ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

JEAN-JACQUES RISLER

Sur le théorème des fonctions composées différentiables

Annales de l'institut Fourier, tome 32, nº 2 (1982), p. 229-260

<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1982__32_2_229_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
32, 2 (1982), 229-260.

SUR LE THÉORÈME DES FONCTIONS COMPOSÉES DIFFÉRENTIABLES

par Jean-Jacques RISLER

INTRODUCTION

Le but de cet article est de généraliser au cas d'un morphisme relativement algébrique entre espaces analytiques réels un théorème démontré par Tougeron [14] dans le cas algébrique. Ce théorème est une généralisation d'un résultat classique de Glaeser qui considère le problème suivant [7] : soit f une application analytique propre d'un ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$ dans un ouvert Ω' de $\mathbf{R}^p$; l'image par f^* de $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}^p)$ dans $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ est-elle fermée dans $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ muni de sa topologie habituelle d'espace de Fréchet ? Glaeser donne une réponse affirmative lorsque f est une submersion en restriction à un ouvert partout dense de Ω; Tougeron montre dans [14] un résultat analogue dans le cas d'un morphisme $f = \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ propre et de Nash (i.e. analytique à graphe semi-algébrique) entre espaces localement semi-algébriques.

Nous généralisons ici ce résultat au cas où X et Y sont des ensembles semi-analytiques, et où le morphisme f est relativement algébrique; la démonstration est tout à fait analogue à celle de Tougeron (partie III) une fois les outils nécessaires mis en place (parties I et II). Ce résultat est d'ailleurs suggéré dans l'introduction de [14].

Voici le contenu des trois parties de cet article :

La partie I consiste en une étude algébrique de l'anneau des fonctions Nash-analytiques sur une partie semi-analytique de $\mathbf{R}^n$ introduit par Merrien dans [10]. On montre que moyennant une modification dans la définition, cet anneau est nœthérien (§ 2); cet anneau joue ici le même rôle que l'anneau des fonctions de Nash (lui aussi nœthérien) dans la démonstration de Tougeron.

Les § 3 et 4 consistent en des compléments et des conjectures, et ne sont pas utilisés dans la suite de l'article.

La partie II correspond à l'appendice de l'article de Tougeron : on montre de manière purement algébrique et par une méthode toute différente le même résultat que Tougeron ([14], théorème 5.5.).

La partie III enfin consiste en la démonstration proprement dite du théorème, démonstration qui consiste à généraliser pas à pas celle de Tougeron dans [14]. La fin de la démonstration, qui est identique à celle de [14], n'a pas été complètement rédigée ici.

Je signale enfin que Edward Bierstone et Pierre Milman viennent de donner une démonstration différente (avec des hypothèses plus larges) du théorème principal III.3.2., démonstration dont je n'ai eu connaissance qu'après la mise sous presse de cet article.

I. SUR L'ANNEAU DES FONCTIONS NASH-ANALYTIQUES

Soit $\Lambda \subset \mathbf{R}^n$ une partie semi-analytique (en abrégé s.a.); J. Merrien [10] a introduit la notion de fonction Nash-analytique sur Λ : une fonction f définie sur un ouvert contenant Λ est dite Nash-analytique sur Λ si :

1) f est analytique sur un voisinage de Λ.

2) Pour tout $x \in \partial\Lambda$, le germe de f en x est algébrique sur $\mathcal{O}_x$, i.e. vérifie une équation : $\sum_{i=0}^{p} a_i f^i = 0$ où les $a_i \in \mathcal{O}_x$ sont non tous nuls; on notera $\mathrm{N}_{\mathbf{R}^n}(\Lambda)$ (ou $\mathrm{N}(\Lambda)$ s'il n'y a pas de confusion possible) l'anneau des germes de fonctions Nash-analytiques sur Λ.

Si $\mathrm{A}(\Lambda)$ désigne l'anneau des fonctions analytiques sur un voisinage de Λ, et $\bar{\Lambda}$ l'adhérence de Λ, nous noterons $\mathrm{N}'(\Lambda)$ la clôture algébrique de $\mathrm{A}(\bar{\Lambda})$ dans $\mathrm{A}(\Lambda)$; $\mathrm{N}'(\Lambda)$ est un sous-anneau de $\mathrm{N}(\Lambda)$; si Λ est connexe, $\mathrm{N}'(\Lambda)$ est l'ensemble des fonctions analytiques au voisinage de Λ vérifiant une équation $\sum_{i=0}^{p} a_i f^i = 0$ où les $a_i \in \mathrm{A}(\bar{\Lambda})$ et sont non tous nuls.

Le but de cette partie est de montrer que si Λ est relativement compacte $N'(\Lambda)$ est nœthérien, et d'étudier la conjecture suivante :

I.0. *Conjecture.* – Si Λ est une partie s.a. relativement compacte, l'anneau $N(\Lambda)$ est nœthérien.

Cette conjecture est vraie si Λ est compacte [4], et la démonstration du résultat sur $N'(\Lambda)$ est tout à fait analogue à celle du même théorème pour les fonctions de Nash (i.e. les fonctions analytiques algébriques sur les polynômes) sur un ouvert semi-algébrique ou semi-analytique relativement compact (cf. [12]).

Dans toute cette partie, Λ désignera une partie s.a. connexe relativement compacte dans $\mathbf{R}^n$.

1. Idéaux maximaux de $N(\Lambda)$ et $N'(\Lambda)$.

I.1.1. Proposition. – *Soit* M *un idéal maximal de* $N(\Lambda)$ (*resp.* $N'(\Lambda)$); *il existe alors un point* $x \in \Lambda$ *tel que* $M = \{f \in N(\Lambda)\,;\ f(x)=0\}$ (*resp.* $M=\{f \in N'(\Lambda)\,;\ f(x)=0\}$).

Démonstration. – Soit M un idéal maximal de $N(\Lambda)$; il suffit de montrer qu'il existe $x \in \Lambda$ tel que tous les éléments de M s'annulent en x.

Supposons par l'absurde que $\forall x \in \Lambda$, $\exists f \in M$ tel que $f(x) \neq 0$.

Si $f \in M$, notons $V(f)$ l'ensemble des zéros de f dans Λ : $V(f)$ est un sous-ensemble semi-analytique de Λ ([10], théorème I.7.1.). Soit d sa dimension : l'ensemble des points lisses de $\dim d$ de $V(f)$ est alors un sous-ensemble semi-analytique de $V(f)$ qui a donc un nombre fini de composantes connexes $V_i (1 \leqslant i \leqslant p)$ (cf. [9]). Il existe par hypothèse pour chaque i $(1 \leqslant i \leqslant p)$ une fonction $f_i \in M$ non identiquement nulle sur V_i.

La fonction $g = f^2 + \sum_{i=1}^{p} f_i^2$ est alors un élément de M tel que $\dim V(g) < d$. En continuant ainsi, on voit que l'on obtient au bout d'un nombre fini d'opérations un élément $h \in M$ qui ne s'annule pas dans Λ, ce qui est absurde (car h est alors inversible). c.q.f.d.

I.1.2. Proposition. – *Soit* $x \in \Lambda$ *un point que nous supposerons être l'origine des coordonnées,* M *l'idéal maximal de* $N'(\Lambda)$ *correspondant et* $N'(\Lambda)_M$ *le localisé de* $N'(\Lambda)$ *par rapport à* M; *l'anneau local* $N'(\Lambda)_M$ *est alors nœthérien et de complété isomorphe à* $\mathbf{R}[[X_1,\ldots,X_n]]$.

Démonstration (cf. [12] proposition 2.7.). — Si Λ_1 est la composante connexe de Λ contenant x, on voit facilement que $N'(\Lambda)_M = N'(\Lambda_1)_M$. On peut donc supposer Λ connexe. L'anneau $A(\Lambda)$ des fonctions analytiques sur Λ est alors intégralement clos (car cela se voit localement) et donc $N'(\Lambda)$ aussi puisqu'il est intégralement fermé dans $A(\Lambda)$.

Si R désigne le localisé de $A(\bar{\Lambda})$ par rapport à l'idéal maximal correspondant au point x, R est un anneau nœthérien par le théorème de Frish [4] dont le hensélisé ${}^h R$ contient $N'(\Lambda)_M$: ${}^h R$ est en effet algébriquement clos dans son complété ([11] p. 189). La proposition résulte alors du lemme suivant (cf. [12], lemme 2.8. ou [11] p. 181) :

I.1.3. Lemme. — *Soient* R *un anneau local nœthérien intégralement clos,* ${}^h R$ *son hensélisé,* B *un anneau local intégralement clos tel que* $R \subset B \subset {}^h R$ (*les injections étant des morphismes locaux*). *Alors* B *est nœthérien et plat sur* R.

2. Nœthérianité de $N'(\Lambda)$.

La démonstration est en tous points analogue à celle de [12], théorème 2.1. Nous allons simplement ici la résumer.

I.2.1. Proposition. — *Soit* $\mathscr{P} \subset A(\bar{\Lambda})$ *un idéal premier de hauteur* h. *Alors :*

1) *Il n'y a qu'un nombre fini d'idéaux premiers* $\mathscr{P}_1, \ldots, \mathscr{P}_k$ *de* $N'(\Lambda)$ *au-dessus de* $\mathscr{P}$ (*i.e. tels que* $\mathscr{P}_i \cap A(\bar{\Lambda}) = \mathscr{P}$).

2) *Les idéaux* $\mathscr{P}_i$ *sont de hauteur* h, *et l'on a* $\bigcap_{i=1}^{k} \mathscr{P}_i = \mathscr{P} N'(\Lambda)$.

Démonstration. — Le point 2) se vérifie localement (i.e. dans chaque localisé $N'(\Lambda)_M$ où M est un idéal maximal), et résulte de propriétés algébriques du hensélisé d'un anneau local (cf. [11], p. 187).

Pour le point 1) on applique le théorème III.4.3 de [10] : il existe une partition finie $\Lambda = \cup \Lambda_i$ en parties s.a. connexes satisfaisant la propriété suivante : soit V l'espace analytique défini par l'idéal $\mathscr{P}$. Alors si $x \in \Lambda_i$ et si $V_j (1 \leqslant j \leqslant q)$ sont les composantes irréductibles (complexes) de V en x, pour tout y de Λ_i assez voisin de x et tout $j \in [1,q]$, $y \in V_j$ et V_j est irréductible en y. On déduit immédiatement de cela le lemme suivant :

I.2.2. Lemme. — *Soit* $\mathscr{P}_1 \subset N'(\Lambda)$ *un idéal premier au-dessus de* $\mathscr{P}$, Y *l'ensemble des zéros de* $\mathscr{P}_1$. *Alors si* Y *rencontre* Λ_i, Y *contient* Λ_i.

