

DOMINIQUE CERVEAU

**Densité des feuilles de certaines équations
de Pfaff à 2 variables**

Annales de l'institut Fourier, tome 33, n° 1 (1983), p. 185-194

http://www.numdam.org/item?id=AIF_1983__33_1_185_0

© Annales de l'institut Fourier, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DENSITÉ DES FEUILLES DE CERTAINES ÉQUATIONS DE PFAFF À 2 VARIABLES

par Dominique CERVEAU

Le langage est celui de [7] et [1].

1. Formes homogènes génériques à deux variables.

Soit $\omega_\nu = a_\nu dx + b_\nu dy$ une forme de Pfaff homogène de degré ν à deux variables x et y , i.e. a_ν et b_ν sont des polynômes homogènes de degré ν . Lorsque le cône tangent $P_{\nu+1}$ de ω_ν : $P_{\nu+1} = x a_\nu + y b_\nu$ est non identiquement nul, ce qui est le cas général on dit que ω_ν est non dicritique. A ce moment [1] ω_ν s'écrit :

$$\omega_\nu = P_1^{n_1} \dots P_p^{n_p} \left(\sum \lambda_i \frac{dP_i}{P_i} + d \left(\frac{\alpha}{P_1^{n_1-1} \dots P_p^{n_p-1}} \right) \right)$$

où $P_{\nu+1} = P_1^{n_1} \dots P_p^{n_p}$ est la décomposition en facteurs irréductibles de $P_{\nu+1}$, $P_i(x, y) = \epsilon_i(y - t_i x)$, $t_i, \epsilon_i \in \mathbb{C}$, α est un polynôme homogène de même degré que $P_1^{n_1-1} \dots P_p^{n_p-1}$ et les λ_i sont des nombres complexes obtenus par intégration de la 1-forme fermée rationnelle $\frac{\omega_\nu}{P_{\nu+1}}$ sur de petits cycles autour des $P_i = 0$; de par l'identité d'Euler $\sum \lambda_i n_i$ vaut 1.

DEFINITION. — Nous dirons que ω_ν , $\nu \geq 2$ est générique si les conditions suivantes sont réalisées :

- a) $P_{\nu+1}$ est réduit (notamment $\alpha \equiv 0$)
- b) les λ_i ne sont pas réels négatifs

c) deux des λ_i , disons λ_1 et λ_2 ont la propriété suivante : ils sont non réels et le groupe additif engendré par $(1, \lambda_1, \lambda_2)$ dans \mathbb{C} est dense.

Rappelons que le théorème de Kronecker dit que si, $\lambda_j = a_j + ib_j$, $j = 1, 2$, la densité du groupe $\mathbb{Z}\{1, \lambda_1, \lambda_2\}$ est assurée dès que b_1, b_2 et $\det(\lambda_1, \lambda_2) = b_1 b_2 - b_2 b_1$ sont \mathbb{Z} indépendants.

PROPOSITION 1.1. — Soit $\omega = \omega_\nu + \dots$ un germe de forme de Pfaff holomorphe à l'origine de \mathbb{C}^2 , ω_ν générique. Alors ω possède $\nu + 1$ séparatrices analytiques lisses transverses deux à deux.

On se propose d'établir les résultats suivants :

THEOREME A. — Soit $\omega = \omega_\nu + \dots$ un germe de forme de Pfaff holomorphe à l'origine de \mathbb{C}^2 , ω_ν générique, représentée sur un voisinage V de l'origine de \mathbb{C}^2 . Soit \mathcal{L} une feuille du feuilletage singulier \mathfrak{F}_ω induit par ω sur V ; quitte à diminuer V on a la propriété suivante :

si \mathcal{L} n'est pas l'une des $\nu + 1$ séparatrices de ω , \mathcal{L} est dense.

Remarques. —

1) Nous donnons un énoncé dans lequel ν est supérieur ou égal à deux. Lorsque ν vaut un, ω possède un 1-jet ω_1 non nul et on connaît bien, sauf dans quelques cas particuliers, la topologie des feuilles de ω [2, 3].

