

# ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

YVES FÉLIX

STEPHEN HALPERIN

JEAN-CLAUDE THOMAS

## **Sur certaines algèbres de Lie de dérivations**

*Annales de l'institut Fourier*, tome 32, n° 4 (1982), p. 143-150

[http://www.numdam.org/item?id=AIF\\_1982\\_\\_32\\_4\\_143\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1982__32_4_143_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## SUR CERTAINES ALGÈBRES DE LIE DE DÉRIVATIONS

par Y. FELIX <sup>(1)</sup>, S. HALPERIN <sup>(2)</sup> et J.-C. THOMAS <sup>(3)</sup>

### 1. Introduction.

Fixons une fois pour toutes un corps  $k$  de caractéristique zéro. Dans [5] Quillen introduit deux foncteurs adjoints

$$\text{LDG} \xrightleftharpoons[\mathcal{L}]{\mathcal{C}_*} \text{CDGC}$$

entre la catégorie des algèbres de Lie différentielles graduées (l.d.g) connexes et la catégorie des coalgèbres différentielles graduées cocommutatives (c.d.g.c) 1-connexes. Les foncteurs  $\mathcal{C}_*$  et  $\mathcal{L}$  passent aux catégories homotopiques associées, où ils deviennent des équivalences. Pour plus de détails et les applications topologiques voir aussi Baues et Lemaire [2].

Soit maintenant  $(A, d_A)$  une algèbre différentielle graduée commutative (a.d.g.c.) augmentée dont la cohomologie  $H(A)$  est 1-connexe et de type fini. Le modèle minimal (au sens de Sullivan) de  $(A, d_A)$  est alors une a.d.g.c. 1-connexe et de type fini, en dualisant et appliquant le foncteur  $\mathcal{L}$  nous obtenons une l.d.g.  $(L(A), \partial)$ . Dire que  $\mathcal{C}_*$  et  $\mathcal{L}$  induisent des équivalences inverses, revient alors à dire que  $(A, d_A)$  et l'a.d.g.c.  $\mathcal{C}^*(L(A), \partial)$  duale de  $\mathcal{C}_*(L(A), \partial)$  ont même modèle minimal.

Le but principal de cette note est de donner une méthode tout à fait différente de construction, à partir d'une a.d.g.c. augmentée  $(A, d_A)$  donnée, d'une l.d.g.  $(L, \partial)$  telle que  $\mathcal{C}^*(L, \partial)$  ait même modèle que

<sup>(1)</sup> Chercheur qualifié au FNRS.

<sup>(2)</sup> Pendant le cours de cette recherche le deuxième auteur a bénéficié de l'hospitalité de Sondersforschungsbereich (40) Mathematik à l'Université de Bonn et de celle de l'Université de Lille I.

<sup>(3)</sup> E.R.A. au CNRS, 07590.

$(A, d_A)$ . Nous supposons seulement que le modèle minimal de  $(A, d_A)$  est de type fini.

L'algèbre de Lie  $(L, \partial)$  ne sera ni libre ni (malheureusement) souvent de type fini. Par contre elle paraîtra comme une algèbre de Lie de dérivations, très analogue à celle donnée par Sullivan [8], [7], [9] pour représenter la base de la fibration universelle de fibre donnée.

## 2. Modèle de Sullivan.

Nous noterons  $\Lambda X$  l'a.g.c. libre engendrée par un espace gradué  $X$ ; elle est munie d'une deuxième graduation  $\Lambda X = \sum_{p \geq 0} \Lambda^p X$  où  $\Lambda^p X$  note le sous-espace engendré par les éléments  $x_1 \wedge \cdots \wedge x_p$ ,  $x_i \in X$ . Elle sera, en particulier, toujours munie de l'augmentation  $\varepsilon_{\Lambda X}$  annulant  $\Lambda^+ X$ .

Les espaces gradués supérieurement (resp. inférieurement) seront identifiés via la convention  $X^p = X_{-p}$ . Si  $X = \sum_p X^p$ , son espace dual (gradué) sera noté

$$\text{Hom}(X; \mathbf{k}) = \sum_p \text{Hom}_p(X; \mathbf{k}) = \sum_p \text{Hom}(X^p; \mathbf{k}).$$

Toute a.d.g.c.  $(A, d_A)$  sera graduée  $A = \sum_{p \geq 0} A^p$  avec  $d_A$  de degré 1 et augmentée, les morphismes conservant les augmentations. Une a.g.d.c. est *connexe* si  $A^0 = \mathbf{k}$ , et *c-connexe* si  $H^0(A) = \mathbf{k}$ . Un morphisme  $\varphi : A \rightarrow A'$  d'a.d.g.c. est dit quasi-isomorphisme si  $\varphi^* : H(A) \xrightarrow{\sim} H(A')$  est un isomorphisme, dans ce cas on écrit  $\varphi : A \xrightarrow{\sim} A'$ .

