$\eta : \tilde{\mathrm{K}}_0\mathrm{H}(\hat{\mathbf{Z}}[\Gamma]) \to \mathrm{Hom}_{\Omega_{\mathbf{Q}}}(\mathrm{R}_\Gamma^s, \mathbf{Q}^*).$$

Passage du cas global au cas adélique.

A tout $\mathbf{Z}[\Gamma]$-module hermitien (M,h) nous associons le $\hat{\mathbf{Z}}[\Gamma]$-module hermitien (M,h) obtenu par extension des scalaires à $\hat{\mathbf{Z}}[\Gamma]$. Nous en déduisons un homomorphisme Q de $\mathrm{K}_0\mathrm{H}(\mathbf{Z}[\Gamma])$ dans $\mathrm{K}_0\mathrm{H}(\hat{\mathbf{Z}}[\Gamma])$.

Nous définissons un homomorphisme R de $\mathrm{HCl}(\mathbf{Z}[\Gamma])$ dans $\mathrm{AHCl}(\mathbf{Z}[\Gamma])$ par passage au quotient de l'homomorphisme :

$$(f(\mathrm{mod}\ \mathrm{Det}(\hat{\mathbf{Z}}[\Gamma]^*)),h) \to f^s.h\ (\mathrm{mod}\ \mathrm{Det}^s(\hat{\mathbf{Z}}[\Gamma]^*)).$$

Nous savons, [4], chap. II, que le diagramme suivant est commutatif :

$$(4.1)\qquad \begin{tikzcd} & \mathrm{K}_0\mathrm{H}(\mathbf{Z}[\Gamma]) \arrow[dl, "\mathrm{Q}"'] \arrow[dr, "d"] & \\ \mathrm{K}_0\mathrm{H}(\hat{\mathbf{Z}}[\Gamma]) \arrow[dr, "\partial"'] & & \mathrm{HCl}(\mathbf{Z}[\Gamma]) \arrow[dl, "\mathrm{R}"] \\ & \mathrm{AHCl}(\mathbf{Z}[\Gamma]) & \end{tikzcd}$$

Les inclusions suivantes sont immédiates :

$$(4.2) \qquad \begin{cases} R(\tilde{G}(\mathbf{Z}[\Gamma]) \subset AG(\mathbf{Z}[\Gamma]) \\ Q(\tilde{K}_0H(\mathbf{Z}[\Gamma])) \subset \tilde{K}_0H(\hat{\mathbf{Z}}[\Gamma]). \end{cases}$$

Passage du cas local au cas adélique.

Soit p une place de $\mathbf{Q}$. À tout $\mathbf{Z}_p[\Gamma]$-module hermitien (M,h), de rang q, nous associons le $\hat{\mathbf{Z}}[\Gamma]$-module hermitien $(\tilde{M},\tilde{h})$ défini par :

$$(4.3) \qquad \begin{cases} (\tilde{M},\tilde{h})_\ell = (M,h) & \text{si } \ell = p \\ (\tilde{M},\tilde{h})_\ell = (\mathbf{Z}_\ell[\Gamma]^q,\xi_q) & \text{si } \ell \neq p \end{cases}$$

où ξ_q est la forme hermitienne de $\mathbf{Q}_\ell[\Gamma]^q \times \mathbf{Q}_\ell[\Gamma]^q$ dans $\mathbf{Q}_\ell[\Gamma]$ définie par :

$$\xi_q((x_i),(y_i)) = \sum_{i=1}^{q} \bar{x}_i y_i .$$

Nous en déduisons un homomorphisme k_p du groupe de Grothendieck des $\mathbf{Z}_p[\Gamma]$-modules hermitiens $K_0H(\mathbf{Z}_p[\Gamma])$ dans $K_0H(\hat{\mathbf{Z}}[\Gamma])$.