2) Il est possible de généraliser le théorème aux formes intégrables ω à plus de 2 variables, mais les conditions qu'il faut mettre sur le 1^{er} jet non nul ω_ν de ω impliquent notamment que ω_ν est apprivoisée [1] et à ce moment ω possède une intégrale première multiforme du type $f_1^{\lambda_1} \dots f_p^{\lambda_p}$.

THEOREME B. — Soit $\omega = \omega_0 + \omega_1 + \dots + \omega_\nu$ une forme algébrique (polynomiale) à deux variables, ω_i homogènes de degré i . Si ω_ν est générique il y a deux possibilités pour une feuille \mathcal{L} du feuilletage singulier (global) défini par ω sur \mathbb{C}^2 .

(i) \mathcal{L} est algébrique (i.e. $\overline{\mathcal{L}}$ est une courbe algébrique)

(ii) \mathcal{L} est dense.

Ce résultat aussi se laisse étendre aux dimensions supérieures à deux.

Rappelons qu'en général la situation (i) est évitée [6] et que dans [9] B. Mjuller exhibe un ouvert (non dense a priori) de formes algébriques à feuilles denses. On trouvera dans [5] un énoncé proche de B obtenu de façon sensiblement différente.

2. Groupes de germes de difféomorphismes à une variable complexe.

On définit l'orbite d'un point suivant un groupe de germes de difféomorphismes et on donne une condition pour qu'une telle orbite soit dense.

Soit \mathcal{G} un sous-groupe des germes de difféomorphismes à une variable complexe laissant fixe l'origine. Dans toute la suite on ne considérera que des sous-groupes finement engendrés par f_1, \dots, f_p .

\mathcal{G} se représente sur un disque $D(0, \rho) = \{z, |z| < \rho\}$ s'il existe des générateurs f_1, \dots, f_p de \mathcal{G} tel que les f_i et f_i^{-1} possèdent un représentant sur $D(0, \rho)$. Notons $D = D(0, \rho)$; soit z_0 un point de $D(0, \rho)$; une \mathcal{G} -D chaîne $[z_0, \dots, z_N]$ d'extrémités z_0 et z_N est une suite de points $z_0, \dots, z_i, z_{i+1}, \dots, z_N$ tous dans D définis comme suit :

$$z_{i+1} = h(z_i) \quad (1)$$

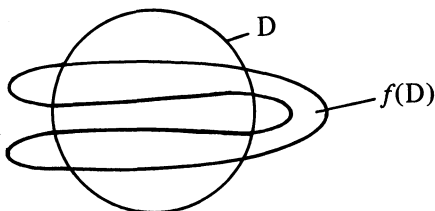
où h est l'un des difféomorphismes $f_1, \dots, f_p, f_1^{-1}, \dots, f_p^{-1}$; une \mathcal{G} -D chaîne $[z_0, \dots, z_N]$ est positive pour f_k si dans la formule (1) h ne prend pas la valeur f_k^{-1} .

La \mathcal{G} -D orbite (positive pour f_k) d'un point z_0 est l'ensemble des points z extrémités des \mathcal{G} -D chaînes partant de z_0 (positives pour f_k).

Remarques. —

1) Si z appartient à la \mathcal{G} -D orbite de z_0 , z_0 et z sont en général extrémités de plusieurs chaînes $[z_0, \dots, z_N]$.

2) La \mathcal{G} -D orbite d'un point z_0 n'est pas l'orbite au sens usuel i.e. ce n'est pas : $\{z / \exists f \in \mathcal{G}; f(z_0) = z\}$ comme on peut le voir en considérant un difféomorphisme du type fer à cheval :



Bien qu'il s'agisse d'un exercice tout à fait élémentaire, l'idée du résultat suivant sera fondamentale dans la suite ; on se permettra donc d'en donner la preuve :

LEMME 1. — Soient λ et μ deux nombres complexes, $|\lambda| < 1$, $|\mu| < 1$ et f et g les difféomorphismes linéaires du plan :

$$f(z) = \lambda \cdot z$$

$$g(z) = \mu \cdot z.$$

On suppose λ et μ assez généraux pour que $E = \{\lambda^m \mu^n, (m, n) \in \mathbb{Z}^2\}$ soit dense dans \mathbb{C} . Soit $D = D(0, \rho)$ un disque centré à l'origine et \mathcal{G} le groupe engendré par f/D et g/D ; si z_0 est un point de D la \mathcal{G} - D orbite positive pour g de z_0 est dense dans D .

