

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

F. DUMORTIER

ROBERT ROUSSARIE

Germes de difféomorphismes et de champs de vecteurs en classe de différentiabilité finie

Annales de l'institut Fourier, tome 33, n° 1 (1983), p. 195-267

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1983__33_1_195_0

© Annales de l'institut Fourier, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

GERMES DE DIFFÉOMORPHISMES ET DE CHAMPS DE VECTEURS EN CLASSE DE DIFFÉRENTIABILITÉ FINIE

par F. DUMORTIER et R. ROUSSARIE (*)

Le sujet de cet article est une étude de singularités de difféomorphismes ou de champ de vecteurs, c'est-à-dire de germes de difféomorphismes au voisinage d'un point fixe ou de champ de vecteurs au voisinage d'un point où le champ s'annule.

Soient $\mathcal{G}^{n,\ell}$ l'espace des germes de champs de vecteurs et $\text{Diff}^{n,\ell}$ l'espace des germes de difféomorphismes en $0 \in \mathbb{R}^n$, de classe ℓ , $1 \leq \ell \leq \infty$, et singuliers en $0 \in \mathbb{R}^n$.

Définitions. — Deux germes $g_1, g_2 \in \text{Diff}^{n,\ell}$ sont dits \mathcal{C}^k -conjugés, pour $0 \leq k \leq \ell$, s'il existe un germe de difféomorphisme h , de classe \mathcal{C}^k , en $0 \in \mathbb{R}^n$, tel que $g_1 \circ h = h \circ g_2$.

Deux germes $X_1, X_2 \in \mathcal{G}^{n,\ell}$ sont dits \mathcal{C}^k -conjugés, si pour certains représentants \tilde{X}_1, \tilde{X}_2 de X_1 et X_2 respectivement, il existe des voisinages U_1 et U_2 de $0 \in \mathbb{R}^n$ et un difféomorphisme $h: U_1 \rightarrow U_2$, de classe \mathcal{C}^k , tel que $\varphi_1(t, h(x)) = h \circ \varphi_2(t, x)$ pour tout $x \in U_1$ et t assez voisin de $0 \in \mathbb{R}$ (φ_1, φ_2 désignent les flots de \tilde{X}_1 et \tilde{X}_2 respectivement); X_1 et X_2 sont dits \mathcal{C}^k -équivalents s'il existe un tel difféomorphisme h qui envoie les trajectoires de \tilde{X}_1 sur celles de \tilde{X}_2 , en préservant le sens de parcours (mais par nécessairement le paramétrage).

Un difféomorphisme $g \in \text{Diff}^{n,\ell}$ est dit k -déterminé pour la \mathcal{C}^s -conjugaison (pour $0 \leq s \leq k \leq \ell$) si tout $g' \in \text{Diff}^{n,\ell}$ ayant

(*) Le second des auteurs a profité d'un séjour à l'IMPA de Rio de Janeiro en août-septembre 1980 pour achever la rédaction de cet article.

même k -jet que g en 0 est \mathcal{C}^s -conjugué à g . De même dans $\mathcal{G}^{n,\ell}$, on peut définir la notion de k -détermination pour la \mathcal{C}^s -conjugaison et la \mathcal{C}^s -équivalence (où $0 \leq s \leq k \leq \ell$).

Dans cet article, nous établissons quelques résultats de conjugaison et d'équivalence en classe de différentiabilité finie, prolongeant des résultats déjà obtenus dans [5] pour les germes \mathcal{C}^∞ de difféomorphismes du plan.

Pour étudier les germes singuliers de difféomorphismes ou de champs de vecteurs, on utilise quelques techniques classiques : réduction à une variété centrale, formes normales, éclatement, que nous allons brièvement rappeler. On trouvera plus de détails sur ces techniques et sur les résultats généraux qui leur sont associés, dans [3], [12] par exemple.

D'autre part, pour alléger l'exposé nous limitons ces rappels au cas des champs de vecteurs, mais la plupart des résultats se transposent sans difficulté aux difféomorphismes.

Considérons un germe de champ de vecteurs $X \in \mathcal{G}^{n,\ell}$ avec $\ell \leq +\infty$. Supposons que c de ses valeurs propres en 0 , $0 \leq c \leq n$, comptées avec leur multiplicité, appartiennent à l'axe imaginaire. Soit $k \leq \ell$, un nombre entier positif. Alors il existe pour $0 \in \mathbb{R}^n$, un germe de sous-variété W_X^c , de dimension c et de classe \mathcal{C}^k , telle que X soit tangent à W_X^c et que toutes les valeurs propres de $X_c = X|_{W_X^c}$ en $0 \in W_X^c$ soient sur l'axe imaginaire [6].

Maintenant, soient X et Y deux germes de champs \mathcal{C}^∞ en $0 \in \mathbb{R}^n$ ayant des variétés centrales W_X^c et W_Y^c de même dimension c . Il suit des résultats de Palis-Takens que si X_c et Y_c sont \mathcal{C}^0 -équivalents, il en est de même de X et Y , pourvu que leurs espaces stables aient même dimension [8]. Dans certains cas, le résultat de Takens sur les champs partiellement hyperboliques [10], permet même de montrer que si X_c, Y_c sont \mathcal{C}^k -conjugués, pour $0 \leq k \leq \ell$ (ℓ : différentiabilité de W_X^c et W_Y^c), alors X et Y sont aussi \mathcal{C}^k -conjugués. Ainsi, au moins partiellement, il est légitime de se limiter à l'étude des champs totalement non hyperboliques, c'est-à-dire des champs singuliers en $0 \in \mathbb{R}^n$, ayant leur spectre de valeurs propres sur l'axe imaginaire.

Soit X un tel germe en $0 \in \mathbb{R}^n$, sa partie linéaire en 0 , X_1 , admet une décomposition :

$X_1 = S + N$, où S est la partie semi-simple, N la partie nilpotente. La partie semi-simple elle-même, se met, après un changement linéaire de coordonnées, sous la forme suivante :

$$S = \sum_{i=1}^m \lambda_i \left(x_{2i-1} \frac{\partial}{\partial x_{2i}} - x_{2i} \frac{\partial}{\partial x_{2i-1}} \right)$$

pour $2m \leq n$ et des $\lambda_i \in \mathbf{R}$. Supposons, pour simplifier, que $N = 0$, ce qui correspond à une situation générique parmi les champs linéaires de spectre totalement imaginaire) et que X soit un germe de classe \mathcal{C}^k , $k \geq 2$. On peut associer à S l'existence d'une écriture simplifiée pour le germe X . Nous appellerons « forme normale » cette écriture. Ce résultat, dû à Takens [12] s'énonce sous la forme suivante :

Mise sous forme normale. — Soit X un germe en $0 \in \mathbf{R}^n$, de classe \mathcal{C}^k , $k \geq 2$, ayant une partie linéaire en 0 , X_1 , égale à :

$$X_1 = \sum_{i=1}^m \lambda_i \left(x_{2i-1} \frac{\partial}{\partial x_{2i}} - x_{2i} \frac{\partial}{\partial x_{2i-1}} \right)$$

avec $\sum_{i=1}^m \alpha_i \lambda_i \neq 0$ pour tout $\alpha_i \in \mathbf{Z}$ tels que $1 \leq \sum_{i=1}^m |\alpha_i| \leq k+1$.

Alors, il existe un difféomorphisme \mathcal{C}^∞ , $\varphi: (\mathbf{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^n, 0)$ tel que $\varphi_*(X) = X'$ soit un germe de la forme :

$$\begin{aligned} X' = & \sum_{i=1}^m f_i((x_1^2 + x_2^2), \dots, (x_{2m-1}^2 + x_{2m}^2), x_{2m+1}, \dots, x_n) \\ & \left(x_{2i-1} \frac{\partial}{\partial x_{2i}} - x_{2i} \frac{\partial}{\partial x_{2i-1}} \right) \\ & + \sum_{i=1}^m g_i((x_1^2 + x_2^2), \dots, (x_{2m-1}^2 + x_{2m}^2), x_{2m+1}, \dots, x_n) \\ & \left(x_{2i-1} \frac{\partial}{\partial x_{2i-1}} + x_{2i} \frac{\partial}{\partial x_{2i}} \right) \\ & + \sum_{i=2m+1}^n h_i((x_1^2 + x_2^2), \dots, (x_{2m-1}^2 + x_{2m}^2), x_{2m+1}, \dots, x_n) \\ & \frac{\partial}{\partial x_i} + R_k \end{aligned}$$

avec $f_i(0, \dots, 0) = \lambda_i$, $g_i(0, \dots, 0) = 0$, $h_i(0, \dots, 0) = 0$,

$\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(0, \dots, 0) = 0$, $i, j \geq 2m+1$, et R_k un germe de champ de vecteurs de k -jet nul.

Soit $X_N = X' - R_k$, la partie normale de X , que l'on peut supposer être un champ à coefficients polynomiaux de degré $\leq k$.

Désignons par π l'application : $\pi(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_{n-m})$ définie par :

$$y_i = \sqrt{x_{2i-1}^2 + x_{2i}^2} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq m$$

et
$$y_i = x_{i+m} \quad \text{pour } m+1 \leq i \leq n-m.$$

Le champ X_N se projette alors sur l'espace \mathbf{R}^{n-m} par l'application π . Précisément, si :

$$Y = \sum_{i=1}^m g_i(y_1^2, \dots, y_m^2, y_{m+1}, \dots, y_{n-m}) y_i \frac{\partial}{\partial y_i} + \sum_{i=m+1}^{n-m} h_{i+m}(y_1^2, \dots, y_m^2, y_{m+1}, \dots, y_{n-m}) \frac{\partial}{\partial y_i}$$

on a : $\pi_*(X_N) = Y$.

En suivant Takens [12], on appellera Y : le k -jet réduit du germe X . Ce k -jet est représenté par un champ polynomial, dont la partie linéaire en $0 \in \mathbf{R}^{n-m}$ est nulle.

Ainsi, il est raisonnable de commencer l'étude des germes singuliers par celle des germes Y en $0 \in \mathbf{R}^p$ ayant un 1-jet nul en $0 \in \mathbf{R}^p$. Une telle étude n'a pu être menée complètement que pour $p = 1$ et 2. Pour $p = 1$, il est immédiat que le type topologique de Y , à conjugaison près, ne dépend que de l'ordre en $0 \in \mathbf{R}$ du coefficient $f(y)$ de $Y = f(y) \frac{\partial}{\partial y}$ (voir aussi [11] pour l'étude \mathcal{C}^∞). Pour $p = 2$, un résultat général donne, par éclatements successifs, une réduction de la singularité, dans la mesure où le germe $Y = f_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + f_2 \frac{\partial}{\partial y_2}$ est à singularité algébriquement isolée (c'est-à-dire, telle que f_1 et f_2 engendrent un idéal contenant une puissance de l'idéal maximal). On pourra consulter [3] pour trouver un énoncé précis de ce résultat, ainsi qu'une démonstration. Disons simplement que ce résultat affirme l'existence d'une application analytique Φ (composition d'un nombre fini d'éclatements), allant d'un domaine A (homéomorphe à $S^1 \times \mathbf{R}^+$) dans \mathbf{R}^2 ,

envoyant ∂A (homéomorphe à S^1) sur $0 \in \mathbb{R}^2$ et désingularisant Y . Précisément, il existe un germe de champ \bar{Y} le long de ∂A et une fonction F , de jet non nul en chaque point de ∂A , tels que $\Phi_*(F\bar{Y}) = Y$ et tels que \bar{Y} n'ait, le long de ∂A , que des singularités isolées hyperboliques ou semi-hyperboliques ou des arcs de singularités normalement hyperboliques.

La singularité la plus simple de \bar{Y} est une singularité hyperbolique p en un point lisse de ∂A . Le champ $\hat{Y} = F\bar{Y}$ se met alors localement sous la forme :

$$\hat{Y} = z_1^s \left(u_1(z_1, z_2) z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + u_2(z_1, z_2) z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} \right)$$

où $s \geq 0$, $(0, 0)$ correspond au point singulier p , l'axe Oz_2 est sur ∂A , A correspond localement au demi-plan $z_1 \geq 0$ et $u_1(0, 0) \cdot u_2(0, 0) \neq 0$.

Revenons maintenant au cas général d'un germe singulier X en $0 \in \mathbb{R}^n$, admettant une réduction Y du k -jet, $k \geq 2$, en dimension $n - m = 2$. Si le champ \bar{Y} obtenu par désingularisation de Y admet un point singulier hyperbolique p , le champ X admet à son tour un champ \hat{X} déduit par éclatements successifs, présentant au voisinage de l'ensemble $\pi^{-1}(p)$, une forme particulière somme d'un terme de rotation provenant des composantes de X sur les champs $\left(x_{2i-1} \frac{\partial}{\partial x_{2i}} - x_{2i} \frac{\partial}{\partial x_{2i-1}} \right)$ et d'un terme radial provenant de Y (π est supposée être étendue au domaine de l'éclatement de X). C'est précisément de tels champs de vecteurs que nous étudions dans le paragraphe II, dans le cas particulier où l'ordre des fonctions $f_i - \lambda_i$ dans la forme normale de X , est au moins égal au nombre s défini ci-dessus. (Autrement dit, les termes de rotation sont supposés ne pas être prépondérants par rapport aux termes radiaux). On trouvera, au début du paragraphe II, l'écriture précise d'un tel champ.

Dans le paragraphe I, on étudie les difféomorphismes qui sont égaux au flot à l'instant $t = 1$, des champs précédents. Cette étude est légitimée par le fait que les résultats de conjugaison relatifs aux champs de vecteurs se déduisent facilement des résultats relatifs aux difféomorphismes comme on le verra dans le paragraphe II.

D'autre part, tout difféomorphisme ayant une partie linéaire égale à l'identité se plonge formellement dans un flot [7]. Il en résulte que l'on peut adapter le résultat de désingularisation des champs de dimension 2 aux difféomorphismes, et que l'écriture envisagée dans le paragraphe I correspond par exemple aux singularités hyperboliques obtenues par désingularisation d'un germe de difféomorphisme du plan (voir [5], pour plus de détails).

Dans le paragraphe II, on étudie la conjugaison entre un difféomorphisme g , du type particulier évoqué ci-dessus et une perturbation g' . Le difféomorphisme g et sa perturbation g' sont supposés être d'une classe de différentiabilité finie s et avoir une différence $g - g'$ vérifiant des conditions de platitude de la forme $\|g - g'\|_i = O(z^{\gamma_i})$ pour $0 \leq i \leq s-1$ et des constantes α_i convenables. On trouve alors une conjugaison h de g et g' de classe $s-2$ vérifiant des conditions de platitude de la forme $\|h - \text{Id}\|_i = O(z^{\gamma_i})$ $0 \leq i \leq s-2$, pour des constantes γ_i , calculables en fonction des α_i (voir le paragraphe I pour plus de détails). Dans le paragraphe II, un résultat analogue est établi pour les champs de vecteurs. Le terme de conjugaison locale fait allusion au fait que la conjugaison n'est établie que localement le long de certains sous-ensembles d'un lieu de désingularisation.

Dans le paragraphe III, on établit des résultats plus globaux en itérant les théorèmes de conjugaison locale des deux premiers paragraphes.

Certaines des hypothèses faites dans ces théorèmes de conjugaison locale peuvent sembler superflues à première vue. Considérons pour fixer les idées, les hypothèses suivantes du théorème I.1 :

(i) la composante g_h de g contient un terme $z^k \psi(y)$ où $\psi(y) \frac{\partial}{\partial y}$ est un champ de vecteur transverse à ∂V au point $\bar{g}(y)$; si ∂V_+ est la réunion des composantes de ∂V , telles que le champ $\psi(y) \frac{\partial}{\partial y}$ soit sortant :

(ii) $g \equiv g'$ dans un voisinage de ∂V_+ . Il est effectivement possible de démontrer le théorème I.1, sans la condition (i) ci-dessus.

Cependant les constantes α_0 , γ_i intervenant dans l'énoncé ne peuvent plus être estimées comme il est fait, à partir d'une quantité b/a , ne dépendant que du jet d'ordre $(k+1)$ de g en restriction à la variété V . C'est cette estimation qui permet dans les applications, de donner des formules explicites des pertes de différentiabilité de conjugaison, en fonction d'un jet fini du difféomorphisme ou du champ étudié. Cet aspect explicite nous a semblé intéressant.

La condition (ii) s'introduit naturellement lorsque l'on itère le difféomorphisme conjugaison. On montre de toute façon, que le résultat plus général, ne supposant pas cette condition, se déduit du résultat particulier si l'on restreint g à un voisinage d'une sous-variété V' de V . C'est ce qui est montré pour les difféomorphismes, dans le théorème I.2.

Enfin, sous les conditions (i) et (ii), le difféomorphisme de conjugaison est unique. Cette remarque permet de déduire facilement les théorèmes du paragraphe II relatifs aux champs de vecteurs, des théorèmes relatifs aux difféomorphismes.

Il faut aussi noter qu'il y a quelques arguments généraux pour justifier des théorèmes de conjugaison locale de classe de différentiabilité finie. Le principal est le suivant : un champ de vecteurs \mathcal{C}^∞ n'admet en général que des variétés centrales de classe de différentiabilité finie. On est donc amené à étudier des champs de vecteurs de classe de différentiabilité finie (obtenu comme restriction d'un champ donné à une variété centrale), même si l'on ne veut étudier les champs qu'en classe \mathcal{C}^∞ mais en toute dimension, comme nous le faisons par exemple dans le paragraphe V.

Dans le paragraphe IV on applique tout d'abord les résultats des paragraphes I, II et III aux germes de difféomorphismes et de champs de vecteurs du plan. Dans [11], Takens montrait que tout champ \mathcal{C}^∞ ayant une partie linéaire de rotation et une forme normale de partie radiale non formellement nulle est \mathcal{C}^∞ -équivalent à un champ normal invariant par les rotations autour de l'origine. Ici, (proposition IV.2), on obtient des résultats plus précis en calculant une constante $K(s)$ pour $\forall s \geq 2j_0 + 3$ (j_0 étant l'ordre de la partie radiale), telle que tout champ de classe \mathcal{C}^{2K+1} avec $2K \geq K(s)$ soit équivalent en classe \mathcal{C}^{s-2} à une forme polynomiale normale. La constante $K(s)$ tend vers $+\infty$ avec s . Il est remarquable

que $K(s)$ soit une fonction quadratique de s . La proposition IV.1 donne un résultat moins général pour la conjugaison. (Il faut supposer que la partie radiale l'emporte sur la partie de rotation, dans la forme normale de X). On obtient enfin un résultat comparable pour les difféomorphismes du plan ayant une partie linéaire de rotation (proposition IV.3).

A titre d'exemple considérons les champs dont le 3-jet en $0 \in \mathbb{R}^2$ est égal à

$$j^3 X(0) = (1 + (x^2 + y^2)) \left(-y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \right) + (x^2 + y^2) \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

La constante $K(s)$ est égale à $\frac{s(s+17)}{2}$. Alors, si X est de classe de différentiabilité ≥ 57 , il est conjugué par un difféomorphisme de classe 3 à un champ de forme normale, s'il est de classe ≥ 71 , il est conjugué en classe 4, etc.

On étudie ensuite les germes de champs de vecteurs du plan ayant pour k -jet X_k , $k \geq 2$, un champ de vecteurs polynomial homogène générique. Un tel champ admet une décomposition en secteurs (ce qui est une conséquence du théorème de désingularisation). Le théorème IV.4 donne un résultat de détermination finie en classe \mathcal{C}^K lorsque X_k ne possède pas de secteurs en boucle. Ici aussi, on donne une expression explicite de la classe K par rapport à la différentiabilité de la conjugaison.

A titre d'exemple, considérons les champs ayant un 2-jet en $0 \in \mathbb{R}^2$ égal à : $j^2 X(0) = (xy - x^2) \frac{\partial}{\partial y} + 3xy \frac{\partial}{\partial x}$.

Alors, si X est de classe de différentiabilité $K \geq 78$, il est conjugué en classe \mathcal{C}^2 à son développement de Taylor à l'ordre 77, etc.

On considère ensuite les champs en dimension 3 et 4 intervenant dans l'étude des germes de champs en codimension ≤ 2 faite par Takens dans [12]. Une des conséquences du théorème de conjugaison local du paragraphe II est que les variétés invariantes trouvées par Takens dans [12] sont en fait de classe \mathcal{C}^∞ , (après éclatement), si le champ est \mathcal{C}^∞ . (Voir théorème IV.5 pour

un résultat de conjugaison plus précis, en classe de différentiabilité finie). Il est à noter que le résultat dépend d'une constante $K(s, X_i)$ où $s - 6$ est la différentiabilité de la conjugaison cherchée et X_i est le 2 ou le 3-jet du champ suivant le cas. La dépendance de K par rapport à X_i n'a pas été explicitée dans l'énoncé du théorème IV.5, mais peut être étudiée si on le désire en utilisant le théorème II.1.

Enfin, dans le paragraphe V, on déduit du théorème IV.5 et de son corollaire IV.6, un résultat général en toute dimension, qui est, dans le théorème 1 de [12], le remplacement de la \mathcal{C}^0 -stabilité faible par la \mathcal{C}^0 -stabilité, du moins génériquement.

Rappelons tout d'abord la :

DEFINITION. — Soit $K \subset \mathcal{G}^{n,2}$ et $X \in K$; on dit que X est K - \mathcal{C}^0 -stable s'il existe un voisinage U de X dans $\mathcal{G}^{n,2}$ tel que tout $X' \in K \cap U$ est \mathcal{C}^0 -équivalent à X .

Dans la définition de K - \mathcal{C}^0 -stabilité faible étudiée par Takens dans [12] on a que $X' \in K \cap U$ est \mathcal{C}^0 -faiblement équivalent à X , c'est-à-dire équivalent à X uniquement sur l'ensemble des orbites adhérentes à l'origine.

Ceci étant, on établit le résultat suivant :

THEOREME V.1. — Pour $\forall n \geq 1$ il existe des ensembles semi-algébriques $V_0 = \mathcal{G}^n \supset V_1 \supset V_2 \supset V_3$ dans \mathcal{G}^n de codimension 0, 1, 2 et 3 et un ensemble $\Sigma \subset V_2 \setminus V_3$, qui pour $n \leq 3$ est vide et qui pour $n \geq 4$ est une union dénombrable d'ensembles semi-algébriques fermées de codimension 3 tels que tout $X \in V_{i-1} \setminus V_i$ ($1 \leq i \leq 2$) et $X \in V_{3-1} \setminus (\Sigma \cup V_3)$ soit V_{i-1} - \mathcal{C}^0 -stable ($1 \leq i \leq 3$). Chaque $V_{i-1} \setminus V_i$ est une variété ouverte de codimension $(i - 1)$, tout comme $V_2 \setminus (V_3 \cup \Sigma)$.

Il est à remarquer que les ensembles V_i de l'énoncé sont les ensembles définis par Takens dans [12].

Les résultats du paragraphe IV servent à montrer que la réduction à une variété centrale de dimension 3 ou 4 de $X \in V_2 \setminus (\Sigma \cup V_3)$ est topologiquement équivalente à un champ sous forme normale. Il ne reste plus ensuite qu'à prouver que deux champs en dimension 3 ou 4, sous forme normale, ayant des jets réduits dans la même

classe d'équivalence (au sens de la classification de Takens dans [12]) sont topologiquement équivalents. Ceci est démontré dans le théorème V.4.

Pour clore cette introduction, nous voudrions indiquer quelques questions importantes restant non résolues.

Tout d'abord, on doit noter que les résultats établis dans les paragraphes I et II ne couvrent pas toutes les possibilités de singularités obtenues par désingularisation d'un champ de 1-jet nul en $0 \in \mathbf{R}^2$ (ou d'un difféomorphisme ayant l'identité pour 1-jet). En effet, par exemple, on ne traite pas les points semi-hyperboliques. Cependant, il ne devrait pas être trop difficile d'étudier en classe de différentiabilité finie, toutes les singularités locales obtenues par désingularisation en dimension 2.

Un problème beaucoup plus difficile se pose lorsque le 1-jet du champ X étudié est non nul. Dans ce cas, les résultats du paragraphe II ne s'appliquent que si le terme radial (donné par le jet réduit) est prépondérant par rapport aux composantes de rotation. Par exemple un germe de champ de vecteurs $\mathcal{C}^\infty X$ de \mathbf{R}^2 dont le 5-jet en 0 est égal à :

$$X_5 = (1 + (x^2 + y^2)) \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) + (x^2 + y^2)^2 \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

est-il conjugué en classe \mathcal{C}^∞ et même en classe \mathcal{C}^k , pour un certain $k \geq 1$, à un champ de forme normale (c'est-à-dire invariant par les rotations autour de l'origine) ? (Pour $k = 0$, le résultat est évidemment trivial).