Pour montrer la proposition I.2.1 il suffit maintenant de voir qu'il n'y a qu'un nombre fini d'idéaux premiers de $N'(\Lambda)$ au-dessus de $\mathscr{P}$ qui rencontrent un des Λ_i, Λ_1 par exemple. Mais si $x \in \Lambda_1$, tous ces idéaux sont inclus dans l'idéal maximal M correspondant au point x, et l'anneau $N'(\Lambda_1)_M$ étant nœthérien, il n'y en a qu'un nombre fini qui sont au-dessus de $\mathscr{P}$. c.q.f.d.

I.2.3. COROLLAIRE. — *Soit* $x = (x_1,\ldots,x_n)$ *un point de* Λ ; *alors l'idéal maximal* M_x *de* $N'(\Lambda)$ *correspondant est de type fini, engendré par* $(X_1 - x_1,\ldots,X_n - x_n)$.

Cela provient immédiatement de la proposition précédente, car M_x est le seul idéal premier de $N'(\Lambda)$ au-dessus de l'idéal maximal de $A(\bar{\Lambda})$ correspondant au point $x = (x_1,\ldots,x_n)$. Or ce dernier est engendré par les éléments $(X_1 - x_1,\ldots,X_n - x_n)$ (considérés comme éléments de $A(\bar{\Lambda})$) par le théorème B de Cartan.

Nous pouvons maintenant montrer (toujours sous l'hypothèse que Λ est relativement compact) :

I.2.4. THÉORÈME. — *L'anneau* $N'(\Lambda)$ *est nœthérien.*

Démonstration. — On utilise le lemme suivant (cf. [11], p. 8).

I.2.5. LEMME. — *Soit* A *un anneau commutatif unitaire. Si tous les idéaux premiers de hauteur* $\geqslant h$ *sont de type fini, tous les idéaux de hauteur* $\geqslant h$ *sont de type fini.*

Pour démontrer le théorème, on raisonne par récurrence descendante sur la hauteur, les idéaux de hauteur n étant maximaux et de type fini par I.2.3.

Soit $\mathscr{P}_1$ un idéal premier de $N'(\Lambda)$ de hauteur h, $\mathscr{P} = \mathscr{P}_1 \cap A(\bar{\Lambda})$, $\mathscr{P}_2,\ldots,\mathscr{P}_k$ les autres idéaux premiers de $N'(\Lambda)$ au-dessus de $\mathscr{P}$. Posons $Q = \mathscr{P}_2 \cap \ldots \cap \mathscr{P}_k$; dans la suite exacte :

$$0 \to \mathscr{P}N'(\Lambda) \to \mathscr{P}_1 \oplus Q \to \mathscr{P}_1 + Q \to 0$$

$\mathscr{P}N'(\Lambda)$ est de type fini (car $A(\bar{\Lambda})$ est nœthérien) et $\mathscr{P}_1 + Q$ aussi (par hypothèse de récurrence). Il en est donc de même de $\mathscr{P}_1$. c.q.f.d.

I.2.6. *Remarque.* — On peut se demander si la théorie de Merrien [10] peut se faire en remplaçant l'anneau $N(\Lambda)$ par $N'(\Lambda)$, plus maniable algébriquement ; le théorème clef de [10] est le théorème de division II.2.4 dont la démonstration ne s'applique pas à $N'(\Lambda)$; certains résultats restent cependant vrais.

Observons d'abord que l'on a deux lemmes de démonstration immédiate :

I.2.7. LEMME. — *Soient* Λ *une partie s.a. de* $\mathbf{R}^n$, $f \in N(\Lambda)$; *il existe alors une partition localement finie :* $\Lambda = \cup \Lambda_i$ *en parties s.a. telle que* $f \in N'(\Lambda_i)\, \forall i$.

I.2.8. LEMME. — *Soient* Λ *une partie s.a. connexe de* $\mathbf{R}^n$, $f \in N'(\Lambda)$. *On a alors l'égalité :*

$$(f)N(\Lambda) \cap N'(\Lambda) = (f)N'(\Lambda).$$

On déduit de I.2.7 et du théorème III.7.1 de [10] le théorème suivant :

I.2.9. THÉORÈME. — *Soit* X *une partie semi-analytique dans* $\mathbf{R}^n$. *Alors si* I *désigne le faisceau d'idéaux des germes analytiques nuls sur* X, *il existe une partition localement finie :* $X = \cup \Lambda_i$ *en parties s.a., et pour tout* Λ *de la partition une famille finie d'éléments de* $N'(\Lambda)$ *engendrant* I *sur* Λ.

I.2.10. *Remarque.* — Si $\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^{n-p} \times \mathbf{R}^p$, avec les coordonnées $y = (y_1, \ldots, y_{n-p})$ sur $\mathbf{R}^{n-p}$ et $x = (x_1, \ldots, x_p)$ sur $\mathbf{R}^p$, et si $\Lambda \subset \mathbf{R}^n$ est une partie s.a. relativement compacte, les propriétés de nœthérianité de $N'(\Lambda)$ sont encore valables pour l'anneau $N''(\Lambda)$, clôture algébrique de $A''(\bar{\Lambda})$ dans $A(\Lambda)$, $A''(\bar{\Lambda})$ désignant l'anneau des fonctions analytiques au voisinage de $\bar{\Lambda}$ qui sont des polynômes en $X_1, \ldots, X_p$.

3. Prolongement de fonctions Nash-analytiques.

Soit $\Lambda \subset \mathbf{R}^n$ une partie s.a. relativement compacte, 0 un point de Λ que nous supposerons être l'origine, et soit $H \subset \mathbf{R}^n$ un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$ de dimension p, identifié à $\mathbf{R}^p$; il existe une application canonique $\varphi_H : N_{\mathbf{R}^n}(\Lambda) \to N_{\mathbf{R}^p}(\Lambda \cap H)$ dont le noyau est l'idéal de $N_{\mathbf{R}^n}(\Lambda)$ formé des éléments nuls sur $\Lambda \cap H$.

I.3.1. DÉFINITION. — *On dit que* Λ *possède la propriété* (p) (*ou propriété de prolongement*) *au point* $x \in \Lambda$ *si pour tout sous-espace linéaire* H *de* $\mathbf{R}^n$ *passant par* x, *l'application* φ_H *correspondante est surjective.*

I.3.2. *Exemples.* — 1) Si Λ est fermé, Λ possède la propriété (p) en tout point : cela résulte du théorème B de Cartan.

2) Si Λ est une boule, il est facile de voir que Λ possède la propriété (p) en tout point.

I.3.3. PROPOSITION. — *Supposons que* $0 \in \Lambda$ *et que* Λ *possède la propriété* (p) *en* 0 ; *alors l'idéal maximal* M *de* $N(\Lambda)$ *formé des éléments nuls en* 0 *est engendré par* $(X_1, \ldots, X_n)$.

Démonstration. — Nous allons montrer par récurrence sur p que l'idéal de $N(\Lambda)$ formé des fonctions f nulles sur $(X_1 = 0) \cap \ldots \cap (X_p = 0) \cap V_f(\Lambda)$ ($V_f(\Lambda)$ désignant un voisinage de Λ dépendant de la fonction f) est engendré par les fonctions $(X_1, \ldots, X_p)$ considérées comme éléments de $N(\Lambda)$.

a) L'assertion est vraie sans hypothèse pour $p = 1$, car si $f \in N(\Lambda)$ s'annule sur $(X_1 = 0) \cap V_f(\Lambda)$, la fonction $g = \dfrac{f}{X_1}$ est analytique sur $V_f(\Lambda)$, et si f vérifie une équation $a_n f^n + \ldots + a_1 f + a_0 = 0$ au voisinage de $x \in \partial\Lambda$ avec $a_i \in \mathcal{O}_x$ et $a_0 \not\equiv 0$, g vérifie l'équation $a_n X_1^n g^n + \cdots + a_1 X_1 g + a_0 = 0$ dans le même voisinage, ce qui montre que $g \in N(\Lambda)$.

b) Supposons le résultat démontré jusqu'au rang $p - 1$ et supposons que $f \in N(\Lambda)$ vérifie l'équation $f(0, \ldots, 0, X_{p+1}, \ldots, X_n) = 0$ dans un voisinage $V_f(\Lambda)$ de Λ.

On peut alors écrire, d'après le cas $p = 1$:

$$f(0, \ldots, 0, X_p, \ldots, X_n) = X_p g(X_p, \ldots, X_n)$$

dans

$$N_{\mathbf{R}^{n-p+1}}(\Lambda \cap (X_1 = 0) \cap \ldots \cap (X_{p-1} = 0)).$$

Soit $\tilde{g}(X_1, \ldots, X_n)$ un élément de $N_{\mathbf{R}^n}(\Lambda)$ prolongeant g (qui existe par hypothèse) : il suffit d'appliquer l'hypothèse de récurrence à la fonction $f - X_p \tilde{g}$. c.q.f.d.

I.3.4. *Remarque.* — La conclusion de la proposition I.3.3 est vraie sous des hypothèses moins fortes que la propriété (p) en 0, comme il résulte de la démonstration ; il suffit en effet de supposer que la propriété de prolongement est vraie pour les sous-espaces de la forme $(X_1 = 0) \cap \ldots \cap (X_p = 0)$.

Ceci permet facilement de montrer que si Λ_n est un simplexe standard (ouvert) de $\mathbf{R}^n$, et si $0 \in \Lambda_n$, alors l'idéal maximal M de $N(\Lambda_n)$ correspondant est engendré par $(X_1,\ldots,X_n)$.

4. Sur l'anneau des fonctions Nash-analytiques en un point du bord.

Les résultats de ce paragraphe ne seront pas utilisés dans la suite.

Soit Λ une partie de $\mathbf{R}^n$ s.a., $x \in \bar{\Lambda}\backslash\Lambda$; nous allons étudier l'anneau $N_x(\Lambda_x)$ des germes en x de fonctions Nash-analytiques sur le germe de Λ en x. On a des injections canoniques (en supposant Λ connexe) :

$$N(\Lambda) \to N_x(\Lambda_x)$$

et

$$\mathcal{O}_x = \mathcal{O}_{\mathbf{R}^n, x} \to N_x(\Lambda_x).$$

I.4.1. PROPOSITION. — *Soit* $M \subset N_x(\Lambda_x)$ *un idéal maximal; alors* $\mathcal{P} = M \cap \mathcal{O}_x$ *est l'idéal premier formé des germes nuls sur un germe de courbe analytique* C *irréductible en* x, *et* M *est l'idéal de* $N_x(\Lambda_x)$ *formé des germes nuls sur une composante connexe du germe* $(C\backslash\{x\} \cap \Lambda)_x$.