Soit  $(B \otimes \Lambda X, d)$  une a.d.g.c. *c-connexe*, contenant  $(B, d_B)$  comme sous a.d.g.c., et augmentée par  $\varepsilon_B \otimes \varepsilon_{\Lambda X}$ . Elle sera appelée KS extension de  $B$  si  $X$  admet une base homogène et bien ordonnée  $\{x_\alpha\}$  avec  $dx_\alpha \in B \otimes \Lambda X_{<\alpha}$ ; une telle base s'appelle KS base. L'a.d.g.c.  $(\Lambda X, \bar{d}) = (B \otimes \Lambda X) \otimes_B \mathbf{k}$  s'appelle la *fibre* de l'extension; si  $\text{Im } \bar{d} \subset \Lambda^{\geq 2} X$  l'extension est *minimale*.

Soit maintenant  $\varphi : B \rightarrow C$  un morphisme d'a.d.g.c. *c-connexes*. Il existe alors [8], [4; Chap. 6] une KS extension minimale  $B \otimes \Lambda X$  de  $B$  et un quasi-isomorphisme  $\eta : B \otimes \Lambda X \xrightarrow{\sim} C$  qui étend  $\varphi$ . On appelle  $\eta$  le

*modèle minimal* de  $\varphi$ . L'extension  $B \otimes \Lambda X$  est unique à isomorphisme près [8], [4; Chap. 6].

Fixons une a.d.g.c.  $(B, d_B)$   $c$ -connexe. Le KS modèle minimal de l'inclusion  $\mathbf{k} \rightarrow B$  est par définition le *modèle minimal*,  $m : (\Lambda X, d) \simeq (B, d_B)$  de  $(B, d_B)$ . Puisque  $B$  est  $c$ -connexe,  $\Lambda X$  est connexe.

D'autre part, les modèles de l'augmentation  $\varepsilon_B : B \rightarrow \mathbf{k}$ , sont précisément les KS extensions acycliques de  $B$ ; parmi celles-ci les minimales sont toutes isomorphes.

Soit enfin  $\Lambda X \otimes B$  le produit tensoriel des a.d.g.c.  $\Lambda X$  et  $B$ , et

$$(2.1) \quad m_2 : (\Lambda X \otimes B \otimes \Lambda \bar{X}, D) \simeq (B, d_B)$$

le modèle minimal de  $m \otimes \text{id} : \Lambda X \otimes B \rightarrow B$ . Il résulte facilement de [4; chap. 7] que les KS extensions minimales

$$(B \otimes \Lambda \bar{X}, d') = (\Lambda X \otimes B \otimes \Lambda \bar{X}) \otimes_{\Lambda X} \mathbf{k}$$

et

$$(\Lambda X \otimes \Lambda \bar{X}, d'') = (\Lambda X \otimes B \otimes \Lambda \bar{X}) \otimes_B \mathbf{k}$$

sont acycliques; la première est donc le modèle minimal de  $\varepsilon_B$ .

L'acyclicité de  $\Lambda X \otimes \Lambda \bar{X}$  entraîne [4; chap. 2] l'existence d'un isomorphisme  $X \cong \bar{X}$  de degré  $-1$  (noté  $x \mapsto \bar{x}$ ) tel que

$$(2.2) \quad d'\bar{x} - x \in \Lambda^{\geq 2}(X \oplus \bar{X}).$$

De ceci, nous déduisons [4] que la différentielle dans la fibre  $\Lambda \bar{X}$  est nulle, d'où

$$(2.3) \quad \text{Im } d' \subset \ker \varepsilon_B \otimes \Lambda \bar{X}.$$

### 3. L'algèbre de Lie.

Notons  $\text{Der}_B(B \otimes \Lambda \bar{X})_p$  l'espace des dérivations  $\theta$  de degré  $-p$  dans l'algèbre  $B \otimes \Lambda \bar{X}$ , telles que  $\theta(B) = 0$ . Il s'identifie (par restriction à  $\bar{X}$ ) à l'espace  $\text{Hom}_p(\bar{X}, B \otimes \Lambda \bar{X})$ . La somme directe

$\text{Der}_B(B \otimes \Lambda \bar{X}) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \text{Der}_B(B \otimes \Lambda \bar{X})_p$ , munie du crochet

$$[\theta, \theta'] = \theta\theta' - (-1)^{\deg \theta \deg \theta'} \theta'\theta$$

et de la différentielle  $\partial\theta = [d', \theta]$  est une l.d.g.  $\mathbb{Z}$ -graduée.