Enfin, une étude générale des singularités de champs ou de difféomorphismes en dimension quelconque supposerait un résultat général de désingularisation pour les champs en $0 \in \mathbf{R}^p$, ayant un 1-jet nul en 0, et admettant 0 comme singularité algébriquement isolée. Comme il a été noté plus haut, ce théorème de désingularisation n'existe que pour $p \leq 2$.

Les auteurs remercient le referee pour les remarques qui leur ont permis d'améliorer la rédaction.

I. LE THEOREME DE CONJUGAISON LOCALE POUR LES DIFFEOMORPHISMES

A. Enoncé des résultats.

Soit $H = \mathbf{R}^{p-q} \times T^q \times \mathbf{R}^+$, de coordonnées (y, z) , avec $y \in \mathbf{R}^{p-q} \times T^q$ et $z \in \mathbf{R}^+$; T^q désigne le tore de dimension q ou bien $\{0\}$ si $q = 0$; H est une variété à bord $\partial H = \{(y, z) | z = 0\}$. On supposera toujours ∂H munie de la loi de groupe standard de $\mathbf{R}^{p-q} \times T^q$ et de la métrique riemannienne plate standard.

On considère une sous-variété compacte à bord V de ∂H , de dimension p . Soit g un difféomorphisme de H , défini au voisinage de V . Posons $g = (g_h(y, z), g_v(y, z))$ où g_h et g_v sont les composantes de g sur les facteurs $\mathbf{R}^{p-q} \times T^q$ et \mathbf{R}^+ respectivement. On suppose que g est de la forme :

$$g(y, z) = \begin{cases} g_h(y, z) = \bar{g}(y) + z^k \psi(y) + O(z^{k+1}) \\ g_v(y, z) = z - z^{k+1} a(y) + O(z^{k+2}) \end{cases}$$

pour un certain $k \geq 1$ et que g est de classe $s \geq k + 3$ (et donc que a et ψ sont de classe \mathcal{C}^1). De plus, on fait les hypothèses suivantes :

1) \bar{g} est un difféomorphisme affine défini au voisinage de V sur ∂H , préservant la métrique de ∂H , tel que $\bar{g}(V) = V$ et que chaque composante de ∂V soit globalement préservée.

2) $\inf_{y \in V} a(y) = a > 0$. (Le difféomorphisme contracte H transversalement à ∂H).

3) Pour tout $y \in \partial V$, le vecteur $\psi(y) \frac{\partial}{\partial y}$ est transverse à ∂V au point $\bar{g}(y)$. (Si $\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_p)$, on note par $\psi \frac{\partial}{\partial y}$ le champ $\sum_{i=1}^p \psi_i \frac{\partial}{\partial y_i}$).

On désigne par ∂V_+ , l'ensemble des points de ∂V où le champ $\psi \frac{\partial}{\partial y}$ est sortant à V et par ∂V_- , l'ensemble des points où $\psi \frac{\partial}{\partial y}$ est entrant. Ces deux ensembles formés chacun de composantes connexes de ∂V , forment une partition de ∂V .

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat établi dans ce paragraphe.

THEOREME I.1. — Soit g un difféomorphisme de H défini au voisinage de V , de classe finie $s \geq k + 3$ et vérifiant les conditions 1), 2), et 3) écrites ci-dessus. Posons :

$$a = \inf_{y \in V} a(y)$$

et

$$b = \sup_{y \in V} \max \{ \|d\psi(y)\| + \|da(y)\| + a(y), k \|\psi(y)\| + (k + 1) a(y) \}$$

(Les normes utilisées sont relatives aux normes usuelles de $\mathbb{R}^{p-q} \times T^q$ et \mathbb{R}).

Soient des nombres $\alpha_i \in \mathbb{N}$, pour $0 \leq i \leq s - 1$, vérifiant

$$\alpha_{s-1} > s \left(1 + \frac{b}{a} \right) + k + 1$$

et

$$\alpha_j \geq \alpha_i + k + 1 + i \quad \text{pour } 0 \leq j < i \leq s - 1.$$

Si g' est un difféomorphisme de H défini au voisinage de V , de classe s et tel que :

$$\|(g' - g)(y, z)\|_i = O(z^{\alpha_i}) \quad \text{pour } 0 \leq i \leq s - 1$$

et que $g' \equiv g$ dans un voisinage de ∂V_+ , il existe un difféomorphisme h , défini au voisinage de V , de classe $\mathcal{O}_{\text{Lipch}}^{s-2}$ (c'est-à-dire, dont les dérivées de classe $s - 2$ sont lipchitziennes), conjugant g et g' dans un voisinage de V tel que :

$$\|(h - \text{Id})(y, z)\|_i = O(z^{\gamma_i}) \quad 0 \leq i \leq s - 2$$

où $\gamma_i = \alpha_i - (k + 2 + i)$ et que $h \equiv \text{Id}$ dans un voisinage de ∂V_+ .

Le symbole $\|f(y, z)\|_i$ désigne le Sup des valeurs absolues des dérivées partielles des composantes de f , d'ordre i . Dire que h conjugue g et g' au voisinage de V signifie qu'il existe un voisinage \mathcal{U} de V dans H tel que g soit défini sur \mathcal{U} , que h soit défini sur $\mathcal{U} \cup g(\mathcal{U})$, que g' soit défini sur $h(\mathcal{U})$ et que : pour $\forall x \in \mathcal{U}$ on ait : $h \circ g(x) = g' \circ h(x)$.

Remarques. — 1) Considérons des constantes α_j , $0 \leq j \leq s - 1$ telles que : $\alpha_0 > \frac{s^2}{2} + s \left(\frac{b}{a} + \frac{3}{2} + k \right)$ et $\alpha_{j+1} = \alpha_j - (k + j + 2)$ pour $0 \leq j \leq s - 2$.

Ces constantes vérifient les conditions du théorème et ont la valeur minimale possible pour le nombre s fixé. On remarque que les γ_i associés sont simplement donnés par $\gamma_i = \alpha_{i+1}$, $0 \leq i \leq s-2$.

2) Les valeurs minimales de s et α_0 sont égales à 4 et 27 respectivement (pour $k = 1$, $\frac{b}{a} = 2$).

Supposons maintenant que g ne soit pas identique à g' dans un voisinage de ∂V_+ , mais que \bar{g} et donc g et g' laissant invariant un compact V' de $\text{int } V$. Il est alors possible de modifier g' dans un voisinage de ∂V_+ en un difféomorphisme g'' , égal à g' dans un voisinage de V' et vérifiant, avec g , les conditions du théorème. Le difféomorphisme h de conjugaison entre g et g'' conjugue alors g et g' dans un voisinage de V' . On peut énoncer ce résultat de la façon suivante :

COROLLAIRE I.2. — *Supposons que g et g' soient deux difféomorphismes vérifiant toutes les conditions du théorème sauf l'hypothèse : $g \equiv g'$ dans un voisinage de ∂V_+ . Soit $V' \subset \text{int } V$ un compact invariant par \bar{g} contenu dans l'intérieur de V . Alors, il existe un difféomorphisme h , vérifiant les conditions de différentiabilité et de platitude écrites dans l'énoncé et conjuguant g et g' dans un voisinage de V' .*

B. Mise en place de l'équation linéaire.

Nous allons ramener la recherche du difféomorphisme de conjugaison h à la résolution d'une équation linéaire obtenue par la méthode du chemin que l'on peut décrire comme suit.

On cherche un chemin de difféomorphismes h_t , au voisinage de $V \times [0, 1]$ tel que pour $\forall t \in [0, 1]$ on ait :

$$h_t \circ g \circ h_t^{-1} = g_t \quad \text{où} \quad g_t = (1-t)g + tg' \quad \text{et} \quad h_0 = \text{Id}. \quad (1)$$

On cherche h_t vérifiant les conditions de l'énoncé. Si un tel chemin existe, le difféomorphisme h_1 est la conjugaison cherchée. D'autre part, un tel chemin h_t , s'il est de classe \mathcal{C}^1 au moins, définit par dérivation un champ de vecteurs ξ_t , au voisinage de V , dépendant du paramètre t : $\xi_t = \frac{\partial h_t}{\partial t} \circ h_t^{-1}$.

La condition (1) implique que ξ_t vérifie l'équation :

$$dg_t(\xi_t) - \xi_t \circ g_t = -\frac{\partial g_t}{\partial t} = g - g',$$

soit encore :

$$\xi_t - dg_t^{-1}(\xi_t \circ g_t) = dg_t^{-1}(g - g'). \quad (2)$$

Posons $Y_t = dg_t^{-1}(g - g')$. Si g et g' vérifient les conditions de l'énoncé, Y_t est une famille à 1-paramètre de vecteurs le long de V , de classe $s - 1$ et vérifiant les conditions :

$$\|Y_t(x)\|_i = O(z^{\alpha_i}) \text{ pour } 0 \leq i \leq s - 1$$

où $x = (y, z, t)$ et $\|Y_t(x)\|_i$ désigne le Sup. des valeurs absolues des dérivées partielles d'ordre i , par rapport à toutes les variables : y, z, t . D'autre part $Y_t(x) \equiv 0$ dans un voisinage de ∂V_+ .

Supposons que l'on trouve une solution ξ_t de (2), de classe $s - 2 \geq k \geq 1$ telle que $\|\xi_t(x)\|_i = O(z^{\gamma_i})$ pour $0 \leq i \leq s - 2$. Alors, par intégration de ξ_t , on obtiendra un chemin de difféomorphismes h_t convenable. (L'intégration est possible pour $t \in [0, 1]$ dans un voisinage de V car $\xi_t \equiv 0$ au voisinage de ∂V_+).

Nous allons maintenant préparer l'équation (2) en vue de sa résolution en choisissant un chemin g_t dans un voisinage bien choisi de $V \times [0, 1]$. Nous désignerons par $G(y, z, t)$ le difféomorphisme : $G(y, z, t) = (g_t, t)$ défini au voisinage de $V \times [0, 1]$. Par construction, on a que : $G = (G_h, G_v, t)$ avec $G_h = g_h + O(z^{k+1})$ et $G_v = g_v + O(z^{k+2})$ et $G = (g, t)$ dans un voisinage de ∂V_+ .

Soit $f(y) = \text{dist}(y, \partial V)$ pour $y \in \partial H \setminus V$ et $f(y) = -\text{dist}(y, \partial V)$ pour $y \in V$. (dist . désigne la distance usuelle dans ∂H). Cette fonction est \mathcal{C}^∞ et régulière au voisinage de ∂V . L'hypothèse 1) faite sur \bar{g} implique que $f \circ \bar{g} \equiv f$, et l'hypothèse 3), que $df(\bar{g}(y))(\psi(y)) \neq 0$ en tout point de ∂V . (Plus précisément, $df(\bar{g}(y))(\psi(y)) > 0$ pour $y \in \partial V_+$ et $df(\bar{g}(y))(\psi(y)) < 0$ pour $y \in \partial V_-$).

Choisissons une sous-variété W de ∂H , contenant V telle que $W \times [0, 1]$ soit dans le domaine de définition de G et que $W - V$ soit formée d'une réunion de voisinages colliers C_w , un pour chaque composante connexe w dans ∂V_+ . On choisit chaque C_w d'être invariant par \bar{g} , c'est-à-dire de la forme

$$C_w = \{y \in \partial H \setminus V \mid \text{dist}(y, w) \leq \eta\} \text{ pour un } \eta \text{ assez petit.}$$

On suppose d'autre part que $df(\bar{g}(y))(\psi(y)) > 0$ sur chaque C_w et que $g|_y$ est identique à g' , ce qui implique que $G \equiv (g, t)$ dans un voisinage de $C_w \times [0, 1]$ pour chaque w dans ∂V_+ . On suppose enfin que $a(y) > 0$ pour $\forall y \in W$.

Étendons la fonction f en une fonction F sur $H \times [0, 1]$ en posant : $F(y, z, t) = f(y)$.

Soit maintenant $\delta > 0$ tel que le domaine

$$S_\delta = W \times [0, \delta] \times [0, 1] \subset H \times [0, 1]$$

soit contenu dans le domaine de définition de G . On posera également $R_\delta = V \times [0, \delta] \times [0, 1]$. La fonction F permet de contrôler le comportement des orbites du difféomorphisme G le long de ∂R_δ . Précisément, on a :

PROPOSITION I.3. — Si $\delta > 0$ est assez petit, le difféomorphisme $G = (G_h, G_v, t)$ vérifie dans S_δ les conditions suivantes :

- 1) Pour $\forall m = (y, z, t) \in S_\delta$, avec $z \neq 0$, on a $G_v(y, z, t) < z$
- 2) Pour $\forall m \in C_w \times [0, \delta] \times [0, 1]$, où w est une composante de ∂V_+ , on a : $G(y, z, t) = (g, t)$ ($(G_h, G_v) = g$ indépendant de t).

3) Pour $\forall m$ appartenant à un certain voisinage de

$C_w \times [0, \delta] \times [0, 1]$, avec $z \neq 0$, on a : $F(G(m)) > F(m)$.

Démonstration. — Pour établir le point 1), on remarque que : $G_v(m) = z - z^{k+1} a(y) + O(z^{k+2})$. Le résultat suit alors de l'hypothèse que W est compact et que $a(y) > 0$ pour $y \in W$.

Le point 2) suit également de la compacité de $\overline{W \setminus V}$ et du choix de W . Pour établir le point 3), calculons :

$$F \circ G(y, z, t) = f(G_h(y, z, t)) = f(\bar{g}(y) + z^k \psi(y) + O(z^{k+1})).$$

En utilisant un développement à l'ordre 1 de f , on obtient :

$$F \circ G(y, z, t) = f \circ \bar{g}(y) + df(\bar{g}(y))(z^k \psi(y) + O(z^{k+1})).$$

Or $f \circ \bar{g}(y) = f(y) = F(y, z, t)$.

On a donc :

$$F \circ G(y, z, t) - F(y, z, t) = z^k df(\bar{g}(y))(\psi(y)) + O(z^{k+1}).$$

Maintenant, sur C_w on a que $df(\bar{g}(y))(\psi(y)) > 0$. Le résultat suit à nouveau par un argument de compacité. \square

Soit δ un nombre assez petit, comme dans la proposition et $m \in S_\delta$. Alors, si pour un certain n , $G^n(m)$ est défini et que $G^n(m) \in R_\delta$, il en est de même pour tous les éventuels itérés suivants, $G^{n+p}(m)$, avec $p \geq 0$: l'orbite de m ne retourne pas dans R_δ après avoir quitté cet ensemble.

Pour pouvoir itérer G indéfiniment, nous allons le modifier en dehors d'un voisinage de R_δ dans S_δ , de façon que le difféomorphisme modifié vérifie $G(S_\delta) \subset S_\delta$. Pour cela, dans chaque C_w , $w \subset \partial V_+$, on définit une fonction \mathcal{C}^∞ , $\tau(y)$, égale à 1 dans un voisinage de V et égale à 0 dans un voisinage de ∂W , et on remplace G sur $C_w \times [0, \delta] \times [0, 1]$ par :

$$(\bar{g}(y) + \tau(y) [G_h(y, z, t) - \bar{g}(y)], G_v(y, z, t), t).$$

Pour δ assez petit, cette application est encore un difféomorphisme que l'on note toujours $G(y, z, t) = (G_h, G_v, t)$.

Récapitulons les propriétés de ce difféomorphisme défini sur S_δ , δ fixé assez petit :

- 1) G est de classe s
- 2) Pour $\forall m = (y, z, t) \in S_\delta$, $z \neq 0$, $|G_2(m)| < z$,
- 3) $(G_h, G_v) \equiv g_t = (1 - t)g + tg'$ dans un voisinage de R_δ
- 4) (G_h, G_v) est indépendant de t dans un voisinage de $S_\delta \setminus R_\delta$
- 5) si $0 < \epsilon \leq \delta$, et $S_\epsilon = W \times [0, \epsilon] \times [0, 1]$, $G(S_\epsilon) \subset S_\epsilon$.
- 6) $G(S_\delta \setminus R_\delta) \subset S_\delta \setminus R_\delta$ (autrement dit, pour $\forall w \subset \partial V_+$, $G(C_w \times [0, \delta] \times [0, 1]) \subset C_w \times [0, \delta] \times [0, 1]$); de plus, pour tout m appartenant à un voisinage de $\partial V_+ \times [0, \delta] \times [0, 1]$, on a : $F(G(m)) > F(m)$.

Revenons maintenant à l'équation (2) que l'on veut résoudre au voisinage de $V \times [0, 1]$. Désignons maintenant par \mathcal{V}_δ , l'espace des champs de vecteurs continus sur S_δ , parallèle au facteur $W \times [0, \delta] \times \{t\}$ pour $\forall t \in [0, 1]$ et dont le support est contenu dans $R_\delta \setminus \partial V_+ \times [0, \delta] \times [0, 1]$, noté $\text{int } R_\delta$.

Pour résoudre (2), il suffit de résoudre l'équation :

$$X - dG^{-1} X \circ G = Y \quad (3)$$

(soit $X(m) - (dG(m))^{-1} [X \circ G(m)] = Y(m)$ où

$$(dG(m))^{-1} = dG^{-1}(G(m)) \text{ pour } \forall m \in S_\delta)$$

où G est le difféomorphisme défini ci-dessus, pour $Y \in \mathfrak{V}_\delta$ de classe $s-1$ et vérifiant les conditions $\|Y(m)\|_i = O(z^{\alpha_i})$, $0 \leq i \leq s-1$, avec $X \in \mathfrak{V}_\delta$ de classe $s-2$ et vérifiant les conditions :

$$\|X(m)\|_i = O(z^{\gamma_i}) \quad 0 \leq i \leq s-2.$$

En effet, il suffira d'appliquer cette résolution à

$$Y = -d(G_h, G_v)^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial t} (G_h, G_v) \right)$$

pour obtenir un champ $X(y, z, t) = \xi_t(y, z)$ dont l'intégration fournira une famille à 1 paramètre de difféomorphismes h_t tel que h_1 conjugue $G(y, z, 0)$ et $G(y, z, 1)$ au voisinage de V . Mais comme $G(y, z, 0) \equiv g$ et $G(y, z, 1) \equiv g'$ dans un voisinage de V , le difféomorphisme h_1 conjuguera en fait g et g' au voisinage de V et comme le support de $X \subset \text{int } R_\delta$, on aura $h_1 \equiv \text{Id}$ dans un voisinage de ∂V_+ . (Le fait que Y vérifie les conditions voulues suit des propriétés de G écrites plus haut et des hypothèses sur g et g').

En résumé, le théorème I.1 suit du théorème suivant :

THEOREME I.4. — Soit G le difféomorphisme défini plus haut et $Y \in \mathfrak{V}_\delta$, de classe $s-1$ et tel que $\|Y\|_i = O(z^{\alpha_i})$ $0 \leq i \leq s-1$. Alors l'équation : $X - dG^{-1} X \circ G = Y$ (3) a une solution $X \in \mathfrak{V}_\delta$, de classe $\mathcal{C}_{\text{Lipch}}^{s-2}$, telle que $\|X(m)\|_i = O(z^{\gamma_i})$ pour $0 \leq i \leq s-2$. (L'espace \mathfrak{V}_δ est défini plus haut, et les constantes α_i , γ_i sont définies dans l'énoncé du théorème 1).

Le reste du paragraphe est consacré à la démonstration du théorème 4.

C. Etude de l'équation (3).

Estimation sur G . — La constante $\delta > 0$ a été fixée pour que G soit défini et vérifie les conditions 1), ..., 6) écrites ci-dessus. On pose dans la suite $\Sigma = W \times [0, 1]$ et pour $\forall m = (y, z, t) \in S_\delta$, $\|m\|_\Sigma = z$.

On introduit d'autre part dans le fibré tangent TS_δ une norme finslérienne, dégénérée sur Σ , définie de la façon suivante :

Si $X \in T_m S_\delta$ et $X = P + U \frac{\partial}{\partial z} + T \frac{\partial}{\partial t}$ avec

$$P \in T_y H' \quad (T_m S_\delta = T_y H' \times T_z \mathbf{R}^+ \times T_t [0, 1] \text{ où } H' = \mathbf{R}^{p-q} \times T^q)$$

$$\|X\| = \|m\|_\Sigma \|P\| + |U| + |T|.$$

On désigne par $\|P\|$ la norme euclidienne de $\mathbf{R}^p \simeq T_y H'$.

Posons

$$S_\epsilon = \{m \in S_\delta \mid \|m\|_\Sigma \leq \epsilon\}$$

$$R_\epsilon = \{m \in R_\delta \mid \|m\|_\Sigma \leq \epsilon\} \quad \text{pour } \forall \epsilon, 0 < \epsilon \leq \delta.$$

LEMME I.5. — Pour $\forall \epsilon, 0 < \epsilon \leq \delta$, il existe des constantes a_ϵ, b_ϵ , telles que $a_\epsilon \longrightarrow a$ et $b_\epsilon \longrightarrow b$ (a, b définies dans l'énoncé du théorème 1) et que :

- 1) $\|G(m)\|_\Sigma \leq \|m\|_\Sigma (1 - a_\epsilon \|m\|_\Sigma^k)$ pour $\forall m \in R_\epsilon$
- 2) $\|dG(m)\|$ et $\|dG^{-1}(m)\| \leq 1 + b_\epsilon \|m\|_\Sigma^k$ pour $\forall m \in R_\epsilon$.

Les normes des applications linéaires $dG(m)$ et $dG^{-1}(m)$ sont relatives à la norme finslérienne dégénérée sur TS_δ .

Démonstration. — Pour le point 1), on note que :

$$\|G(m)\|_\Sigma = |G_v(m)| = |z - a(y) z^{k+1} + O(z^{k+2})|.$$

Si $m \in R_\epsilon$, on a donc : $\|G(m)\|_\Sigma \leq z(1 - (a + 0(\epsilon)) z^k)$ en rappelant que $a = \inf_{y \in V} a(y) > 0$ et que $R_\epsilon = V \times [0, \epsilon] \times [0, 1]$.

Passons maintenant au point 2). Considérons un vecteur tangent en $m \in S_\delta$: $X = P + U \frac{\partial}{\partial z} + T \frac{\partial}{\partial t}$.

Posons $dG(m)(X) = X' = P' + U' \frac{\partial}{\partial z} + T' \frac{\partial}{\partial t} \in T_{G(m)} S_\delta$.

Comme

$$G(m) = \begin{cases} \bar{g}(y) + z^k \psi(y) + O(z^{k+1}) \\ z - z^{k+1} a(y) + O(z^{k+2}) \\ t \end{cases}$$

on a :

$$X' = \begin{cases} V' = d\bar{g}(P) + z^k d\psi(P) + O(z^{k+1})P + kz^{k-1}(\psi + O(z))U \\ \quad \quad \quad + O(z^{k+1})T \\ U' = -z^{k+1} da(P) + O(z^{k+2})P + (1 - (k+1)z^k a \\ \quad \quad \quad + O(z^{k+1}))U + O(z^{k+2})T \\ T' = T \end{cases}$$

$(O(z^l)V$ signifie que chaque composante de V est multipliée par une fonction $O(z^l)$).

Les fonctions symbolisées par $O(z^{k+2})$, intervenant ci-dessus dans les termes $O(z^{k+2})P$ et $O(z^{k+2})T$ du développement de la composante U' , sont obtenues par dérivation partielle par rapport aux y_j et à t , des fonctions symbolisées par $O(z^{k+2})$ dans l'écriture de la deuxième composante G_v de G . La préservation de l'ordre de platitude $k+2$ provient du fait que les fonctions que l'on dérive sont de classe $k+3$. En effet, si une fonction $\alpha(z, u_1, \dots, u_s)$ est de classe $\ell+1$ et vérifie $\alpha = O(z^\ell)$, toute dérivée partielle $\frac{\partial \alpha}{\partial u_j}$ est aussi $O(z^\ell)$. Pour vérifier ce point, il suffit d'écrire que :

$$\alpha(z, u_1, u_2, \dots, u_s) = \frac{1}{\ell!} z^\ell \int_0^1 \frac{\partial^\ell \alpha}{\partial z^\ell}(\tau z, u_1, \dots, u_s) d\tau$$

et de remarquer que la fonction $\frac{\partial^\ell \alpha}{\partial z^\ell}$ est de classe \mathcal{O}^1 .