Preuve. — On commence par montrer que

$$E_g^+ = \{\lambda^m \mu^n, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$$

est dense dans \mathbb{C} . Si ce n'était pas le cas puisque E est dense, il existerait un disque D centré en un point $\lambda^{m_0} \mu^{-n_0}$, $m_0 \in \mathbb{Z}$, $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\Delta \cap E_g^+ = \emptyset$; $\lambda^{-m_0} \mu^{+n_0} \cdot \Delta = \Delta'$ est un disque centré en 1 qui ne rencontre pas l'ensemble $E_g^{+n_0} = \{\lambda^m \mu^n, m \in \mathbb{Z}, n > n_0\}$. Nous disons que cela est impossible ; il y a en effet aussi près que l'on veut de 1 des éléments du type $\sigma = \lambda^m \mu^{-n}$ avec n très grand. Mais $\frac{1}{\sigma} = \lambda^{-m} \mu^n$ est proche de 1 donc dans $E_g^{+n_0}$.

Pour terminer la démonstration du lemme on doit s'assurer du fait suivant : si z_0 et $\lambda^m \mu^n \cdot z_0$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$ appartiennent à D alors z_0 et $\lambda^m \mu^n \cdot z_0$ sont les extrémités d'une \mathcal{G} - D chaîne positive pour g .

Il y a deux cas suivant le signe de m ; si m est négatif la suite $[z_0, \mu z_0, \dots, \mu^n z_0 ; \lambda^{-1} \mu^n z_0, \dots, \lambda^m \mu^n z_0]$ est visiblement une \mathcal{G} - D chaîne positive pour g (alors que $[z_0, \lambda^{-1} z_0, \dots, \lambda^m z_0, \dots, \lambda^m \mu^n z_0]$ peut ne pas l'être). Si m est positif on a le choix par exemple $[z_0, \mu z_0, \dots, \mu^n z_0 ; \lambda \mu^n z_0, \dots, \lambda^m \mu^n z_0]$.

Ceci étant dit, voici un lemme bien connu que l'on pourra trouver dans les traités d'analyse un peu anciens (par ex. [4]).

LEMME 2. — Soit $g(z)$ une fonction holomorphe définie sur un disque $D = D(0, \rho)$ telle que

- a) $g(z) = \mu z + z^2(\dots)$, avec $0 < |\mu| < 1$
- b) $g(D) \subset D$.

On note g^n l'itéré n^{ième}, $n \geq 0$, de g (qui est parfaitement défini sur le disque D). Le lemme dit que la suite $\frac{g^n(z)}{\mu^n}$ converge uniformément dans le disque D vers une fonction holomorphe $\varphi(z)$ (fonction de Koenigs) $\varphi(z) = z + \dots$ solution de l'équation de linéarisation de Schröder : $\varphi(g(z)) = \mu\varphi(z)$.

Remarque. — En fait l'inégalité $0 < |\mu| < 1$ est automatique d'après b).

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer un théorème de densité pour les \mathcal{G} -D orbites.

THEOREME C. — Soit \mathcal{G} un groupe de germes de difféomorphismes à une variable fixant 0 engendré par f_1, \dots, f_p et représenté sur un disque $D = D(0, \rho)$. On suppose qu'il existe dans \mathcal{G} deux éléments f et g représentables sur D :

$$f(z) = \lambda z + \dots$$

$$g(z) = \mu z + \dots$$

où λ et μ satisfont les hypothèses du lemme 1. Il existe un voisinage ouvert V de 0 ayant la propriété que tout élément z_0 de V autre que 0 a sa \mathcal{G} -V orbite dense dans V .

Démonstration. — Nous allons montrer en fait que la \mathcal{G}_0 -D orbite positive suivant \mathcal{G}_0 est dense dans un petit disque, \mathcal{G}_0 désignant simplement le groupe engendré par f et g ; puisque λ et μ sont en module plus petits que un, on pourra supposer quitte à diminuer D et à effectuer un changement de coordonnée holomorphe que :

- 1) $f(z) = \lambda z \quad |\lambda| < 1$
- 2) $g(D) \subset D$

3) la fonction de Koenig φ associée à g est définie sur D et ne s'annule qu'en 0.