Si  $\varepsilon$  note l'augmentation dans  $B \otimes \Lambda \bar{X}$ , une application linéaire de degré zéro,

$$\omega : \text{Der}_B(B \otimes \Lambda \bar{X}) \rightarrow \text{Hom}(\bar{X}; \mathbf{k})$$

est définie par  $\omega\theta(\bar{x}) = \varepsilon\theta(\bar{x})$ . Les éléments de  $\text{Der}_B(B \otimes \Lambda \bar{X})$  conservant  $\ker \varepsilon_B \otimes \Lambda \bar{X}$ , il résulte de (2.3) que  $\omega \circ \partial = 0$ . Un raisonnement par récurrence sur une KS base de  $\bar{X}$  montre, alors, à cause de l'acyclicité de  $B \otimes \Lambda \bar{X}$ , que

$$(3.1) \quad 0 \rightarrow \text{Im } \partial \rightarrow \text{Ker } \partial \xrightarrow{\omega} \text{Hom}(\bar{X}; \mathbf{k}) \rightarrow 0$$

est une suite exacte courte.

Soit maintenant  $\left( L = \sum_{p \geq 0} L_p, \partial \right)$  la l.d.g. définie par

$$L_p = \begin{cases} \text{Der}_B(B \otimes \Lambda \bar{X})_p, & p > 0 \\ (\ker \partial)_0 & p = 0. \end{cases}$$

THÉORÈME. — Si  $\dim X^p < \infty$  (tout  $p$ ) il existe un quasi-isomorphisme

$$\phi : (\mathcal{C}^*(L), \delta) \simeq (\Lambda X, d).$$

En particulier  $(L, \partial)$  est un « modèle de Quillen » non libre de  $(B, d_B)$ .

Rappelons d'abord la définition de  $(\mathcal{C}^*(L), \delta)$ . Soit  $(sL)_p = L_{p-1}$ ; et posons

$$C^r(L) = \sum_{p+q=r} C^{p,q}(L), \quad \text{où} \quad C^{p,q}(L) \subset \text{Hom}^{p+q}(\otimes^p sL; \mathbf{k})$$

est le sous-espace de fonctions symétriques (au sens gradué). Le produit de  $f \in C^{p,q}$  et  $g \in C^{p',q'}$  est défini par :

$$(f \wedge g)(s\theta_1, \dots, s\theta_{p+p'}) = \frac{1}{p! p'!} \sum_{\sigma} \varepsilon_{\sigma(1)}, \dots, s\theta_{\sigma(p)} g(s\theta_{\sigma(p+1)} \dots s\theta_{\sigma(p+p')}),$$

où  $\sigma$  parcourt toutes les permutations, et  $\varepsilon_\sigma$  est le signe de la permutation

$$(f, g, s\theta_1, \dots, s\theta_{p+p'}) \mapsto (f, s\theta_{\sigma(1)}, \dots, s\theta_{\sigma(p)}, g, s\theta_{\sigma(p+1)}, \dots, s\theta_{\sigma(p+p')}).$$

La différentielle  $\delta$  est la somme  $\delta_1 + \delta_2$  des dérivations homogènes de bidegrés (0,1) et (1,0), données par les formules

$$\begin{aligned} (\delta_1 f)(s\theta_1, \dots, s\theta_p) \\ = (-1)^{|f|+1} \sum_{i=1}^p (-1)^{|s\theta_1|+\dots+|s\theta_{i-1}|} f(s\theta_1, \dots, s\partial\theta_i \dots s\theta_p) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (\delta_2 f)(s\theta_0, \dots, s\theta_p) \\ = (-1)^{|f|+1} \sum_{i < j} \varepsilon_{ij} (-1)^{|s\theta_i|} f(s[\theta_i, \theta_j], s\theta_0 \dots \hat{s\theta}_i \dots \hat{s\theta}_j \dots s\theta_p). \end{aligned}$$

Ici  $\varepsilon_{ij}$  est le signe de la permutation

$$(s\theta_0, \dots, s\theta_p) \rightarrow (s\theta_i, s\theta_j, s\theta_0 \dots \hat{s\theta}_i \dots \hat{s\theta}_j \dots s\theta_p)$$

et  $||$  note le degré total.