La norme de X' est égale à $\|X'\| = |G_v(m)| \|P'\| + |U'| + |T'|$. Des développements de V' , U' , T' écrits ci-dessus, on tire :

$$\begin{aligned} \|P'\| &\leq [1 + z^k(\|d\psi\| + O(z))] \|P\| + (kz^{k-1} \|\psi\| + O(z^k)) |U| \\ &\quad + O(z^{k+1}) |T| \\ |U'| &\leq z^{k+1}(\|da\| + O(z)) \|P\| + [1 + (k+1)z^k(a + O(z))] |U| \\ &\quad + O(z^{k+2}) |T| \end{aligned}$$

$|T'| = |T|$ (pour les valeurs de $\|d\psi\|$, etc., au point $m = (y, z, t)$). Ces estimations peuvent se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} \|P'\| &\leq (1 + z^k \|d\psi\|) \|P\| + kz^{k-1} \|\psi\| |U| + O(z^k) \|X\| \\ |U'| &\leq z^{k+1} \|da\| \|P\| + (1 + (k+1)z^k a) |U| + O(z^{k+1}) \|X\| \\ |T'| &= |T|, (a, \psi, \dots \text{ pour } a(y), \psi(y), \dots); \end{aligned}$$

compte tenu de

$$|G_v(m)| \leq z(1 + a(y) \cdot z^k + O(z^{k+1})),$$

il vient finalement :

$$\|X'\| = |G_v(m)| \|P'\| + |U'| + |T'| \leq (1 + (b_1 + O(z)) z^k) \|X\|$$

$$\text{où } b_1 = \sup_{y \in V} \text{Max} \{ \|d\psi(y)\| + \|da(y)\| + a(y), k \|\psi(y)\| + (k+1)a(y) \}$$

$$\text{d'où } \|dG(m)\| \leq 1 + (b_1 + O(z)) z^k.$$

Pour établir une estimation analogue pour $dG^{-1}(m)$, on note que

$$G^{-1}(m) = \begin{cases} \bar{g}^{-1}(y) + z^k \bar{\psi}(y) + O(z^{k+1}) \\ z + z^{k+1} \bar{a}(y) + O(z^{k+2}) \\ t \end{cases}$$

$$\text{où } \bar{\psi}(y) = -d\bar{g}^{-1}(y) [\psi(\bar{g}^{-1}(y))] \text{ et } \bar{a}(y) = a(\bar{g}^{-1}(y)).$$

Le même calcul que précédemment conduit à l'estimation

$$\|X'\| \leq (1 + (b_2 + O(z)) z^k) \|X\|$$

$$\text{où } b_2 = \sup_{y \in V} \text{Max} \{ \|d\bar{\psi}(y)\| + d\bar{a}(y) + \bar{a}(y), k \|\bar{\psi}(y)\| + (k+1)\bar{a}(y) \}.$$

Posons : $\bar{y} = \bar{g}^{-1}(y)$. On a : $\|\bar{\psi}(y)\| = \|\psi(\bar{y})\|$, $\bar{a}(y) = a(\bar{y})$. D'autre part : $d\bar{a}(y) = da(\bar{g}^{-1}(y)) \circ d\bar{g}^{-1}(y)$ et comme \bar{g} est une isométrie : $\|d\bar{a}(y)\| = \|da(\bar{y})\|$ enfin :

$$d\bar{\psi}(y) = -d\bar{g}^{-1}(y) d\psi(\bar{g}^{-1}(y)) \circ d\bar{g}^{-1}(y),$$

$$\text{d'où il résulte : } \|d\bar{\psi}(y)\| = \|d\psi(\bar{y})\|.$$

On a donc $b_2 = b_1$. En posant $b = b_1 = b_2$, on obtient le résultat : $\|dG(m)\|$ et $\|dG^{-1}(m)\| \leq 1 + (b + O(z)) z^k \leq 1 + b_\epsilon z^k$ avec $b_\epsilon \rightarrow b$ pour $\epsilon \rightarrow 0$ puisque $z \leq \epsilon$. \square

La suite de la démonstration est comparable à celle du théorème du § II.3 de [5] qui correspondait au cas $p = 1$, $\bar{g} = \text{Id}$ et où g, g' étaient supposés de classe \mathcal{C}^∞ ; ici, nous tenons compte des pertes de différentiabilité et de platitude, pour obtenir le résultat énoncé.

Nous avons déjà défini pour un champ X de classe \mathcal{C}^ρ la semi-norme d'ordre ρ de X , $\rho \geq 0$:

$$\|X(m)\|_\rho = \sup_{\substack{|i_1|=\rho, |i_3|=\rho \\ |i_2|=\rho}} \{|\partial^{i_1}U(m)|, \|\partial^{i_2}P(m)\|, |\partial^{i_3}T(m)|\}$$

où i_1, i_2, i_3 sont des multi-indices de dérivation par rapport à toutes les variables.

D'autre part, on introduit, comme pour la norme d'ordre 0, une semi-norme déduite de la norme finslérienne dégénérée. Si $D^\rho X$ désigne le tenseur symétrique des dérivées d'ordre ρ , on pose :

$$\|D^\rho X(m)\| = \sup_{\|u_1\|=\dots\|u_\rho\|=1} \|D^\rho X(m)(u_1, \dots, u_\rho)\|$$

où $\|u_1\|$ et $\|D^\rho X(m)(u_1, \dots, u_\rho)\|$ désigne la norme finslérienne dégénérée de $T_m S_\delta$.

On peut comparer ces deux semi-normes :

LEMME I.6. — Soit $X = P + U \frac{\partial}{\partial z} + T \frac{\partial}{\partial t}$ un champ de vecteurs sur S_δ , de classe $\rho \geq 0$.

Alors, il existe une constante $k_\rho > 0$ (indépendante de X), telle que si $m = (y, z, t) \in S_\delta$ avec $z \neq 0$ et $z \leq 1$, on ait :

$$\|D^\rho X(m)\| \leq \frac{k_\rho}{\|m\|_\Sigma^\rho} \|X(m)\|_\rho \quad \text{et} \quad \|X(m)\|_\rho \leq \frac{k_\rho}{\|m\|_\Sigma} \|D^\rho X(m)\|.$$

Démonstration. — On trouvera dans [5] la démonstration pour le cas $\rho = 1$; la démonstration pour p quelconque est tout à fait comparable. \square

Soit Z un champ de $\mathfrak{V}_{\epsilon_0}$ (champ continu parallèle au facteur $W \times [0, \epsilon] \times \{t\}$ et de support dans $\text{int } R_{\epsilon_0}$) pour $0 < \epsilon_0 \leq \delta$. On pose :

$$L_0(Z) = dG^{-1}(Z \circ G)$$

$$(L_0(Z)(m) = [dG(m)]^{-1}(Z \circ G(m)).$$

L'opérateur L_0 envoie clairement $\mathfrak{V}_{\epsilon_0}$ dans $\mathfrak{V}_{\epsilon_0}$. Maintenant, l'équation (3) s'écrit : $X - L_0 X = Y$ et, formellement, la solution X s'écrit : $X = \sum_{s \geq 0} L_0^s Y$.

Montrons tout d'abord que la série $\sum L_0^s Z$ converge pour $\forall m \in S_{\epsilon_0}$, si Z est suffisamment plat :

LEMME I.7. — Soit Z un champ dans $\mathfrak{V}_{\epsilon_0}$ tel que

$$\|Z\| = O(\|m\|_{\Sigma}^K) \quad \text{où } K \geq \frac{b_{\epsilon_0}}{a_{\epsilon_0}} + k + 2$$

pour un certain $\epsilon_0 > 0$. Alors la série $\sum_s L_0^s Z(m)$ converge pour la norme finslérienne dégénérée pour $\forall m \in S_{\epsilon_0}$.

Démonstration. — $L_0 Z(m) = dG^{-1}(G(m)) [Z \circ G(m)]$ d'où :
 $L_0^{s+1} Z(m) = dG^{-1}(G(m)) \circ \dots \circ dG^{-1}(G^{s+1}(m)) Z \circ G^{s+1}(m)$.

On pose : $\delta_i = \delta_i(m) = \|G^i(m)\|_{\Sigma}$. On a :

$$\|L_0^{s+1} Z(m)\| \leq (1 + b_{\epsilon_0} \delta_1^k) \dots (1 + b_{\epsilon_0} \delta_{s+1}^k) \|Z \circ G^{s+1}(m)\|.$$

Par hypothèse, $\exists M > 0$ (indépendant de s et de m) tel que :
 $\|Z \circ G^{s+1}(m)\| \leq M \cdot \delta_{s+1}^K$, d'où l'estimation :

$$\|L_0^{s+1} Z(m)\| \leq M(1 + b_{\epsilon_0} \delta_1^k) \dots (1 + b_{\epsilon_0} \delta_{s+1}^k) \delta_{s+1}^K. \quad (1)$$

Maintenant, $r = K - (k + 1) > \frac{b_{\epsilon_0}}{a_{\epsilon_0}}$.

Si l'on pose : $v_i(m) = (1 + b_{\epsilon_0} \delta_1^k) \dots (1 + b_{\epsilon_0} \delta_{i+1}^k) \delta_{i+1}^r$

$$\frac{v_{i+1}}{v_i} \leq (1 + b_{\epsilon_0} \delta_{i+2}^k) (1 - a_{\epsilon_0} \delta_{i+1}^k)^r \leq (1 + b_{\epsilon_0} \delta_{i+2}^k) (1 - a_{\epsilon_0} \delta_{i+2}^k)^r$$

(car $\delta_{i+2} \leq \delta_{i+1}$).

Remarquons que, comme $r > \frac{b_{\epsilon_0}}{a_{\epsilon_0}}$, pour $\forall \xi \in \mathbb{R}^+$ on a :

$$(1 + b_{\epsilon_0} \xi) (1 - a_{\epsilon_0} \xi)^r \leq 1.$$

L'estimation (1) entraîne alors que :

$$\|L_0^{s+1} Z(m)\| \leq M v_{s+1} \delta_{s+1}^{k+1} \leq M v_0 \delta_{s+1}^{k+1}. \quad (2)$$

Le terme de droite est le terme général d'une série convergente, car de l'inégalité : $\delta_{s+1} \leq \delta_s (1 - a_{\epsilon_0} \delta_s^k)$ on tire que :

$$a_{\epsilon_0} \sum_{i=0}^s \delta_i^{k+1} \leq \delta_0 - \delta_{s+1} \leq \delta_0. \quad \square$$

Revenons à l'équation (3) : $X - dG^{-1}X \circ G = Y$ qui s'écrit $X - L_0 X = Y$ ou bien $X = L_Y X$ en posant $L_Y X = L_0 X + Y$.

On a vu que la solution cherchée est, pour $\forall m \in S_{\epsilon_0}$, $0 < \epsilon_0 \leq \delta$, la somme $\bar{Y} = \sum_{s=0}^{\infty} L_0^s Y$ qui existe d'après le lemme précédent si Y est assez plat, et est de support contenu dans l'intérieur de R_{ϵ_0} , en raison de la propriété 6 de G .

D'autre part, comme : $L_Y^i Z = L_0^i Z + \sum_{j=0}^{i-1} L_0^j Y$, le lemme précédent implique que \bar{Y} est limite de la suite $L_Y^i Z$ pour tout Z suffisamment plat. Aussi, pour étudier la différentiabilité de \bar{Y} , il suffit de prouver que la suite $(L_Y^s Z)_s$ a des points d'accumulation dans des espaces bien choisis de champs différentiables. C'est ce qui a été fait dans [5] pour un cas particulier. Nous reprenons les étapes de cette étude, sans refaire les calculs en précisant seulement les énoncés et les quelques différences de détails par rapport à [5]. Rappelons que G est de classe $s \geq k + 3$ fixée.

LEMME I.8. — Soit ϵ_0 ; $0 < \epsilon_0 \leq \delta$ et $\sigma \leq s - 1$. Choisissons β, γ tels que $\beta \geq 1 + \frac{b_{\epsilon_0}}{a_{\epsilon_0}} (\sigma + 1)$ et $\gamma \geq \beta + k + \sigma + 2$. Alors, $\exists \epsilon$, $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ tel que si Z est un champ sur S_ϵ , de classe \mathcal{C}^σ et tel que pour $\forall m \in S_\epsilon$: $\|D^\sigma Z(m)\| \leq \|m\|_\Sigma^\beta$ et $\|D^k Z(m)\| \leq \|m\|_\Sigma^\gamma$ pour $\forall \ell$, $0 \leq \ell < \sigma$, on ait, pour $\forall m \in S_\epsilon$:

$$\|D^\sigma(L_0 Z)(m)\| \leq \|m\|_\Sigma^\beta \left(1 - \frac{a_{\epsilon_0}}{2} \|m\|_\Sigma^k\right).$$

Démonstration. — La seule différence avec le lemme analogue établi dans [5] est que G n'est pas supposé de classe \mathcal{C}^∞ mais seulement de classe $s \geq \sigma + 1$, ce qui est suffisant pour la démonstration. \square

LEMME I.9. — Soient ϵ_0 , $0 < \epsilon_0 \leq \delta$ et une suite de constantes : $\beta_0 \geq \beta_1 \geq \dots \geq \beta_{s-1}$ telle que : $\beta_j \geq \beta_i + k + i + 2$ et

$$\beta_i \geq 1 + \frac{b_{\epsilon_0}}{a_{\epsilon_0}} (i + 1) \quad \text{pour } 0 \leq j < i \leq s - 1.$$

Alors, $\exists \epsilon$, $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ tel que si Z est un champ de classe \mathcal{C}^{s-1}

sur S_ϵ , avec $\|D^i Z(m)\| \leq \|m\|_\Sigma^{\beta_i}$ pour $\forall m \in S_\epsilon$, $0 \leq i \leq s-1$, le champ $L_0 Z$ est de classe \mathcal{C}^{s-1} et vérifie :

$$\|D^i(L_0 Z)(m)\| \leq \|m\|_\Sigma^{\beta_i} \left(1 - \frac{a_{\epsilon_0}}{2} \|m\|_\Sigma^k\right)$$

pour $\forall m \in S_\epsilon$ et $0 \leq i \leq s-1$.

La démonstration du lemme précédent est une conséquence immédiate du lemme 8. Remarquons que les hypothèses sur les β_i faites dans ce lemme sont équivalentes aux conditions :

$$\beta_{s-1} \geq 1 + \frac{b_{\epsilon_0}}{a_{\epsilon_0}} s \text{ et } \beta_{i-1} \geq \beta_i + k + i + 2 \text{ pour } 1 \leq i \leq s-1.$$

Venons en maintenant à l'opérateur L_Y . Le champ Y est de classe $s-1$ et vérifie les conditions : $\|Y(m)\|_i = O(z^{\alpha_i})$ où les constantes α_i sont telles que : $\alpha_{s-1} \geq s \left(1 + \frac{b}{a}\right) + k + 1$ et $\alpha_j \geq \alpha_i + k + i + 1$ pour $0 \leq j < i \leq s-1$.

Nous avons le résultat suivant :

LEMME I.10. — Soit α_i la suite d'entiers introduite dans l'énoncé du théorème I.1 et vérifiant les conditions rappelées ci-dessus. Posons $\beta_i = \alpha_i - (k + i + 1)$ pour $0 \leq i \leq s-1$. Alors si ϵ , $0 < \epsilon \leq \delta$ est assez petit, pour tout champ Z de classe $s-1$ sur S_ϵ tel que $\|D^i Z(m)\| \leq \|m\|_\Sigma^{\beta_i}$, $0 \leq i \leq s-1$, $m \in S_\epsilon$, on a :

$$\|D^i(L_Y Z)(m)\| \leq \|m\|_\Sigma^{\beta_i}, \quad 0 \leq i \leq s-1, \quad m \in S_\epsilon.$$

Démonstration. — Notons tout d'abord que si ϵ_0 , $0 < \epsilon_0 \leq \delta$ est assez petit, les nombres α_i vérifient : $\alpha_{s-1} > s \left(1 + \frac{b_{\epsilon_0}}{a_{\epsilon_0}}\right) + k + 1$, $\alpha_j \geq \alpha_i + k + i + 1$ pour $0 \leq j < i \leq s-1$ (car $\frac{b_{\epsilon_0}}{a_{\epsilon_0}} \rightarrow \frac{b}{a}$ si $\epsilon_0 \rightarrow 0$).

Maintenant, remarquons que les nombres $\beta_i = \alpha_i - (k + i + 1)$ vérifient les conditions du lemme 9 pour cet ϵ_0 .

Ainsi, $\exists \epsilon_1 \leq \epsilon_0$ tel que si Z est comme dans l'énoncé sur S_{ϵ_1} , on ait :

$$\|D^i(L_0 Z)(m)\| \leq \|m\|_\Sigma^{\beta_i} \left(1 - \frac{a_{\epsilon_0}}{2} \|m\|_\Sigma^k\right) \quad (1)$$

pour $0 \leq i \leq s-1$ et $m \in S_{\epsilon_1}$.

D'autre part, comme $\|Y(m)\|_i = O(\|m\|_\Sigma^{\alpha_i})$ pour $0 \leq i \leq s-1$ on a, grâce au lemme 6 : $\|D^i Y(m)\| = O(\|m\|_\Sigma^{\alpha_i - i})$, soit

$$\|D^i Y(m)\| = O(\|m\|_\Sigma^{\beta_i + k + 1}). \quad (2)$$

Nous avons $L_Y Z = L_0 Z + Y$, d'où :

$$\|D^i(L_Y Z)(m)\| \leq \|D^i(L_0 Z)(m)\| + \|D^i Y(m)\|.$$

En tenant compte des inégalités (1) et (2), on a :

$$\|D^i(L_Y Z)(m)\| = \|m\|_\Sigma^{\beta_i} \left[1 - \frac{a_{\epsilon_0}}{2} \|m\|_\Sigma^k + O(\|m\|_\Sigma^{k+1}) \right].$$

Il en résulte la majoration souhaitée, dès que $\|m\|_\Sigma^k \leq \epsilon$ pour un ϵ assez petit ($0 < \epsilon \leq \epsilon_1$). \square

Fin de la démonstration du théorème I.1. — Les constantes $\beta_0, \dots, \beta_{s-1}$ étant celles introduites dans l'énoncé du lemme 10, on désigne par $\mathcal{V}_\epsilon^{\beta_0 \dots \beta_{s-1}}$ l'espace des champs de vecteurs Z sur S_ϵ , parallèles au facteur $W \times [0, 1] \times \{t\}$ et vérifiant les conditions : $\|D^i Z(m)\| \leq \|m\|_\Sigma^{\beta_i}$ pour $0 \leq i \leq s-1$.

Le lemme 10 implique que si ϵ est assez petit :

$$L_Y(\mathcal{V}_\epsilon^{\beta_0 \dots \beta_{s-1}}) \subset \mathcal{V}_\epsilon^{\beta_0 \dots \beta_{s-1}}.$$

(Le lemme 10 implique la préservation des inégalités.) Comme L_Y est continue pour la \mathcal{C}^{s-2} topologie la fermeture $\overline{\mathcal{V}_\epsilon^{\beta_0 \dots \beta_{s-1}}}$ de $\mathcal{V}_\epsilon^{\beta_0 \dots \beta_{s-1}}$ dans la \mathcal{C}^{s-2} topologie est préservée. Comme dans [5], on en déduit, en utilisant le théorème d'Ascoli et la compacité de $\overline{\mathcal{V}_\epsilon^{\beta_0 \dots \beta_{s-1}}}$ que la restriction \bar{Y}_ϵ de \bar{Y} à S_ϵ est de classe \mathcal{C}_L^{s-2} (les dérivées d'ordre $s-2$ sont de Lipschitz) et que $\|\bar{Y}_\epsilon(m)\|_i = O(\|m\|_\Sigma^{\beta_i - 1})$ pour $0 \leq i \leq s-2$. (Noter que $Y_{\epsilon_0} = Y|_{S_{\epsilon_0}}$ vérifie des hypothèses du lemme 7 si ϵ_0 est assez petit). Maintenant, utilisant l'égalité : $\bar{Y}(m) = Y(m) + dG^{-1}\bar{Y}(G(m))$, on montre que \bar{Y} s'étend à S_δ tout entier en une solution de classe $\mathcal{C}_{\text{Lip ch}}^{s-2}$ de l'équation (3), vérifiant les conditions :

$$\|\bar{Y}(m)\|_i = O(\|m\|_\Sigma^{\beta_i - 1}) \text{ pour } 0 \leq i \leq s-2.$$

Mais précisément, $\beta_i - 1$ est la constante γ_i de l'énoncé du théorème I.1. Enfin, ce champ \bar{Y} a son support dans l'intérieur de R_δ . Il est donc solution de l'équation (3) de l'énoncé du théorème I.4.

Remarque. — On peut étendre les résultats précédents au cas où $s = +\infty$ et où $g - g'$ a un jet infini, nul le long de ∂H .

En effet, dans ce cas on peut construire un difféomorphisme G sur S_δ de classe \mathcal{C}^∞ tel que le champ Y associé soit \mathcal{C}^∞ et de jet nul le long de $\partial H \times [0, 1]$. Le théorème I.4 peut être appliqué pour $\forall s$ et montre que l'unique solution $\bar{Y} = \sum_s L_0^s Y$ définie dans un voisinage S_{ϵ_0} peut être étendue à S_δ en une solution \mathcal{C}^∞ , plate le long de $\partial H \times [0, 1]$.

Si $g \equiv g'$ dans un voisinage de ∂V_+ , on trouve une conjugaison \mathcal{C}^∞ , de jet infini égal à l'identité le long de ∂H et égale à l'identité au voisinage de ∂V_+ . Sinon on peut trouver une conjugaison au voisinage d'un compact invariant arbitraire $V' \subset \text{int } V$.

II. LE THEOREME DE CONJUGAISON LOCALE POUR LES CHAMPS DE VECTEURS

A. Enoncé des résultats.

L'espace H , de coordonnées (y, z) et la sous-variété $V \subset \partial H$ étant définis comme dans le paragraphe I, on considère maintenant un champ de vecteurs X au voisinage de V , de la forme :

$$X(y, z) = (\bar{Y}(y) + z^k \Phi(y) + O(z^{k+1})) \frac{\partial}{\partial y} + (-A(y) z^{k+1} + O(z^{k+2})) \frac{\partial}{\partial z},$$

pour un certain $k \geq 1$. (Rappelons que la notation $\xi \frac{\partial}{\partial y}$ pour $\xi \in \mathbb{R}^p$ signifie $\sum_{i=1}^p \xi_i \frac{\partial}{\partial y_i}$). On suppose que X est de classe $s \geq k + 3$. On fait de plus les hypothèses suivantes :

1) le flot du champ $\bar{Y} \frac{\partial}{\partial y}$ sur ∂H , définit au voisinage de V un groupe à 1 paramètre d'isométries pour la métrique riemannienne usuelle de ∂H , laissant V invariant. On note par $\bar{g}(y, t)$ le flot de $\bar{Y} \frac{\partial}{\partial y}$ et on pose $\bar{g}(y, 1) = \bar{g}(y)$.

2) $A(y) > 0$ pour $\forall y \in V$.

3) $\psi(y)$ étant la fonction :

$$\psi(y) = \int_0^1 \Phi(\bar{g}(y, t)) dt,$$

le vecteur $\psi(y) \frac{\partial}{\partial y}$ est transverse à ∂V au point $\bar{g}(y)$. On définit la partition $\partial V = \partial V_+ \cup \partial V_-$ du bord V , comme dans le paragraphe I. On posera aussi $a(y) = \int_0^1 A(\bar{g}(y, t)) dt$.

Nous pouvons maintenant énoncer les résultats.

THEOREME II.1. — Soit X un champ de vecteurs défini sur H au voisinage de V , de classe finie $s \geq k + 3$ et vérifiant les conditions 1), 2) et 3) écrites ci-dessus.

Posons : $a = \inf_{y \in V} a(y) > 0$

et $b = \sup_{y \in V} \text{Max} \{ \|d\psi(y)\| + \|da(y)\| + a(y), k \|\psi(y)\| + (k + 1)a(y) \}$.

(Les normes utilisées étant relatives aux normes usuelles de \mathbb{R}^+ , et $\mathbb{R}^{p-q} \times \mathbb{T}^q$).

Soient $\alpha_i \in \mathbb{N}$, pour $0 \leq i \leq s - 1$, des nombres vérifiant :

$$\alpha_{s-1} > s \left(1 + \frac{b}{a} \right) + k + 1$$

et $\alpha_j \geq \alpha_i + k + i + 1$ pour $0 \leq j < i \leq s - 1$.

Soit X' un second champ de H défini au voisinage de V , de classe s , tel que $\|(X' - X)(y, z)\|_i = 0(z^{\alpha_i})$ $0 \leq i \leq s - 1$ et que $X' \equiv X$ dans un voisinage de ∂V_+ .

Alors il existe un difféomorphisme h , défini au voisinage de V , de classe \mathcal{C}_L^{s-2} , conjuguant X et X' au voisinage de V , tel que :

$$\|(h - \text{Id})(y, z)\|_i = 0(z^{\gamma_i}) \quad 0 \leq i \leq s - 2$$

où $\gamma_i = \alpha_i - (k + 2 + i)$, et tel que $h \equiv \text{Id}$ dans un voisinage de ∂V_+ .

Comme pour les difféomorphismes, on en déduit sans difficulté le corollaire suivant :

COROLLAIRE II.2. — Supposons que X et X' soient 2 champs vérifiant les conditions du théorème II.1 sauf l'hypothèse $X \equiv X'$ dans un voisinage de ∂V_+ . Soit $V' \subset \text{int } V$ un compact invariant par le flot de $\bar{Y} \frac{\partial}{\partial y}$ et contenu dans l'intérieur de V . Alors, il existe un difféomorphisme h , vérifiant les conditions de différentiabilité et de platitude écrites dans l'énoncé et conjuguant X et X' dans un voisinage de V' .