I.4.2. COROLLAIRE. — *Si* $\mathcal{P} \subset \mathcal{O}_x$ *est l'idéal des germes nuls sur un germe de courbe* C *irréductible en* x, *les idéaux maximaux de* $N_x(\Lambda_x)$ *au-dessus de* $\mathcal{P}$ *sont en correspondance bi-univoque avec les composantes connexes de* $(C-\{x\} \cap \Lambda)_x$; *il y en a donc* 0,1, *ou* 2 *suivant les cas.*

Démonstration. — Si M est un idéal maximal de $N_x(\Lambda_x)$, $M \cap \mathcal{O}_x = \mathcal{P}$ est un idéal premier non nul (car si $f \in M$, f satisfait une équation : $a_n f^n + \ldots + a_1 f + a_0 = 0$ avec $a_i \in \mathcal{O}_x$, $a_0 \neq 0$, et donc $a_0 \in \mathcal{P}$) tel que $V(\mathcal{P}) \cap \Lambda_x \neq \varnothing$ (sinon il existerait $f \in \mathcal{P}$ non nul sur Λ_x, ce qui est absurde).

Le raisonnement est maintenant tout à fait analogue à celui de [12], démonstration de la proposition 2.2. Remarquons d'abord que tout élément f de M s'annule sur $V(\mathcal{P}) \cap \Lambda_x$ (car sinon, si $\mathcal{P} = (g_1,\ldots,g_k)$, l'élément $f^2 + \sum_{i=1}^{k} g_i^2$ de M serait inversible), ce qui entraîne que $\mathcal{P}$ est l'idéal de tous les germes nuls sur $V(\mathcal{P})$ (sinon. si $\mathcal{P}'$ est l'idéal des germes de $\mathcal{O}_x$ nuls sur $V(\mathcal{P})$, l'idéal $M + (\mathcal{P}')$ de $N_x(\Lambda_x)$ contiendrait strictement M, ce qui est absurde).

Si $f \in \mathrm{M}$, le germe de $\mathrm{X}_f = (\mathrm{V}(f) \cap \Lambda)_x$ est semi-analytique ($\mathrm{V}(f)$ désignant l'ensemble des zéros de f) : cf. [10], théorème I.7.1. Soit $d = \inf_{f \in \mathrm{M}} \dim \mathrm{X}_f$: nous allons montrer que $d = 1$; supposons en effet que $d > 1$: si $f \in \mathrm{M}$ est tel que $\dim \mathrm{X}_f = d$, le germe des points lisses de f contient un nombre fini de germes de variétés connexes $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_k$ de dimension d (cf. [9]). Or pour chaque X_i, il existe $g_i \in \mathrm{M}$ non identiquement nul sur X_i (car dans le cas contraire, si C est le germe en x d'une courbe analytique telle que $\mathrm{C} \subset \mathrm{X}_i$, l'ensemble des éléments de $\mathrm{N}_x(\Lambda_x)$ nuls sur C formerait un idéal contenant M strictement); la fonction $g = \sum_{i=1}^{k} g_i^2$ est alors un élément de M tel que $\dim \mathrm{X}_g < d$, ce qui est absurde.

On a donc $d = 1$; soit $g \in \mathrm{M}$ tel que $\dim \mathrm{X}_g = 1$: le plus petit germe en x d'ensemble analytique contenant X_g est une courbe C nécessairement irréductible, et telle que $\mathrm{C} \subset \mathrm{V}(\mathscr{P})$; on a donc $\mathrm{C} = \mathrm{V}(\mathscr{P})$ (toujours par le même raisonnement).

Il reste à montrer que si le germe $(\mathrm{C} - \{x\}) \cap \Lambda_x$ est réunion de deux composantes connexes C_1 et C_2, il y a au-dessus de $\mathscr{P}$ deux idéaux maximaux M_1 et M_2, M_1 (resp. M_2) étant l'ensemble des éléments de $\mathrm{N}_x(\Lambda_x)$ nuls sur C_1 (resp. C_2).

I.4.3. LEMME. — *Soit* C *un germe en* x *de courbe analytique irréductible tel que* $\mathrm{C} - \{x\}$ *ait deux composantes connexes* C_1 *et* C_2 (*avec, comme toujours, un abus de langage consistant à identifier un germe et un représentant bien choisi de ce germe*). *Il existe alors* $g \in \mathcal{O}_{\mathbf{R}^n, x}$ *tel que :*

$$\begin{cases} g(\mathrm{C}_1) > 0 \\ g(\mathrm{C}_2) < 0 . \end{cases}$$

Démonstration. — Soit $\Psi : (\mathbf{R}, o) \to (\mathrm{C}, x)$ le morphisme de normalisation; si t est le paramètre sur $\mathbf{R}$ (nul en 0), il suffit de trouver $g \in \mathcal{O}_{\mathbf{R}^n, x}$ tel que $g \circ \Psi$ soit d'ordre impair en t, car alors $g \circ \Psi$ changera de signe sur les deux composantes de $\mathbf{R} - \{\mathbf{0}\}$, et donc g changera de signe sur $\mathrm{C} - \{x\}$, Ψ étant un homéomorphisme. Mais l'ordre en t de $g \circ \Psi$ appartient au semi-groupe de la courbe C qui contient tous les nombres entiers supérieurs à un entier assez grand N (cf. par exemple [18]) et donc contient un nombre impair. c.q.f.d.

I.4.4. PROBLÈME. — *Une propriété analogue à celle du lemme* I.4.3 *est-elle vraie si* $\dim \mathrm{C} > 1$?

Revenons à la démonstration de I.4.1 et I.4.2 : si $\mathscr{P} = (g_1,\ldots,g_k)$, $\varphi_1 = \sqrt{g_1^2 + \cdots + g_k^2 + g^2} + g$ appartient à $N_x(\Lambda_x)$ et s'annule sur C_2 seulement, alors que $\varphi_2 = \sqrt{g_1^2 + \cdots + g_k^2 + g^2} - g$ s'annule sur C_1 seulement ; si I désigne l'ensemble des éléments de $N_x(\Lambda_x)$ nuls sur C, on a donc $I = M_1 \cap M_2$ où M_1 (resp. M_2 est l'ensemble des éléments nuls sur C_1 (resp. C_2), et où $M_1 \neq M_2$.

Il reste à voir que M_1 et M_2 sont maximaux, ce qui est facile compte tenu du fait que si $\Psi \in N_x(\Lambda_x)$, $V(\Psi)$ est le germe d'un ensemble semi-analytique. c.q.f.d.

I.4.5. Proposition. — *Soit* Λ *une partie s.a. de* $\mathbf{R}^n$; *alors l'anneau* $N_x(\Lambda_x)$ *est nœthérien.*

Le raisonnement est analogue à celui du théorème I.2.4 :

I.4.6. Lemme. — *Soient* $\Lambda' \subset \Lambda$ *deux ensembles s.a. ; alors le morphisme de restriction :*

$$\varphi : N'(\Lambda) \to N'(\Lambda') \textit{ est plat.}$$

Démonstration. — Il suffit de voir que pour tout idéal maximal M de $N'(\Lambda')$, le morphisme φ_M déduit de φ :

$$N'(\Lambda)_{\varphi^{-1}_{(M)}} \to N'(\Lambda')_M \text{ est plat.}$$

Mais M est l'idéal maximal correspondant à un point $x \in \Lambda'$, et $\varphi^{-1}(M)$ est l'idéal maximal de $N'(\Lambda)$ formé des éléments nuls en x. Les anneaux locaux $N'(\Lambda)_{\varphi^{-1}(M)}$ et $N'(\Lambda')_M$ sont alors nœthériens et ont même complété $\mathcal{O}_{\mathbf{R}^n,x}$ ([11], p. 55) ce qui entraîne immédiatement la platitude de φ_M.

I.4.7. Corollaire. — *Sous les hypothèses de* I.4.6, *si* $x \in \partial\Lambda \cap \partial\Lambda'$, *le morphisme de restriction* φ :

$$N_x(\Lambda_x) \to N_x(\Lambda'_x) \textit{ est plat.}$$

Démonstration. — Posons $A = N_x(\Lambda_x)$ et $B = N_x(\Lambda'_x)$; soient $(g_i) \in B^n$ des relations entre les $C_{i_k} \in A$ $(1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant k \leqslant p)$; il faut montrer que ces relations sont engendrées par des relations dans A^p ; mais il existe une boule V de centre x telle que $g_i \in N'(\Lambda' \cap V)(1 \leqslant i \leqslant n)$ et $C_{i_k} \in N'(\Lambda \cap V)$ $(1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant k \leqslant p)$, et le morphisme $N'(\Lambda \cap V) \to N'(\Lambda' \cap V)$ est plat par I.4.6. c.q.f.d.

Démontrons maintenant la proposition I.4.5 : soit $\mathscr{P}'$ un idéal premier de $N_x(\Lambda_x)$, $\mathscr{P} = \mathscr{P}' \cap \mathscr{O}_x$.

Remarquons d'abord que si $\mathscr{P}'_1$ est un autre idéal premier de $N_x(\Lambda_x)$ tel que $\mathscr{P}' \subset \mathscr{P}'_1$ et que $\mathscr{P} = \mathscr{P}'_1 \cap \mathscr{O}_x$, alors $\mathscr{P}' = \mathscr{P}'_1$ (cf. [10], th. III.6.1 : il suffit de considérer $f \in \mathscr{P}'_1$, et un polynôme $\sum_{i=0}^{q} a_i X^i$ à coefficients dans $\mathscr{O}_x$ de degré minimal tel que $\Sigma a_i f^i \in \mathscr{P}'$). Il existe alors d'après [10] théorème III.6.1 une partition finie de $V \cap \Lambda$ (où V est un voisinage de x), en parties s.a. telles que pour tout i :

1) Il n'existe qu'un nombre fini d'idéaux premiers $\mathscr{P}'_j$ dans $N_x(\Lambda_{ix})$ au-dessus de $\mathscr{P}$, et ces idéaux sont de type fini.