Nous rappelons que le groupe des classes des $\mathbf{Z}_p[\Gamma]$-modules hermitiens est le groupe quotient $HCl(\mathbf{Z}_p[\Gamma])$ défini par :

$$(4.4) \qquad \mathrm{Hom}_{\Omega_{\mathbf{Q}_p}}(R_\Gamma^s, \bar{\mathbf{Q}}_p^*)/\mathrm{Det}^s(\mathbf{Z}_p[\Gamma]^*)$$

où $\bar{\mathbf{Q}}_p$ est une clôture algébrique de $\mathbf{Q}_p$.

Nous savons définir, [1], § 3 ou [4], chap. II, § 5, un homomorphisme naturel h_p de $HCl(\mathbf{Z}_p[\Gamma])$ dans $AHCl(\mathbf{Z}[\Gamma])$. Le diagramme suivant est commutatif :

$$(4.5) \qquad \begin{tikzcd} & K_0H(\mathbf{Z}_p[\Gamma]) \arrow[dl, "k_p"'] \arrow[dr, "d_p"] & \\ K_0H(\hat{\mathbf{Z}}[\Gamma]) \arrow[dr, "\partial"'] & & HCl(\mathbf{Z}_p[\Gamma]) \arrow[dl, "h_p"] \\ & AHCl(\mathbf{Z}[\Gamma]) & \end{tikzcd}$$

Applications arithmétiques.

Nous supposons de nouveau que Γ est le groupe de Galois d'une extension galoisienne, finie et modérément ramifiée N du corps de nombres K.

L'élément $W_{N|K}$ défini en (3.5) définit de manière évidente un élément de $\mathrm{Hom}_{\Omega_Q}(R_\Gamma^s, \pm 1)$ que nous notons encore $W_{N|K}$.

Pour toute place $\mathfrak{p}$ de K nous définissons un élément $W_{N|K,\mathfrak{p}}$ de $\mathrm{Hom}_{\Omega_Q}(R_\Gamma^s, \pm 1)$ par :

$$W_{N|K,\mathfrak{p}}(\chi) = W_{\mathfrak{p}}(\chi), \qquad \forall \chi \in R_\Gamma^s, \tag{4.6}$$

où $W_{\mathfrak{p}}(\chi)$ est la constante locale en $\mathfrak{p}$ de Langlands et Deligne et un élément $\mathfrak{f}_{N|K,\mathfrak{p}}$ de $\mathrm{Hom}_{\Omega_Q}(R_\Gamma^s, Q^*)$ par :

$$\mathfrak{f}_{N|K,\mathfrak{p}}(\chi) = N\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}}(\chi)^{\frac{1}{2}} \ \ (\text{resp. } W_{\mathfrak{p}}(\chi)), \ \forall \chi \in R_\Gamma^s \tag{4.7}$$

où $N\mathfrak{f}_{\mathfrak{p}}(\chi)^{\frac{1}{2}}$ (resp. $W_{\mathfrak{p}}(\chi)$) est la racine carrée de la norme absolue de la $\mathfrak{p}$-composante du conducteur de χ (resp. la constante locale en $\mathfrak{p}$) si $\mathfrak{p}$ est finie (resp. infinie). Nous avons les deux égalités :

$$\begin{cases} W_{N|K} = \prod_{\mathfrak{p}} W_{N|K,\mathfrak{p}} \\ \mathfrak{f}_{N|K} = \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{f}_{N|K,\mathfrak{p}} \end{cases} \tag{4.8}$$

où $\mathfrak{p}$ parcourt les places de K. Nous allons interpréter ces égalités avec les structures hermitiennes globales ou locales d'anneaux d'entiers.

Désignons par $\tilde{X}_{N|K}$ l'élément $[\tilde{\mathfrak{O}}_N, \tilde{T}r] - [\tilde{\mathfrak{O}}_K[\Gamma], \tilde{\xi}]$ de $K_0H(\tilde{Z}[\Gamma])$, c'est-à-dire l'image par Q de $X_{N|K}$ (cf. diagramme 4.1). En utilisant la commutativité du diagramme 4.1 nous déduisons du théorème principal la proposition suivante :

Proposition 4.9. — *$\tilde{X}_{N|K}$ appartient à $\tilde{K}_0H(\tilde{Z}[\Gamma])$ et l'on a :*

(i) $\theta(\tilde{X}_{N|K}) = W_{N|K}$

(ii) $\eta(\tilde{X}_{N|K}) = \mathfrak{f}_{N|K}$.