B. Démonstration du théorème II.1.

Nous allons nous ramener au théorème de conjugaison des difféomorphismes. Tout d'abord notons que si X est un champ vérifiant les propriétés énoncées plus haut, et si $X_t(m)$ désigne son flot, le difféomorphisme $g = X_1$, défini au voisinage de V est de classe \mathcal{C}^s et vérifie les conditions du paragraphe I. Plus précisément :

LEMME II.3. — Soit X le champ de vecteurs défini plus haut. Alors si X_t est son flot, le difféomorphisme $X_1 = g$ est défini au voisinage de V et s'écrit :

$$g(y, z) = \begin{cases} \bar{g}(y) + z^k \psi(y) + O(z^{k+1}) \\ z - z^{k+1} a(y) + O(z^{k+2}) \end{cases}$$

où $\bar{g}(y)$ est le flot à l'instant 1 du champ $\bar{Y} \frac{\partial}{\partial y}$ et :

$$\psi(y) = \int_0^1 \Phi(\bar{g}(y, t)) dt, \quad a(y) = \int_0^1 A(\bar{g}(y, t)) dt$$

où $\bar{g}(y, t)$ est le flot de $\bar{Y} \frac{\partial}{\partial y}$.

Démonstration. — Soit $\tilde{X}_t(y, z)$ le développement de Taylor de X_t , le long du plan $z = 0$:

$$\tilde{X}_t(y, z) = \begin{cases} \bar{g}(y, t) + \sum_{i \geq 1} z^i \psi_i(y, t) = \tilde{g}_t(y, z) \\ z + \sum_{i \geq 2} z^i a_i(y, t) = \tilde{z}_t(y, z) \end{cases}$$

où $X_t(y, z) = (g_t(y, z), z_t(y, z))$.

On identifie les coefficients en z dans l'égalité

$$\frac{d}{dt} \tilde{X}_t(y, z) = \tilde{X}(X_t(y, z))$$

ce qui donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\bar{g}}{dt} + \sum_{i \geq 1} z^i \frac{d\psi_i}{dt} = \bar{Y}(g_t) + z_t^k \Phi(g_t) + O(z_t^{k+1}) \\ \sum_{i \geq 2} z^i \frac{da_i}{dt} = -z_t^{k+1} A(g_t) + O(z_t^{k+2}). \end{array} \right.$$

Comme $z_t = O(z)$ on obtient immédiatement :

$$\frac{d\psi_i}{dt} = 0 \quad \text{si } 1 \leq i \leq k-1 \quad \text{et} \quad \frac{da_i}{dt} \equiv 0 \quad \text{si } 2 \leq i \leq k.$$

Les valeurs pour $t = 0$ étant égales à $\psi_i(y, 0) = 0$ pour $i \geq 1$ et $a_i(y, 0) = 0$ pour $i \geq 2$ on a :

$$\psi_i \equiv 0 \quad \text{et} \quad a_i \equiv 0 \quad \text{pour } i \leq k-1 \quad \text{et } k \text{ respectivement.}$$

Les premiers termes non nuls ψ_k et a_{k+1} sont solutions des équations suivantes :

$$\frac{d\psi_k}{dt} = \Phi(\bar{g}(y, t)) \quad \text{et} \quad \psi_k(y, 0) \equiv 0,$$

$$\text{d'où} \quad \psi_k(y, t) = \int_0^t \Phi(\bar{g}(y, \tau)) d\tau.$$

$$\text{Et pour } a_{k+1} : \frac{da_{k+1}}{dt} = -A(\bar{g}(y, t)) \quad \text{et} \quad a_{k+1}(y, 0) = 0,$$

$$\text{d'où} \quad a_{k+1}(y, t) = - \int_0^t A(\bar{g}(y, \tau)) d\tau,$$

ce qui entraîne le résultat annoncé. \square

Soient maintenant deux champs X et X' comme dans le théorème II.1, et notons X_t et X'_t leur flot. Les difféomorphismes X_1 et X'_1 vérifient les conditions du théorème I.1. En effet, X_1 et X'_1 sont de classe \mathcal{C}^s ; le difféomorphisme X_1 est de la forme précisée dans le théorème I.1, pour les constantes a , b qui sont celles introduites précisément dans l'énoncé du théorème II.1, puisque, d'après le lemme ci-dessus, $a(y) = \int_0^1 A(\bar{g}(y, t)) dt$ et

$\psi(y) = \int_0^1 \Phi(\bar{g}(y, t)) dt$. La condition $\|(X - X')(m)\|_i = O(z^{\alpha_i})$ pour $0 \leq i \leq s-1 \implies$ pour $\forall t : \|(X_t - X'_t)(m)\|_i = O(z^{\alpha_i})$ pour $0 \leq i \leq s-1$ et donc en particulier pour $t = 1$. Enfin la condition $X \equiv X'$ dans un voisinage de ∂V_+ implique que $X_t \equiv X'_t$, pour $\forall t$, dans un voisinage de ∂V_+ . Soit h le difféomorphisme de conjugaison fourni par le théorème I.1; h est de classe \mathcal{C}^{s-2} avec $s-2 \geq k+1 > 1$. Sa platitude par rapport à l'identité est $\|(h - \text{Id})(m)\|_{\gamma_i} = O(z^{\gamma_i})$, pour $0 \leq i \leq s-2$.

Nous allons montrer que ce difféomorphisme h , qui vérifie toutes les conditions du théorème I.1, conjugue X et X' dans un voisinage de V .

Pour cela, il suffit de vérifier que pour $\forall t$ dans un intervalle arbitraire de \mathbf{R} , on a : $h \circ X_t = X'_t \circ h$ dans un voisinage de V . Nous allons vérifier cette propriété pour $t \in [0, 1]$, ou encore que :

$$u_t = X_{-t} \circ h^{-1} \circ X'_t \circ h = \text{Id} \quad \text{dans un voisinage de } V.$$

La famille de difféomorphismes u_t est définie dans un voisinage de V si on limite t au compact $[0, 1]$.

De plus $u_t \equiv \text{Id}$ dans un voisinage de ∂V_+ , puisque dans un tel voisinage on a $X_t \equiv X'_t$ et $h \equiv \text{Id}$.

Dans un voisinage de V , et pour $\forall t \in [0, 1] : X_1 \circ u_t = u_t \circ X_1$. En effet :

$$\begin{aligned} X_1 \circ u_t &= X_1 \circ X_{-t} \circ h^{-1} \circ X'_t \circ h = X_{-t} \circ X_1 \circ h^{-1} \circ X'_t \circ h \\ &= X_{-t} \circ h^{-1} \circ X'_1 \circ X'_t \circ h = X_{-t} \circ h^{-1} \circ X'_t \circ X'_1 \circ h \\ &= X'_t \circ h^{-1} \circ X'_t \circ h \circ X_1 = u_t \circ X_1. \end{aligned}$$

Soit $\xi_t = \frac{\partial u_t}{\partial t} \circ u_t^{-1}$ la famille à 1-paramètre de champs définie par dérivation de u_t , au voisinage de V . Cette famille est continue, vérifie $\|\xi_t(m)\|_0 = O(z^{\gamma_1})$ et $\xi_t(m) \equiv 0$ dans un voisinage de ∂V_+ . Cette dernière affirmation suit trivialement du fait que $u_t \equiv \text{Id}$ dans un voisinage de ∂V_+ . D'autre part on établit facilement que

$$\frac{\partial u_t}{\partial t} \circ u_t^{-1} = dX_{-t}(X_t) [-X(X_t) + dh^{-1}(hX_t)(X'(hX_t))] \quad (3)$$

et que :

i) les flots X_t, X'_t sont \mathcal{C}^1 et vérifient

$$X_t, X'_t(m) = m + O(z^2) \quad \text{et} \quad dX_t(m), dX'_t(m) = \text{Id} + O(z^2)$$

comme on le voit en procédant comme dans le lemme II.3, et en remarquant que X_t et X'_t sont de classe supérieure à $k + 3 \geq 4$.

ii) De même, il suit des conclusions du théorème I.1 pour le difféomorphisme de conjugaison que ce difféomorphisme h est \mathcal{C}^1 et que :

$$h(m), h^{-1}(m) = m + O(z^{\gamma_0}) \quad \text{et} \quad dh(m), dh^{-1}(m) = \text{Id} + O(z^{\gamma_1}).$$

iii) Enfin, par hypothèse : $\|X - X'\|_0 = O(z^{\alpha_0})$.

En reportant ces diverses estimations dans (3), on obtient que le champ $\xi_t(m) = \frac{\partial u_t}{\partial t} \circ u_t^{-1}(m)$ est continu et vérifie l'estimation :

$$\|\xi_t(m)\|_0 = O(z^{\gamma_1}).$$

La relation de commutation (2) est équivalente (modulo $u_0 = \text{Id}$) à l'équation :

$$\xi_t - dg^{-1} \xi_t \circ g = 0 \quad (\text{où } X_1 = g). \quad (4)$$

On reconnaît une équation linéaire du type de celle étudiée dans le paragraphe I. Précisément, on peut se ramener aux conditions de l'énoncé du théorème I.4. Pour cela, on définit des ensembles R_δ , S_δ comme dans le paragraphe I, tels que $G = (g, t)$ soit défini dans R_δ et on modifie G dans $S_\delta \setminus R_\delta$ pour que G laisse S_δ invariant. Si on a choisi S_δ pour que $Z = \xi_t$, considéré comme un champ de S_δ , ait son support dans $\text{int } R_\delta$, on a encore :

$$Z - dG^{-1} Z \circ G = 0 \quad (5)$$

(En effet, la modification sur G porte sur une région où $\xi_t \equiv 0$).

Le champ Z est donc solution de l'équation $Z = L_0 Z$ avec les notations du paragraphe I. Mais, comme Z est continu, que $\|Z\| = O(\|Z\|_0) = O(z^{\gamma_1})$ et $\gamma_1 > \frac{b}{a} + k + 2$, on peut appliquer le lemme I.7 à ce champ. En particulier : $\|L_0^s Z(m)\| \rightarrow 0$ pour $\forall m$ et comme $Z = L_0 Z$, on a donc $\|Z(m)\| = 0$ pour $\forall m \in S_\delta$ ce qui entraîne que $Z \equiv 0$ sur S_δ .

Le champ $\xi_t = \frac{\partial u_t}{\partial t} \circ u_t^{-1}$ étant identiquement nul sur S_δ on a bien $u_t \equiv \text{Id}$ dans un voisinage de V comme on voulait le montrer. Ceci achève la démonstration du théorème II.1.

Remarque. — On peut étendre les résultats précédents des théorèmes II.1 et corollaire II.2 au cas où $s = +\infty$ et où X et X' ont même jet infini le long de ∂H : Si $X \equiv X'$ dans un voisinage de ∂V_+ , on trouve une conjugaison de classe \mathcal{C}^∞ , de jet infini nul le long de ∂H et égale à l'identité dans un voisinage de ∂V_+ . Sinon, on peut trouver une conjugaison au voisinage d'un compact arbitraire V' , $V' \subset \text{int } V$, invariant par le flot de $\bar{Y} \frac{\partial}{\partial y} = X|_V$.

III. ITERATION DES THEOREMES DE CONJUGAISON LOCALE

Soit M une variété à bord compact, de dimension $p + 1$. (Dans les applications M sera le domaine d'éclatement de l'origine de \mathbb{R}^{n+1} , c'est-à-dire difféomorphe à $S^p \times \mathbb{R}^+$). Supposons défini au voisinage de ∂M , un difféomorphisme g de M dans M et des sous-variétés V_1, \dots, V_ℓ de ∂M telles que :

1) Au voisinage de chaque V_i , il existe une carte de domaine difféomorphe à un espace H dans laquelle g ou bien g^{-1} possède au voisinage de V_i , les propriétés 1) 2) et 3) énoncées avant le théorème I.1.

On définit alors ∂V_{i+} , ∂V_{i-} comme dans le paragraphe I, en considérant g ou bien g^{-1} selon que g ou bien g^{-1} soit quasi-contractant.

2) L'indexation $1, \dots, \ell$ a pu être choisie telle que pour $\forall i$, $2 \leq i \leq \ell$

$$\partial V_{i-} \cap \left(\bigcup_{j < i} V_j \right) = \emptyset$$

et

$$\partial V_{i+} \subset \bigcup_{j < i} \text{int } V_j.$$

Nous verrons dans les applications, que cette condition est liée à l'absence de retour au voisinage de $\bigcup_i V_i$, c'est-à-dire d'orbite de $g : \{g^n(X)\}_n$ qui tende vers $\bigcup_i V_i$ pour $n \rightarrow \pm \infty$.

Nous avons le résultat suivant :

THEOREME III.1. — Soit g un difféomorphisme de M , défini au voisinage de ∂M . On suppose que g vérifie les deux conditions précédentes pour des variétés V_1, \dots, V_ℓ et relativement à la même constante k (cf. paragraphe I). Supposons que g soit de classe \mathcal{C}^s , $s \geq k + 2\ell + 1$. Soient a_i, b_i les constantes associées à l'écriture de g ou de g^{-1} au voisinage de V_i dans la carte mentionnée dans la condition 1). Soit $R > \sup_{i=1, \dots, \ell} \left\{ \frac{b_i}{a_i} \right\}$.

Considérons des constantes α_i , $0 \leq i \leq s - 1$, telles que :

$$\alpha_{s-1} > s(1 + R) + k + 1$$

et $\alpha_j \geq \alpha_i + k + i + 1$ pour $0 \leq j < i \leq s - 1$.

Soit $W \subset \bigcup_i \text{int } V_i$ un compact quelconque, g -invariant.

Soit g' un second difféomorphisme de M , défini au voisinage de ∂M tel que g' soit de classe \mathcal{C}^s et que :

$$\|(g' - g)(m)\|_i = O(\|m\|_{\partial M}^{\alpha_i}) \quad \text{pour } 0 \leq i \leq s - 1$$

(où la distance $\|m\|_{\partial M}$ de m à ∂M et les semi-normes d'ordre i : $\|f(m)\|_i$ sont relatives à une métrique riemannienne quelconque, choisie sur M). Alors il existe un difféomorphisme h de M , défini au voisinage de W , conjuguant g et g' , tel que h soit de classe $s - 2\ell$ et vérifie, pour $0 \leq i \leq s - 2\ell$ $\|(h - \text{Id})(m)\|_i = O(\|m\|_{\partial M}^{\gamma_i})$ où les γ_i sont des constantes vérifiant :

$$\gamma_{s-2\ell} > (s - 2\ell + 1)(R + 1) + k + 1$$

et $\gamma_j \geq \gamma_i + k + 1 + i$ pour tout $0 \leq j < i \leq s - 2\ell$.

Démonstration. — Choisissons une sous-variété g -invariante $V'_1 \subset \text{int } V_1$, compacte telle que l'on ait encore : $\partial V_{2+} \subset \text{int } V'_1$ et $W \subset \text{int } V'_1 \bigcup_{i \geq 2} \text{int } V_i$. Nous allons construire un difféomorphisme h de conjugaison, au voisinage de $V'_1 \bigcup_{i \geq 2} V_i$.

Tout d'abord nous pouvons appliquer le corollaire 2 du paragraphe I à g ou g^{-1} au voisinage de V'_1 : il existe un difféomorphisme de conjugaison h_1 au voisinage de V'_1 , de classe $s - 2$ et vérifiant les conditions :

$$\|(h_1 - \text{Id})(m)\|_i = O(\|m\|_{\partial M}^{\gamma_i}) \quad 0 \leq i \leq s - 2$$

avec $\gamma_i = \alpha_i - (k + 2 + i)$.

Posons $\gamma_i = \alpha_{1,i}$ et remarquons que

$$\alpha_{1,s-3} > (s-2)(R+1) + k + 1$$

et $\alpha_{1,j} \geq \alpha_{1,i} + k + i + 1$ pour $0 \leq j < i \leq s-3$

comme on le vérifie immédiatement à partir des propriétés analogues des α_i .

Nous allons maintenant étendre h_1 en procédant par récurrence. Supposons que nous ayons trouvé une conjugaison h_u pour $1 \leq u \leq \ell - 1$ au voisinage de V'_1 pour $u = 1$ et plus généralement de $V'_1 \cup_{i \leq u} V_i$ pour $u \geq 2$, et des constantes $\alpha_{u,i}$, $0 \leq i \leq s - 2u$, vérifiant les conditions $(*)_u$:

$$\begin{cases} \alpha_{u,s-1-2u} > (s-2u)(R+1) + k + 1 \\ \alpha_{u,j} \geq \alpha_{u,i} + k + i + 1 \quad \text{pour } 0 \leq j < i \leq s-1-2u \end{cases}$$

pour lesquelles :

$$\|(h_u - \text{Id})(m)\|_i = O(\|m\|_{\partial M}^{\alpha_{u,i}}) \quad 0 \leq i \leq s - 2u - 1.$$

Nous allons montrer que l'on peut étendre h_u au voisinage de $V'_1 \cup_{i \leq u+1} V_i$, en un difféomorphisme de classe $s - 2(u+1)$ vérifiant pour les constantes $\alpha_{u+1,j}$ astreintes à des relations $(*)_{u+1}$ des conditions de platitude analogues.

Au bout de la récurrence, on obtiendra un difféomorphisme $h = h_\ell$ de classe $s - 2\ell$, avec les conditions de platitude de l'énoncé.

Montrons l'étape de récurrence.

Tout d'abord, étendons le difféomorphisme h_u en un difféomorphisme, encore noté h_u , défini au voisinage de ∂M et vérifiant les mêmes conditions de différentiabilité et platitude : cela est possible en considérant une formule du type $\varphi h_u + (1 - \varphi) \text{Id}$ où φ est une fonction \mathcal{C}^∞ égale à 1 dans un voisinage de $V'_1 \cup_{i \leq u} V_i$ et égale à 0 dans le complémentaire d'un compact contenu dans le domaine de définition de h_u .

Au voisinage de $V'_1 \cup_{i \leq u} V_i$ on avait : $g = h_u g' h_u^{-1}$ par exemple. Considérons le difféomorphisme $g'' = h_u g' h_u^{-1}$ défini au voisinage de ∂M . Ce difféomorphisme coïncide avec g dans

un voisinage de $V'_1 \cup_{i \leq u} V_i$. D'autre part, il est de classe $s - 2u$ et vérifie : $\|(g'' - g)(m)\|_i = O(\|m\|_{\partial M}^{\alpha_{u,i}})$, $0 \leq i \leq s - 2u - 1$. (En effet, la différentiabilité de g' et son ordre de contact avec g sont des conditions plus fortes que la différentiabilité de h_u et son ordre de contact avec l'identité).

Comme d'autre part $R > \frac{b_{u+1}}{a_{u+1}}$, et que, au voisinage de $\partial V_{u+1,+}$, $g \equiv g''$, on peut appliquer le théorème I.1 à g et g'' . On obtient ainsi un difféomorphisme de conjugaison h'_{u+1} , au voisinage de V_{u+1} conjuguant g et g'' de classe $s - 2(u + 1)$ et de platitude donnée par les constantes : $\gamma_i = \alpha_{u,i} - (k + 2 + i)$. Comme ce difféomorphisme est égal à l'identité dans un voisinage de $\partial V_{u+1,+}$ et que $\partial V_{u+1,-} \cap \left(\bigcup_{i \leq u} V_i \right) = \emptyset$ il se prolonge par l'identité dans un voisinage de $V'_1 \cup_{2 \leq i \leq u+1} V_i$.

Maintenant $h_{u+1} = h'_{u+1} \circ h_u$ est un difféomorphisme de conjugaison entre g et g' . Sa différentiabilité et ses propriétés de platitude sont celles de h'_{u+1} . Pour finir, il suffit donc de vérifier que les constantes $\alpha_{u+1,i} = \gamma_i$ vérifient les conditions $(*)_{u+1}$; soit, en posant $\sigma = s - 2u - 1$:

$$1) \gamma_{\sigma-2} > (\sigma - 1)(R + 1) + k + 1 ?$$

$$\begin{aligned} \text{or} \quad \gamma_{\sigma-2} &> \alpha_{\sigma-1} + k + 1 + \sigma - 1 - (k + 2 + (\sigma - 2)) \\ &= \alpha_{\sigma-1} > \sigma(1 + R) + k + 1 \end{aligned}$$

et on a bien :

$$\sigma(1 + R) + k + 1 > (\sigma - 1)(R + 1) + k + 1.$$

$$2) \gamma_j \geq \gamma_i + k + 1 + i \quad \text{pour} \quad 0 \leq j < i \leq \sigma ?$$

$$\text{Mais } \gamma_j = \alpha_{u,j} - (k + 2 + j),$$

la condition à vérifier est impliquée par :

$$\alpha_{u,j} - (k + 2 + j) \geq \alpha_{u,i} + k + i + 1 - (k + 2 + j)$$

qui s'écrit aussi :

$$\begin{aligned} \alpha_{u,j} - (k + 2 + j) &\geq \gamma_i + (k + 2 + i) + (k + i + 1) - (k + 2 + j) \\ &= \gamma_i + k + i + 1 + (i - j), \end{aligned}$$

$$\text{d'où :} \quad \gamma_j \geq \gamma_i + k + 1 + i.$$

En utilisant le théorème II.1 et le corollaire II.2, on peut établir un théorème analogue pour les champs de vecteurs :

THEOREME III.2. — Soit X un champ de vecteurs défini au voisinage de ∂M . Supposons qu'il existe des sous-variétés $V_1, \dots, V_\ell \subset \partial M$ vérifiant la condition 2) ci-dessus et telles que chacune d'elles soit dans une carte difféomorphe à un espace H dans laquelle X ou bien $-X$ vérifie les propriétés 1), 2), 3) énoncées avant le théorème II.1 pour une même constante k et soit de classe \mathcal{C}^s , $s \geq k + 2\ell + 1$. Soient a_i, b_i les constantes associées à l'écriture de X ou $-X$ au voisinage de V_i , dans la carte choisie. Soit $R > \sup \left\{ \frac{b_i}{a_i} \right\}$. On considère des constantes α_i , $0 \leq i \leq s - 1$ comme dans le théorème III.1. Soit $W \subset \bigcup_i \text{int } V_i$ un compact quelconque invariant par le flot de X . Soit X' un second champ sur M , au voisinage de ∂M , de classe \mathcal{C}^s et tel que $\|(X' - X)(m)\|_i = O(\|m\|_{\partial M}^{\alpha_i})$ pour $0 \leq i \leq s - 1$ (où $\|m\|_{\partial M}$ désigne une distance riemannienne de M et $\|X(m)\|_i$ désigne une semi-norme finslérienne choisie sur les i -jets de champs de M). Alors, il existe un difféomorphisme h de M , défini au voisinage de W , conjuguant X et X' , tel que h soit de classe $s - 2\ell$ et vérifie pour $0 \leq i \leq s - 2\ell$ $\|(h - \text{Id})(m)\|_i = O(\|m\|_{\partial M}^{\gamma_i})$ où les γ_i sont des constantes comme dans le théorème III.1.

Remarque. — Les théorèmes III.1 et III.2 ont également une version de classe \mathcal{C}^∞ pour les perturbations de difféomorphismes ou de champs de vecteurs indéfiniment plats le long de ∂M . On obtient une conjugaison h , de classe \mathcal{C}^∞ , indéfiniment plate à l'identité le long de ∂M , au voisinage de la sous-variété donnée $W \subset \bigcup_i \text{int } V_i$.

IV. QUELQUES RESULTATS EN CLASSE DE DIFFERENTIABILITE FINIE RELATIFS AUX SINGULARITES ISOLEES DE CHAMPS DE VECTEURS OU DE DIFFEOMORPHISMES

Nous allons maintenant appliquer les résultats des paragraphes précédents à l'étude des singularités isolées de champs de vecteurs et

de difféomorphismes. Rappelons qu'un germe de champs de vecteurs X admet $0 \in \mathbf{R}^n$ comme singularité algébriquement isolée si $X(0) = 0$ et si les composantes de X engendrent un idéal de fonctions contenant une puissance de l'idéal maximal des fonctions nulles en 0 . On a une définition analogue pour les difféomorphismes (voir [5]).

En dimension 2, on peut s'appuyer sur une théorie complète de désingularisation des champs cf. [3] et des difféomorphismes (cf. [5]). En dimension supérieure, une telle théorie n'existe pas. Cependant les techniques d'éclatement ont permis d'étudier les champs de codimension ≤ 2 [12]. Ces techniques de désingularisation ont permis d'obtenir des résultats d'existence de variétés invariantes, de conjugaison et d'équivalence pour les difféomorphismes et les champs en dimension 2, en classe \mathcal{C}^∞ , \mathcal{C}^0 (cf. [9], [11], [3], [5]) et en dimension quelconque pour l'équivalence faible [12].