#### 4. Démonstration du théorème.

Soit  $w_v$  une base homogène de  $\Lambda^+ X$ ; puisque  $X$  est de type fini l'ensemble des  $w_v$  d'un degré fixé est fini.

La différentielle  $D$  dans (2.1) définit des éléments  $\theta_v \in L$  à l'aide de la formule

$$(4.1) \quad D\Omega = 1 \otimes d'\Omega + \sum_v w_v \otimes \theta_v \Omega, \quad \Omega \in B \otimes \Lambda \bar{X}.$$

De la relation  $D^2 = 0$ , on tire

$$\begin{aligned} (4.2) \quad \sum_v dw_v \otimes \theta_v + \sum_v (-1)^{|w_v|} w_v \otimes \partial\theta_v \\ + \sum_{v,\mu} (-1)^{|w_v|} w_v \otimes w_\mu \otimes \frac{1}{2} [\theta_\mu, \theta_v] = 0. \end{aligned}$$

Posons maintenant, si  $f \in C^{p,q}$ ,

$$\varphi f = (-1)^{\frac{|f|}{p!}} \sum_{v_1, \dots, v_p} f(s\theta_{v_1}, \dots, s\theta_{v_p}) w_{v_p} \Lambda \dots \Lambda w_{v_1}.$$

Pour tout  $f$  cette somme est finie, et un petit calcul utilisant (4.2) montre que  $\varphi : (\mathcal{L}^*(L), \delta) \rightarrow (\Lambda X, d)$  est un morphisme d'a.d.g.c. Pour montrer que  $\varphi$  est un quasi isomorphisme, filtrons  $\mathcal{C}^*(L)$  par les idéaux  $\mathcal{C}^{\geq p,*}$ , et  $\Lambda X$  par les idéaux  $\Lambda^{\geq p} X$ . Au niveau  $E_1$  des suites spectrales le morphisme  $\varphi$  induit  $\varphi_1 : H(\mathcal{C}^*(L), \delta_1) \rightarrow \Lambda X$ .

La formule (3.1) nous donne un isomorphisme  $\omega_* : H(L, \partial) \xrightarrow{\cong} \bar{X}; H(L)$  est alors de type fini, et il en résulte que l'inclusion  $H(\text{Hom}(sL; k), \delta_1) \rightarrow H(\mathcal{C}^*(L), \delta_1)$  s'étend en un isomorphisme

$$\alpha \Omega \Lambda^{\theta} \Phi^{\theta} \rho \xi \Phi sL; k, \delta_1) \xrightarrow{\cong} H(\mathcal{C}^*(L), \delta_1).$$

Un petit calcul utilisant (2.2) et (4.1) identifiant  $(\Lambda s\omega_*) \circ \alpha^{-1}$  et  $\varphi_1$ , ce dernier est un isomorphisme et le théorème résulte alors de la convergence des suites spectrales.

*Remarque.* — On fait de  $\Lambda X \otimes L$  une algèbre de Lie différentielle  $\mathbb{Z}$ -graduée en posant :

$$\begin{aligned} (\Lambda X \otimes L)_p &= \sum_q (\Lambda X)^{q-p} \otimes L_q \\ [a \otimes \theta, a' \otimes \theta'] &= (-1)^{|\theta||a'|} a \Lambda a' \otimes [\theta, \theta'] \\ \nabla(a \otimes \theta) &= da \otimes \theta + (-1)^{|a|} a \otimes \partial \theta. \end{aligned}$$

Cette structure se prolonge de manière évidente au complété

$$\Lambda X \hat{\otimes} L = \prod_q (\Lambda X)^{q-p} \otimes L_q,$$

ce qui nous permet d'interpréter  $\sum_v w_v \otimes \theta_v$  comme un élément  $\omega$  de  $(\Lambda X \hat{\otimes} L)_{-1}$  et l'équation (4.2) équivaut alors à l'équation de Maurer-Cartan,

$$\nabla \omega + \frac{1}{2} [\omega, \omega] = 0.$$

Comme l'ont remarqué Schlessinger et Stasheff, [7], cette dernière équation équivaut à  $\nabla \omega^2 = 0$  lorsque l'on pose  $\nabla \omega = \nabla + ad_{\omega}$  et  $\omega$  est une perturbation en leur sens.

