

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

GUY DAVID

Courbes corde-arc et espaces de Hardy généralisés

Annales de l'institut Fourier, tome 32, n° 3 (1982), p. 227-239

[<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1982__32_3_227_0>](http://www.numdam.org/item?id=AIF_1982__32_3_227_0)

© Annales de l'institut Fourier, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'institut Fourier » (<http://annalif.ujf-grenoble.fr/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

COURBES CORDE-ARC ET ESPACES DE HARDY GÉNÉRALISÉS

par Guy DAVID

Lorsque Γ est une courbe rectifiable, orientée, et séparant le plan complexe en deux composantes connexes Ω^+ et Ω^- , il est possible de définir l'espace de Hardy $H^2(\Omega^+)$ des fonctions analytiques dans Ω^+ et ayant des valeurs au bord dans $L^2(\Gamma)$. Les fonctions de $H^2(\Omega^+)$ sont caractérisées par leurs valeurs au bord, de sorte que $H^2(\Omega^+)$ peut être assimilé à un sous-espace de $L^2(\Gamma)$. On définit pareillement $H^2(\Omega^-)$.

On ne sait pas encore à quelle condition, portant sur la géométrie de Γ , $L^2(\Gamma)$ est la somme directe de $H^2(\Omega^+)$ et $H^2(\Omega^-)$ (on dira dans ce cas que Γ a la propriété de Calderón).

A.P. Calderón a montré en 1977 que c'est le cas lorsque Γ est le graphe d'une fonction lipschitzienne dont la constante de Lipschitz est assez petite (voir [4]).

Plus récemment, R.R. Coifman et Y. Meyer ont étendu ce résultat aux courbes "corde-arc" (voir [6]). Rappelons que la courbe Γ est dite corde-arc (de constante inférieure à C) si pour tout couple (z_1, z_2) de points de Γ , la longueur de l'arc $z_1 z_2$ est inférieure à $C|z_2 - z_1|$. Coifman et Meyer ont montré qu'il existe $\delta > 0$ tel que si Γ est corde-arc de constante inférieure à $1 + \delta$, alors

$$L^2(\Gamma) = H^2(\Omega^+) + H^2(\Omega^-).$$

Si l'on note π_1 la projection orthogonale de $L^2(\Gamma)$ sur le sous-espace fermé $H^2(\Omega^+)$, et π_2 la projection orthogonale de $L^2(\Gamma)$ sur $H^2(\Omega^-)$, le résultat de Coifman et Meyer peut être énoncé de manière plus précise : pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, si Γ est corde-arc de constante inférieure à $1 + \delta$, on ait $\|\text{Id} - \pi_1 - \pi_2\|_* < \epsilon$

($\|T\|_*$ désignera toujours la norme de l'opérateur T de L^2 dans lui-même) : en quelque sorte, la somme $H^2(\Omega^+) + H^2(\Omega^-)$ est presque orthogonale.

Nous nous proposons de démontrer la réciproque, c'est-à-dire que pour tout $\delta > 0$, il existe $\epsilon > 0$ tel que si

$$L^2(\Gamma) = H^2(\Omega^+) + H^2(\Omega^-) \quad \text{avec} \quad \|\text{Id} - \pi_1 - \pi_2\|_* < \epsilon,$$

alors Γ est une courbe corde-arc de constante inférieure à $1 + \delta$.

Le point clef de la démonstration sera la minoration de la norme d'un commutateur entre la transformation de Hilbert et un opérateur unitaire associé à un changement de variable de \mathbf{R} . Celle-ci sera obtenue par des techniques élémentaires de minoration du noyau associé.

Notons que ce résultat, s'il signifie que le seul moyen d'approcher la situation d'orthogonalité des espaces de Hardy (qui a lieu quand Γ est une droite) est de considérer les courbes corde-arc de faibles constantes, ne concerne que la situation limite. En effet, de nombreuses courbes (comme les paraboles) ont la propriété de Calderón sans pour cela être corde-arc.

1. Minoration de la norme d'un opérateur.

La transformation de Hilbert (c'est-à-dire l'o.p.d. de symbole $\text{sgn } \xi$) sera notée \mathcal{H} . On désignera par h un homéomorphisme croissant de \mathbf{R} , préservant les ensembles de mesure nulle ; U_h sera alors l'opérateur unitaire de $L^2(\mathbf{R})$ défini par

$$U_h f(x) = [f \circ h(x)] h'(x)^{1/2}$$

pour toute f dans $L^2(\mathbf{R})$ et presque tout x dans \mathbf{R} .