2) $\cap \mathscr{P}'_j = \mathscr{P} N_x(\Lambda_{ix})$.

D'après I.4.7, on a aussi que le morphisme canonique φ :

$$N_x(\Lambda_x) \to \bigoplus_i N_x(\Lambda_{ix}) \text{ est fidèlement plat.}$$

On en déduit immédiatement qu'il n'existe qu'un nombre fini d'idéaux premiers $\mathscr{P}''_k$ de $N_x(\Lambda_x)$ au-dessus de $\mathscr{P}$ et que $\cap \mathscr{P}''_k = \mathscr{P} N_x(\Lambda_x)$.

La fin de la démonstration est maintenant identique à la démonstration du théorème I.2.4. c.q.f.d.

II. MORPHISMES ANALYTIQUEMENT RÉGULIERS

Le but de cette partie est de montrer, par des méthodes différentes, un théorème analogue au théorème 5.5 de l'appendice de [14], pour pouvoir l'appliquer aux fonctions différentiables.

1. Morphismes d'anneaux locaux.

Nous considérons toujours la topologie de Krull (définie par les puissances de l'idéal maximal) sur un anneau local.

Si A et B sont deux anneaux locaux nœthériens d'idéaux maximaux $\mathfrak{M}_A$ et $\mathfrak{M}_B$, et $f: A \to B$ un morphisme local (i.e. tel que $f(\mathfrak{M}_A) \subset \mathfrak{M}_B$), $\hat{f}: \hat{A} \to \hat{B}$ désignera l'unique morphisme entre les complétés de A et de B prolongeant l'homomorphisme f.

II.1.1. PROPOSITION. — *Soit* $f: A \to B$ *un morphisme local entre anneaux locaux nœthériens. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

a) $\operatorname{Ker} \hat{f} \simeq \operatorname{Ker} f\hat{A}$.

b) $f(A)$ (*muni de la topologie quotient de celle de* A) *est un sous-espace topologique de* B (*i.e. il existe une application* $e: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ *telle que :*

$$\mathfrak{M}_B^{e(q)} \cap f(A) \subset f(\mathfrak{M}_A^{q+1}) \forall q \in \mathbf{N}).$$

Démonstration. — Quitte à remplacer A par $A/\ker f'$ on peut supposer f injective. Les conditions *a*) et *b*) deviennent alors :

a') $\hat{f}$ est injective,

b') A est un sous-espace topologique de B.

a') $\Rightarrow$ *b'*) : Rappelons le théorème de Chevalley ([11], p. 103) :

II.1.2. LEMME. — *Soient* A *un anneau local nœthérien complet,* B *un anneau local nœthérien dominant* A (*i.e. contenant* A *et tel que* $\mathfrak{M}_B \cap A = \mathfrak{M}_A$), *alors* A *est un sous-espace de* B.

Sous l'hypothèse *a'*), il résulte du lemme II.1.2 que $\hat{A}$ est un sous-espace de $\hat{B}$; comme A est un sous-espace de $\hat{A}$ et B un sous-espace de $\hat{B}$, il en résulte immédiatement que A est un sous-espace de B.

b') $\Rightarrow$ *a'*) : Soit $\varphi \in \hat{A}$ tel que $\hat{f}(\varphi) = 0$, et $q \in \mathbf{N}$; il existe $\varphi_q \in A$ tel que $\varphi - \varphi_q \in \mathfrak{M}_{\hat{A}}^{e(q)}$ (car $A/\mathfrak{M}_A^{e(q)} \simeq \hat{A}/\mathfrak{M}_{\hat{A}}^{e(q)}$). On a alors

$$\hat{f}(\varphi - \varphi_q) = f(-\varphi_q) \in \mathfrak{M}_{\hat{B}}^{e}(q) \cap B = \mathfrak{M}_B^{e(q)},$$

d'où

$$\varphi_q \in \mathfrak{M}_B^{e(q)} \cap A \subset \mathfrak{M}_A^{q+1}$$

par hypothèse (on a identifié A à un sous-anneau de B) et $\varphi \in \mathfrak{M}_{\hat{A}}^{q+1}$ (en supposant $e(q) \geqslant q + 1$), soit $\varphi = 0$ puisque q est un entier arbitraire.

c.q.f.d.

II.1.3. DÉFINITION. — *Nous dirons qu'un morphisme d'anneaux locaux* f *est analytiquement régulier* (*en abrégé :* « *a.r.* ») *s'il vérifie les conditions* *équivalentes de la proposition* II.1.1 (*cette terminologie vient de l'article de Gabrielov* [5]).

II.1.4. *Remarques.* — α) Gabrielov ([4]) donne l'exemple d'un morphisme non a.r., où :

$$\mathrm{A} = \mathbf{R}\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$$
$$\mathrm{B} = \mathbf{R}\{t_1,t_2\}.$$

β) Supposons B réduit, et soient $(\mathscr{P}_i)\ 1 \leqslant i \leqslant k$ les idéaux premiers minimaux de B. Alors si $\pi_i : \mathrm{B} \to \mathrm{B}/\mathscr{P}_i$ désigne la projection canonique, pour que f soit a.r., il faut et il suffit que les $\pi_i \circ f$ le soient $(1 \leqslant i \leqslant k)$ ([6], p. 1086. La démonstration est immédiate). Ceci permet de supposer B intègre.

γ) Le théorème de Artin-Rees montre que tout morphisme *fini* est a.r.

δ) Si $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ est un morphisme local plat d'anneau locaux nœthériens, f est a.r.

Il suffit en effet de montrer que $\hat{f} : \hat{\mathrm{A}} \to \hat{\mathrm{B}}$ est injectif, ce qui est immédiat : soit $\lambda \in \hat{\mathrm{A}}$ tel que $\hat{f}(\lambda) = 0$; si $q \in \mathbf{N}$ il existe $\lambda_q \in \mathrm{A}$ tel que $\lambda - \lambda_q \in \mathfrak{M}_{\mathrm{A}}^q\hat{\mathrm{A}}$, d'où

$$\hat{f}(\lambda-\lambda_q) = -f(\lambda_q) \in \mathfrak{M}_{\mathrm{A}}^q\hat{\mathrm{B}}, \qquad \text{soit} \qquad \lambda_q \in \mathrm{A} \cap \mathfrak{M}_{\mathrm{A}}^q\hat{\mathrm{B}} = \mathfrak{M}_{\mathrm{A}}^q$$

puisque le morphisme $\mathrm{A} \to \hat{\mathrm{B}}$ est fidèlement plat; on a donc $\lambda \in \mathfrak{M}_{\mathrm{A}}^q\hat{\mathrm{A}}$, d'où $\lambda = 0$ puisque q est arbitraire.

Rappelons maintenant une proposition appelée « Zariski Subspace theorem » par Abhyankar; on dit qu'une A-algèbre B est essentiellement de type fini sur A (ou en anglais que B est un « spot » au-dessus de A) si B est isomorphe au localisé par rapport à un idéal premier d'une A-algèbre de type fini.

II.1.5. Proposition ([1], p. 240). — *Soit* $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ *un morphisme local d'anneaux nœthériens tel que :*

α) B *soit essentiellement de type fini sur* A.

β) f *soit injective,* B *intègre, et* f *induise un isomorphisme des corps des fractions de* A *et* B.

γ) $\hat{\mathrm{A}}$ *est intègre.*

Alors f *est a.r.*

II.1.6. COROLLAIRE. — *Soient* A *un anneau local nœthérien pseudogéométrique* ([11], p 131) *tel que* $\hat{A}$ *soit intégralement clos,* B *un anneau local intègre dominant* A *et essentiellement de type fini sur* A ; *alors* A *est un sous-espace de* B (*i.e. l'injection* $A \to B$ *est a.r.*).

Démonstration. — Soient $K(A)$ et $K(B)$ les corps des fractions de A et B.

a) Montrons d'abord que l'on peut supposer $K(B)$ *fini sur* $K(A)$. $K(B)$ est une extension de type fini de $K(A)$ par hypothèse ; soit $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ une base de transcendance de $K(B)$ sur $K(A)$, avec $x_i \in \mathfrak{M}_B$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ et posons $C = A[\underline{x}]_{(\mathfrak{M}_A, \underline{x})}$.

On a des inclusions locales $A \subset C \subset B$ et il est immédiat de voir que A est un sous-espace de C (et même que $\mathfrak{M}_C^n \cap A = \mathfrak{M}_A^n$, $\forall n \in \mathbf{N}$) ; d'autre part $\hat{C} \simeq \hat{A}[[\underline{x}]]$ est intégralement clos ; pour montrer que A est un sous-espace de B, il suffit donc de voir que C est un sous-espace de B.

b) Supposons $K(B)$ *fini sur* $K(A)$. — La fermeture intégrale $\bar{A}$ de A dans $K(B)$ (resp. $\bar{B}$ de B dans $K(B)$) est un anneau semi-local fini sur A (resp. sur B) car A et B sont pseudogéométriques. De plus $\bar{A}$ et $\bar{B}$ ont même corps des fractions $K(B)$. Soit $\mathfrak{M}$ un idéal maximal de $\bar{B}$, $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M} \cap \bar{A}$; $\mathfrak{M}'$ est un idéal maximal de $\bar{A}$ et les anneaux locaux $\bar{A}_{\mathfrak{M}'}$ et $\bar{B}_{\mathfrak{M}}$ ont même corps des fractions $K(B)$; $\bar{B}_{\mathfrak{M}}$ est essentiellement de type fini sur $\bar{A}_{\mathfrak{M}'}$ et $(\bar{A}_{\mathfrak{M}'})\hat{}$ est intègre ([11], p. 136, 37.3) : $\bar{A}_{\mathfrak{M}'}$ est donc un sous-espace de $\bar{B}_{\mathfrak{M}}$ par II.1.5. Pour voir que A est un sous-espace de B, il suffit de voir que c'est un sous-espace de $\bar{B}_{\mathfrak{M}}$; il suffit donc de montrer que A est un sous-espace de $\bar{A}_{\mathfrak{M}'}$, ce qui résulte du lemme suivant :

11.1.7. LEMME. — *Soient* A *un anneau local intégralement clos tel que* $\hat{A}$ *soit intègre,* B *un anneau intègre entier sur* A. *Alors pour tout idéal maximal* $\mathfrak{M}$ *de* B, *l'injection* $\varphi : A \to B_{\mathfrak{M}}$ *est a.r.*

Démonstration. — Remarquons que $\dim A = \dim B = \dim B_{\mathfrak{M}}$ par le « going down theorem » ([11], p. 31), et donc $\dim \hat{A} = \dim \hat{B}_{\mathfrak{M}}$. On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & B_{\mathfrak{M}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \hat{A} & \xrightarrow{\hat{\varphi}} & \hat{B}_{\mathfrak{M}} \end{array} \qquad \text{et } \hat{\varphi} \text{ est fini (car quasi-fini).}$$

On a donc $\dim \hat{A}/\ker \hat{\varphi} = \dim \hat{B}_{\mathfrak{M}}$, d'où $\operatorname{Ker} \hat{\varphi} = (0)$ puisque $\hat{A}$ est supposé intègre. c.q.f.d.