Soit $z_0 \neq 0$ un point de D ; pour tout entier $m \in \mathbf{Z}$ et tout entier $n \in \mathbf{N}$ l'expression $\lambda^m g^n(z_0) = f^m(g^n(z_0))$ a un sens dans le plan complexe, ceci d'après 2). Nous allons montrer dans un premier temps que l'ensemble $F = \{\lambda^m g^n(z_0), m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}\}$ est dense dans \mathbf{C} . Soit z un point du plan complexe; d'après le lemme 1 il existe une suite $(m_i, n_i) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}$ telle que $\lambda^{m_i} \mu^{n_i}$ tende vers $\frac{z}{\varphi(z_0)}$. Ecrivons :

$$\lambda^{m_i} g^{n_i}(z_0) = \lambda^{m_i} \mu^{n_i} \cdot \frac{g^{n_i}(z_0)}{\mu^{n_i}}.$$

D'après le lemme 2 $\frac{g^{n_i}(z_0)}{\mu^{n_i}}$ tend vers $\varphi(z_0)$, et $\lambda^{m_i} g^{n_i}(z_0)$ tend bien vers z . Il nous faut maintenant un résultat plus précis : si z_0 est dans D et si $\lambda^m g^n(z_0)$, $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$ est aussi dans D , alors il existe une g_0 -D chaîne positive pour g joignant z_0 à $\lambda^m g^n(z_0)$. Examinons ici encore deux cas suivant le signe de m .

1^{er} cas : m est positif; d'après 2) chaque $g^i(z_0)$, $i \geq 0$, est dans D de sorte que $z_0, g(z_0), \dots, g^n(z_0)$; $\lambda g^n(z_0), \dots, \lambda^m g^n(z_0)$ est bien une g_0 -D chaîne.

2^e cas : n est négatif; la chaîne :

$$z_0, g(z_0), \dots, g^n(z_0); \frac{1}{\lambda} g^n(z_0), \dots, \lambda^m g^n(z_0)$$

reste évidemment dans D et plus précisément dans le disque $D(0, (\lambda^m g^n(z_0)))$. q.e.d.

3. Démonstration du théorème A.

On procède par éclatement. Soit

$$E: \tilde{\mathbf{C}}^2 = \mathbf{C}^2 - \{0\} \cup \mathbf{PC}(1) \longrightarrow \mathbf{C}^2$$

l'éclatement de \mathbf{C}^2 : $E(x, t) = (x, tx)$ dans la carte $(x, t) = \left(x, \frac{y}{x}\right)$; le feuilletage \mathfrak{T}_ω éclaté de \mathfrak{T}_ω est *désingularisé* au bout de un éclatement : il possède $\nu + 1$ singularités *réduites* $t_1, \dots, t_{\nu+1}$ sur le diviseur $\mathbf{PC}(1)$ qui, privé de ces points, en est une feuille notée

\mathcal{L}_ω . Les conditions $\lambda_i \notin \mathbf{R}$ font que au voisinage de chaque point t_j le feuilletage a la particularité suivante : pour un voisinage U_j défini par les inégalités :

$$|x| \leq \epsilon$$

$$|t - t_j| \leq \epsilon, \epsilon \text{ assez petit}$$

toute feuille de $\tilde{\mathcal{F}}_\omega|_{U_j}$ autre que la séparatrice partant de t_j transversalement à $\mathbf{PC}(1)$, t_j coupe le cylindre $|t - t_j| = \epsilon$ [8]. Soient U'_j des voisinages de t_j tels que $\bar{U}'_j \subset U_j$; si les U'_j sont assez petits, pour un voisinage \tilde{U} de $\mathbf{PC}(1)$ convenable, le feuilletage $\tilde{\mathcal{F}}_\omega|_{\tilde{U} - \bigcup_j U'_j}$ est sans singularités et transverse à la fibration canonique de $\tilde{\mathbf{C}}^2$ sur $\mathbf{PC}(1)$. La feuille \mathcal{L}_ω possède alors une holonomie H , représentée sur un facteur transverse $T \cong \mathbf{C}$, 0 à \mathcal{L}_ω , qui a plus de deux générateurs puisque $\nu \geq 2$; la propriété c) de λ_1 et λ_2 fait que H contient deux éléments f et g comme dans le théorème C. De la construction des générateurs h d'holonomie il résulte que pour un point x dans un petit voisinage D de 0 dans $T \cong \mathbf{C}$, 0 les points x et $h(x)$ appartiennent à la même feuille $\tilde{\mathcal{L}}_x$ de $\tilde{\mathcal{F}}_\omega|_{\tilde{U} - \bigcup_j U'_j}$.