D'autre part, m et n seront deux fonctions de \mathbf{R} à valeurs dans le cercle unité S^1 ; M et N seront les opérateurs de multiplication associés : $\forall f \in L^2(\mathbf{R}), \forall x \in \mathbf{R}, Mf(x) = m(x)f(x)$ et $Nf(x) = n(x)f(x)$. Avec ces notations, on a le

THEOREME 1. — *Pour tout $\delta > 0$, il existe $\epsilon > 0$ tel que $\|M U_h \mathcal{H} U_{h^{-1}} N - \mathcal{H}\|_* < \epsilon \implies \|\text{Log } h'\|_{\text{BMO}} < \delta, \|m\|_{\text{BMO}} < \delta,$ et $\|n\|_{\text{BMO}} < \delta$.*

Nous utiliserons le lemme suivant.

LEMME 1. — Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ telle que $\|f\|_{\text{BMO}} = 1$; soit I un intervalle de \mathbf{R} tel que $\frac{1}{|I|} \int_I |f(x) - m_I f| dx \geq \frac{3}{4}$. Soient $E = \left\{ x \in I, f(x) > m_I f + \frac{1}{5} \right\}$ et $F = \left\{ x \in I, f(x) < m_I f - \frac{1}{5} \right\}$. Alors $|E| \geq \epsilon_0 |I|$ et $|F| \geq \epsilon_0 |I|$.

($m_I f$ désigne la moyenne de f sur l'intervalle I , ϵ_0 est une constante universelle, et $\|f\|_{\text{BMO}} =: \sup_I \left\{ \frac{1}{|I|} \int_I |f(x) - m_I f| dx \right\}$, le sup étant pris sur l'ensemble des intervalles bornés I).

Le lemme est une conséquence du résultat suivant : $\forall \epsilon > 0$, $\exists K > 0$, $\forall f \in \text{BMO}$, $\forall I$ intervalle borné,

$$\frac{1}{|I|} \int_{I \cap \{|f - m_I f| > K \|f\|_{\text{BMO}}\}} |f - m_I f| dx \leq \epsilon \|f\|_{\text{BMO}},$$

qui est lui-même une conséquence de l'inégalité exponentielle de John et Nirenberg [10].

Calculons pour commencer le noyau de l'opérateur

$$T = M U_h \mathcal{H} U_h^{-1} N.$$

Nous négligerons le facteur $\frac{1}{\pi}$ dans le noyau de \mathcal{H} , de sorte que, si $f \in L_{\text{comp}}^\infty$ et si $x \notin \text{supp } f \circ h^{-1}$,

$$U_{h^{-1}} f(y) = f \circ h^{-1}(y) [h^{-1}(y)']^{1/2}$$

pour tout y , et

$$\mathcal{H} U_{h^{-1}} f(x) = \int_{\mathbf{R}} \frac{f \circ h^{-1}(y) [h^{-1}(y)']^{1/2} dy}{x - y}.$$

Notons qu'il s'agit là d'une intégrale définie à cause de l'hypothèse faite sur le support de f , ce qui nous autorise à faire le changement de variable défini par $u = h^{-1}(y)$, $\frac{du}{dy} = h^{-1}(y)' = \frac{1}{h'(u)}$.

$$\mathcal{H} U_{h^{-1}} f(x) = \int_{\mathbf{R}} \frac{f(u) h'(u)^{-1/2} h'(u)}{x - h(u)} du,$$

d'où

$$U_h \mathcal{H} U_{h^{-1}} f(x) = \int_{\mathbf{R}} \frac{f(y) h'(y)^{1/2} h'(x)^{1/2}}{h(x) - h(y)} dy$$

et

$$Tf(x) = \int_{\mathbf{R}} \frac{f(y) h'(x)^{1/2} h'(y)^{1/2} m(x) n(y)}{h(x) - h(y)} dy.$$

Nous allons maintenant prouver le résultat concernant $\|n\|_{\text{BMO}}$. Supposons que $\|n\|_{\text{BMO}} \geq \delta_0$. Nous voulons montrer que T ne peut pas être très proche de \mathcal{H} . Pour cela, nous allons isoler un certain nombre de points où le noyau de T est significativement différent de $\frac{1}{x-y}$, et nous choisirons une fonction-test en conséquence.