Dans ce qui suit, nous allons montrer comment les théorèmes de conjugaison établis dans les paragraphes précédents permettent d'affiner certains de ces résultats en étudiant des champs ou des difféomorphismes de classe de différentiabilité finie.

A. Champs de vecteurs et difféomorphismes dans \mathbf{R}^2 .

Les champs de vecteurs et les difféomorphismes de classe \mathcal{C}^∞ , admettant l'origine de \mathbf{R}^2 comme singularité algébriquement isolée ont été étudiés dans [3], [9], [5]. Le lecteur pourra se reporter à ces articles pour toute notion concernant la désingularisation, les formes normales, etc. Nous nous limitons dans ce qui suit aux germes de champs X dont le spectre en 0 est totalement imaginaire et de classe de différentiabilité $2K + 1$ assez grande.

Supposons tout d'abord que la partie linéaire X_1 de X en 0 soit égale à : $X_1 = \lambda \left(-y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \right)$ avec $\lambda \neq 0$.

Le champ X admet la forme normale suivante, (c'est-à-dire X est conjugué par un changement de coordonnées \mathcal{C}^∞ au champ suivant) :

$$X = \left(\lambda + \sum_{i=i_0}^{i=K} b_i r^{2i} \right) \left(-y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \right) + \left(\sum_{j=j_0}^{j=K} a_j r^{2j} \right) \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) + O(r^{2K+2}) \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\}$$

où $r^2 = x^2 + y^2$. On supposera que $j_0 \leq K$ et que $a_{j_0} \neq 0$. On supposera que $b_{i_0} \neq 0$ si $i_0 \leq K$ et sinon que la sommation $\sum b_i r^{2i}$ est absente.

On peut écrire le champ X en coordonnées polaires. Autrement dit, il existe un champ \hat{X} en coordonnées (θ, r) :

$$\hat{X} = \left(\lambda + \sum_{i=i_0}^K b_i r^{2i} + O(r^{2K+1}) \right) \frac{\partial}{\partial \theta} + \left(\sum_{j=j_0}^K a_j r^{2j} + O(r^{2K+1}) \right) r \frac{\partial}{\partial r}$$

de classe \mathcal{C}^{2K} tel que $\varphi_*(\hat{X}) = X$, où φ est l'application de coordonnées polaires $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. (cf. [12]).

Remarquons maintenant que si $j_0 \leq i_0$, le champ \hat{X} (ou bien $-\hat{X}$) remplit les conditions du théorème II.1, avec $V = S^1 \times \{0\} \subset S^1 \times \mathbb{R}^+$, et les variables (y, z) changées en (θ, r) . Supposons que ce soit le cas du champ \hat{X} .

Le champ $\bar{Y} \frac{\partial}{\partial y}$ est $\lambda \frac{\partial}{\partial \theta}$. Son flot $\bar{g}(\theta, t) = \theta + \lambda t$. D'autre part, les fonctions Φ , A sont ici égales à :

$$\Phi(\theta) = b_{j_0} \text{ et } A(\theta) = |a_{j_0}| \text{ si l'on pose } b_i = 0 \text{ pour } i < i_0.$$

Les constantes a , b sont donc égales à : $a = |a_{j_0}|$ et

$$b = 2j_0 b_{j_0} + (2j_0 + 1) a_{j_0}$$

(le nombre $k = 2j_0$), d'où $\frac{b}{a} = (2j_0 + 1) + 2j_0 \left| \frac{b_{j_0}}{a_{j_0}} \right|$.

Soit $K(s) = \frac{s^2}{2} + \left(\left(4 + 2 \left| \frac{b_{j_0}}{a_{j_0}} \right| \right) j_0 + \frac{5}{2} \right) s$. Si le champ X est de classe $2K + 1 > K(s) + 1$, on va appliquer le théorème II.1 à \hat{X} et à

$$\hat{X}_N = \left(\lambda + \sum_{i=j_0}^K b_i r^{2i} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} + \left(\sum_{i=j_0}^K a_i r^{2i} \right) r \frac{\partial}{\partial r},$$

pour obtenir une conjugaison \hat{h} de classe $s - 2$. En effet, le champ \hat{X} est de classe $2K > K(s)$ et $\|\hat{X} - \hat{X}_N\| + O(r^{2K+1})$ [12]. Ces conditions entraînent que $\|\hat{X} - \hat{X}_N\|_i = O(r^{2K-i})$ pour $0 \leq i \leq 2K$ et a fortiori que les conditions de platitude du théorème II.1 sont réalisées avec des constantes α_j , $0 \leq j \leq s - 1$, telles que $\alpha_0 = 2K > K(s)$. (Voir la remarque suivant l'énoncé du théorème I.1 ; la fonction $K(s)$ est égale à la borne inférieure de α_0 calculée dans cette remarque).

Le difféomorphisme \hat{h} vérifie de son côté les conditions :

$$\|(\hat{h} - \text{Id})(m)\| = O(r^{\gamma_i}) \text{ avec } \gamma_i = \alpha_i - (k + 2 + i), \quad 0 \leq i \leq s - 2.$$

Il en résulte immédiatement que \hat{h} induit un germe de difféomorphisme en $0 \in \mathbb{R}^2$, de classe $s - 2$ et $(s - 2)$ -plat en 0. Cela suit de la remarque que $\gamma_j \geq s - 1$ pour $\forall j$, $0 \leq j \leq s - 2$ et du lemme suivant, de démonstration élémentaire :

LEMME IV.1. — Soit $\hat{h}(\theta, r)$ un germe de difféomorphisme de $S^1 \times \mathbb{R}^+$ défini au voisinage de $r = 0$. Supposons que \hat{h} soit de classe σ et vérifie $\|(\hat{h} - \text{Id})(\theta, r)\|_j = O(r^{\sigma+1})$ pour $0 \leq j \leq \sigma$. Alors il existe un unique germe de difféomorphisme h en $0 \in \mathbb{R}^2$ tel que $\varphi \circ \hat{h} = h \circ \varphi$ qui soit de classe σ et σ -plat à l'identité en 0.

Nous avons donc le résultat suivant :

PROPOSITION IV.2. — Soit X un germe de champ en 0, ayant un $(2j_0 + 1)$ -jet égal à :

$$\begin{aligned} j^{2j_0+1} X(0) = (\lambda + b_{j_0}(x^2 + y^2)^{j_0}) \left(-y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ + a_{j_0}(x^2 + y^2)^{j_0} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

avec $a_{j_0} \neq 0$.

$$\text{Soit } s \geq 2j_0 + 3 \text{ et } K(s) = \frac{s^2}{2} + \left[\left(4 + 2 \left| \frac{b_{j_0}}{a_{j_0}} \right| \right) j_0 + \frac{5}{2} \right] s.$$

Alors, si X est de classe $2K + 1 > K(s) + 1$, X est conjugué par un difféomorphisme de classe $s - 2$, au champ polynomial X_N , représentant le $(2K + 1)$ -jet de sa forme normale :

$$X_N = \left(\lambda + \sum_{j=j_0}^K b_j (x^2 + y^2)^j \right) \left(-y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \right) + \left(\sum_{j=j_0}^K a_j (x^2 + y^2)^j \right) \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Le résultat précédent signifie aussi que le $(2K+1)$ -jet de X est déterminant pour la \mathcal{C}^{s-2} -conjugaison. Si maintenant dans la forme normale d'un champ X , de 1-jet égal à la rotation $\lambda \left(-y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \right)$, on a $j_0 > i_0$, autrement dit, si la composante de rotation l'emporte sur la composante radiale, on ne peut plus appliquer le théorème de conjugaison précédent. Cependant il est toujours possible de se ramener au cas précédent en considérant le champ $Y = \left(\lambda + \sum_{j=j_0}^{j_0} b_j (x^2 + y^2)^j \right)^{-1} X$. La proposition précédente fournit alors une conjugaison de Y avec le champ normal polynomial Y_N . Le nombre $K(s)$ ne dépend d'ailleurs que de j_0 car le coefficient b_{j_0} associé à Y est nul. Cette conjugaison est alors une équivalence entre X et Y_N , c'est-à-dire un difféomorphisme envoyant trajectoire sur trajectoire. On a précisément :

PROPOSITION IV.3. — Soit X un germe de champ en 0, ayant un $(2j_0 + 1)$ -jet égal à :

$$j^{2j_0+1} X(0) = \left(\lambda + \sum_{i=2}^{j_0} b_i (x^2 + y^2)^i \right) \left(-y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \right) + a_{j_0} (x^2 + y^2)^{j_0} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

avec $a_{j_0} \neq 0$. Soit $s \geq 2j_0 + 3$ et $K(s) = \frac{s^2}{2} + \left[4j_0 + \frac{5}{2} \right] s$.

Alors, si X est de classe $2K+1 > K(s)+1$, X est équivalent par un difféomorphisme de classe $s-2$ à un champ polynomial X_N de la forme :

$$X_N = \left(\lambda + \sum_{i=j_0+1}^K b'_i (x^2 + y^2)^i \right) \left(-y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \right) + \left(\sum_{j=j_0}^K a'_j (x^2 + y^2)^j \right) \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

On peut obtenir un résultat analogue à la proposition IV.2 pour les difféomorphismes génériques ayant pour partie linéaire une rotation d'angle irrationnel. De tels difféomorphismes ont une forme normale qu'il est commode de représenter en notation complexe en posant $z = x + iy$:

$$g : z \rightarrow z e^{\left(2\pi i \lambda + \sum_{j=0}^K \alpha_j (z \bar{z})^j\right)} + O(|z|^{2K+1})$$

avec $\lambda \notin \mathbf{Q}$, $\alpha_{j_0} \neq 0$ et $\alpha_j \in \mathbf{C}$ pour $j_0 \leq j \leq K$.

Si α_{j_0} a une partie réelle non nulle on est dans un cas analogue à celui traité pour les champs dans la proposition IV.1 (La partie radiale est prépondérante). Le difféomorphisme g est conjugué à sa partie normale polynomiale, en classe $s - 2$, pourvu que $2K > K(s)$, où $K(s)$ est la constante de la proposition IV.1.

Par contre, si α_{j_0} est imaginaire pure, on est dans l'autre cas. Mais, maintenant il n'est plus possible d'imaginer une relation d'équivalence plus faible, analogue à l'équivalence des champs. Le problème de trouver une forme polynomiale pour g dans le cas où la composante de rotation est prépondérante reste donc ouvert.

Considérons maintenant les champs de vecteurs ayant un spectre nul (et aussi bien les difféomorphismes g , ayant un spectre égal à 1).

Le théorème général de désingularisation déjà évoqué dans l'introduction affirme que si X a un zéro algébriquement isolé et est suffisamment différentiable, il existe une application φ , composée d'un nombre fini d'applications d'éclatement, allant d'un domaine A dans \mathbf{R}^2 en envoyant ∂A , homéomorphe à S^1 , sur 0 et désingularisant le champ X . Précisément, il existe un champ \bar{X} défini au voisinage de ∂A et une fonction F , de jet non nul le long de ∂A , tels que $\varphi_*(F\bar{X}) = X$ et tels que \bar{X} n'ait que des singularités hyperboliques ou semi-hyperboliques. (Le champ $\hat{X} = F\bar{X}$ a une différentiabilité égale à celle de X , moins le nombre d'éclatements nécessaires pour définir φ).

Il est clair que les conditions du théorème 1 sont remplies pour le champ \hat{X} , précisément au voisinage des singularités hyperboliques du champ \bar{X} . Pour donner une idée des résultats que l'on peut alors obtenir, nous allons considérer un champ X ayant pour k -jet un

champ polynomial homogène assez générique pour que X se désingularise avec un seul éclatement. En appliquant le principe de récurrence décrit dans le paragraphe III, on peut alors établir des résultats de détermination différentiable finie.

Soit donc un champ polynomial homogène de degré k , X_k avec $k \geq 2$: $X_k = \alpha_k \frac{\partial}{\partial x} + \beta_k \frac{\partial}{\partial y}$ où α_k, β_k sont des polynômes homogènes de degré k en (x, y) . On considère un champ X , de k -jet X_k : $X = X_k + P$ avec $P \in 0(r^{k+1}) \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\}$, de classe de différentiabilité assez grande.

Le champ X se relève en un champ \tilde{X} en coordonnées polaires (θ, r) : $\tilde{X} = r^{k-1} \bar{X}$ avec $\bar{X} = \bar{X}_k + \bar{P}$, soit : $\tilde{X} = r^{k-1}(\bar{X}_k + \bar{P})$ où $r^{k-1} \bar{X}_k$ relève le champ X_k .

Le champ \bar{X}_k est de la forme :

$$\bar{X}_k = \eta_1(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} + \eta_2(\theta) r \frac{\partial}{\partial r}$$

avec
$$\eta_1(\theta) = \frac{1}{r^{k+1}} (-y \alpha_k + x \beta_k)$$

$$\eta_2(\theta) = \frac{1}{r^{k+1}} (x \alpha_k + y \beta_k)$$

η_1 et η_2 sont des polynômes trigonométriques en θ , dont les coefficients dépendent linéairement de ceux de α_k, β_k .

Sous des conditions génériques par rapport à ces coefficients, le champ \bar{X} sera non dégénéré au sens qu'il vérifiera à la condition (*) suivante :

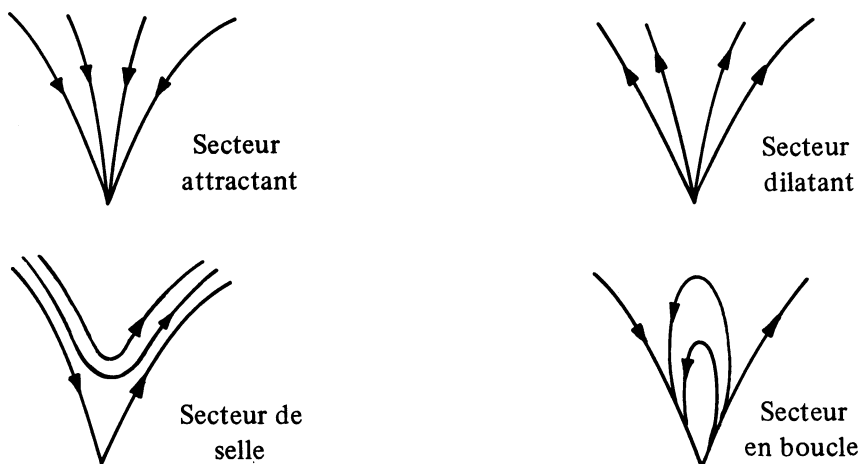
$$(*) \left\{ \begin{array}{l} \eta_1(\theta) \text{ n'a que des zéros hyperboliques } (\eta_1(\theta) = 0 \Rightarrow \eta'_1(\theta) \neq 0) \\ \text{et } \eta_1^{-1}(0) \neq \emptyset \\ \eta_1^2 + \eta_2^2 \neq 0 \text{ pour } \forall \theta. \end{array} \right.$$

Cette condition équivaut à dire que \bar{X}_k n'a que des zéros hyperboliques. Il en sera de même pour \bar{X} .

Soient $\theta_1, \dots, \theta_\ell$ les zéros de η_1 numérotés dans l'ordre de leur apparition sur S^1 dans le sens direct. En chaque point $(\theta_i, 0) \in S^1 \times \mathbb{R}$ le champ \bar{X} admet un espace propre tangent à

$S^1 \times \{0\}$, de valeur propre $\eta'_1(\theta_i)$ et un espace propre transverse à $S^1 \times \{0\}$ de valeur propre $\eta_2(\theta_i)$.

Nous allons appliquer le théorème III.1 en recouvrant $S^1 \times \{0\}$ par des intervalles : un intervalle au voisinage de chaque singularité et un intervalle entre chaque singularité. Pour que la condition 2) du paragraphe III soit vérifiée, nous allons voir qu'il suffit qu'il n'existe pas de retour d'orbites au voisinage de $0 \in \mathbb{R}^2$. Rappelons que le théorème de désingularisation de [3] permet de montrer que tout champ X à singularité algébriquement isolée et ayant au moins une séparatrice admet une décomposition d'un voisinage de l'origine en secteurs invariants, chacun des secteurs étant soit attractant, soit dilatatant, soit secteur de selle, soit secteur de boucle :



Un secteur de selle par exemple, provient de la contraction en un point d'un arc entre deux points de selle consécutifs du champ \bar{X} , sur le cercle $S^1 \times \{0\}$. Dans la suite on prendra garde de distinguer la notion de secteur (de selle ou autre) du champ X et la notion de point (de selle ou autre) du champ \bar{X} .

Le retour est équivalent à l'existence d'un secteur en boucle. Dans le cas particulier qui nous intéresse, l'existence d'un tel secteur est équivalente à l'existence de 2 valeurs consécutives θ_i, θ_{i+1} telles que $(\theta_i, 0), (\theta_{i+1}, 0)$ soient un couple de singularités de \bar{X} formé d'une source et d'un puits, ce qui peut s'exprimer par les conditions :

$$(B) \quad \eta'_1(\theta_i) \cdot \eta_2(\theta_i) > 0, \quad \eta'_1(\theta_{i+1}) \cdot \eta_2(\theta_{i+1}) > 0 \quad \text{et}$$

$$\eta'_1(\theta_i) \cdot \eta'_1(\theta_{i+1}) < 0.$$

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat :

THEOREME IV.4. —

Soit $X_k = \alpha_k \frac{\partial}{\partial x} + \beta_k \frac{\partial}{\partial y}$ un champ polynomial homogène de degré $k \geq 2$. Soit $\eta_1(\theta) = \frac{1}{r^{k+1}} (-y\alpha_k + x\beta_k)$,

$$\eta_2(\theta) = \frac{1}{r^{k+1}} (x\alpha_k + y\beta_k).$$

Supposons que $\eta_1(\theta)$ ait des zéros; que $\eta_1(\theta) = 0 \Rightarrow \eta'_1(\theta) \neq 0$; $\eta_1^2 + \eta_2^2 \neq 0$ pour $\forall \theta$ et que la condition (B) ci-dessus ne soit vérifiée pour aucun couple de zéros de η_1 consécutifs sur S^1 .

Soit $R = \sup_{i=1, \dots, \ell} \left\{ \left| \frac{\eta'_1(\theta_i)}{\eta_2(\theta_i)} \right| + 1, k, k + S \right\}$ où

$$S = \sup \left\{ \left| \frac{\eta'_2(\theta_i)}{\eta_2(\theta_i)} \right| \mid i \in (1, \dots, \ell) \text{ tel que } \frac{\eta'_1(\theta_i)}{\eta_2(\theta_i)} = k - 1 \right\}$$

et où $\theta_1, \dots, \theta_\ell$ sont les zéros de η_1 . Posons

$$K(s) = \frac{s^2}{2} + s \left(R + k + \frac{1}{2} \right).$$

Soient X et X' deux champs de vecteurs ayant un k -jet égal à X_k . Si $\sigma \geq k$, supposons que X, X' soient de classe K et tels que $X - X' \in O(r^K) \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\}$ avec :

1) $K > K(\sigma + 4) + 1$ si le champ \bar{X}_k n'a que des secteurs de selle.

2) $K > K(\sigma + 6) + 1$ sinon.

Alors X et X' sont conjugués par un difféomorphisme de classe σ , σ -plat à l'identité en $0 \in \mathbb{R}^2$.

Démonstration. — Soit $A = S^1 \times \mathbb{R}^+$ le domaine d'éclatement des coordonnées polaires. Recouvrons $\partial A = S^1 \times \{0\}$ par 2ℓ intervalles U_i de la forme :

$$U_i = [\theta_i - \epsilon, \theta_i + \epsilon] \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq \ell$$

$$\text{et} \quad U_{\ell+i} = [\theta_i + \epsilon/2, \theta_{i+1} - \epsilon/2] \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq \ell.$$

Nous appellerons les premiers : intervalles singuliers et les deuxièmes : intervalles réguliers. On choisit ϵ assez petit pour que θ_i soit la seule valeur singulière de η_1 dans U_i . Les intervalles réguliers ne contiennent pas de valeur singulière de η_1 . D'autre part ϵ est supposé assez petit pour que $\eta_2(\theta) \neq 0$ pour $\forall \theta \in U_i$, $1 \leq i \leq \ell$.

Examinons l'expression de \hat{X} au voisinage de chaque U_i singulier :

$$\bar{X}_k = \eta_1 \frac{\partial}{\partial \theta} + \eta_2 r \frac{\partial}{\partial r}$$

$$\text{et } \hat{X} = r^{k-1} \bar{X}_k + \hat{P} \quad \text{où} \quad \hat{P} \in O(r^k) \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta}, r \frac{\partial}{\partial r} \right\}.$$

(D'autre part \hat{P} est de classe $K-1$ [12]).

Le champ \hat{X} est donc de la forme :

$$\hat{X} = [r^{k-1} \eta_1(\theta) + O(r^k)] \frac{\partial}{\partial \theta} + [\eta_2(\theta) r^k + O(r^{k+1})] \frac{\partial}{\partial r}.$$

Grâce au choix des U_i , le champ \hat{X} est conforme aux hypothèses du théorème II.1 au voisinage de chaque U_i , $1 \leq i \leq \ell$. (Avec $y = \theta$, $z = r$, $\Phi = \eta_1$, $A = \pm \eta_2$, k remplacé par $k-1$, $\bar{Y} \equiv 0$).

$$a(\theta) = \eta_2(\theta) = \eta_2(\theta_i) + \eta'_2(\theta_i)(\theta - \theta_i) + O((\theta - \theta_i)^2)$$

$$\psi(\theta) = \eta_1(\theta) = \eta'_1(\theta_i)(\theta - \theta_i) + O((\theta - \theta_i)^2)$$

$$\text{et :} \quad da(\theta) = \eta'_2(\theta_i) + O(\theta - \theta_i)$$

$$d\psi(\theta) = \eta'_1(\theta_i) + O(\theta - \theta_i).$$

Il en résulte que

$$a = |\eta_2(\theta_i)| + O(\epsilon)$$

$$b = \text{Max} \{ |\eta'_1(\theta_i)| + |\eta'_1(\theta_i)| + |\eta_2(\theta_i)|, k |\eta_2(\theta_i)| \} + O(\epsilon).$$

$$\text{Soit} \quad \frac{b}{a} = \text{Sup} \left\{ \left| \frac{\eta'_1}{\eta_2}(\theta_i) \right| + \left| \frac{\eta'_2}{\eta_2}(\theta_i) \right| + 1, k \right\} + O(\epsilon).$$

Si l'on a que $\frac{\eta'_1}{\eta_2}(\theta_i) \neq k-1$, moyennant un changement de coordonnées \mathcal{C}^∞ de la forme $(\theta = \theta, R = r \cdot \alpha(\theta))$ on peut obtenir que dans les nouvelles coordonnées $\eta'_2(\theta_i) = 0$, ce qui fait dans ce cas là que :

$$\frac{b}{a} = \text{Sup} \left\{ \left| \frac{\eta'_1}{\eta_2}(\theta_i) \right| + 1, k \right\} + O(\epsilon).$$

Dans l'autre cas $\left(\frac{\eta'_1}{\eta_2}(\theta_i) = k - 1 \right)$

$$\frac{b}{a} = k + \left| \frac{\eta'_2}{\eta_2}(\theta_i) \right| + O(\epsilon).$$

Considérons maintenant un des intervalles réguliers U_i , $i \geq \ell + 1$. Au voisinage de U_i , le champ \hat{X} est de la forme :

$\hat{X} = r^{k-1} \bar{X}$ avec $\bar{X} = \eta_1(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} + O(r)$ où $\eta_1(\theta) \neq 0$ pour $\forall \theta \in U_i$ et $O(r)$ est un champ nul sur U_i .

Le champ \hat{X} est de classe $K - 1$ et le champ \bar{X} est de classe $K - 1 - (k - 1) = K - k$.

Le champ \bar{X} est tangent à U_i et non nul en chaque point de U_i . Par un changement de coordonnées de la forme

$$y(\theta, r) = y_0(\theta) + O(r) = O(r),$$

de classe $K - k$, on peut le transformer dans le champ $\bar{X}_\delta = \delta \frac{\partial}{\partial y} - z \frac{\partial}{\partial z}$, où δ est une constante positive arbitraire (dans ces nouvelles coordonnées, le segment U_i est un segment de l'axe Oy , et de longueur dépendant du choix de δ).

Le champ \hat{X} s'écrit lui-même :

$\hat{X} = z^{k-1} F(y, z) \bar{X}_\delta$ où $F(y, z)$ est une fonction non nulle en tout point de U_i , de classe $K - 2k + 1$. Il est alors facile, par un nouveau changement de coordonnées de classe $K - 2k + 1$, d'ajuster F à la valeur constante 1. On a finalement trouvé un changement de coordonnées de classe $K - 2k + 1$ dans lequel \hat{X} a l'écriture suivante :

$$X_\delta = z^{k-1} \left(\delta \frac{\partial}{\partial y} - z \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Dans cette carte de coordonnées, le champ $\hat{X} = \bar{X}_\delta$ vérifie les conditions du théorème II.1 avec un ordre de contraction égal à $k - 1$ et pour des fonctions $A(y) = 1$, $\Phi(y) = \delta$, $\bar{Y}(y) = 0$.