Du théorème C, on déduit la densité de $\tilde{\mathcal{L}}_x$ dans $\tilde{U} - \bigcup_j U'_j$, quitte à restreindre un peu \tilde{U} . On conclut en utilisant le fait que chaque feuille de $\tilde{\mathcal{F}}_\omega|_{U_j}$, hormis la séparatrice analytique, coupe $|t - t_j| = \epsilon$. q.e.d.

4. Démonstration du théorème B.

L'équation de Pfaff ω induit un feuilletage singulier $\bar{\mathcal{F}}_\omega$ de l'espace projectif $\mathbf{PC}(2) = \mathbf{C}^2 \cup \mathbf{PC}(1)$. Soit $S(\omega)$ les singularités de ce feuilletage sur $\mathbf{PC}(2)$. Parce que ω_ν est non dicritique l'hyperplan à l'infini $H_\infty = \mathbf{PC}(1)$ est une feuille de $\bar{\mathcal{F}}_\omega$ et les singularités m_j de $\bar{\mathcal{F}}_\omega$ sur H_∞ sont celles de ω_ν et l'on est dans une situation analogue à la précédente :

Soient \mathcal{L}_j les séparatrices (autres que H_∞) de ω aux points m_j , et \mathcal{L} une feuille différente des \mathcal{L}_j passant près de H_∞ ; alors \mathcal{L} est dense au voisinage de l'infini. Invoquons maintenant un résultat déduit de [6] (p. 245 proposition 6.1).

PROPOSITION. — Soit ω une équation de Pfaff algébrique sur \mathbf{C}^2 alors toute feuille de ω va à l'infini.

Soit \mathcal{L} maintenant une feuille de ω dans $\mathbf{PC}(2)$; si \mathcal{L} est fermée dans $\mathbf{PC}(2) - S(\omega)$ il suit des théorèmes de Chow et Remert Stein que \mathcal{L} est algébrique et sa restriction à \mathbf{C}^2 reste algébrique. Supposons donc \mathcal{L} non fermée et soit x un point de $\mathbf{C}^2 - S(\omega)$ n'appartenant pas à \mathcal{L} ; soit \mathcal{L}_x la feuille de ω passant par x . Supposons d'abord que \mathcal{L} ne soit pas une séparatrice en un point singulier. Puisque \mathcal{L}_x va à l'infini \mathcal{L} adhère à \mathcal{L}_x à l'infini et donc adhère à \mathcal{L}_x toute entière et donc à x . Considérons le cas des séparatrices \mathcal{L}_j (il est possible que $\mathcal{L}_i = \mathcal{L}_j$ pour $i \neq j$ a priori : c'est le cas des « connexions de selles »), et réindexons de la façon suivante les \mathcal{L}_j de sorte que : $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_p$ soient distinctes non fermées, $\mathcal{L}_{p+1}, \dots, \mathcal{L}_{p+q+1}$ soient distinctes algébriques, avec $\mathcal{L}_{p+1} = H_\infty$ et la possibilité p et $q = 0$.

Soit y un point de $\overline{\mathcal{L}_1} - \mathcal{L}_1 - S(\omega)$; si \mathcal{L}_y n'est pas dans la liste des \mathcal{L}_i , \mathcal{L}_y est dense d'après ce qui précède et donc \mathcal{L}_1 aussi. Le cas défavorable est donc celui où $\overline{\mathcal{L}_1} - \mathcal{L}_1 \subset \bigcup_{i>1} \mathcal{L}_i$ (fig. 1)



Fig. 1

Si $p = 0$, il n'y a rien à faire.