Puisque $\|n\|_{\text{BMO}} \geq \delta_0$, l'une des deux fonctions $\text{Re } n(t)$ et $\text{Im } n(t)$ a une norme supérieure à $\delta_0/2$ dans BMO. Supposons par exemple que ce soit la seconde (le cas où $\|\text{Re } n\|_{\text{BMO}} \geq \delta_0/2$ se traite de manière identique). Choisissons un intervalle I tel que, si $m_I = m_I(\text{Im } n(t))$,

$$\frac{1}{|I|} \int_I |\text{Im } n(y) - m_I| dy = \delta \geq \frac{3}{4} \|\text{Im } n(t)\|_{\text{BMO}} \geq \frac{3}{8} \delta_0.$$

On considère $E = \{y \in I, \text{Im } n(y) > m_I + \delta/5\}$ et

$$F = \{y \in I, \text{Im } n(y) < m_I - \delta/5\}.$$

Les inégalités $|E| \geq \epsilon_0 |I|$ et $|F| \geq \epsilon_0 |I|$ découlent du lemme 1. On aurait d'ailleurs pu les démontrer directement : elles sont évidentes parce que $|\text{Im } n(y) - m_I| \leq 2$ pour tout y .

Posons

$$E' = \{y \in E, \text{Re } n(y) > 0\} \quad \text{et} \quad E'' = \{y \in E, \text{Re } n(y) \leq 0\}.$$

Soit \tilde{E} celui de ces deux ensembles qui a la plus grande mesure (et $\tilde{E} = E'$ si $|E'| = |E''|$). Alors $|\tilde{E}| \geq |I| \epsilon_0/2$.

Choisissons de même $\tilde{F} = \{y \in F, \text{Re } n(y) > 0\}$ ou

$$\tilde{F} = \{y \in F, \text{Re } n(y) \leq 0\},$$

de façon que $|\tilde{F}| \geq |I| \epsilon_0/2$.

Soit $\Gamma_{\tilde{E}}$ (resp. $\Gamma_{\tilde{F}}$) le plus petit cône convexe contenant $n(\tilde{E})$ (resp. $n(\tilde{F})$).

LEMME 2. — *Tout point du cercle unité se trouve à une distance supérieure à $\delta/10$ de l'un au moins des deux cônes $\Gamma_{\tilde{E}}$ et $\Gamma_{\tilde{F}}$.*

Démonstration. — $\Gamma_{\tilde{E}}$ est inclus dans l'un des deux cônes convexes $\Gamma_1 = \{z \in \mathbf{C}, \operatorname{Im} z \geq (m_1 + \delta/5)|z| \text{ et } \operatorname{Re} z \geq 0\}$ et $\Gamma_2 = \{z \in \mathbf{C}, \operatorname{Im} z \geq (m_1 + \delta/5)|z| \text{ et } \operatorname{Re}(z) \leq 0\}$; quant à $\Gamma_{\tilde{F}}$, il est inclus dans $\Gamma_3 = \{z \in \mathbf{C}, \operatorname{Im} z \leq (m_1 - \delta/5)|z| \text{ et } \operatorname{Re}(z) \geq 0\}$ ou dans $\Gamma_4 = \{z \in \mathbf{C}, \operatorname{Im} z \leq (m_1 - \delta/5)|z| \text{ et } \operatorname{Re}(z) \leq 0\}$. Le résultat s'en déduit parce que tout point du cercle est à une distance supérieure à $\delta/10$ de $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ ou de $\Gamma_3 \cup \Gamma_4$.

Posons maintenant $f_1 = \chi_{\tilde{E}}$ et $f_2 = \chi_{\tilde{F}}$, de sorte que $\|f_1\|_2^2 + \|f_2\|_2^2 < |I|$. Soit x un point de

$$J = I + 10 |I| = \{y + 10 |I|, y \in I\}.$$

Soit $\Re f_1(x) = \int_{\tilde{E}} \frac{dy}{x - y}$. Il s'agit d'un nombre réel strictement positif, de sorte que

$$A(x) = \int_{\tilde{E}} \frac{1}{\Re f_1(x)} \frac{h'(x)^{1/2} h'(y)^{1/2}}{h(x) - h(y)} n(y) dy$$

est un élément de $\Gamma_{\tilde{E}}$. De même,

$$B(x) = \int_{\tilde{F}} \frac{1}{\Re f_2(x)} \frac{h'(x)^{1/2} h'(y)^{1/2}}{h(x) - h(y)} n(y) dy$$

est dans $\Gamma_{\tilde{F}}$.