Alors $\frac{b}{a} = \text{Max} \{1, k + (k - 1) \delta\}$ soit $\frac{b}{a} = k + (k - 1) \delta$.

D'autre part, le champ \hat{X}' provenant du champ X' est de classe $K - 2k + 1$ dans cette carte. Tant que i reste inférieur à $K - 2k$, la condition de platitude $\|\hat{X} - \hat{X}'\|_i = O(r^{K-1-i})$, vraie initialement, implique la condition analogue $\|\hat{X} - \hat{X}'\|_i = O(z^{K-1-i})$ dans cette dernière carte (y, z) .

Remarque. — Dans le cas d'un intervalle régulier U_i , il est facile de montrer directement que les champs \hat{X} et \hat{X}' sont conjugués dans un voisinage de U_i , par un difféomorphisme de classe $K - 2k + 1$ (en fait, nous avons établi ce résultat ci-dessus). La réduction de \hat{X} au champ contractant \hat{X}_δ est introduite uniquement pour pouvoir appliquer le résultat général de récurrence du paragraphe III. De toute façon, comme on le voit grâce à la valeur de $\frac{b}{a}$ calculée, les intervalles réguliers n'auront aucune contribution à la valeur de R , dans l'application que nous allons faire du théorème III.2.

Nous pouvons maintenant appliquer le théorème III.2 aux champs \hat{X} , \hat{X}' . Pour diminuer la valeur du nombre ℓ dans l'application du théorème, nous allons regrouper entre eux les intervalles U_i .

Comme dans l'énoncé du théorème nous distinguons 2 cas :

- 1) \bar{X} ne possède que des points de selles.
- 2) \bar{X} possède au moins une source, ou un puits.

Dans le premier cas, nous poserons $V_1 = \bigcup_{i=\ell+1}^{2\ell} U_i$ et $V_2 = \bigcup_{i=1}^{\ell} U_i$. On aura bien $\partial V_2 = \partial V_2 + \subset \text{int } V_1$. On peut appliquer alors le théorème III.2 au champ \hat{X} , à $W = S^1 \times \{0\}$ avec $\ell = 2$ et le nombre R défini dans l'énoncé, pourvu que ϵ et δ soient choisis assez petits. On notera en particulier que la condition de différentiabilité $s \geq k + 2\ell + 1 = k + 5$ est ici largement vérifiée. En effet, comme $\sigma \geq k$, la différentiabilité K de X , X' , prescrite par l'énoncé est supérieure à $K(k + 4) + 1$. D'autre part, la différentiabilité de X , X' est, dans chaque carte construite autour des U_i , supérieure à $K - 2k + 1$ et donc à $K(k + 4) - 2k + 2$, quantité très supérieure à $k + 5$ pour $k \geq 2$. De même, la platitude $\|\hat{X} - \hat{X}'\|_i = O(y^{K-1-i})$ pour $i \leq K - 2k$ permet de trouver des constantes α_i comme dans l'énoncé du théorème III.1 avec $0 \leq i \leq \sigma + 3$ et $\alpha_0 = K - 1 > K(\sigma + 4)$.

Passons maintenant au cas 2). On considère la partition $I \cup J$ de l'ensemble $\{1, \dots, \ell\}$ définie par la condition suivante :

I est l'ensemble des indices correspondant à une source ou un puits.

J est l'ensemble des indices correspondant à un point de selle.

De même, définissons une partition $I' \cup J'$ de $\{\ell + 1, \dots, 2\ell\}$ par la condition suivante :

J' est l'ensemble des indices des intervalles ayant une extrémité appartenant à l'un des U_i , pour $i \in I$ et I' les autres (un intervalle U_i , $i \in I'$ est un intervalle entre deux points de selle consécutifs).

L'hypothèse de la non-existence de secteur en boucle, revient à dire que chaque U_i , $i \in J'$ est entre un puits ou une source et un point de selle.

Posons maintenant :

$$V_1 = \bigcup_{i \in I \cup I'} U_i, \quad V_2 = \bigcup_{i \in J'} U_i \quad \text{et} \quad V_3 = \bigcup_{i \in J} U_i$$

on a bien : $\partial V_{2+} \subset \text{int } V_1$, $\partial V_{2-} \cap V_1 = \emptyset$

et $\partial V_3 = \partial V_{3+} \subset \text{int } V_1 \cup \text{int } V_2$.

On peut appliquer le théorème III.2 à \hat{X} , $W = S^1 \times \{0\}$ avec $\ell = 3$ et R défini dans l'énoncé, pourvu que ϵ et δ soient assez petits.

Dans l'un ou l'autre des cas 1) ou 2), K étant comme dans l'énoncé du théorème, l'application du théorème III.2 fournit un difféomorphisme \hat{h} , de classe σ et de platitude : $\|(\hat{h} - \text{Id})(m)\|_i = O(r^{\gamma_i})$ $0 \leq i \leq \sigma$, pour des constantes γ_i , comme dans l'énoncé du théorème III.1, avec la valeur de R donnée dans l'énoncé du théorème.

En utilisant le lemme IV.1, et les estimations du théorème III.1 sur les γ_i , on montre comme dans la démonstration de la proposition IV.2, que \hat{h} induit un difféomorphisme h au voisinage de $0 \in \mathbb{R}^2$, conjuguant X et X' , de classe σ et σ -plat à l'identité.

Exemples. — Pour illustrer le théorème précédent, considérons les 2-jets de la forme :

$$X_2 = (a_0 y^2 + a_1 xy + a_2 x^2) \frac{\partial}{\partial x} + (b_0 y^2 + b_1 xy) \frac{\partial}{\partial y}$$

où $a_i, b_j \in \mathbb{R}$ avec $a_2 \neq 0$. On peut toujours supposer $a_2 > 0$. C'est ce que nous ferons dans la suite.

Les champs X dont le 2-jet est conjugué à X_2 forment la strate W_5 des singularités de codimension 4 dans l'espace \mathcal{G}^2 des germes de champs en $0 \in \mathbb{R}^2$, définie dans [2]. Une étude complète de leur \mathcal{C}^0 -stabilité et la description des types topologiques est faite dans [2]. Le lecteur pourra se reporter à cet article pour les précisions nécessaires.

Les résultats de [2] relatifs à W_5 peuvent être résumés de la façon suivante :

1) Si $(b_0 - a_1)^2 + 4a_0(b_1 - a_2) < 0$, le champ \bar{X}_2 n'a que 2 singularités :

— si $b_1 < a_2$: deux points de selles

— si $b_1 > a_2$: une source et un puits. Le champ X_2 possède alors un secteur en boucle et l'on ne peut pas appliquer le théorème.

Dans le premier cas, les valeurs critiques de θ sont 0 et π .

Les valeurs propres correspondantes, sont $\eta_2(0, \pi) = \pm a_2$, $\eta'_1(0, \pi) = \pm (b_1 - a_2)$

$$R = \sup \left\{ 2 - \frac{b_1}{a_2}, 2 \right\}.$$

Si par exemple $\frac{b_1}{a_2} \geq 0$, on a $R = 2$. La fonction $K(s)$ vaut alors :

$$K(s) = \frac{s^2}{2} + \frac{9}{2} s.$$

Le théorème montre que si $\sigma \geq 2$ et X, X' ayant un 2-jet égal à X_2 sont de classe $K > K(\sigma + 4) + 1$ et tel que $X - X'$ soit K -plat, les champs X et X' sont conjugués en classe σ . Par exemple, si $K > 46$, les champs sont conjugués en classe \mathcal{C}^2 .

2) Si $(b_0 - a_1)^2 + 4a_0(b_1 - a_2) > 0$, le champ \bar{X}_2 possède 6 points critiques. Il existe 7 configurations possibles (selon les signes de $b_1 - a_2$, $b_1 - a_1 - a_2$, $a_1 + a_2$). Le théorème s'applique à chaque cas, sauf au cas II, b) 1) correspondant à $b_1 > a_1 + a_2$, $a_1 + a_2 > 0$, $b_1 < a_2$, aux cas Ia) correspondant à $b_1 > a_2$, $b_1 < a_1 + a_2$ et aux cas I, b), 2) correspondant à $b_1 > a_2$, $b_1 > a_1 + a_2$, $a_1 + a_2 < 0$.

Les points critiques apparaissent par paires ayant pour valeurs propres :

$$\begin{aligned} \pm \eta_2(\theta_i) &= a_2 & , & \quad a_1 - (b_1 - a_2) & , \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 + a_2) \\ \pm \eta'_1(\theta_i) &= b_1 - a_2 & , & \quad b_1 - a_2 & , \quad -\frac{1}{\sqrt{2}}(b_1 - a_2) . \end{aligned}$$

Il s'ensuit que : $R = \sup \left\{ 1 + \left| 1 - \frac{b_1}{a_2} \right| , 1 + \left| \frac{b_1 - a_2}{a_1 + a_2 - b_1} \right| , 1 + \left| \frac{b_1 - a_2}{a_1 + a_2} \right| , 2 \right\}$ au moins si $b_1 \neq 2a_2$ dans le cas Ib) 1) ($b_1 > a_2$, $b_1 > a_1 + a_2$, $a_1 + a_2 > 0$), si $b_1 + a_2 \neq 0$ dans le cas IIa) 1) ($b_1 < a_2$, $b_1 < a_1 + a_2$, $a_1 + a_2 > 0$), si $a_1 \neq 2(b_1 - a_2)$ dans le cas IIb) 2) ($b_1 < a_2$, $b_1 > a_1 + a_2$, $a_1 + a_2 < 0$), et

$$K(s) = \frac{s^2}{2} + s \left(R + \frac{5}{2} \right) .$$

Dans le cas IIa) 2) ($b_1 < a_2$ et $a_1 + a_2 < 0$), le champ X ne possède que des points de selles. On utilisera la formule $K > K(\sigma + 4) + 1$. Dans tous les autres cas, on utilisera $K > K(\sigma + 6) + 1$.

Pour fixer les idées, considérons les valeurs suivantes des paramètres : $b_1 = 3$, $a_2 = -1$, $a_1 = 1$, $a_0 = b_0 = 0$. Alors on a $(b_0 - a_1)^2 + 4a_0(b_1 - a_2) = 1 > 0$ et d'autre part $b_1 > a_2$. On est dans le cas Ib) 1) de [2].

On trouve que $R = 3$ et $K(s) = \frac{s}{2}(s + 11)$.

On a : $K(\sigma + 6) + 1 = \frac{(\sigma + 6)(\sigma + 17)}{2} + 1$.

Pour la valeur minimale $\sigma = 2$, on trouve : $K > 77$.

On peut démontrer pour les difféomorphismes un théorème tout à fait analogue au théorème IV.4 ci-dessus. En fait, un germe de difféomorphisme g ayant l'origine comme point fixe, avec une partie linéaire égale à l'identité se plonge formellement dans le flot d'un champ de vecteurs : si g est de classe \mathcal{C}^K , il existe un champ de vecteurs polynomial X_K de degré K , tel que si $\varphi_{X_K, t}$ est le flot de X_K , on ait : $g = \varphi_{X_K, 1} + O(r^{K-1})$. La désingularisation de g correspond à celle de X_K (cf. [5]). En particulier si le champ X_K vérifie les conditions du théorème IV on peut conjuguer g à toutes ses perturbations

g' suffisamment différentiables et plates à g comme indiquées dans l'énoncé du théorème IV.4.

B. Champs de vecteurs de codimension 2 en dimension 3 et 4.

Nous allons maintenant appliquer les théorèmes de conjugaison locale aux champs de vecteurs en dimension 3 et 4, considérés par Takens dans [12].

On désigne par \mathcal{G}^n , resp. $\mathcal{G}^{n,\ell}$ l'espace des germes de champs de vecteurs, nuls en $0 \in \mathbb{R}^n$, de classe \mathcal{C}^∞ , resp. \mathcal{C}^ℓ et par J_k^n l'espace des k -jets d'éléments de \mathcal{G}^n . Si $\ell \geq k$, on a la projection naturelle : $\pi_k : \mathcal{G}^{n,\ell} \rightarrow J_k^n$.

On appelle ensemble semi-algébrique de $\mathcal{G}^{n,\ell}$, toute contre-image par π_k , pour $k \leq \ell$, d'un ensemble semi-algébrique de J_k^n . On désignera souvent par le même symbole l'ensemble $K \subset J_k^n$ et ses contre-images dans les différents espaces de germes $\mathcal{G}^{n,\ell}$.

Ceci étant, on définit pour $\ell \geq 4$ les sous-ensembles algébriques suivants :

a) *En dimension 3* avec pour coordonnées (x_1, x_2, x_3) : $V_{4,2} \subset \mathcal{G}^{3,\ell}$ comme étant l'ensemble des germes X de 1-jet équivalent à :

$$j^1 X(0) \sim \lambda \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \quad \text{avec } \lambda \neq 0.$$

b) *En dimension 4* avec pour coordonnées (x_1, x_2, x_3, x_4) : $V_{5,2} \subset \mathcal{G}^{4,\ell}$, l'ensemble des germes X de 1-jet équivalent à :

$$j^1 X(0) \sim \lambda_1 \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + \lambda_2 \left(x_3 \frac{\partial}{\partial x_4} - x_4 \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$$

où $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ vérifient les conditions de non résonance suivantes : Pour $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Z}$ telles que $1 \leq |\alpha_1| + |\alpha_2| \leq 4$ on a $\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 \neq 0$.

Les 2 ensembles $V_{4,2}$ et $V_{5,2}$ sont des ensembles semi-algébriques de codimension 2.

Comme $\ell \geq 4$, il résulte de la théorie des formes normales [12], que par un changement de coordonnées polynomial, tout germe de $V_{i,2}$, $i = 4, 5$ prend la forme :

$$X = (\lambda + dx_3) \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + cx_3 \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \\ + (a(x_1^2 + x_2^2) + bx_3^2) \frac{\partial}{\partial x_3} + O(\|x\|^3) \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right\}$$

pour $i = 4$, et :

$$X = (\lambda_1 + d_{11}(x_1^2 + x_2^2) + d_{12}(x_3^2 + x_4^2)) \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \\ + (\lambda_2 + d_{21}(x_1^2 + x_2^2) + d_{22}(x_3^2 + x_4^2)) \left(x_3 \frac{\partial}{\partial x_4} - x_4 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \\ + (a_{11}(x_1^2 + x_2^2) + a_{12}(x_3^2 + x_4^2)) \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \\ + (a_{21}(x_1^2 + x_2^2) + a_{22}(x_3^2 + x_4^2)) \left(x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + x_4 \frac{\partial}{\partial x_4} \right) \\ + O(\|x\|^4) \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_4} \right\}$$

où $\|x\|$ désigne la norme euclidienne de \mathbf{R}^3 ou \mathbf{R}^4 .

Le 2-jet de $X \in V_{4,2}$ ou le 3-jet de $X \in V_{5,2}$ mis sous la forme normale ci-dessus, se projette dans \mathbf{R}^2 (de coordonnées y_1, y_2) par la projection π :

$$\pi(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} y_1 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} & \text{pour } \mathbf{R}^3 \\ y_2 = x_3 \end{cases}$$

et

$$\pi(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{cases} y_1 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ y_2 = \sqrt{x_3^2 + x_4^2} \end{cases} \text{ pour } \mathbf{R}^4.$$

L'application π est de rang constant en dehors de l'espace $y_1 = 0$ dans le premier cas et des espaces $y_1 = 0$ et $y_2 = 0$ dans le deuxième cas.

La projection par π du jet de X mis sous forme normale, appelé *jet réduit* par Takens, prend la forme :

$$Y_2 = cy_1y_2 \frac{\partial}{\partial y_1} + (ay_1^2 + by_2^2) \frac{\partial}{\partial y_2}$$

pour la projection du 2-jet de X dans \mathbf{R}^3 et

$$Y_3 = (a_{11}y_1^2 + a_{12}y_2^2)y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + (a_{21}y_1^2 + a_{22}y_2^2)y_2 \frac{\partial}{\partial y_2}$$

pour la projection du 3-jet de X dans \mathbf{R}^4 .

Notons, comme Takens, $V_{4,3}$ et $V_{5,3}$ les sous-ensembles algébriques de codimension 3 dans $V_{4,2}$ et $V_{5,2}$ respectivement, formés des germes dont le jet réduit ne vérifie pas la condition (*) du paragraphe A précédent. Le type topologique de Y_i , pour $X \in V_{i,2} \setminus V_{i,3}$, $i = 4, 5$ définit une partition par des ouverts dans $V_{i,2} \setminus V_{i,3}$, que nous appellerons les types topologiques réduits (ces types sont décrits dans [12]). Ils sont au nombre de 5 pour $i = 4$ et de 10 pour $i = 5$.

Soient (ρ, θ) des coordonnées polaires dans $\mathbf{R}^2(y_1, y_2)$, et $\eta_1(\theta)$, $\eta_2(\theta)$ les fonctions définies dans la partie A. Remarquons que la fonction $\eta_1(\theta)$ s'annule toujours pour $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ pour $i = 4$ et pour $\theta = 0, \pi, \pm \frac{\pi}{2}$ pour $i = 5$, en raison des symétries de Y_i .

Comme dans la partie A, nous considérons un recouvrement de S^1 par des intervalles $U_1, \dots, U_\ell, U_{\ell+1}, \dots, U_{2\ell}$ où ℓ est le nombre des points critiques du champ \bar{Y}_i (ici on a : $2 \leq \ell \leq 8$), où chaque U_j , pour $j = 1, \dots, \ell$ contient 1 et 1 seul point critique de \bar{Y}_i et chaque U_j , $j = \ell + 1, \dots, 2\ell$ n'en contient aucun.

Désignons par $I \subset [\ell + 1, \dots, 2\ell]$ le sous-ensemble d'indices d'intervalles "réguliers" situés entre un puits et une source.

Nous allons considérer $U = \bigcup_{j \notin I} U_j$; U est la réunion des intervalles au-dessus desquels sont exclus les retours entre points critiques de Y_i . Au-dessus, signifie dans un voisinage du secteur conique :

$$CU = \{(y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2 \mid \theta \in U\}.$$

Posons $CW = \pi^{-1}(CU)$; CW est un secteur conique de \mathbf{R}^3 ou \mathbf{R}^4 respectivement. Si $\Phi : S^2 \times \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^3$ ou $S^3 \times \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^4$ est l'application de coordonnées polaires, π induit une application de S^2, S^3 sur $S^1(\theta)$ et CW est le cône sur $W = \pi^{-1}U$.

Nous pouvons maintenant énoncer :

THEOREME IV.5. — Il existe une fonction continue R de $V_{i+2,2} \setminus V_{i+2,3}$ dans \mathbf{R}^+ , pour $i = 2, 3$ telle que si l'on pose $K(s, X_i) = \frac{s^2}{2} + \left(R(X_i) + i + \frac{1}{2}\right)s$, pour $s \geq i + 6$ on ait la propriété suivante :

Si X, X' sont 2 germes de $\mathcal{G}^{i+1,K}$, avec $K > K(s, X_i) + 1$ et $X_i = j^i X(0) = j^i X'(0) \in V_{i+2,2} \setminus V_{i+2,3}$ et

$$X - X' = O(\|x\|^K) \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \right\},$$

il existe un difféomorphisme h , défini au voisinage de $0 \in \mathbf{R}^{i+1}$, de classe $s - 6$ et $(s - 6)$ -plat à l'identité en $0 \in \mathbf{R}^{i+1}$, conjuguant X et X' dans un voisinage de 0 dans le cône W associé à X_i comme ci-dessus.

Démonstration. — Il suffit de démontrer le théorème dans un voisinage \mathcal{U} d'un jet $X_{i,0} \in V_{i+2,2} \setminus V_{i+2,3}$ avec une fonction $R(X_i)$ définie sur \mathcal{U} . On prendra ensuite pour fonction $R(X_i)$, une fonction continue majorant les différentes fonctions associées aux ouverts \mathcal{U} d'un recouvrement localement fini de $V_{i+2,2} \setminus V_{i+2,3}$. Soit donc $X_{i,0} \in V_{i+2,2} \setminus V_{i+2,3}$. On lui associe comme plus haut des intervalles U_j . Choisissons maintenant des intervalles U'_j contenant chacun le U_j correspondant dans son intérieur, avec les mêmes propriétés (chaque U'_j contient au plus 1 point critique du champ $\bar{Y}_{i,0}$ associé au jet réduit $Y_{i,0}$ de $X_{i,0}$).

Alors, si \mathcal{U} est un voisinage assez petit de $X_{i,0}$ dans $V_{i+2,2} \setminus V_{i+2,3}$ les intervalles U'_j sont adaptés à chaque $X_i \in \mathcal{U}$, dans le sens que \bar{Y}_i possède un et un seul point critique dans chaque U'_j , $1 \leq j \leq \ell$ et aucun dans les U'_j , $\ell + 1 \leq j \leq 2\ell$, si ℓ est le nombre des points critiques de $\bar{Y}_{i,0}$. Soient maintenant X et X' des champs comme dans l'énoncé et \hat{X}, \hat{X}' les champs obtenus par éclatement, au voisinage de $S^1 \times \mathbf{R}^+$. (\hat{X} et \hat{X}' sont de classe \mathcal{C}^{K-1} [12]). On va leur appliquer le théorème III.2, en utilisant les $V_j = \pi^{-1} U'_j$ pour $j \in I$, et la variété $W = \pi^{-1} U \subset M = S^1 \times \mathbf{R}^+$.

On vérifie tout d'abord qu'au voisinage de chaque V_j , on peut choisir des coordonnées dans lesquelles les champs \hat{X} et \hat{X}' ont la

forme nécessaire à l'application des résultats du II (la condition 2 du III est réalisée ici car on a exclu les intervalles connectant source et puits).

Des constantes a_j , b_j sont alors explicitement calculables à l'aide des coefficients du i -jet et X_i tant que $X_i \in \mathcal{U}$ et dépendent continuellement de ces coefficients et donc de X_i sur \mathcal{U} . (Nous n'avons pas jugé utile d'écrire des formules explicites. Le lecteur pourra les calculer s'il le désire).

Pour vérifier que \hat{X} a l'écriture convenable au voisinage de V_j , on utilise les coordonnées sphériques de \mathbf{R}^3 : θ , α , r avec :

$$x_1 = r \cos \theta \cos \alpha, \quad x_2 = r \cos \theta \sin \alpha \quad \text{et} \quad x_3 = r \sin \theta.$$

La sphère S^2 d'éclatement correspond à $r = 0$. Pour $\theta_0 \neq \pm \frac{\pi}{2}$, les coordonnées (θ, α) avec θ voisin de θ_0 et $\alpha \in S^1$, paramètrent une couronne sur S^2 , difféomorphe à $S^1 \times [0, 1]$. Les quantités $|\theta - \theta_0|$ et α forment des coordonnées polaires au voisinage de chacun des 2 pôles de S^2 correspondant à $\theta_0 = \pm \frac{\pi}{2}$, pour $|\theta - \theta_0|$ petit.

L'écriture de \hat{X} dans ces coordonnées est donnée par :

$$\hat{X} = (\lambda + dr \sin \theta + O(r^2)) \frac{\partial}{\partial \alpha} + r \bar{Y}_2(\theta, r) + O(r^2) \frac{\partial}{\partial \theta} + O(r^2) r \frac{\partial}{\partial r}$$

où le champ \bar{Y}_2 est le champ désingularisé obtenu à partir de Y_2 .

Ce champ a la forme :

$\bar{Y}_2(\theta, r) = \varphi(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} + A(\theta) r \frac{\partial}{\partial r}$, où φ et A sont des polynômes trigonométriques en θ , à coefficients dépendant linéairement de ceux de Y_2 . De plus, on choisit les intervalles U_i et U'_i tels que :

- $A(\theta) \neq 0$ pour $\forall \theta$ si l'on est dans un intervalle U'_j singulier
- $\varphi(\theta) \neq 0$ pour $\forall \theta$, si l'on est dans un intervalle régulier.

L'intervalle U'_j se relève par π en un disque de S^2 , si U'_j contient l'un des pôles $(\theta_0 = \pm \frac{\pi}{2})$ ou bien en une couronne de S^2 .

Dans l'un ou l'autre cas, on peut donner au champ X une écriture conforme à celle souhaitée dans le II. (On remarquera en particulier

que X vérifie les conditions au bord de $V_j = \pi^{-1} U'_j$ car le champ Y_2 les vérifie sur U'_j . La restriction de \hat{X} à S^2 est le champ isométrique $\lambda \frac{\partial}{\partial \alpha}$, qui est soit un champ de translation d'une couronne, soit un champ de rotation d'un disque).