II.1.8. COROLLAIRE. — *Soient* A *un anneau local,* B *un anneau local intègre dominant* A *et essentiellement de type fini sur* A ; *alors l'injection* $A \to B$ *est a.r. dans les deux cas suivants :*

a) A *est une algèbre analytique intègre sur* **C** (*ou plus généralement une algèbre sur* **C** *intègre et hensélienne*).

b) A *est une algèbre de type fini sur un corps telle que* $\hat{A}$ *soit intègre.*

Il est en effet facile de voir que la démonstration du corollaire II.1.6 s'applique aux cas *a*) et *b*) ci-dessus (dans les deux cas en effet la clôture intégrale $\bar{A}$ de A est un anneau local).

II.1.9. *Remarque.* — Le corollaire ci-dessus redémontre un résultat de Tougeron ([15] théorème A).

2. Morphismes analytiques.

II.2.1. PROPOSITION. — *Soient* (X,x) *et* (Y,y) *des germes d'espaces analytiques réduits sur* **R** *ou* **C**, $f : X \to Y$ *un morphisme analytique,* $f^* : \mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,x}$ *le morphisme des anneaux locaux correspondant.*

Supposons que ces données vérifient l'hypothèse suivante :

(*H*) *: Il existe une* $\mathcal{O}_{Y,y}$*-algèbre locale* B *contenant* $\mathcal{O}_{\mathcal{O},y}$, *essentiellement de type fini sur* $\mathcal{O}_{Y,y}$ *et contenue dans* $\mathcal{O}_{X,x}$ *telle que* $\hat{B} = \mathcal{O}_{X,x}$. *Alors* f^* *est a.r.*

Démonstration. — Remarquons d'abord que dans le cas réel, pour que f^* soit a.r., il faut et il suffit que son complexifié le soit ; cela permet de supposer que X et Y sont des germes d'espaces analytiques complexes. On peut d'autre part supposer $\mathcal{O}_{Y,y}$ et $\mathcal{O}_{X,x}$ intègres (II.1.4).

Le morphisme $\mathcal{O}_{Y,y} \to B$ est alors a.r. par II.1.8, ainsi que le morphisme $B \to \mathcal{O}_{X,x}$ qui est plat (II.1.4). c.q.f.d.

II.2.2. *Remarque.* — Soit $I \subset \mathcal{O}_{Y,y}$ un idéal, $\pi : \tilde{Y} \to Y$ l'éclatement de I, $x \in \pi^{-1}(y)$. Alors si X désigne le germe de $\tilde{Y}$ en x, le morphisme $X \to Y$ induit par π satisfait aux hypothèses de II.2.1 (cf. [3] où ceci est appliqué à une résolution des singularités de Y).

II.2.3. PROPOSITION. — *Soient* A *une algèbre analytique sur* $\mathbf{C}$ *normale,* B *une* A*-algèbre locale intègre contenant* A *et essentiellement de type fini sur* A, C *une algèbre analytique contenant* B *telle que* $\hat{B} = \hat{C}$, $\mathscr{P}$ *un idéal premier de* C, $\mathscr{P}' = A \cap \mathscr{P}$; *alors le morphisme local :* $A_{\mathscr{P}'} \to C_{\mathscr{P}}$ *est a.r.*

Démonstration. — *a*) Posons $\mathscr{P}_1 = B \cap \mathscr{P}$. B et C ayant par hypothèse même complété, le morphisme $B \to C$ est plat ainsi que le morphisme $B_{\mathscr{P}_1} \to C_{\mathscr{P}}$, qui est donc a.r. par II.1.4. Il suffit donc de montrer que le morphisme $A_{\mathscr{P}'} \to B_{\mathscr{P}_1}$ est a.r.

b) Montrons maintenant la proposition. Pour appliquer II.1.6 nous aurons besoin du lemme suivant :

II.2.4. LEMME. — *Soient* A *une algèbre analytique complexe normale,* $\mathscr{P} \subset A$ *un idéal premier; alors l'anneau* $(A_{\mathscr{P}})\hat{}$ *(complété de* $A_{\mathscr{P}}$ *pour la topologie* $\mathscr{P}A_{\mathscr{P}}$*-adique) est intégralement clos.*

Démonstration. — Supposons que $\mathscr{P}$ soit de hauteur p, et soit $(f_1,\ldots,f_p,x_{p+1},\ldots,x_n) \subset A$ un système de paramètres de A avec $(f_1,\ldots,f_p) \subset \mathscr{P}$; posons $R = \mathbf{C}\{f_1,\ldots,f_p,x_{p+1},\ldots,x_n\}$ et soit L le corps des fractions de A; soit $(f) = (f_1,\ldots,f_p)R_{(f)}$ le localisé de R par rapport à l'idéal (f) et $\overline{R_{(f)}}$ sa clôture intégrale dans L : pour tout idéal maximal $\mathfrak{M}$ de $\overline{R_{(f)}}$, le complété du localisé $\overline{R_{(f)}}_{\mathfrak{M}}$ est intégralement clos ([11], p. 136); mais comme $\mathscr{P} \cap R = (f)$, on a $R_{(f)} \subset A_{\mathscr{P}}$, d'où $\overline{R_{(f)}} \subset A_{\mathscr{P}}$. Soit $\mathfrak{M} = \mathscr{P}A_{\mathscr{P}} \cap \overline{R_{(f)}}$: $\mathfrak{M}$ est un idéal maximal de $\overline{R_{(f)}}$, et $\overline{R_{(f),\mathfrak{M}}} \subset A_{\mathscr{P}}$; ces deux anneaux sont donc égaux ([11], p. 137 : c'est une des formes du « Zariski Main Theorem ») ce qui prouve le lemme.

c.q.f.d.

II.2.4. *Remarque.* — Le résultat de la proposition II.2.3 subsiste si l'on ne suppose plus que A est normale, mais seulement que $(A_{\mathscr{P}'})\hat{}$ (complété de $A_{\mathscr{P}'}$ pour la topologie $\mathscr{P}'A_{\mathscr{P}'}$-adique) est intègre.

En effet, si $\mathscr{P}'_1$ est un idéal premier de $\bar{B}$ au-dessus de $\mathscr{P}'$ et $\mathscr{P}_2 = \bar{A} \cap \mathscr{P}'_1$, le morphisme $\bar{A}_{\mathscr{P}_2} \to \bar{B}_{\mathscr{P}'_1}$ est a.r. par II.2.3, et le morphisme $A_{\mathscr{P}'} \to \bar{A}_{\mathscr{P}_2}$ aussi à cause de l'hypothèse.

Voici un critère géométrique pour reconnaître qu'un morphisme est a.r. (ce critère, dû à Gabrielov, est appelé « condition de Gabrielov » par Tougeron dans [14]).

II.2.5. **Définition.** — *Soient* (X,x) *et* (Y,y) *des germes analytiques complexes,* $\varphi : (X,x) \to (Y,y)$ *un morphisme. Le rang de* φ, *noté* $r(\varphi)$, *est par définition le plus grand entier* r *tel que* $x \in \bar{X}_r$ *où* X_r *désigne l'ensemble des points de* $X \backslash \operatorname{Sing} X$ *où le rang de* φ *est égal à* r.

II.2.6. Proposition ([6], théorèmes 5.5 et 5.2). — *Soient* (X,x) et (Y,y) *deux germes d'espaces analytiques complexes et* $\varphi : (X,x) \to (Y,y)$ *un morphisme; soient* $\varphi^* : \mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,x}$ *et* $\hat{\varphi}^* : \hat{\mathcal{O}}_{Y,y} \to \hat{\mathcal{O}}_{X,x}$ *les morphismes d'anneaux locaux correspondants. Alors si* Y *est irréductible, et si l'on a l'égalité* $r(\varphi) = \dim \hat{\mathcal{O}}_{Y,y}/\ker \hat{\varphi}^*$:

a) φ^* *est a.r.*

b) $\hat{\varphi}^*(\hat{\mathcal{O}}_{Y,y}) \cap \mathcal{O}_{X,x} = \varphi^*(\mathcal{O}_{Y,y})$.

II.2.7. *Remarque.* — On a toujours l'inégalité

$$r(\varphi) \leqslant \dim \hat{\mathcal{O}}_{Y,y}/\ker \hat{\varphi}^* ;$$

cela résulte du théorème de Glaeser ([16], p. 178) dans le cas où X et Y sont lisses, et on en déduit le cas général par résolution des singularités. Revenons à la proposition II.2.3 : sous les hypothèses de II.2.3, on conclut qu'il existe une fonction $\nu \to e(\nu)$ de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ telle que si $f \in A$ vérifie $f \in \mathcal{P}^{e(\nu)}C_{\mathcal{P}}$; alors $f \in \mathcal{P}'^{\nu}A_{\mathcal{P}'} \cap A = \mathcal{P}'^{(\nu)}$. Nous allons donner un critère (classique) pour que $\mathcal{P}'^{(\nu)} = \mathcal{P}'^{\nu}$.

II.2.8. Définition. — *On dit que l'idéal* $\mathcal{P}' \subset A$ *est normalement plat si l'anneau* $\operatorname{Gr}_{\mathcal{P}'}A = \bigoplus_i \mathcal{P}'^i/\mathcal{P}'^{i+1}$ *est un module plat sur* $A/\mathcal{P}'$. *Si* $Z \subset Y$ *est un sous-espace analytique de l'espace analytique* Y, *nous dirons que* Y *est normalement plat en* $y \in Z$ *le long de* Z *si* Z *est irréductible en* y *et si* $\mathcal{P}' = I_y(Z) \subset \mathcal{O}_{Y,y}$ *est normalement plat.*

II.2.9. Lemme. — *Soient* A *un anneau nœthérien intègre,* $\mathcal{P}$ *un idéal premier de* A ; *alors si* $\mathcal{P}$ *est normalement plat, on a l'égalité* $\mathcal{P}^{\nu} = \mathcal{P}^{(\nu)}$ *pour tout nombre entier* $\nu \geqslant 0$ *(rappelons que* $\mathcal{P}^{(\nu)} = \mathcal{P}^{\nu}A_{\mathcal{P}} \cap A$).