Alors

$$\begin{aligned} & |Tf_1(x) - \Re f_1(x)| \\ &= |m(x) \Re f_1(x)| \left| \int_{\tilde{E}} \frac{1}{\Re f_1(x)} \frac{h'(x)^{1/2} h'(y)^{1/2}}{h(x) - h(y)} n(y) dy - \frac{1}{m(x)} \right| \\ &= |\Re f_1(x)| \left| A(x) - \frac{1}{m(x)} \right| \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & |Tf_2(x) - \Re f_2(x)| \\ &= |m(x) \Re f_2(x)| \left| \int_{\tilde{F}} \frac{1}{\Re f_2(x)} \frac{h'(x)^{1/2} h'(y)^{1/2}}{h(x) - h(y)} n(y) dy - \frac{1}{m(x)} \right| \\ &= |\Re f_2(x)| \left| B(x) - \frac{1}{m(x)} \right|. \end{aligned}$$

On déduit du lemme 2, de $|\mathcal{H}f_1(x)| \geq \frac{|\tilde{E}|}{20|I|} \geq \frac{\epsilon_0}{40}$, et de $|\mathcal{H}f_2(x)| \geq \frac{\epsilon_0}{40}$, que pour tout x de J , $|(T - \mathcal{H})f_1(x)| \geq \frac{\epsilon_0 \delta}{400}$ ou $|(T - \mathcal{H})f_2(x)| \geq \frac{\epsilon_0 \delta}{400}$; on a donc démontré que, si $\|n\|_{\text{BMO}} \geq \delta_0$, alors $\|T - \mathcal{H}\|_* \geq \epsilon(\delta_0)$ avec un $\epsilon(\delta_0)$ qui tend vers 0 avec δ_0 . Le résultat concernant $\|m\|_{\text{BMO}}$ se déduit de celui-ci par simple dualité.

Le résultat portant sur $\|\text{Log } h'\|_{\text{BMO}}$ est un peu compliqué à établir, mais la démonstration en est basée sur le même principe général. Soit encore I un intervalle tel que, si m_I désigne $m_I \text{Log } h'$, on ait $\frac{1}{|I|} \int_I |\text{Log } h'(y) - m_I| dy = \delta \geq \frac{3}{4} \|\text{Log } h'\|_{\text{BMO}} \geq \frac{3}{4} \delta_0$. (On suppose donc que $\|\text{Log } h'\|_{\text{BMO}} \geq \delta_0$).

Soient $E = \{y \in I, \text{Log } h'(y) \geq m_I + \delta/5\}$ et

$$F = \{y \in I, \text{Log } h'(y) < m_I - \delta/5\}.$$

Nous sommes cette fois obligés de nous servir du Lemme 1, qui nous dit que $|E| \geq 2\epsilon_0 |I|$ et $|F| \geq 2\epsilon_0 |I|$ pour une certaine constante universelle ϵ_0 . Nous allons choisir deux fonctions f_1 et f_2 à supports dans I , et nous testerons ensuite $|(T - \mathcal{H})f_i(x)|$ sur des intervalles $J_1 = I - N|I|$ et $J_2 = I + N|I|$ (N sera un réel positif, moralement de grande taille, et qui sera choisi plus tard).

Posons $E = E_1 \cup E_2$, avec $E_1 = \{y \in E, y \leq C\}$ et $E_2 = \{y \in E, y > C\}$, où C est choisi de manière que $|E_1| = |E_2| = |E|/2$. Procédons de même avec F . Nous obtenons quatre ensembles E_1, E_2, F_1 et F_2 dont les mesures sont toutes supérieures à $\epsilon_0 |I|$. De plus, $\forall y \in E_1, \forall y' \in E_2, y \leq y'$ (nous noterons cela $E_1 \leq E_2$), et de même $F_1 \leq F_2$.

Deux possibilités se présentent donc : ou bien $E_1 \leq F_2$, ou bien $\exists y_1 \in E_1, \exists y_2 \in F_2, y_1 > y_2$, et alors $F_1 \leq E_2$.

Plaçons nous d'abord dans la première hypothèse :

$$E_1 \leq F_2. \quad (1)$$

Nous choisirons $f_1(y) = \chi_{E_1}(y) n(y)^{-1}$ et $f_2(y) = \chi_{F_2}(y)$.