Soient $\mathfrak{p}$ une place de K au-dessus de la place p de $\mathbf{Q}$ et $\mathfrak{P}$ une place de N au-dessus de $\mathfrak{p}$. Nous identifions le groupe de Galois $\Gamma_{\mathfrak{P}}$ de $N_{\mathfrak{P}}$ sur $K_{\mathfrak{p}}$ à un sous-groupe de Γ.

L'extension des scalaires induit un homomorphisme de groupe de $K_0H(\mathbf{Z}_p[\Gamma_{\mathfrak{P}}])$ dans $K_0H(\mathbf{Z}_p[\Gamma])$ noté $\mathrm{Ind}_{\Gamma_{\mathfrak{P}}}^{\Gamma}$. Nous notons Σ l'homomorphisme de $\mathrm{HCl}(\mathbf{Z}_p[\Gamma_{\mathfrak{P}}])$ dans $\mathrm{HCl}(\mathbf{Z}_p[\Gamma])$ induit par l'homomorphisme $(f \to f')$ avec :

$$f'(\chi) = f(\chi|_{\Gamma_{\mathfrak{P}}}), \qquad \forall \chi \in R_\Gamma^s, \qquad \forall f \in \mathrm{Hom}_{\Omega_{\mathbf{Q}_p}}(R_{\Gamma_{\mathfrak{P}}}^s, \mathbf{Q}_p^*).$$

Le diagramme suivant est commutatif :

$$(4.10)\qquad \begin{array}{ccc} K_0H(\mathbf{Z}_p[\Gamma_{\mathfrak{P}}]) & \xrightarrow{\operatorname{Ind}_{\Gamma_{\mathfrak{P}}}^{\Gamma}} & K_0H(\mathbf{Z}_p[\Gamma]) \\ \downarrow d_p & & \downarrow d_p \\ \mathrm{HCl}(\mathbf{Z}_p[\Gamma_{\mathfrak{P}}]) & \xrightarrow{\Sigma} & \mathrm{HCl}(\mathbf{Z}_p[\Gamma]) \end{array}$$

où d_p est le discriminant décrit par Fröhlich, [3] (chap. II).

Nous déduisons de (4.5) et de (4.10) le nouveau diagramme commutatif :

$$(4.11)\qquad \begin{tikzcd} & K_0H(\mathbf{Z}_p[\Gamma_{\mathfrak{P}}]) \arrow[dl, "k_p"'] \arrow[dr, "d_p"] & \\ K_0H(\tilde{\mathbf{Z}}[\Gamma]) \arrow[dr, "\partial"'] & & \mathrm{HCl}(\mathbf{Z}_p[\Gamma_{\mathfrak{P}}]) \arrow[dl, "h_p"] \\ & \mathrm{AHCl}(\mathbf{Z}[\Gamma]) & \end{tikzcd}$$

Nous avons dans [1] associé au $\mathbf{Z}_p[\Gamma_{\mathfrak{P}}]$-module hermitien formé de l'anneau des entiers $\mathfrak{O}_{N_{\mathfrak{P}}}$ de $N_{\mathfrak{P}}$ et de la forme trace l'élément

$$X_{N_{\mathfrak{P}}|K_p} = [\mathfrak{O}_{N_{\mathfrak{P}}}, \mathrm{Tr}] - [\mathfrak{O}_{K_p}[\Gamma_{\mathfrak{P}}], \xi] \text{ de } K_0H(\mathbf{Z}_p[\Gamma_{\mathfrak{P}}]).$$

Nous notons $X_{N_{\mathfrak{P}}|K_p}$ son image par k_p dans $K_0H(\tilde{\mathbf{Z}}[\Gamma])$.