1^{er} cas : $p + q \geq 2$. $\overline{\mathcal{L}_1} - \mathcal{L}_1$ ne peut être un nombre fini de points (des singularités) sinon \mathcal{L}_1 serait fermée dans $\mathbf{PC}(2) - S(\omega)$. \mathcal{L}_1 adhère donc soit à l'hyperplan H_∞ et l'on saura encore conclure, ou bien adhère à une autre séparatrice $\mathcal{L}_j \neq \mathcal{L}_1$. Mais la topologie locale du feuilletage au voisinage de la singularité $\mathcal{L}_j \cap H_\infty$ fait que \mathcal{L}_1 adhère encore à H_∞ . Reste le :

2^e cas : $p + q \leq 1$. Comme nous l'avons déjà dit, si $p = 0$ toutes les séparatrices sont fermées et il n'y a rien à démontrer. Donc $p = 1$ et $q = 0$ i.e. une seule feuille \mathcal{L}_1 reconnecte toutes les séparatrices en m_j (autres que H_∞ , m_j) (fig. 2)

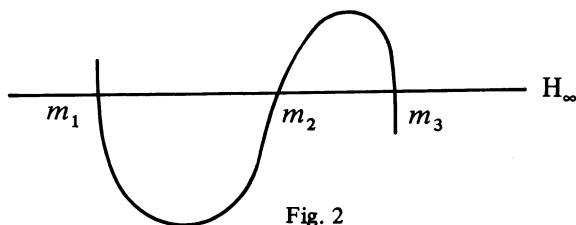


Fig. 2

On a $\overline{\mathcal{L}}_1 - \mathcal{L}_1 \subset H_\infty$ et, ou bien $\overline{\mathcal{L}}_1 - \mathcal{L}_1$ est réduit aux points singuliers et \mathcal{L}_1 est algébrique, ou bien on saura encore conclure : \mathcal{L}_1 sera dense (fig. 3)

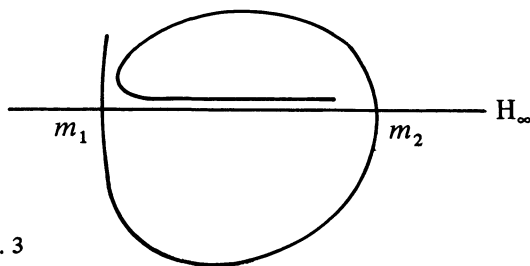


Fig. 3

q.e.d.

Remarque. — De ce qui précède on notera que si une équation de Pfaff $\omega_0 + \dots + \omega_p$ sur \mathbf{C}^2 avec ω_p *générique* possède une séparatrice analytique (dans \mathbf{C}^2) cette séparatrice est algébrique.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] D. CERVEAU, Thèse.
D. CERVEAU et J.F. MATTEI, Singularités des formes intégrables (à paraître).
- [2] C. CAMACHO, N.H. KUIPER et J. PALIS, The topology of holomorphic flows with singularity, *Publ. Math. IHES*, 48 (1978), 5-38.
- [3] M. CHAPERON, On the local classification of holomorphic vector fields, Preprint Ecole Polytechnique.
- [4] J. FAVARD, Cours d'analyse de l'Ecole Polytechnique — tome II, *Cahiers Scientifiques*, Fasc. XXVI, Gauthier-Villars, 1960.

- [5] M.O. HUDAJ-VERENOV, *Math. USSR Sb.*, 56,3 (1962), 301-308 (en Russe).
- [6] J.P. JOUANOLOU, Equations, de Pfaff algébriques, *Lect. Notes in Math.*, n° 708, Springer-Verlag.
- [7] J.F. MATTEI et R. MOUSSU, Holonomie et intégrales premières, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.*, t. 13 (1980), 469-523.
- [8] R. MOUSSU, lettre de Moussu à Martinet.
- [9] B. MJULLER, On the density of solutions of an equation in \mathbf{CP}^2 , *Mat. Sbornik*, 98 (140) (1975), n° 3.

Manuscrit reçu le 4 mai 1982.

Dominique CERVEAU,
Laboratoire de Topologie (ERA n° 945)
Faculté des Sciences Mirande
Université de Dijon
B.P. 138
21004 Dijon Cedex.