LEMME 3. — $\forall \delta \in \left] 0, \frac{1}{10} \right[$, $\exists N > 0$ tel que avec les notations ci-dessus, $\forall x \in J_1 = I - N |I|$,

$$|(T - \mathcal{H}) f_1(x)| + |(T - \mathcal{H}) f_2(x)| \geq \frac{\epsilon_0}{1000} \delta^2.$$

Notons tout de suite que le lemme 3 nous permet de conclure instantanément : $\|f_1\|_2^2 \leq |I|$ et $\|f_2\|_2^2 \leq |I|$, joints à

$$\|(T - \mathcal{H}) f_1\|_2^2 \geq \frac{\epsilon_0^2 \delta^4}{10^7} |I| \quad \text{ou} \quad \|(T - \mathcal{H}) f_2\|_2^2 \geq \frac{\epsilon_0^2 \delta^4}{10^7} |I|,$$

donnent $\|T - \mathcal{H}\|_* \geq \frac{\epsilon_0 \delta^2}{10^4}.$

Pour démontrer le lemme 3, nous allons utiliser un lemme qui sera démontré plus tard.

LEMME 4. — Soit $\delta \in \left] 0, \frac{1}{10} \right[$. Soit N tel que $\frac{N-1}{N+1} \geq e^{-\delta/10}$.

Alors $\forall x \in J_1$, $\forall y_1 \in E_1$, $\forall y_2 \in F_2$,

$$\frac{h'(x)^{1/2} h'(y_1)^{1/2} (x - y_1)}{h(x) - h(y_1)} \geq e^{\delta/10} \frac{h'(x)^{1/2} h'(y_2)^{1/2} (x - y_2)}{h(x) - h(y_2)}.$$

Pour voir comment le lemme 3 se déduit du lemme 4, fixons $x \in J_1$. Soient $c_2 = \sup_{y_2 \in F_2} \frac{h'(x)^{1/2} h'(y_2)^{1/2} (x - y_2)}{h(x) - h(y_2)}$ et

$$c_1 = \inf_{y_1 \in E_1} \frac{h'(x)^{1/2} h'(y_1)^{1/2} (x - y_1)}{h(x) - h(y_1)}.$$

On a

$$\begin{aligned} & (T - \mathcal{H}) f_1(x) \\ &= \int_{E_1} - \frac{f_1(y)}{|x - y|} \left(\frac{h'(x)^{1/2} h'(y)^{1/2} m(x) n(y) (x - y)}{h(x) - h(y)} - 1 \right) dy \\ &= -m(x) \int_{E_1} \frac{1}{y - x} \left[\frac{h'(x)^{1/2} h'(y)^{1/2}}{h(x) - h(y)} (x - y) - \frac{1}{m(x) n(y)} \right] dy. \end{aligned}$$

Ainsi, si $c_1 \geq 1$,

$$|(T - \mathcal{H}) f_1(x)| \geq \int_{E_1} \frac{1}{y-x} (c_1 - 1) dy \geq \frac{\epsilon_0(c_1 - 1)}{N+2}$$

car $|E_1| \geq \epsilon_0 |I|$. De même, si $c_2 \leq 1$,

$$\begin{aligned} & |(T - \mathcal{H}) f_2(x)| \\ &= \left| \int_{F_2} \frac{1}{y-x} \left[1 - \frac{h'(x)^{1/2} h'(y)^{1/2} m(x) n(y) (x-y)}{h(x) - h(y)} \right] dy \right| \\ &\geq \int_{F_2} \frac{1}{(N+2)|I|} \left[1 - \left| \frac{h'(x)^{1/2} h'(y)^{1/2} m(x) n(y) (x-y)}{h(x) - h(y)} \right| \right] dy \\ &\geq \int_{F_2} \frac{1}{(N+2)|I|} (1 - c_2) dy \geq \frac{\epsilon_0(1 - c_2)}{N+2}. \end{aligned}$$

Comme $c_1 \geq e^{\delta/10} c_2$ à cause du lemme 4, on a

$$|(T - \mathcal{H}) f_1(x)| + |(T - \mathcal{H}) f_2(x)| \geq \frac{\epsilon_0}{N+2} (1 - e^{-\delta/10}) \geq \frac{\epsilon_0 \delta^2}{1000}$$

si l'on a pris $N = \frac{1 + e^{-\delta/10}}{1 - e^{-\delta/10}}$ (donc $\frac{N-1}{N+1} = e^{-\delta/10}$, pour satisfaire à la condition du lemme 4).