### 5. L'algèbre de Lie de $(B, d_B)$ .

Dans le modèle minimal  $(\Lambda X, d)$  de  $(B, d_B)$  écrivons  $d = d_2 + d_3 + \dots$ , où  $d_i$  est la dérivation envoyant  $X$  dans  $\Lambda^i X$ . Une algèbre de Lie graduée,  $\pi_*(B, d_B)$  est alors définie par la condition :

$$(\Lambda X, d_2) \cong (\mathcal{C}^*(\pi_*(B, d_B), 0), \delta).$$

Il résulte de la démonstration du théorème que :

$$\text{COROLLAIRE.} \quad \pi_*(B, d_B) = H(\text{Der}_B(B \otimes \Lambda \bar{X}), \partial).$$

### 6. Algèbres formelles.

Une a.d.g.c.  $(B, d_B)$  est dite *formelle* si elle a même modèle que  $(H(B), 0)$ . Dans ce cas un modèle de Quillen de  $(B, d_B)$  est donné par la l.d.g.  $\text{Der}_{H(B)}(H(B) \otimes \Lambda \bar{X})$ . Par contre il est bien connu et facile de voir que  $U\pi_*(B, d_B) \cong \text{Tor}^{H(B)}(\mathbf{k}, \mathbf{k})$  dans le cas formel, et nous retrouvons ainsi le résultat de Sjödin [6] identifiant  $\text{Tor}^{H(B)}(\mathbf{k}, \mathbf{k})$  à  $UH(\text{Der}_{H(B)}(H(B) \otimes \Lambda \bar{X}))$ .

### 7. Espaces topologiques.

Soit  $S$  un CW complexe pointé, 1-connexe, d'homologie rationnelle de type fini. Le foncteur  $A_{PL}$  de Sullivan associe à  $S$  une a.d.g.c. augmentée dont le modèle minimal  $(\Lambda X, d)$  est de type fini et satisfait à

$$H(\Lambda X) \cong H^*(S; \mathbf{Q}) \quad \text{et} \quad \pi_*(\Lambda X) \cong \pi_*(\Omega S) \otimes \mathbf{Q}$$

en tant qu'algèbres (resp. qu'algèbres de Lie). [1], [2], [3], [4], [8].

La donnée du type d'homotopie rationnelle de  $S$  équivaut à la donnée de la classe d'isomorphie de  $(\Lambda X, d)$  ([8], [3]). Notre théorème revient à dire que le type d'homotopie de  $S$  est également déterminé par l'algèbre de Lie différentielle  $\text{Der}_{\Lambda X}(\Lambda X \otimes \Lambda \bar{X})$ , et qu'en particulier

$$\pi_*(S) \cong H(\text{Der}_{\Lambda X}(\Lambda X \otimes \Lambda \bar{X}))$$

en tant qu'algèbre de Lie graduée.



## BIBLIOGRAPHY

- [1] P. ANDREWS and M. ARKOWITZ, Sullivan's minimal and higher order whitehead products, *Can. J. of Math.*, XXX n° 5 (1978), 961-982.
- [2] H. J. BAUES and J. M. LEMAIRE, Minimal models in homotopy theory, *Math. Ann.*, 225 (1977), 219-242.
- [3] A. K. BOUSFIELD and W. K. A. M. GUGENHEIM, On the PL de Rham theory and rational homotopy type, *Memoirs of the A.M.S.*, 179 (1976).
- [4] S. HALPERIN, Lectures on minimal models, Preprint n° 111, Lille, 1977.
- [5] D. QUILLEN, Rational homotopy theory, *Ann. of Math.*, 90 (1969), 205-295.
- [6] G. SJÖDIN, Hopf algebras and derivations, *J. of Algebra*, 64 (1980), 218-229.
- [7] M. SCHLESSINGER and J. D. STASHEFF, Deformation theory and rational homotopy type, Preprint.
- [8] D. SULLIVAN, Infinitesimal computations in topology, *Publ. I.H.E.S.*, 47.
- [9] D. TANRÉ, Modèle de Chen-Quillen-Sullivan, Thèse n° 535, Univ. des Sciences et Tech. de Lille I.

Manuscrit reçu le 23 août 1982.

Y. FÉLIX,

Département de Mathématiques  
Université de Louvain-la-Neuve (Belgique).

S. HALPERIN,

Mathematics Department  
University of Toronto, Toronto, Ontario (Canada).

J. C. THOMAS,

Université de Lille I, 59655 Villeneuve d'Ascq Cedex (France).