Considérons maintenant un germe X dans \mathbf{R}^4 . On choisit dans \mathbf{R}^4 la paire de coordonnées polaires données par :

$$y_1 = r \cos \theta \quad y_2 = r \sin \theta$$

et $x_1 = y_1 \cos \alpha_1$, $x_2 = y_1 \sin \alpha_1$, $x_3 = y_2 \cos \alpha_2$, $x_4 = y_2 \sin \alpha_2$.

La sphère d'éclatement S^3 est paramétrée par $(\theta, \alpha_1, \alpha_2)$ avec $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ et $\alpha_1, \alpha_2 \in S^1$. Ces coordonnées sont régulières pour $\theta \neq 0; \frac{\pi}{2}$. (La sous-variété $\{\theta = \theta^t\}$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ est un tore de dimension 2). Au voisinage de $\theta = 0$, les coordonnées $\theta, \alpha_1, \alpha_2$ paramètrent un tore solide $D^2 \times S^1$ où $(|\theta|, \alpha_2)$ sont des coordonnées polaires du facteur D^2 . Au voisinage de $\theta = \frac{\pi}{2}$, les coordonnées $\frac{\pi}{2} - \theta, \alpha_1, \alpha_2$ paramètrent également un tore solide où $(\frac{\pi}{2} - \theta, \alpha_1)$ sont des coordonnées polaires du facteur D^2 . Dans ces coordonnées, le champ \hat{X} s'écrit :

$$\begin{aligned} \hat{X} = & (\lambda_1 + d_{11} y_1^2 + d_{12} y_2^2 + O(r^3)) \frac{\partial}{\partial \alpha_1} + (\lambda_2 + d_{21} y_1^2 + d_{22} y_2^2 \\ & + O(r^3)) \frac{\partial}{\partial \alpha_2} + Y_2(y_1, y_2) + O(r^3) \frac{\partial}{\partial y_1} + O(r^3) \frac{\partial}{\partial y_2}. \end{aligned}$$

On peut mettre cette écriture sous la forme :

$$\begin{aligned} \hat{X} = & (\lambda_1 + r^2(d_{11} \cos^2 \theta + d_{12} \sin^2 \theta) + O(r^3)) \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \\ & + (\lambda_2 + r^2(d_{21} \cos^2 \theta + d_{22} \sin^2 \theta) + O(r^3)) \frac{\partial}{\partial \alpha_2} + r^2(\varphi(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \\ & + A(\theta) r \frac{\partial}{\partial r} + O(r) \frac{\partial}{\partial \theta} + O(r^2) \frac{\partial}{\partial r}). \end{aligned}$$

Ici encore, $\varphi(\theta)$ et $A(\theta)$ sont des polynômes trigonométriques en θ , à coefficients dépendant linéairement de ceux de Y_3 .

On peut donner au champ \hat{X} , dans chaque V_j , l'écriture souhaitée dans le paragraphe II. En particulier, $\hat{X}|_{r=0} = \lambda_1 \frac{\partial}{\partial \alpha_1} + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial \alpha_2}$ est soit un champ de translation si $V_j = \pi^{-1}(U'_j)$ avec U'_j ne contenant pas $\theta = 0, \frac{\pi}{2}$, soit le produit d'une rotation dans le plan de coordonnées polaires $(|\theta|, \alpha_2)$ et d'une translation sur le facteur α_1 , ou vice versa, si U'_j est un voisinage de 0 ou $\frac{\pi}{2}$.

On peut maintenant achever la démonstration du théorème en procédant comme dans les démonstrations analogues de la partie A. Précisément, on applique le théorème III.2 aux champs \hat{X} , \hat{X}' après avoir regroupé les variétés V_j en trois sous-variétés ($\ell = 3$) et en remarquant que la constante de contraction k vaut $i-1$ pour $i = 2, 3$. Il en résulte facilement la valeur $K(X_i, s)$ donnée dans l'énoncé. La fonction $R(X_i)$ se calcule à partir des différentes fonctions $\frac{b_i}{a_i}(X_i)$ évoquées plus haut. \square

Remarque. — Le théorème précédent peut s'étendre en classe \mathcal{C}^∞ : si X et X' sont de classe \mathcal{C}^∞ et $X - X'$ a un jet infini nul en 0, X et X' sont \mathcal{C}^∞ -conjugués dans un voisinage de $0 \in W$.

Nous allons utiliser le théorème précédent pour comparer X à ses formes normales polynomiales :

DEFINITION. — Soit X_1 un champ linéaire de \mathbf{R}^n , de la forme :

$$X_1 = \sum_{i=1}^m \lambda_i \left(x_{2i-1} \frac{\partial}{\partial x_{2i}} - x_{2i} \frac{\partial}{\partial x_{2i-1}} \right) \text{ pour } 2m \leq n \text{ et des } \lambda_i \in \mathbf{R}.$$
 Un champ \mathcal{C}^∞ , X , de forme normale (par rapport à X_1) est un champ de 1-jet égal à X_1 et d'écriture :

$$X = \sum_{i=1}^m f_i(x_1^2 + x_2^2, \dots, x_{2m-1}^2 + x_{2m}^2, x_{2m+1}, \dots, x_n) \left(x_{2i-1} \frac{\partial}{\partial x_{2i}} - x_{2i} \frac{\partial}{\partial x_{2i-1}} \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^m g_i(x_1^2 + x_2^2, \dots, x_{2m-1}^2 + x_{2m}^2, x_{2m+1}, \dots, x_n) \\
& \qquad \qquad \qquad \left(x_{2i-1} \frac{\partial}{\partial x_{2i-1}} + x_{2i} \frac{\partial}{\partial x_{2i}} \right) \\
& + \sum_{i=2m+1}^n h_i(x_1^2 + x_2^2, \dots, x_{2m-1}^2 + x_{2m}^2, x_{2m+1}, \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_i}.
\end{aligned}$$

Le théorème de mise sous forme normale de Takens rappelé dans l'introduction dit que si pour $\forall \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{Z}$, tels que $1 \leq \sum_{i=1}^m |\alpha_i| \leq k+1$ on a $\sum_{i=1}^m \alpha_i \lambda_i \neq 0$ et si X est un champ de classe \mathcal{C}^k , de 1-jet égal à X_1 , alors $X = X_N + R_k$ où X_N est un champ polynomial de degré $\leq k$, de forme normale par rapport à X_1 , et R_k un champ de k -jet nul.

Le théorème IV.5 a donc le corollaire suivant :

COROLLAIRE IV.6. — Soit X un germe de $\mathcal{C}^{i+1, K}$ avec $K > K(s, X_i) + 1$ et $j^i X(0) = X_i \in V_{i+2,2} \setminus V_{i+2,3}$, $i = 2, 3$. Supposons de plus que pour $i = 3$, les 2 nombres λ_1, λ_2 vérifient $\alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 \neq 0$ pour $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Z}$ tels que $1 \leq |\alpha_1| + |\alpha_2| \leq K$.

Alors, si $s \geq i + 6$, le germe X est conjugué par un difféomorphisme de classe $s - 6$, et $(s - 6)$ -plat à l'identité en $0 \in \mathbb{R}^{i+1}$ à sa forme normale polynomiale X_N de degré $K - 1$ dans un voisinage de 0 du secteur conique W , associé à X_i .

L'intérêt du corollaire est que toutes les variétés invariantes de X_i , de classe \mathcal{C}^∞ , sont localement contenues dans W ; aussi lorsque X est de classe $K > K(s, X_i) + 1$ et sans résonance jusqu'à l'ordre K , il possède des variétés invariantes qui sont des cônes de classe \mathcal{C}^{s-6} ; si X est de classe \mathcal{C}^∞ et sans aucune résonance, ses variétés sont de classe \mathcal{C}^∞ . (Comparer avec le résultat de [12]).

Dans le paragraphe suivant nous utiliserons le corollaire IV.6 à l'étude de la stabilité topologique des germes de champs en codimension finie.

V. STABILITE TOPOLOGIQUE DES GERMES DE CODIMENSION 2

Notre but est de montrer que dans le théorème 1 de [12], on peut remplacer la \mathcal{C}^0 -stabilité faible par la \mathcal{C}^0 -stabilité.

Rappelons les définitions suivantes :

DEFINITIONS. — X_1 et $X_2 \in \mathcal{G}^{n,2}$ sont \mathcal{C}^0 -équivalents si pour certains représentants \tilde{X}_1 et \tilde{X}_2 de X_1 et X_2 , il existe des voisinages U_1 et U_2 de $0 \in \mathbb{R}^n$ et un homéomorphisme $\varphi : U_1 \rightarrow U_2$ qui applique les trajectoires de \tilde{X}_1 sur celles de \tilde{X}_2 , en préservant le sens de parcours (mais pas nécessairement le paramétrage).

— Soit $K \subset \mathcal{G}^{n,2}$ et $X \in K$; on dit que X est K - \mathcal{C}^0 -stable s'il existe un voisinage U de X dans $\mathcal{G}^{n,2}$ tel que tout $X' \in K \cap U$ est \mathcal{C}^0 -équivalent à X .

On veut démontrer le théorème suivant :

THEOREME V.1. — Pour $\forall n \geq 1$, il existe des ensembles semi-algébriques $V_0 = \mathcal{G}^n \supset V_1 \supset V_2 \supset V_3$ dans \mathcal{G}^n de codimension 0, 1, 2 et 3 et un ensemble $\Sigma \subset V_2 \setminus V_3$, qui pour $n \leq 3$ est vide et qui pour $n \geq 4$ est une union dénombrable d'ensembles semi-algébriques fermés de codimension 3 tels que tout

$$X \in V_{i-1} \setminus V_i \quad (1 \leq i \leq 2) \quad \text{et} \quad X \in V_{3-1} \setminus (\Sigma \cup V_3)$$

soit V_{i-1} - \mathcal{C}^0 -stable ($1 \leq i \leq 3$). Chaque $V_{i-1} \setminus V_i$ est une variété ouverte de codimension $(i-1)$, tout comme $V_2 \setminus (V_3 \cup \Sigma)$.

Les variétés V_i du théorème ci-dessus coïncident avec celles du théorème 1 de [12]. L'ensemble $\Sigma \subset V_2 \setminus V_3$, (non-vide à partir de $n = 4$), est défini localement au voisinage de chaque $X \in V_2 \setminus V_3$ par un nombre fini de conditions de résonances (c'est-à-dire des relations linéaires à coefficients entiers entre les valeurs propres de $j^1 X(0)$). Ce nombre de relations tend vers l'infini lorsque $X \rightarrow V_3$. Comme ces relations définissent des hypersurfaces transverses à $V_2 \setminus V_3$ l'ensemble $V_2 \setminus (V_3 \cup \Sigma)$ est une variété ouverte dans V_2 .

Comme dans l'article de Takens, l'étude en dimension n se ramène, par réduction à une variété centrale, à l'étude en dimension 3 et 4.

On utilisera les notations W_j^i , $V_{i,j}$ introduites par Takens ; nous avons rappelé dans le paragraphe IV celles des définitions qui nous seront utiles.

Le théorème V.1 va résulter du théorème suivant, relatif aux dimensions 3 et 4.

THEOREME V.2. — *Il existe une fonction continue $K(X_i)$ sur $V_{i+2,2} \setminus V_{i+2,3}$ considérée comme sous-variété de J_i^{i+1} , $i = 2, 3$ telles que :*

1) Pour $i = 2$: Si $X \in \mathcal{G}^{3,K}$ avec $K > K(X_i)$, où $X_i = j^i X(0) \in V_{4,2} \setminus V_{4,3}$ alors X est $V_{4,2}$ - \mathcal{C}^0 -stable dans $\mathcal{G}^{3,K}$.

2) Pour $i = 3$: Soit $\Sigma_5 = \{X_i \in V_{5,2} \setminus V_{5,3} \subset J_3^4 \mid j^1 X_i \text{ a une résonance d'ordre } \leq K(X_i)\}$. Alors Σ_5 est une union dénombrable d'ensembles semi-algébriques fermés dans J_3^4 et si $X \in \mathcal{G}^{4,K}$ avec $K > K(X_i)$ où $X_i = j^i X(0) \in V_{5,2} \setminus (V_{5,3} \cup \Sigma_5)$, X est $V_{5,2}$ - \mathcal{C}^0 -stable dans $\mathcal{G}^{4,K}$.

Démonstration du théorème V.1. — On définit les ensembles V_0 , V_1 , $V_2 \subset \mathcal{G}^n$ comme dans [12]. Pour $V_3 \subset V_2$ on prend la réunion de la fermeture du sous-ensemble des $X \in V_2$ tels que X , restreint à une variété centrale ne soit pas dans $V_{4,2} \setminus V_{4,3}$, et du sous-ensemble des points singuliers de V_2 .

Montrons que si $X \in V_2 \setminus V_3$, alors X est V_2 - \mathcal{C}^0 -stable. Rappelons qu'il existe des variétés centrales de toute classe de différentiabilité, et que si W^ℓ et $W^{\ell'}$ sont deux variétés centrales de classe $\ell \leq \ell'$, alors elles sont tangentes en 0 à l'ordre ℓ . On peut donc parler pour $\forall \ell$, du ℓ -jet de X en restriction aux variétés centrales : il s'agit du ℓ -jet unique en restriction aux variétés centrales de classe $\ell' \geq \ell$.

Par construction, le i -jet X_i de X pour $i = 2$ ou 3 suivant le cas, pris en restriction aux variétés centrales, appartient à $V_{4,2} \setminus V_{4,3}$ ou bien à $V_{5,2} \setminus (V_{5,3} \cup \Sigma_5)$.

Soit $K > K(X_i)$, où $K(X_i)$ est la fonction définie dans le théorème V.2 ; considérons W_X , une variété centrale de classe $\geq K$. Le théorème V.2 implique que la restriction \bar{X} de X à W_X est $V_{i+2,2}$ - \mathcal{C}^0 -stable. Cela signifie qu'il existe un voisinage $\bar{\mathcal{U}}$ de \bar{X} dans $\mathcal{G}^{i+2,K}$ tel que chaque $\bar{Y} \in \bar{\mathcal{U}} \cap V_{i+2,2}$ soit topologiquement équivalent à \bar{X} . Comme l'on peut choisir la variété centrale W_X ,

de classe K fixée, dépendant différentiablement de X , il existe un voisinage \mathcal{U} de X dans \mathcal{G}^n , tel que pour tout $Y \in \mathcal{U}$, $\bar{Y} = Y|_{W_Y} \in \mathcal{U}$, le voisinage choisi plus haut dans $\mathcal{G}^{i+2,K}$ (où K est fixé tel que $K > K(X_i)$ et \mathcal{U} est tel que pour $\forall Y \in \mathcal{U}$, $K(Y_i) < K$).

Mais maintenant, une équivalence topologique entre \bar{X} et \bar{Y} , restriction de deux germes de champs à des variétés centrales, se relève en une équivalence entre les germes X et Y (voir [8]). Ceci achève la démonstration du théorème V.1. Le fait que $\text{cod } V_i = i$ et que $V_{i-1} \setminus V_i$ est une variété ouverte est montré comme dans [12]. \square

Nous allons maintenant passer à la démonstration du théorème V.2. Les résultats du chapitre IV permettent de se ramener à la comparaison de germes de forme normale (et même polynomiaux).

Rappelons qu'un germe $X \in V_{4,2}$ est de forme normale si :

$$X = f \cdot \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + g \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) + h \frac{\partial}{\partial x_3}$$

où f, g, h sont fonctions \mathcal{C}^∞ de $x_1^2 + x_2^2$ et x_3 ,

et qu'un germe $X \in V_{5,2}$ est de forme normale si :

$$\begin{aligned} X = f_1 \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + f_2 \left(x_3 \frac{\partial}{\partial x_4} - x_4 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \\ + g_1 \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) + g_2 \left(x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + x_4 \frac{\partial}{\partial x_4} \right) \end{aligned}$$

où f_1, f_2, g_1 et g_2 sont fonctions \mathcal{C}^∞ de $x_1^2 + x_2^2$ et $x_3^2 + x_4^2$.

Appliquons le corollaire IV.6 avec s convenable, par exemple $s = 9$: Si le germe X est de classe $K > K(9, X_i) + 1$ et que son 1-jet n'a pas de résonance jusqu'à l'ordre K , il est conjugué à sa forme normale polynomiale d'ordre $K - 1$ en classe 3, au-dessus de l'ensemble conique W (cf. le paragraphe IV).

Maintenant, le résultat d'équivalence faible de Takens établi dans [12] montre justement que X et X_N par exemple sont topologiquement équivalents sur un complémentaire de W dans un voisinage de 0.

Précisément, il existe un représentant \tilde{X} de X sur un voisinage U de 0 tel que \tilde{X} et X_N sont topologiquement équivalents sur l'ensemble L des points de U où l'ensemble α -limite ou ω -limite

de la trajectoire est l'origine. Mais l'union de cet ensemble et du cône W forme un voisinage de l'origine.

Il suffit de remarquer que l'équivalence construite par Takens dans [12] peut être choisie arbitraire sur ∂L si $\partial L \neq \emptyset$. (Pour avoir un exemple précis, considérer le cas V de la proposition 3.8 de [12]). La conjugaison donnée ci-dessus dans le corollaire IV.6, se prolonge donc par la démonstration de Takens, en une équivalence topologique entre X et X_N . Nous avons donc le résultat suivant, où $K(X_i) = K(9, X_i) + 1$.

PROPOSITION V.3. — *Il existe une fonction continue K sur l'espace $V_{i+2,2} \setminus V_{i+2,3} \subset J_i^{i+1}$, $i = 2, 3$, telle que :*

1) *Pour $i = 2$: Si $X \in \mathcal{G}^{3,K}$ avec $K > K(X_i)$, où $X_i = j^i X(0)$ et $X \in V_{4,2} \setminus V_{4,3}$ alors X est topologiquement équivalent à sa forme normale polynomiale d'ordre $K - 1$.*

2) *Pour $i = 3$: Soit $\Sigma_5 = \{X_i \in V_{5,2} \setminus V_{5,3} \mid j^i X_i \text{ a une résonance d'ordre } \leq K(X_i)\}$. Alors Σ_5 est une union dénombrable d'ensembles semi-algébriques fermés dans J_3^4 et si $X \in \mathcal{G}^{4,K}$ avec $K > K(X_i)$ et $X_i = j^i X(0) \in V_{5,2} \setminus (V_{5,3} \cup \Sigma_5)$ alors X est topologiquement équivalent à sa forme normale polynomiale d'ordre $K - 1$.*

Le théorème V.2 va résulter de la stabilité des champs de forme normale. En fait, nous allons établir le résultat suivant, qui joint à la proposition V.3 implique le théorème V.2.

THEOREME V.4. — *Soient X et $X' \in V_{i,2} \setminus V_{i,3}$, $i = 4, 5$ deux germes de forme normale et ayant des jets réduits dans la même classe d'équivalence (c'est-à-dire dans la même classe I à V pour $i = 4$, ou I à X pour $i = 5$, de l'article [12]). Alors X et X' sont topologiquement équivalents. (Lorsque $i = 4$, une première démonstration de ce résultat est apparue dans [1]).*

Démonstration du théorème V.4. —

1) *Démonstration en dimension 3 ($i = 4$).*

Soient

$$X = f\left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}\right) + g\left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\right) + h \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$\text{et } X' = f' \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + g' \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) + h' \frac{\partial}{\partial x_3}$$

où f, g, h, f', g', h' sont \mathcal{C}^∞ et fonction de $x_1^2 + x_2^2$ et x_3 , et X, X' vérifiant la condition de l'énoncé.

Comme $f(0)$ et $f'(0) \neq 0$, on peut diviser X et X' par f et f' respectivement. Les champs obtenus sont encore de forme normale. Leurs 2-jets réduits étant proportionnels aux jets réduits de X et X' appartiennent à la même classe d'équivalence. Il suffit donc de montrer le résultat pour $f \equiv f' \equiv 1$. En fait, nous allons prouver que dans ce cas X et X' sont topologiquement conjugués. On suppose donc dorénavant que :

$$X = \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + g \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) + h \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$\text{et } X' = \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + g' \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) + h' \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Introduisons les coordonnées cylindriques y, θ, x_3 , où

$$x_1 = y \cos \theta, \quad x_2 = y \sin \theta.$$

Les germes X, X' se relèvent dans l'espace $S^1 \times \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}$ des coordonnées cylindriques ($\theta \in S^1, y \in \mathbf{R}^+, x_3 \in \mathbf{R}$) en \hat{X}, \hat{X}' égaux respectivement à :

$$\hat{X} = \frac{\partial}{\partial \theta} + g(y^2, x_3) y \frac{\partial}{\partial y} + h(y^2, x_3) \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$\text{et } \hat{X}' = \frac{\partial}{\partial \theta} + g'(y^2, x_3) y \frac{\partial}{\partial y} + h'(y^2, x_3) \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Les champs réduits de X et X' sont précisément les champs de \mathbf{R}^2 égaux à :

$$Y = g \cdot y \frac{\partial}{\partial y} + h \frac{\partial}{\partial x_3} \quad \text{et} \quad Y' = g' y \frac{\partial}{\partial y} + h' \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Ces champs ont un 2-jet qui, par hypothèse, vérifie la condition (*) du paragraphe IV et sont topologiquement équivalents (et même conjugués par [4]).

L'axe Ox_3 étant variété invariante des champs désingularisés \bar{Y} et \bar{Y}' , l'homéomorphisme de conjugaison u entre Y et Y'

préserve cet axe. Donc u induit l'homéomorphisme \hat{U} de $S^1 \times \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}$ dans lui-même : $\hat{U}(\theta, y, x_3) = (\theta, u(y, x_3))$.

Comme u conjugue Y et Y' , l'homéomorphisme \hat{U} conjugue \hat{X} et \hat{X}' . Comme la composante de \hat{U} sur le facteur (y, x_3) est indépendante de θ , cet homéomorphisme induit un homéomorphisme $U(x_1, x_2, x_3)$ de \mathbf{R}^3 conjuguant X et X' . (Remarquez que l'axe Ox_3 est une variété invariante pour X et X' et que X et X' y sont conjugués par $u(0, x_3)$).

2) Démonstration en dimension 4 ($i = 5$).

Soient X et X' des germes de champs de \mathbf{R}^4 de forme normale :

$$\begin{aligned} X &= f_1 \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + g_1 \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \\ &\quad + f_2 \left(x_3 \frac{\partial}{\partial x_4} - x_4 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) + g_2 \left(x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + x_4 \frac{\partial}{\partial x_4} \right) \\ X' &= f'_1 \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) + g'_1 \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \\ &\quad + f'_2 \left(x_3 \frac{\partial}{\partial x_4} - x_4 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) + g'_2 \left(x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + x_4 \frac{\partial}{\partial x_4} \right). \end{aligned}$$

On utilisera les paires de coordonnées polaires :

$$(\theta_1, \theta_2, y_1, y_2) \in S^1 \times S^1 \times \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+.$$

Les champs X et X' se relèvent dans l'espace $S^1 \times S^1 \times \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$ dans les champs \hat{X} et \hat{X}' égaux à :

$$X = f_1 \frac{\partial}{\partial \theta_1} + f_2 \frac{\partial}{\partial \theta_2} + Y \quad \text{et} \quad X' = f'_1 \frac{\partial}{\partial \theta_1} + f'_2 \frac{\partial}{\partial \theta_2} + Y'$$

où on identifie les champs réduits Y, Y' de $\mathbf{R}^2(y_1, y_2)$ à des champs de $S^1 \times S^1 \times \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$, indépendants de θ_1, θ_2 . Ces champs réduits ont pour expression :

$$\begin{aligned} Y &= g_1(y_1^2, y_2^2) y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + g_2(y_1^2, y_2^2) y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} \\ Y' &= g'_1(y_1^2, y_2^2) y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + g'_2(y_1^2, y_2^2) y_2 \frac{\partial}{\partial y_2} \end{aligned}$$

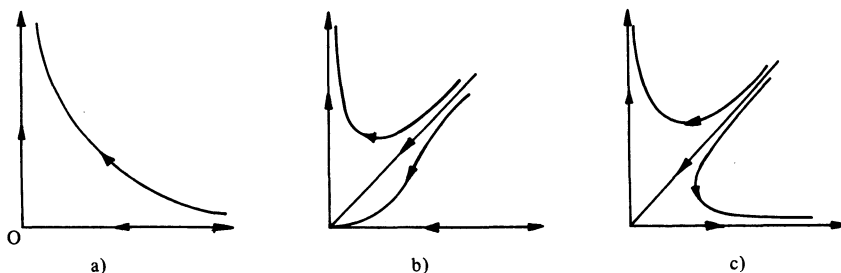
et sont la projection par l'application de réduction π :

$$y_1 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad , \quad y_2 = \sqrt{x_3^2 + x_4^2}$$

des champs X et X' .

Les champs réduits Y et Y' sont invariants par les symétries d'axe Oy_1 et Oy_2 . Par hypothèse, ils vérifient la condition (*) : En raison des symétries, ils sont tangents aux axes Oy_1 et Oy_2 . Ils ont la même répartition de points critiques pour leurs champs désingularisés, car ils appartiennent à la même classe d'équivalence au sens de [12].