Démontrons maintenant le lemme 4. C'est ici que va intervenir l'hypothèse $E_1 \leq F_2$, ainsi que le choix de $x \in J_1$ (au lieu de J_2) : nous allons utiliser la décroissance de la fonction $y \rightarrow \frac{1}{|h(x) - h(y)|}$ pour $x \in J_1$ et $y \in I$. Soit $x \in J_1 = I - N|I|$, soient $y_1 \in E_1$ et $y_2 \in F_2$, alors

$$\frac{h'(x)^{1/2} h'(y_1)^{1/2} (x - y_1)}{h(x) - h(y_1)} \geq \frac{h'(x)^{1/2} |x - y_1| h'(y_1)^{1/2}}{|h(x) - h(y_2)|}.$$

Comme y_1 et y_2 sont dans I , et x dans J_1 , on a

$$|x - y_1| \geq (N-1)|I| \geq \frac{N-1}{N+1} |x - y_2| \geq e^{-\delta/10} |x - y_2|.$$

Enfin, $y_1 \in E_1 \subset E$ et $y_2 \in F_2 \subset F$ impliquent

$$h'(y_1)^{1/2} \geq e^{m_1/2} e^{\delta/10} \geq h'(y_2)^{1/2} e^{2\delta/10}.$$

En regroupant les résultats, on obtient

$$\frac{h'(x)^{1/2} h'(y_1)^{1/2} (x - y_1)}{h(x) - h(y_1)} \geq e^{\delta/10} \frac{h'(x)^{1/2} h'(y_2)^{1/2} (x - y_2)}{h(x) - h(y_2)}.$$

Le lemme 4 est démontré, et donc aussi le théorème dans le cas où $E_1 \leq E_2$.

Supposons maintenant que $F_1 \leq E_2$. On choisit cette fois les fonctions-test $f_1(y) = \chi_{F_1}(y)$ et $f_2(y) = \chi_{E_2}(y) \frac{1}{n(y)}$. La croissance de la fonction $y \rightarrow \frac{1}{h(x) - h(y)}$ pour $x \in J_2 = I + N|I|$ et $y \in I$ permet d'établir le lemme 4 bis.

LEMME 4 bis. — Si $\delta \in]0, 1/10[$, et $\frac{N-1}{N+1} \geq e^{-\delta/10}$, alors $\forall x \in J_2$, $\forall y_1 \in F_1$, $\forall y_2 \in E_2$

$$\frac{h'(x)^{1/2} h'(y_2)^{1/2} (x - y_2)}{h(x) - h(y_2)} \geq e^{\delta/10} \frac{h'(x)^{1/2} h'(y_1)^{1/2} (x - y_1)}{h(x) - h(y_1)}.$$

On peut déduire du lemme 4 bis un lemme 3 bis comme on l'a fait pour les lemmes 4 et 3.

LEMME 3 bis. — Si $\delta \in \left] 0, \frac{1}{10} \right[$, il existe $N > 0$ tel que, si $x \in J_2$, $|(T - \mathcal{H}) f_1(x)| + |(T - \mathcal{H}) f_2(x)| \geq \frac{\epsilon_0 \delta^2}{1000}$.

Comme précédemment, le lemme 3 bis implique que $\|T - \mathcal{H}\|_* \geq \frac{\epsilon_0 \delta^2}{10^4}$ et la démonstration du théorème 1 est terminée.

2. Position des espaces de Hardy dans $L^2(\Gamma)$.

Donnons-nous une courbe Γ rectifiable, orientée, et séparant le plan. Soient Ω^+ et Ω^- les composantes connexes de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$. Soit Φ une représentation conforme du demi-plan $P^+ = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} z > 0\}$ sur Ω^+ , normalisée pour que $\Phi(\infty) = \infty$. Soit de même ψ une représentation conforme de $P^- = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} z < 0\}$ sur Ω^- , avec

$\psi(\infty) = \infty$. Soit $U : L^2(\Gamma) \longrightarrow L^2(\mathbf{R})$ tel que

$$Uf(x) = f \circ \Phi(x) \Phi'(x)^{1/2}$$

(on peut définir $\Phi'(x)^{1/2}$ dans Ω^+ simplement connexe, et il est possible d'en déduire la valeur au bord parce que Φ' est suffisamment régulière). On définit pareillement $V : L^2(\Gamma) \longrightarrow L^2(\mathbf{R})$ par $Vf(x) = f \circ \psi(x) \psi'(x)^{1/2}$. A partir de l'espace de Hardy $H^2(P^+) \subset L^2(\mathbf{R})$ des valeurs au bord des fonctions holomorphes dans P^+ et dont les restrictions aux droites horizontales sont uniformément dans L^2 , on peut définir $H^2(\Omega^+) = U^{-1}(H^2(P^+))$. On définit pareillement $H^2(\Omega^-) = V^{-1}(H^2(P^-))$. $H^2(\Omega^+)$ et $H^2(\Omega^-)$ sont deux sous-espaces fermés de $L^2(\Gamma)$, et les projections orthogonales sur ces espaces sont

$$\pi_1 = \frac{1}{2} U^{-1} (\text{Id} + i \mathcal{H}) U = \frac{1}{2} (\text{Id} + i U^{-1} \mathcal{H} U)$$

et
$$\pi_2 = \frac{1}{2} (\text{Id} - i V^{-1} \mathcal{H} V).$$

THEOREME 2. — $\forall \delta > 0, \exists \epsilon > 0$ tel que si $\|\pi_1 + \pi_2 - \text{Id}\|_* \leq \epsilon$, Γ est corde-arc de constante inférieure à $1 + \delta$.