Démonstration. — On a évidemment $\mathcal{P}^{\nu} \subset \mathcal{P}^{(\nu)}$. Réciproquement, soit $f \in \mathcal{P}^{(\nu)}$; il existe $\lambda \notin \mathcal{P}$ tel que $\lambda f \in \mathcal{P}^{\nu}$; soit $\bar{\lambda}$ l'image de λ dans $A/\mathcal{P}$ et Inf la forme initiale de f (si $f \in \mathcal{P}^k \backslash \mathcal{P}^{k+1}$, Inf est par définition l'image de f dans $\mathcal{P}^k/\mathcal{P}^{k+1}$). Si l'on avait $f \notin \mathcal{P}^{\nu}$, on obtiendrait alors $\bar{\lambda} \operatorname{Inf} f = 0$ dans $\operatorname{Gr}_{\mathcal{P}}A$, ce qui est impossible puisque par normale platitude la multiplication par $\bar{\lambda}$ est injective dans $\operatorname{Gr}_{\mathcal{P}}A$.. c.q.f.d.

3. Fonctions ν-plates sur un sous-espace d'un espace analytique.

Nous allons reprendre les notions introduites dans [14], appendice, avec les mêmes notations (qui diffèrent de celles de [13]).

II.3.1. Définition. — *Soit* X *un espace analytique complexe réduit,* Y *un sous-ensemble de* X, $\cup$ *un ouvert de* X. *On dit que* $f \in \mathcal{O}_X(\cup)$ *est* ν-*plate sur* Y *si* $\forall y \in \cup \cap Y$, $f_y \in \mathfrak{M}_{X,y}^{\nu+1}$ ($\mathfrak{M}_{X,y}$ *désignant l'idéal maximal de* $\mathcal{O}_{X,y}$). *L'ensemble des germes de fonctions* ν-*plates sur* Y *forme un faisceau noté* $I_{X,Y}^{(\nu+1)}$.

II.3.2. Proposition. — *Soit* $\varphi : X \to Y$ *un morphisme d'espaces analytiques,* $y \in Y$ *et* $x \in \varphi^{-1}(y)$ *tels que* $\mathcal{O}_{Y,y}$ *soit normale et que* $\varphi^* : \mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,x}$ *vérifie l'hypothèse* (H) (II.2.1).

Si $Z' \subset X$ *et* $Z \subset Y$ *sont des sous-ensembles tels que* $\varphi(Z') = Z$ *et* $x \in Z'$, *il existe une fonction* $\nu \to e(\nu)$ *de* $\mathbf{N}$ *dans* $\mathbf{N}$ *telle que si* $f \in \mathcal{O}_{Y,y}$ *appartient à* $I_{X,Z',x}^{e(\nu)}$ ($I_{X,Z'}$, *désignant le faisceau d'idéaux des éléments de* $\mathcal{O}_X$ *nuls sur* Z') *alors* f *est* ν-*plate sur* Z *en* x.

Démonstration. — On peut comme dans [14], § 5 supposer que le plus petit germe analytique contenant le germe de Z' en x est irréductible. Soit $\mathscr{P}' = I_{Y,Z',x}$, $\mathscr{P} = \mathscr{P}' \cap \mathcal{O}_{Y,y}$.

La proposition II.2.3 montre qu'il existe $\lambda \notin \mathscr{P}$ tel que $\lambda f \in \mathscr{P}^{\nu}$: f est donc ν-plate sur $Z \backslash \nu(\lambda)$. II.3.2 en résulte alors comme dans [14], théorème 5.5, en raisonnant par récurrence sur la dimension du plus petit germe analytique contenant le germe de Z en y.

II.3.3. Corollaire (analogue à [14], théorème 5.5). — *Soit* $\varphi : X \to Y$ *un morphisme d'espaces analytiques complexes,* $y \in Y$, $x \in \varphi^{-1}(y)$ *tel que* $\mathcal{O}_{Y,y}$ *soit intégralement clos et que* $\varphi^* : \mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,x}$ *vérifie l'hypothèse* (H). *Soient* $Z \subset Y$, $Z' \subset X$ *des sous-ensembles tels que* $x \in Z'$ *et que* $\varphi(Z) = Z'$. *Il existe alors une fonction* $\nu \to e(\nu)$ *de* $\mathbf{N}$ *dans* $\mathbf{N}$ *telle que si* $f \in \mathcal{O}_{Y,y}$ *est telle que* $f \circ \varphi$ *soit* $e(\nu)$-*plate sur* Z' *en* x, *alors* f *est* ν-*plate sur* Z *en* y.

Démonstration. — Le théorème de résolution des singularités de Hironaka montre qu'il existe un espace lisse $\tilde{X}$, un sous-espace lisse $\tilde{Z}$ de $\tilde{X}$, et un morphisme $\tilde{\varphi} : \tilde{X} \to X$ vérifiant l'hypothèse (H) en un point

$\tilde{x} \in \tilde{\varphi}^{-1}(x) \cap \tilde{Z}$ (cf. II.2.2) et tel que $\tilde{\varphi}(\tilde{Z}) = \tilde{Z}'$ ($\tilde{Z}'$ désignant le plus petit espace analytique contenant Z'). $\tilde{X}$ est alors normalement plat le long de Z, ce qui permet d'appliquer la proposition II.3.2 au morphisme $\varphi \circ \tilde{\varphi}$ (cf. [14], lemme 5.1).

II.3.4. *Remarque.* — On ne peut espérer avoir le même résultat que II.3.2 ou II.3.3. Lorsque Y n'est pas un espace normal au voisinage de y, comme le montre l'exemple suivant : Y est défini par l'équation $x^2 - z^2y^2 + y^5 = 0$ dans $\mathbf{C}^3$, le point y est l'origine, et l'ensemble $Z \subset Y$ est l'axe des z défini par $x = y = 0$: Y est normalement plat le long de Z (car sa multiplicité est constante); $\varphi : X \to Y$ est une carte de l'éclatement de Z dans Y ; X a pour équation dans $\mathbf{C}^3$: $x'^2 - z^2 + y^3 = 0$ et φ est définie par

$$\begin{aligned} x &= x'y \\ y &= y \\ z &= z\,; \end{aligned}$$

le point x de X est l'origine de $\mathbf{C}^3$, et $Z' \subset X$ est l'ensemble

$$\begin{cases} y = 0 \\ x' = z. \end{cases}$$

Considérons φ^* :

$$\mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,x}, \quad \mathcal{P}' = (x,y) \subset \mathcal{O}_{Y,y}, \quad \mathcal{P} = (y, x'-z) \subset \mathcal{O}_{X,x}.$$

Le morphisme φ^* satisfait alors toutes les hypothèses de II.3.2 sauf que $\mathcal{O}_{Y,y}$ n'est pas normale. Cependant le morphisme $\mathcal{O}_{Y,y,\mathcal{P}'} \to \mathcal{P}_{X,x,\mathcal{P}}$ n'est pas a.r. (cela vient du fait qu'il y a deux idéaux premiers dans $\mathcal{O}_{X,x}$ au-dessus de $\mathcal{P}'$, et que $\mathcal{O}_{X,x}$ est fini sur $\mathcal{O}_{Y,y}$) et donc la conclusion de II.3.2 (et de II.3.3) est fausse.

Dans une telle situation, on a le résultat suivant :

II.3.5. LEMME. — *Soient* (Y,y) *un germe analytique irréductible,* ($\bar{Y}$,z) *sa normalisation,* $Z \subset Y$ *un sous-ensemble analytique de* Y, $Z' = \pi^{-1}(Z) \subset \bar{Y}$ (*avec* $\pi : \bar{Y} \to Y$). *Il existe alors une constante* ν_0 *telle que si* $f \in \mathcal{O}_{Y,y}$ *est telle que* $f \circ \varphi$ *soit* $\nu + \nu_0$*-plate sur* Z' *en* z, f *est* ν*-plate sur* Z *au voisinage de* y.

Démonstration (cf. [14], lemme 5.4). — D'après le théorème d'Artin-Rees pour les faisceaux analytiques cohérents (cf. [4]), il existe un voisinage $\cup$

de y dans Y et un entier p tels que $(\mathfrak{M}_{Y,x}^{\nu+p}\mathcal{O}_{Y,x}) \cap \mathcal{O}_{\tilde{Y},x} \subset \mathfrak{M}_{y,x}^{\nu}$, $\forall x \in \cup$ et $\forall \nu$ (entier > 0($\mathcal{O}_{\tilde{Y},x}$ désignant la fibre en x du $\mathcal{O}_Y$-module $\mathcal{O}_{\tilde{Y}}$), ce qui prouve le lemme, le rang de $\mathcal{O}_{\tilde{Y},x}$ étant localement borné.

c.q.f.d.

Signalons aussi le lemme suivant :

II.3.6. LEMME. — *Sous les hypothèses de* II.3.3, *sauf l'hypothèse que* $\mathcal{O}_{Y,y}$ *est intégralement clos, la conclusion subsiste sous l'hypothèse supplémentaire que si* $x_1 \in Z'$ *et* $y_1 = \varphi(x_1)$, *le morphisme déduit de* $\varphi : \mathcal{O}_{Y,y_1} \to \mathcal{O}_{X,x_1}$ *est injectif* (*pour* x_1 *voisin de* x).

Démonstration. — Si l'on pose comme dans II.3.2, $\mathcal{P}' = I_{y,z',x}$, $\mathcal{P} = \mathcal{P}' \cap \mathcal{O}_{Y,y}$, $A = \mathcal{O}_{Y,y}$, $B = \mathcal{O}_{X,x}$, il suffit de montrer que l'injection :

$\varphi^* : A_{\mathcal{P}} \to B_{\mathcal{P}'}$ est a.r., comme dans II.2.3.

Supposons le contraire. et soient ${}^hA_{\mathcal{P}}$ et ${}^hB_{\mathcal{P}}$, les hensélisés respectifs de $A_{\mathcal{P}}$ et $B_{\mathcal{P}'}$; si $\hat{\varphi}^*\hat{A}_{\mathcal{P}} \to \hat{B}_{\mathcal{P}'}$ n'est pas injective, l'application canonique $h_{\varphi^*} : {}^hA_{\mathcal{P}} \to {}^hB_{\mathcal{P}'}$, non plus (cf. le corollaire II.1.8*a*)).