Examinons ces types (on trouvera leur description dans [12]). La démonstration de Takens donne une équivalence sur tout un voisinage de 0 sauf si les champs Y et Y' ont des secteurs en selle. Quitte à remplacer X , X' par $-X$, $-X'$, trois cas seulement sont possibles, correspondant au portrait de phase suivant de Y ou Y' :



Nous désignerons ces cas par les lettres a , b et c .

Nous allons montrer que dans ces trois cas, on peut obtenir une équivalence topologique de X et X' au-dessus des secteurs en selle, qui, prolongée par la méthode de Takens dans tout un voisinage dans le cas b), fournit l'équivalence cherchée.

Nous voyons que chaque secteur en selle est, soit le 1^{er} quadrant (cas a)) soit un secteur angulaire ayant pour limite un des axes Oy_1 ou Oy_2 et une courbe γ issue de 0, distincte de Oy_1 , Oy_2 (ainsi que sa tangente en 0). Nous allons examiner les deux cas successivement :

PROPOSITION V.5. — *Supposons que le champ Y possède un secteur en selle S dont le bord soit formé de la réunion d'un des*

axes Oy_i ($i = 1$ ou 2) et d'une courbe γ par $0 \in \mathbb{R}^2$, $\gamma \neq Oy_1$ et Oy_2 . Soit S' , le secteur correspondant pour Y' ; S' est bordé par le même axe que S et une courbe γ' , $\gamma' \neq Oy_1, Oy_2$. Alors il existe un homéomorphisme H de $\pi^{-1}S$ dans $\pi^{-1}S'$, qui est une équivalence entre $X|_{\pi^{-1}S}$ et $X'|_{\pi^{-1}S'}$ au voisinage de $0 \in \mathbb{R}^4$; de plus H conjugue $X|_{\pi^{-1}\gamma}$ avec $X'|_{\pi^{-1}\gamma'}$ et est tel que :

$$H(\theta_1, \theta_2, p) = (\theta_1, \theta_2, p') \quad \text{pour} \quad \forall (\theta_1, \theta_2) \in S^1 \times S^1,$$

où $p \in \gamma$, $p' \in \gamma'$ sont 2 points fixés arbitrairement mais assez proches de $0 \in \mathbb{R}^2$.

PROPOSITION V.6. — *Supposons que Y et Y' possèdent pour secteur de selle le 1^{er} quadrant de $\mathbb{R}^2(y_1, y_2)$. Alors les champs X et X' sont topologiquement équivalents dans un voisinage de $0 \in \mathbb{R}^4$.*

Avant de démontrer ces deux propositions, montrons comment elles impliquent le résultat. Tout d'abord, la proposition V.6 règle le cas a). Dans le cas b), l'équivalence de $S \rightarrow S'$, où S, S' sont bordés par $\gamma \cup Oy_i$ et $\gamma' \cup Oy_i$ respectivement, pour un certain i , s'étend par la méthode de Takens au-dessus de l'autre secteur où les trajectoires de X admettent toutes $0 \in \mathbb{R}^4$ comme ensemble ω -limite. Enfin le champ X dans le cas c) est formé de la juxtaposition de deux secteurs du type envisagé dans la proposition V.5, disons S et S_1 ayant la composante γ en commun. Soient S' et S'_1 les secteurs correspondants pour X' . Il suffit d'appliquer la proposition à S et S' puis à S_1 et S'_1 en prenant le même couple p, p' sur γ et γ' respectivement. L'équivalence H sur S et l'équivalence H_1 sur S_1 coïncident alors sur $\pi^{-1}\gamma$ grâce à la condition imposée dans la proposition V.5 à H et H_1 sur $\pi^{-1}\gamma$. (En effet, il existe une et une seule conjugaison h de $X|_{\pi^{-1}\gamma}$ avec $X'|_{\pi^{-1}\gamma'}$ telle que $h(\theta_1, \theta_2, p) = (\theta_1, \theta_2, p')$ pour tout $(\theta_1, \theta_2) \in S^1 \times S^1$). Les deux homéomorphismes H et H_1 se recollent donc le long de $\pi^{-1}\gamma$ en une équivalence de X et X' au voisinage de $0 \in \mathbb{R}^4$. \square

Passons maintenant aux démonstrations des propositions V.5 et 6.

Démonstration de la proposition V.5. — Soit U un voisinage de $0 \in \mathbb{R}^2$ dans lequel les germes réduits Y et Y' ont des représentants dont 0 est l'unique point singulier. Supposons, pour fixer les idées, que $\partial S = Oy_1 \cup \gamma$ et $\partial S' = Oy_1 \cup \gamma'$.

Soient $p \in \gamma \cup U$ et $p' \in \gamma' \cap U$ quelconques. Nous allons tout d'abord construire une équivalence H_1 entre X et X' telle que $H_1(\theta_1, \theta_2, p) = (\theta_1, \theta_2, p')$ pour $(\theta_1, \theta_2) \in S^1 \times S^1$ sans que H_1 soit nécessairement une conjugaison sur $\pi^{-1}\gamma$, puis modifier H_1 en un homéomorphisme H qui vérifie cette dernière condition.

En fait, nous allons trouver une conjugaison H_1 sur $\pi^{-1}S$ entre $\frac{1}{f_1}X$ et $\frac{1}{f'}X'$. Ces deux champs sont de la forme :

$$\begin{aligned}\frac{1}{f_1}X &= \tilde{X} = \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \tilde{f}_2 \frac{\partial}{\partial \theta_2} + \tilde{Y} \\ \frac{1}{f'_1}X' &= \tilde{X}' = \frac{\partial}{\partial \theta_1} + \tilde{f}'_2 \frac{\partial}{\partial \theta_2} + \tilde{Y}',\end{aligned}$$

où \tilde{Y} et \tilde{Y}' sont des champs réduits et $\tilde{f}_2, \tilde{f}'_2$, des fonctions \mathcal{C}^∞ dépendant uniquement de y_1^2 et y_2^2 .

a) Nous allons tout d'abord construire une conjugaison $h_1: S \rightarrow S^1$ entre \tilde{Y} et \tilde{Y}' . Soient $\tilde{\varphi}(t, y)$ et $\tilde{\varphi}'(t, y)$ les flots de \tilde{Y} et \tilde{Y}' où $y = (y_1, y_2)$. Comme les champs \tilde{Y} et \tilde{Y}' ont des 3-jets réduits proportionnels aux jets réduits de X et X' , ils vérifient la condition (*) et on peut leur appliquer le théorème de conjugaison de [4]. Ce théorème s'applique dans des cas beaucoup plus généraux que celui de deux secteurs de selle obtenus par un seul éclatement. Comme certains détails de la construction vont nous être utiles, nous allons rappeler l'idée de la démonstration dans le cas particulier qui nous intéresse. Considérons tout d'abord le secteur S . Choisissons un arc J plongé dans S , tel que l'une des extrémités de J soit le point $p \in \gamma$ donné, et que J soit transverse à \tilde{Y} . On choisit de même un arc L transverse à \tilde{Y} et dont l'une des extrémités est un point $q \in Oy_1$, $q \neq 0$.

Alors si $y \in J$ est assez proche de p , il existe une valeur unique $\xi(y)$ telle que $\tilde{\varphi}(\xi(y), y) \in L$.

On peut éventuellement raccourcir J pour que cette fonction soit définie pour $\forall y \in J$, ce que nous supposons être le cas. Les propriétés suivantes sont vérifiées par $\xi(y)$ et les trajectoires de \tilde{Y} :

i) $\xi(y)$ est continue et $\xi(y) \rightarrow +\infty$ d'une façon strictement monotone pour $y \rightarrow p$.

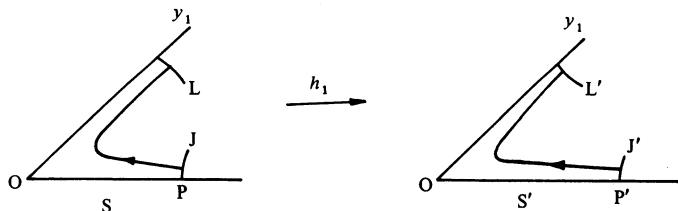
ii) Si $\sigma_y = \tilde{\varphi}([0, \xi(y)], y)$ est le segment d'orbite de \tilde{Y} entre J et L , $\text{dist}(\sigma_y, \partial S) \rightarrow 0$ pour $y \rightarrow p$.

On trouvera la démonstration de ces propriétés dans [4].

Maintenant on choisit de la même façon des arcs J' , L' pour le secteur S' , avec J' issu du point p' .

La fonction $\xi'(y)$ associée à ce choix et le champ \tilde{Y}' jouissent des propriétés i) et ii) ci-dessus. Il est d'autre part clair que η défini comme $\eta(y) = \xi'^{-1} \circ \xi(y)$ pour $y \in J - \{p\}$ et $\eta(p) = p'$ est un homéomorphisme de J dans J' , quitte à choisir J assez petit.

La formule $h_1(\tilde{\varphi}(t, y)) = \tilde{\varphi}'(t, \eta(y))$ $t \in [0, \xi(y)]$ définit en dehors de Oy_1 , sur un voisinage de $0 \in S$, une conjugaison continue telle que $h_1(y)|_J = \eta(y)$. Cet homéomorphisme h_1 se prolonge continuellement sur $Oy_1 \setminus \{0\}$. On pose $h_1(0) = 0$. La continuité en 0 se montre en utilisant les conditions i) et ii) (Voir [4]).



b) Nous allons voir que h_1 se relève en une conjugaison H_1 de \tilde{X} et \tilde{X}' , telle que $H_1(\theta_1, \theta_2, p) = (\theta_1, \theta_2, p')$ pour $\forall (\theta_1, \theta_2) \in S^1 \times S^1$.

Soit $K = \pi^{-1}J$: K est une sous-variété difféomorphe à $S^1 \times S^1 \times J$. Cette sous-variété est transverse aux trajectoires de \tilde{X} et l'ensemble des trajectoires de \tilde{X} qui coupent K forme avec $\pi^{-1}(Oy_1)$ un voisinage de 0 dans S . D'autre part, chaque trajectoire de ce voisinage coupe K en un point et un seul. Il existe une et une seule conjugaison H_1 de \tilde{X} et \tilde{X}' , au voisinage de $0 \in \pi^{-1}S$, en dehors de $\pi^{-1}(Oy_1)$, telle que :

$$H_1(\theta_1, \theta_2, p) = (\theta_1, \theta_2, h_1(p))$$

pour $\forall (\theta_1, \theta_2, y) \in K \cong S^1 \times S^1 \times J$. (1)

Si $\Phi(t, m)$ est le flot de \tilde{X} et $\Phi'(t, m)$ celui de \tilde{X}' , cette conjugaison est nécessairement définie dans le saturé de K par les orbites de \tilde{X} , par :

$$H_1(m) = \Phi'(t(m), p(m)) \quad (2)$$

où $p(m)$ est l'unique point de K sur la trajectoire de \tilde{X} par m et $t(m)$ est le temps pour aller par $\Phi(t, m)$ de $p(m)$ à m : $\Phi(t(m), p(m)) = m$.

Comme $t(m)$ et $p(m)$ sont des fonctions continues de m , l'application $H_1(m)$ est continue là où elle est définie par (2), c'est-à-dire dans un voisinage de $0 \in S$ dans S , en dehors de $\pi^{-1}(Oy_1)$.

D'autre part, H_1 se projette par π sur h_1 :

$\pi \circ H_1(m) = h_1 \circ \pi(m)$ en raison des conditions initiales (1).

c) *Nous allons voir que H_1 se prolonge en un homéomorphisme sur $\pi^{-1}(Oy_1)$.* Pour cela, nous devons examiner plus en détail les flots $\Phi(t, m)$ et $\Phi'(t, m)$. Soit $m = (\theta_1, \theta_2, y_1, y_2)$. Le flot $\Phi(t, m)$ est de la forme :

$$\Phi(t, m) = \begin{cases} \theta_1(t, m) = \theta_1 + t \\ \theta_2(t, m) = \theta_2(t, \theta_2, y_1, y_2) \text{ non dépendant de } \theta_1 \\ \varphi(t, y) \end{cases}$$

où $\varphi(t, y)$ est le flot de \tilde{Y} .

De même :

$$\Phi'(t, m) = \begin{cases} \theta'_1(t, m) = \theta_1 + t \\ \theta'_2(t, m) = \theta'_2(t, \theta_2, y_1, y_2) \\ \varphi'(t, y) \end{cases}$$

Ecrivons $H_1(\theta_1, \theta_2, y_1, y_2) = (\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2)$. Comme les 1^{ères} composantes $\theta_1(t, m)$ et $\theta'_1(t, m)$ sont égales, on a : $\bar{\theta}_1 = \theta_1$. Comme H_1 se projette sur h_1 , on a : $\bar{y} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2) = h_1(y)$. L'homéomorphisme H_1 a donc la forme :

$$H_1(\theta_1, \theta_2, y_1, y_2) = (\theta_1, \bar{\theta}_2(\theta_2, y_1, y_2), h_1(y_1, y_2)).$$

Un tel homéomorphisme se prolonge continuellement sur $\pi^{-1}(Oy_1) \subset \pi^{-1}S \subset \mathbf{R}^4$. En fait, on peut paramétrer $\pi^{-1}(Oy_1)$ par (θ_1, y_1) en coordonnées polaires et le prolongement cherché

est : $(\theta_1, y_1) \rightarrow (\theta_1, h_1(y_1, 0))$, où $h_1(y_1, 0)$ est la valeur de h_1 sur l'axe Oy_1 (paramétré par y_1), axe invariant par \tilde{Y} , \tilde{Y}' et donc par h_1 . La raison de la continuité est la suivante. Soit $\rho : (\theta_1, \theta_2, y_1, y_2) \rightarrow (\theta_1, y_1, y_2) \in S^1 \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ la projection. Cette application induit une application de

$$\pi^{-1}S \setminus \pi^{-1}Oy_1 \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$$

encore notée ρ . La contre image de (θ_1, y_1, y_2) est le cercle de rayon y_2 , paramétré par θ_2 . Aussi, si un point

$$m = (\theta_1, \theta_2, y_1, y_2) \in \pi^{-1}S \setminus \pi^{-1}Oy_1$$

tend vers $m_0 = (\theta_{10}, y_{10}) \in \pi^{-1}(Oy_1)$, la composante y_2 tend vers 0. Quel que soit le mouvement sur le cercle $\rho^{-1}(\theta_1, y_1, y_2)$, donné par l'application $\theta_2 \rightarrow \bar{\theta}_2(\theta_2, y_1, y_2)$, le point

$$H_1(m) = (\theta_1, \bar{\theta}_2, h_1) \text{ tend vers } (\theta_{10}, h_1(y_{10}, 0)).$$

d) Nous allons maintenant modifier l'homéomorphisme H_1 , au-dessus d'un voisinage en secteur de γ dans \mathbb{R}^2 , de façon que le nouvel homéomorphisme H soit une équivalence sur $\pi^{-1}S$ et une conjugaison sur $\pi^{-1}\gamma$ telle que : $H(\theta_1, \theta_2, p) = (\theta_1, \theta_2, p')$ pour $\forall (\theta_1, \theta_2) \in S^1 \times S^1$.

Comme nous l'avons fait pour H_1 , nous allons chercher H de façon qu'il soit projetable sur un homéomorphisme h , équivalence entre Y et Y' (ou bien entre \tilde{Y} et \tilde{Y}' , ce qui revient au même).

Par hypothèse, on doit avoir : $h(m) = \varphi'(t(m), p')$ où $t(m)$ est l'unique temps tel que $\varphi(t(m), p) = m$ pour $m \in \gamma$.

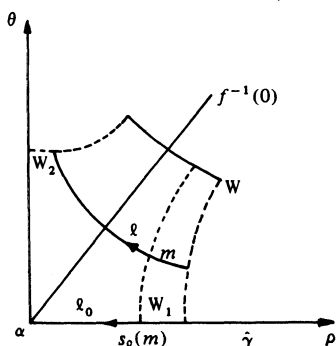
Comme $\varphi(t, p)$ et $\varphi'(t, p') \rightarrow 0$ pour $t \rightarrow +\infty$, la conjugaison h entre Y et Y' ainsi définie est un homéomorphisme de $\gamma \setminus 0$ sur $\gamma' \setminus 0$ qui s'étend continuellement en 0 par $h(0) = 0$.

Soit $u(m)$ l'homéomorphisme de γ dans γ défini par : $h(m) = h_1 \circ u(m)$ pour $\forall m \in \gamma$, où h_1 est l'homéomorphisme défini plus haut.

Nous disons que u se prolonge en un homéomorphisme $U : S \rightarrow S$ qui est l'identité dans un voisinage en secteur T de Oy_1 de la forme : $T = \{(y_1, y_2) \in S \mid y_1/y_2 \geq k\}$ où k est choisi tel que $T \cap \gamma = \{0\}$, et tel que pour $\forall m \in S$, $U(m)$ et m soit sur la même trajectoire de Y .

Pour construire U , on peut procéder de la façon suivante : Par l'éclatement $\Omega : y_1 = \rho \cos \theta, y_2 = \rho \sin \theta$, le champ Y est transformé en un champ \hat{Y} tel que $\bar{Y} = \frac{1}{\rho^2} \cdot \hat{Y}$ n'a que deux singularités hyperboliques (dans $\Omega^{-1}S$), sur le cercle $S^1 \times \{0\}$, pour les valeurs $\theta = 0$ et $\theta = \alpha, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Les variétés invariantes de ces deux points, qui sont transverses au cercle d'éclatement ($\rho = 0$) sont d'une part la demi-droite $\{\theta = 0\}$ et d'autre part une courbe $\hat{\gamma}$ tangente en $(\alpha, 0)$ à la demi-droite $\{\theta = \alpha\}$. Ces deux courbes se projettent par Ω sur Oy_1 et γ , les 2 composantes de ∂S .

Dans un voisinage W du point hyperbolique $(\alpha, 0)$ de \bar{Y} , on peut choisir une fonction de Morse f , d'indice (1,1) au point $(\alpha, 0)$ dont les surfaces de niveau soient transverses à \bar{Y} , et même telles que $\bar{Y} \cdot f > 0$ sur W et en dehors de $(\alpha, 0)$.



La ligne $f^{-1}(0)$ passe par $(\alpha, 0)$ et sépare W en 2 régions W_1 et W_2 telles que :

$$W_1 = \{m \in W \mid f(m) \leq 0\}.$$

La région W_1 est feuilletée par des arcs de trajectoire de \bar{Y} aboutissant en chaque point de $f^{-1}(0)$ dans W . Si ℓ est un arc quelconque et ℓ_0 l'arc sur $\hat{\gamma}$, on peut définir un homéomorphisme unique s_ℓ , de ℓ sur ℓ_0 , par la condition : $m \in \ell$ et $s_\ell(m) \in \ell_0$ appartiennent à la même surface de niveau f dans W_1 . Cet homéomorphisme dépend continuellement de ℓ .

Soit \hat{u} , l'homéomorphisme induit sur $\hat{\gamma}$ via Ω par u :

$$u \circ \Omega = \Omega \circ \hat{u}.$$

On étend \hat{u} en un homéomorphisme \hat{U} sur W_1 par

$$\hat{U}(m) = s_\ell^{-1} \circ \hat{u} \circ s_\ell(m) \quad \text{si } m \in \ell.$$

\hat{U} ainsi défini est bien un homéomorphisme de W_1 dans lui-même, respectant les trajectoires de \hat{Y} et tel que $\hat{U} \equiv \text{Id}$ sur $f^{-1}(0)$; cet homéomorphisme s'étend donc en un homéomorphisme de tout un voisinage de $[0, \alpha] \times \{0\} \subset [0, \alpha] \times \mathbf{R}^+$, par l'identité dans le complémentaire de W_1 . Si \hat{U} désigne encore cet homéomorphisme étendu, \hat{U} se descend via Ω en un homéomorphisme d'un voisinage de $0 \in S$ par : $U \circ \Omega = \Omega \circ \hat{U}$, et il est clair que U préserve chaque trajectoire de Y .

On va maintenant relever U en un homéomorphisme \tilde{U} de $\pi^{-1}S$ dans lui-même de façon que \tilde{U} respecte chaque trajectoire de X (c'est-à-dire que m et $\tilde{U}(m)$ appartiennent à la même trajectoire de X). En fait, cette condition impose la définition de \tilde{U} : si $m \in \pi^{-1}S$, on doit définir $\tilde{U}(m)$ comme l'unique point de $\pi^{-1}(S)$ tel que $\pi \circ \tilde{U}(m) = U \circ \pi(m)$ et que $\tilde{U}(m)$ et m soient sur la même trajectoire de X .

La continuité de \tilde{U} provient de celle de U , de la continuité du flot de X et du fait que $\tilde{U} \equiv \text{Id}$ dans un voisinage de $\pi^{-1}(O_{Y_1})$. Maintenant, l'homéomorphisme $H = H_1 \circ \tilde{U}$ est bien une équivalence cherchée entre X et X' et comme $H|_{\pi^{-1}\gamma}$ se projette sur $h_1 \circ u = h$ qui est la conjugaison de Y avec Y' telle que $h(p) = p'$, l'homéomorphisme H est une conjugaison entre X et X' sur $\pi^{-1}\gamma$. Enfin, les choix de H_1 et de \tilde{U} impliquent que : $H(\theta_1, \theta_2, p) = (\theta_1, \theta_2, h(p)) = (\theta_1, \theta_2, p')$ comme on le désirait. \square

Démonstration de la proposition V.6. — Dans ce cas, S est le premier quadrant de \mathbf{R}^2 . On peut faire ici la même démonstration que dans le cas précédent avec O_{Y_2} à la place de γ . On considère donc les champs \tilde{X} et \tilde{X}' égaux à $\frac{1}{f_1}X$ et $\frac{1}{f'_1}X'$ respectivement que l'on relève dans des champs $\hat{\tilde{X}}$ et $\hat{\tilde{X}'}$ sur $S^1 \times S^1 \times \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+$. La démonstration précédente fournit une conjugaison \hat{H}_1 entre $\hat{\tilde{X}}$ et $\hat{\tilde{X}'}$ dans $S^1 \times S^1 \times \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+ \setminus S^1 \times S^1 \times O_{Y_1}$, continue, au-dessus d'une conjugaison h_1 entre \tilde{Y} et \tilde{Y}' ; comme \hat{H}_1 est de la forme $\hat{H}_1(\theta_1, \theta_2, y) = (\theta_1, \bar{\theta}_2, h_1(y))$, elle se redescend sur $\pi^{-1}S$ en une conjugaison H_1 qui est continue aux points de O_{Y_1} .

Maintenant, on peut arrêter ici la démonstration, car il n'est nul besoin de modifier H_1 pour l'accorder comme plus haut à des conditions initiales. \square

BIBLIOGRAPHIE

- [1] H. BROER, Thesis, Université de Groeningen, 1980.
- [2] F. DUMORTIER, Singularities of vector fields on the plane, Thèse, Vrije Universiteit Brussel, 1973.
- [3] F. DUMORTIER, Singularities of vector fields on the plane, *J. Diff. Eq.*, 23 (1977), 53-106.
- [4] F. DUMORTIER, Singularities of vector fields, *Monografias de Matemática*, IMPA, Rio de Janeiro n° 32, 1978.
- [5] F. DUMORTIER, P. RODRIGUEZ et R. ROUSSARIE, Germs of diffeomorphisms in the plane, *Lect. Notes in Math.*, Springer-Verlag, Vol. 902, 1981.
- [6] A. KELLEY, The stable, center-stable, center, center-unstable and unstable manifolds, publié en appendice C dans : *R. Abraham and J. Robbins Transversal Mappings and Flows*, Benjamin, 1967.
- [7] B.C. LEWIS Jr, On formal power transformations, *Duke Math. J.*, 5 (1939), 794-805.
- [8] J. PALIS et F. TAKENS, Topological equivalence for normally hyperbolic dynamical systems, *Topology*, 16 (1977).
- [9] R. ROUSSARIE, Modèles locaux de champs et de formes, *Astérisque*, Vol. 30, (1975), 1-181.
- [10] F. TAKENS, Partially hyperbolic fixed points, *Topology*, 10 (1971), 133-147.
- [11] F. TAKENS, Normal forms for certain singularities of vector fields, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble 23,2 (1973), 163-195.
- [12] F. TAKENS, Singularities of vector fields, *Publ. Math. IHES*, 43 (1974), 47-100.

Manuscrit reçu le 15 mai 1981.

révisé le 17 mai 1982.

F. DUMORTIER,
Limburgs Universitair
Centrum
Universitair Campus
3610 – Diepenbeek (Belgique).

R. ROUSSARIE,
Université de Dijon
Département de Mathématiques
Campus Universitaire
B.P. 138
21004 Dijon.