La démonstration qui suit est largement inspirée de M. Zinsmeister [16]. Nous partons de l'hypothèse

$$\left\| \frac{1}{2} \text{Id} + \frac{i}{2} U^{-1} \mathcal{H} U + \frac{1}{2} \text{Id} - \frac{i}{2} V^{-1} \mathcal{H} V - \text{Id} \right\|_* \leq \epsilon,$$

qui implique $\|U^{-1} \mathcal{H} U - V^{-1} \mathcal{H} V\|_* \leq 2\epsilon$, et par conséquent $\|V U^{-1} \mathcal{H} U V^{-1} - \mathcal{H}\|_* \leq 2\epsilon$ (notons que les trois premiers opérateurs agissent sur $L^2(\Gamma)$ et le dernier sur $L^2(\mathbf{R})$, bien que les normes en aient été notées de la même manière). Le théorème 1 montre que, si $h = \Phi^{-1} \psi|_{\mathbf{R}}$, $\|\text{Log } h'\|_{\text{BMO}} < \delta$.

Faisons l'hypothèse "a priori" que Γ est corde-arc. En particulier, $\text{Log } \Phi' \in \text{BMO}_A(P^+)$ et $\text{Log } \psi' \in \text{BMO}_A(P^-)$ (voir [7]) ($\text{BMO}_A(P^+)$ est l'ensemble des valeurs au bord dans BMO des fonctions analytiques dans P^+ et uniformément dans BMO sur les droites horizontales).

Notons alors u la partie réelle de $\text{Log } \Phi'$ et v celle de $\text{Log } \psi'$. On a $\text{Log } \Phi' = u + i \mathcal{H} u$ et $\text{Log } \psi' = v - i \mathcal{H} v$. De $\psi|_{\mathbf{R}} = \Phi \circ h$,

on déduit $\text{Log } \psi' = \text{Log } \Phi' \circ h + \text{Log } h'$, ce qui s'écrit

$$v - i\mathcal{H}v = u \circ h + i(\mathcal{H}u) \circ h + \text{Log } h'.$$

En utilisant l'opérateur V_h défini par $f \longrightarrow f \circ h$, et qui est continu sur BMO dès que $\|\text{Log } h'\|_{\text{BMO}}$ est assez petite (ce qui est justement le cas), on obtient $v = V_h u + \text{Log } h'$, et

$$-i\mathcal{H}V_h u - i\mathcal{H}\text{Log } h' = iV_h \mathcal{H}u,$$

c'est-à-dire $(\mathcal{H}V_h + V_h \mathcal{H})u = -\mathcal{H}\text{Log } h'$.

Notons que

$$\mathcal{H}V_h + V_h \mathcal{H} = V_h (V_h^{-1} \mathcal{H}V_h + \mathcal{H}) = V_h [2\mathcal{H} + (V_h^{-1} \mathcal{H}V_h - \mathcal{H})]$$

et comme $\|V_h^{-1} \mathcal{H}V_h - \mathcal{H}\|_{\text{BMO}(\mathbb{R}), \text{BMO}(\mathbb{R})}$ tend vers 0 avec $\|\text{Log } h'\|_{\text{BMO}}$ (voir [6]), $u = -(\mathcal{H}V_h + V_h \mathcal{H})^{-1} \mathcal{H}\text{Log } h'$ a une norme dans BMO qui tend vers 0 avec ϵ . Il en est de même pour $\text{Log } \Phi'$. Γ est donc corde-arc avec une constante qui tend vers 1 quand ϵ tend vers 0 (voir par exemple [7]).

Lorsque Γ n'est pas supposée corde-arc, on peut quand même poser $u = -(\mathcal{H}V_h + V_h \mathcal{H})^{-1} \mathcal{H}\text{Log } h'$. On peut trouver $\tilde{\Phi}'$ telle que $\text{Log } \tilde{\Phi}' = u + i\mathcal{H}u$; $\tilde{\Phi}'$ est l'exponentielle d'une fonction de $\text{BMO}_A(\mathbb{P}^+)$ dont la norme tend vers 0 avec ϵ .