Le raisonnement consiste maintenant à se placer en un « point générique » de Z de la manière suivante : si $f \in {}^hA_{\mathcal{P}}$ est telle que ${}^h\varphi^*(f) = 0$, f est racine simple d'un polynôme : $x^r + C_1x^{r-1} + \cdots + C_r$ à coefficients dans $A_{\mathcal{P}}$, avec $C_r \in \mathcal{P}A_{\mathcal{P}}$ et $C_{r-1} \notin \mathcal{P}A_{\mathcal{P}}$ ([11], p. 182) et donc il existe $y_1 \in Z$ proche de x tel que f définisse un élément f_1 de $\mathcal{O}_{Y,y_1}$. On aurait alors $\varphi_{y_1}^*(f_1) = 0$ (avec $\varphi_{y_1}^* : \mathcal{O}_{Y,y_1} \to \mathcal{O}_{X,x_1}$), ce qui contredit l'hypothèse. c.q.f.d.

III. FONCTIONS COMPOSÉES DIFFÉRENTIABLES

Nous allons dans cette partie donner quelques applications de ce qui précède, en particulier aux fonctions différentiables ; nous suivrons de très près l'article de J. C. Tougeron [14] consacré au cas où le morphisme est semi-algébrique.

Rappelons que le problème est le suivant (cf. [7] ou [14]) : soit f une application analytique $X \to Y$; l'image par f^* de $\mathcal{C}^\infty(Y)$ dans $\mathcal{C}^\infty(X)$ est-elle fermée ? Nous donnerons une réponse positive dans le cas où f est relativement algébrique.

1. Stratification d'un ensemble semi-analytique.

Soient $X \subset \mathbf{R}^n$ un ensemble semi-analytique localement fermé, $Z \subset X$ un sous-ensemble semi-analytique. Rappelons que $I(X)$ désigne le faisceaux d'idéaux de $\mathcal{O}_{\mathbf{R}^n}$ formé des fonctions nulles sur X et que $N'(X)$ désigne l'anneau des fonctions analytiques sur X qui sont algébriques sur l'anneau $A(\bar{X})$ des fonctions analytiques au voisinage de $\bar{X}$.

III.1.1. Proposition (cf. [14], théorème 2.4). — *Si Z est relativement compact, il existe une partition finie $Z = \bigcup_{i \in I} Z_i$ en parties s.a. telles que* $\forall i \in I$:

1) *Il existe un nombre fini de fonctions de* $N'(Z_i)$ *qui engendrent* $I_x(Z)$ $\forall x \in Z_i$.

2) Z_i *est lisse et il existe un nombre fini de fonctions de* $N'(Z_i)$ *qui engendrent* $I_x(Z_i)$ $\forall x \in Z_i$.

3) X *est normalement plat le long de* Z_i *en tout point* $y \in Z_i$ (*cf.* II.2.8 : *la définition a un sens si* X *est supposé semi-analytique*). Pour montrer la propriété 3) nous aurons besoin d'un lemme :

III.1.2. Lemme. — *Soient $Z \subset X$ deux ensembles semi-analytiques. Il existe un ouvert semi-analytique $U \subset Z$, dense dans Z, tel que X soit normalement plat le long de Z en tout point de U.*

Démonstration. — Ce lemme est bien connu : cf. par exemple Lejeune-Teissier : Normal cones and sheaves of relatives jets, Compositio Mathematica, Vol. 28 (1974), th. 4.15.

On peut aussi démontrer ce lemme à l'aide du théorème de platitude générique de Frish [4], X étant normalement plat le long de Z en $x \in Z$ si et seulement si le morphisme $C_{X,Z} \to Z$ est plat au-dessus d'un voisinage de x dans Z, $C_{X,Z}$ désignant le cône normal à X le long de Z.

Comme me l'a fait remarquer E. Bierstone, cet argument ne montre pas que l'ouvert trouvé est semi-analytique ; pour montrer le lemme, il suffit de remarquer que le raisonnement de [14] proposition 2.7 s'applique ici sans changement. c.q.f.d.

Montrons maintenant la proposition : nous allons raisonner par récurrence sur la dimension de Z. Le théorème I.2.9 montre qu'il existe une partition finie $Z = \bigcup_{i=1}^{q} Z'_i$ en sous-ensembles s.a. telle que la propriété 1) soit vérifiée, i.e. il existe pour tout $i (1 \leqslant i \leqslant q)$ un nombre fini de fonctions de $N'(Z'_i)$ qui engendrent $I_x(Z)$ $\forall x \in Z_i$. Soit maintenant $Z = \bigcup_{i \in I} Z_i$ une triangulation finie semi-analytique de Z compatible avec les Z'_i et l'ouvert U du lemme III.1.2 (cf. [9]).

Posons $Z_1 = \bigcup_{i \in J} Z_i$ où $i \in J$ si, et seulement si, $\dim Z_i < \dim Z$. Z_1 est alors un sous-ensemble semi-analytique fermé dans Z et tel que $\dim Z_1 < \dim Z$, et chaque Z_i (avec $i \notin J$) est un ouvert de Z.

Par hypothèse de récurrence, $Z_1 = \cup Z'_j$ où les Z'_j sont compatibles avec les $Z_i (i \in J)$ (et donc satisfont la propriété 1) et satisfont les propriétés 2) et 3). Si maintenant $i \notin J$, Z_i satisfait la propriété 2). Car Z_i étant ouvert, on a $I_x(Z) = I_x(Z_i)$ pour $x \in Z_i$. La propriété 3 résulte de ce que U étant partout dense (cf. le lemme III.1.2) et la triangulation étant compatible avec U, on a nécessairement $Z_i \subset U$ pour $i \in J$. c.q.f.d.

2. Morphismes relativement algébriques.

III.2.1. DÉFINITION. — *Soit* $f : X \to Y$ *un morphisme d'espaces analytiques réels; on dit qu'il est relativement algébrique s'il existe un diagramme commutatif :*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi", "\simeq"'] \arrow[dr, "f"'] & X' \subset Y \times \mathbf{R}^n \arrow[d, "\pi_1"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

où π_1 *est la première projection,* φ *un isomorphisme et le faisceau d'idéaux de* X' *dans* $Y \times \mathbf{R}^n$ *est engendré par un système fini de polynômes en les variables de* $\mathbf{R}^n$ *à coefficients des fonctions analytiques sur* Y. *Un morphisme* $f : X \to Y$ *est dit localement relativement algébrique si tout point* $y \in Y$ *possède un voisinage* U *tel que la restriction de* f *à* $f^{-1}(U)$ *soit relativement algébrique.*

III.2.2. *Exemples.* — *a*) Tout morphisme fini est localement relativement algébrique.

b) Si f est l'éclatement d'un idéal de type fini $I \subset \mathcal{O}_Y$, f est relativement algébrique.

c) Pour tout morphisme localement relativement algébrique f : $X \to Y$, tel que $f^* : \mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,x}$ soit injectif $\forall x \in f^{-1}(y)$, l'hypothèse (H) de II.2.1 est vérifiée en tout point $x \in f'(y)$: les résultats de la partie II sont donc applicables. Considérons $\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^n$ avec des coordonnées $(x) = (x_1,\ldots,x_n)$ sur $\mathbf{R}^n$ et $(y) = (y_1,\ldots,y_p)$ sur $\mathbf{R}^p$.

On dira qu'un sous-ensemble $Z \subset \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^n$ est semi-analytique-algébrique si c'est un sous-ensemble semi-analytique de $\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^n$ décrit à l'aide de fonctions qui sont des polynômes en x.

III.2.3. Proposition (cf. [14], lemmes 3.1 et 3.2). — *Soient* $X \subset \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^n$ *un ensemble semi-analytique-algébrique,* $\varphi : X \to \mathbf{R}^p$ *la restriction à* X *de la première projection,* $Y = \varphi(X)$. *On suppose que* φ *est propre et que* Y *est localement irréductible.*

Il existe alors une partition localement finie $Y = \bigcup_{i \in I} Y_i$ *en parties s.a. connexes et* $\forall i \in I$ *une fonction* $f_i \in N'(Y_i)$ *telle que :*

1) $(y, f_i(y)) \in X$, $\forall y \in Y_i$,

2) *si l'on pose* $x = (y, f_i(y))$, *le morphisme* $\varphi^* : \mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,x}$ *est injectif* $\forall y \in Y_i$.

Remarque. — Pour simplifier les notations, nous avons supposé que Y était localement irréductible; tous les raisonnements qui suivent sont cependant valables sans cette hypothèse, à condition de remplacer comme dans [14] l'application f_i par un nombre fini d'applications f_{ij} de façon à ce que $\varphi^* : \mathcal{O}_{Y,y} \to \prod_j \mathcal{O}_{x,x_j}$ avec $x_j = (y, f_{ij}(y))$ soit injectif.

Démonstration. — Rappelons que Y est semi-analytique dans $\mathbf{R}^p$ (cf. [9]). Le point 2) va résulter du lemme suivant :

III.2.4. Lemme. — *Sous les hypothèses précédentes, il existe un sous-ensemble semi-analytique-algébrique* $X_1 \subset X$ *tel que* $\varphi(X_1) = Y$, *et que* $\forall y \in Y$ *et* $x \in \varphi^{-1}(y) \cap X_1$, *le morphisme* $\varphi^* : \mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X_1,x}$ *soit injectif.*

Démonstration. — Scit d la dimension de Y, Y_d l'ouvert de Y formé des points lisses de dimension d. Il existe alors un ouvert semi-analytique-algébrique de X tel que $\varphi(U) \subset Y_d$, que $\varphi(U)$ soit dense dans Y_d et que $\varphi|U$ soit une submersion de U sur Y_d en tout point de U (cf. [9] pour les propriétés des ensembles semi-analytiques-algébriques).

Il est alors clair que $\forall x \in \bar{U}$ (adhérence de U dans X), si $y = \varphi(x)$, on a $\varphi^* : \mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X_1,x}$ injectif.

Comme φ est supposée propre, on a $\varphi(\bar{U}) = \bar{Y}_d$, et le lemme est démontré par récurrence descendante sur d.

On peut donc remplacer X par X_1 et supposer que $\forall x \in X$, l'application

$$\varphi^* : \mathcal{O}_{Y,\varphi(x)} \to \mathcal{O}_{X,x} \text{ est injective.}$$

Pour démontrer la partie 1), la question est locale sur Y ; on se place donc au voisinage de $0 \in Y$, et on raisonne par récurrence sur n.