Nous avons montré dans [1], § 3, l'existence pour toute place p, d'un corps de nombres $F(p)$ modérément ramifié en 2 tel que le discriminant de $X_{N_{\mathfrak{P}}|K_p}$ appartienne à $AG(\mathbf{Z}[\Gamma]) \times \mathscr{S}_{F(p)}$. En utilisant la commutativité du diagramme 4.11, nous déduisons du théorème principal de [1]

Proposition 4.12. — *Pour toute place* $\mathfrak{p}$ *de* K, *l'élément* $X_{N_{\mathfrak{P}}K_p}$ *appartient à* $\tilde{K}_0H(\tilde{\mathbf{Z}}[\Gamma])$ *et l'on a :*

(i) $\theta(\tilde{X}_{N_{\mathfrak{P}}|K_p}) = W_{N|K,\mathfrak{p}}$

(ii) $\eta(\tilde{X}_{N_{\mathfrak{P}}|K_p}) = \mathfrak{f}_{N|K,\mathfrak{p}}$.

Les égalités (4.8) se traduisent par :

$$\theta(\tilde{X}_{N|K}) = \prod_{\mathfrak{p}} \theta(\tilde{X}_{N_{\mathfrak{P}}|K_p})$$

$$\eta(\tilde{X}_{N|K}) = \prod_{\mathfrak{p}} \eta(\tilde{X}_{N_{\mathfrak{P}}|K_p}))$$

Remarques. — 1) Le discriminant de $\tilde{X}_{N|K}$ n'a pas de composante sur $\mathscr{S}$. Par contre le discriminant de $\tilde{X}_{N_{\mathfrak{P}}|K_p}$ possède en général une composante non triviale sur $\mathscr{S}$.

2) On peut certainement déduire la proposition 4.9 de la proposition 4.12 et des égalités (4.8). Par contre le résultat principal ne se déduit pas des résultats locaux puisque nous ne savons pas définir d'homomorphisme de $K_0H(\mathbf{Z}_p[\Gamma])$ dans $K_0H(\mathbf{Z}[\Gamma])$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Ph. Cassou-Noguès and M. J. Taylor, Local root numbers and Hermitian-Galois module structure of rings of integers, à paraître in *Math. Ann.*

[2] P. Deligne, Les constantes locales de l'équation fonctionnelle de la fonction L d'Artin d'une représentation orthogonale, *Invent. Math.*, 35 (1976), 299-316.

[3] A. Fröhlich, Arithmetic and Galois module structure for tame extensions, *J. reine angew. Math.*, 286-287 (1976), 380-440.

[4] A. Fröhlich, *Class groups, in particular Hermitian Class groups*, à paraître.

[5] A. Fröhlich, Symplectic local constants and Hermitian Galois module structure, Algebraic Number Theory, *Inter, Symposium Kyoto* 1976, Ed. S. Iyanaga, Japan Soc. Promotion Science, Tokyo, 1977.

[6] A. Fröhlich, The Hermitian class group, *Lect. notes in Math.*, 882, Springer-Verlag, Berlin 1981.

[7] A. Fröhlich and J. Queyrut, On the functional equation of the Artin L-function for characters of real representations, *Invent. Math.*, 20 (1973), 125-138.

[8] J. Martinet, *Character theory and Artin* L*-functions, Algebraic Number Fields*, éd. A. Fröhlich, Academic Press, London, 1977.

[9] M. J. Taylor, On Fröhlich's conjecture for rings of integers of tame extensions, *Invent. Math.*, 63 (1981), 41-79.

Manuscrit reçu le 23 juin 1982.

Ph. Cassou-Noguès,
Université de Bordeaux I
U.E.R. de Mathématiques
et d'Informatique
Laboratoire associé au C.N.R.S. n° 226
F 33405 Talence cedex.

M. J. Taylor,
Trinity College
Cambrige (England).