Or, on sait (voir p. ex. [14] dans le cas du disque unité) que si $\|b\|_{\text{BMO}_A(\mathbb{P}^+)} \leq \mu$ (μ constante universelle), e^b est la dérivée d'une représentation conforme de \mathbb{P}^+ sur un domaine de \mathbb{C} limité par une courbe corde-arc.

Ainsi, $\tilde{\Phi}'$ est la dérivée d'une représentation conforme $\tilde{\Phi}$ de \mathbb{P}^+ sur un domaine de \mathbb{C} délimité par la courbe corde-arc $\tilde{\Gamma}$. On peut aussi choisir $v = u \circ h + \text{Log } h'$ et $\tilde{\psi}$ de manière que $\text{Log } \tilde{\psi}' = v - i\mathcal{H}v$. $\tilde{\psi}$ sera une représentation conforme de \mathbb{P}^- sur un domaine de \mathbb{C} , lui aussi délimité par une courbe corde-arc. Si l'on choisit bien les représentants dans BMO de $\text{Log } \tilde{\psi}'$ et $\text{Log } \tilde{\Phi}'$, et $\tilde{\Phi}(0)$ et $\tilde{\psi}(0)$, on a $\psi|_{\mathbb{R}} = \tilde{\Phi} \circ h$, et en particulier le domaine $\tilde{\psi}(\mathbb{P}^-)$ est lui aussi délimité par $\tilde{\Gamma}$. Alors la même fonction h est associée à la fois à la courbe Γ et à la courbe $\tilde{\Gamma}$. Un théorème d'Ahlfors [1] nous dit que Γ et $\tilde{\Gamma}$ sont semblables. Donc Γ est corde-arc, et le théorème est démontré.

BIBLIOGRAPHY

- [1] L. AHLFORS, Quasiconformal reflections, *Acta Math.*, 109 (1963), 291-301.
- [2] L. AHLFORS, *Lectures on quasiconformal mappings*, Princeton, (1966).
- [3] A.P. CALDERÓN, Commutators, singular integrals on Lipschitz curves and applications, *Proc. of the I.C.M. Helsinki* 1968, 85-96.
- [4] A.P. CALDERÓN, Cauchy integral on Lipschitz curves and related operators, *Proc. Nat. Acad. Sc.*, 74, 4 (1977), 1324-1327.
- [5] R.R. COIFMAN et Y. MEYER, Au-delà des opérateurs pseudo-différentiels, *Astérisque*, 57.
- [6] R.R. COIFMAN et Y. MEYER, Le théorème de Calderón par les méthodes de variable réelle, *C.R. Acad. Sc.*, Paris, série A, t. 289 (1979), 425-428.
- [7] D.S. JERISON, C.E. KENIG, *Hardy spaces, A_∞ , and singular integrals on chord-arc domains* (D.S. Jerison : Dept. Math., Univ. Chicago ; C.E. Kenig : School of Math., Univ. of Minnesota).
- [8] C. FEFFERMAN, E. STEIN, H^p spaces of several variables, *Acta Math.*, 129 (1972), 137-193.
- [9] C. FEFFERMAN, Recent progress in classical Fourier analysis, *Proc. I.C.M. Vancouver*, 1974.
- [10] F. JOHN, L. NIRENBERG, On functions of bounded mean oscillation, *Comm. Pure Appl. Math.*, 14 (1961), 415-426.
- [11] P.W. JONES, Homeomorphisms of the line which conserve BMO, A paraître dans *Comm. Math. Helv.*
- [12] C.E. KENIG, Weighted Hardy spaces on Lipschitz domains, *Amer. J. Math.*, 102 (1980), 129-163.
- [13] M. LAVRENTIEV, Boundary problems in the theory of univalent functions, *Math. Sb. (NS)* 1 (43), (1936), 815-844 (en russe) *Amer. Math. Soc. Translations*, sér. 2 vol. 32, 1-35.

- [14] C. POMMERENKE, Schlichte Funktionen und analytische Funktionen von Beschränkter Mittlerer Oszillation, *Comm. Math. Helv.*, 52 (1977), 591-602.
- [15] C. POMMERENKE, Univalent functions, *J. London Math. Soc.*, (2) (1970), 689-695.
- [16] M. ZINSMEISTER, Espaces de Hardy généralisés, Thèse de 3^{ème} cycle à Paris Sud.

Mansucrit reçu le 12 novembre 1981.

Guy DAVID,
3 Hameau de la Chaloupe
91650 – Breuillet.