1) $n = 1$. Notons (y) les variables sur $\mathbf{R}^p$ et t la variable sur $\mathbf{R}$.

Il existe une partition localement finie $Y = \bigcup_{i \in I} Y_i$ en parties s.a., et pour chaque $i \in I$ un polynôme $P_i(y,t)$ à coefficients analytiques en y tel que si $Z(P_i(y,t))$ désigne l'ensemble des zéros de P_i,

$$Z(P_i(y,t)) \cap (Y_i \times \mathbf{R}) \subset X \text{ (cf. [9]).}$$

Pour chaque $i \in I$, on décompose Y_i en $\cup Y_{ij}$ de manière que pour $y \in Y_{ij}$ le polynôme $P_i(y,t)$ ait un nombre de racines constant ; chacune des racines réelles de $P_i(y,t)$ appartient alors à $N'(Y_{ij})$ (cf. [10], chap II).

2) *Passage de* n *à* $n+1$.

On considère la situation suivante :

$$\begin{tikzcd} X \subset \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^{n+1} \arrow[d, "\varphi'"'] \arrow[d, phantom] & \\ Y' \subset \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^{n} \arrow[d, "\varphi"'] & \\ Y \subset \mathbf{R}^p & \end{tikzcd}$$

où π' et π sont les projections canoniques, φ' et φ les restrictions de π' et π à X et Y'. L'ensemble $Y' = \pi'(X)$ est semi-analytique-algébrique par le théorème de Tarski-Seidenberg (cf. [9]) : on peut donc lui appliquer l'hypothèse de récurrence; il existe ainsi une partition localement finie $Y = \bigcup_{i \in I} Y_i$ et pour chaque $i \in I$ une $f_i : Y_i \to \mathbf{R}^n$ appartenant à $N'(Y_i)^n$, telle que $\Psi(y) = (y, f_i(y)) \in Y'$ pour $y \in Y_i$.

Si l'on pose $Y'_i = \Psi(Y_i)$, Y'_i est semi-analytique dans Y' (puisque c'est le graphe de f_i) ; on peut alors supposer que la partition $Y' = \cup Y''_i$ de Y' donnée par le cas $n = 1$ est compatible avec les Y'_i, et donc que $Y'_i = \bigcup_k Y''_{i_k}$, avec pour chaque k l'existence d'une fonction $g_{i_k} \in N'(Y''_{i_k})$ telle que $(y, f_i(y),\ g_{i_k}(y, f_i(y)) \in X$ pour $y \in Y'_{i_k} = \varphi'(Y''_{i_k})$.

Rappelons (cf. I.2.10) que si Z est semi-analytique dans $\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^n$, $N''(Z)$ désigne la clôture algébrique de $A''(\bar{Z})$ dans $A(Z)$, $A''(\bar{Z})$ étant l'anneau des fonctions analytiques au voisinage de $\bar{Z}$ qui sont des polynômes en $X_1, \ldots, X_p$, et $A(Z)$ l'anneau des fonctions analytiques au voisinage de Z. Il résulte alors immédiatement de la démonstration du cas $n = 1$ que $g_{i_k} \in N''(Y''_{i_k})$.

Il suffit maintenant de voir que $g_{i_k}(y, f_i(y)) \in N'(Y'_{i_k})$; mais $N'(Y'_{i_k})$ est par définition la clôture algébrique de $A(\bar{Y}'_{i_k})$ dans $A(Y'_{i_k})$ (rappelons que les Y'_{i_k} sont connexes) et les composantes de $f_i(y)$ appartiennent à $N'(Y'_{i_k})$ par hypothèse.

D'autre part g_{i_k} vérifie une équation $P_{i_k}(y, x, g_{i_k}(y,x)) = 0$ où (x) sont les coordonnées sur $\mathbf{R}^p$, $(y,x) \in Y''_{i_k}$ et $P_{i,k}(y,x,t)$ un polynôme en (x,t) à coefficients analytiques en y. Si le polynôme en t $P_{i,k}(y, f_i(y), t)$ n'est pas identiquement nul, dans un voisinage de Y'_{i_k} on en déduit que $g_{i,k}(y, f_i(y))$ est algébrique sur $N'(Y'_{i_k})$, et donc appartient à $N'(Y'_{i_k})$.

Si ce polynôme est identiquement nul, il existe un multiindice α tel que $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} P_{i,k}(y, f_i(y), t)$ ne soit pas identiquement nul et que $\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} P_{i_k}(y, x, g_{i_k}(y,x)) = 0$ au voisinage de Y''_{i_k}, et la conclusion est la même. c.q.f.d.

Nous allons maintenant montrer un théorème analogue au théorème 3.3 de [14] qui traite le cas semi-algébrique.

III.2.5 THÉORÈME. — *Soit* $X \subset \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^n$ *un ensemble semi-analytique-algébrique,* $\varphi : X \to \mathbf{R}^p$ *la restriction à* X *de la première projection,* $Y = \varphi(X)$. *Supposons* φ *propre. Il existe alors un sous-ensemble* $Z \subset X$

semi-analytique et une partition localement finie : $Z = \bigcup_{i \in I} Z_i$ *en parties s.a. tels que pour tout* $i \in I$:

1) φ/Z *soit une bijection de* Z *sur* Y, *et les* $Y_i = \varphi(Z_i)$ *sont semi-analytiques et vérifient les propriétés de la proposition* III.1.1 *et de la proposition* III.2.3 (Z_i *est alors l'image de* Y_i *par l'application* $y \to (y, f_i(y))$: *cf.* III.2.3). *De plus il existe un idéal de type fini* I_1 *de* $N'_{R^p \times R^n}(Z_i)$ *qui engendre* $I_z(X)\ \forall z \in Z_i$, *et un idéal de type fini* I'_1 *qui engendre* $I_z(Z_i)\ \forall z \in Z_i$.

2) *Si l'on suppose de plus qu'il existe pour tout* i *un idéal de type fini* I''_1 *de* $N''_{\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^n}(Z_i)$ *qui engendre* $I_z(X)\ \forall z \in Z_i$, *il existe une fonction* $\mu \to e(\mu)$ *de* $\mathbf{N}$ *dans* $\mathbf{N}$ *telle que* $\forall y \in Y_i$:

$$I^{e(\mu)}_{X,Z_i,z} \cap \mathcal{O}_{Y,y} \subset I^{\mu+1}_{Y,y_i,y}, \qquad \textit{avec} \qquad z \in Z_i \qquad \text{et} \qquad \varphi(z) = y.$$

Rappelons que I_{Y,y_i} désigne le faisceau des éléments de $\mathcal{O}_Y$ nuls sur Y_i, et que $\varphi^* : \mathcal{O}_{Y,y} \to \mathcal{O}_{X,x}$ est injectif $\forall x \in Z$ (et $y = \varphi(x)$), car par 1) les $Y_i = \varphi(Z_i)$ vérifient les propriétés de III.2.3.

Démonstration. — Soit $Y = \cup Y_i$ une partition localement finie de Y en parties s.a. satisfaisant à la proposition III.2.3; si l'on pose $g_i(y) = (y, f_i(y)) \in X$ (pour $y \in Y_i$), l'ensemble $Z_i = g_i(Y_i)$ est semi-analytique dans X (comme graphe d'une application analytique), et l'application φ induit un homéomorphisme de Z_i sur Y_i. On pose alors $Z = \cup Z_i$. D'après le théorème I.2.9, il existe une partition localement finie $Z_i = \bigcup_{j \in J} Z'_{ij}$ en ensembles s.a. tels que $\forall j \in J$ il existe un idéal I_1 de type fini de $N'_{\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^n}(Z_i)$ qui engendre $I_z(X)\ \forall z \in Z'_{ij}$. On raisonne maintenant par récurrence sur $\dim Z$ exactement comme dans la démonstration du lemme III.1.1 pour démontrer la partie 1) du théorème (rappelons que les ensembles $\varphi(Z'_{ij})$ sont semi-analytiques puisque ce sont les images inverses d'ensembles semi-analytiques dans $\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^n$ par l'application g_i).

La partie 2) du théorème va résulter de la proposition suivante (cf. [14], démonstration du théorème 3.3 (iX)).

III.2.6. Proposition. — *Sous les hypothèses de* III.2.5, 2), *l'ensemble des* $y \in Y_i$ *tels que* $I^{\nu}_{X,Z_i,z} \cap \mathcal{O}_{Y,y} \not\subset I^{\mu}_{Y,Y_i,y}$ (*pour* μ *et* ν *fixés, et* $\varphi(z) = y$) *est un fermé de Zariski de* Y_i, *identifié à l'ensemble des idéaux maximaux de l'anneau nœthérien* $N'(Y_i)$.

Démonstration. — Introduisons les notations suivantes (l'indice i est fixé) :

I : idéal (de type fini) de $\mathrm{N}'_{\mathbf{R}^n}(\mathrm{Y}_i)$ qui engendre $\mathrm{I}_y(\mathrm{Y})\ \forall y \in \mathrm{Y}_i$.
I' : idéal de $\mathrm{N}'_{\mathbf{R}^n}(\mathrm{Y}_i)$ qui engendre $\mathrm{I}_y(\mathrm{Y}_i)\ \forall y \in \mathrm{Y}_i$.

I''_1 : idéal de $\mathrm{N}''_{\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^n}(\mathrm{Z}_i)$ qui engendre $\mathrm{I}_z(\mathrm{X})$ pour tout $z \in \mathrm{Z}_i$.

Remarquons que φ étant propre, elle induit un morphisme :

$$\bar{\mathrm{Z}}_i \to \bar{\mathrm{Y}}_i = \varphi(\bar{\mathrm{Z}}_i);$$

on en déduit que l'application φ donne par composition un homomorphisme :

$$\mathrm{N}'(\mathrm{Y}_i) \to \mathrm{N}''(\mathrm{Z}_i) \text{ évidemment injectif.}$$

L'hypothèse *a*) du théorème III.2.4, 2) implique aussi que le morphisme :

$$\frac{\mathrm{N}'(\mathrm{Y}_i)}{\mathrm{I}} \to \frac{\mathrm{N}''(\mathrm{Z}_i)}{\mathrm{I}''_1} \text{ est injectif.}$$

On note I''_1 l'idéal de $\mathrm{N}''(\mathrm{Z}_i)$ engendré par I' et les fonctions

$$\mathrm{X}_1 - x^1(y), \ldots, \mathrm{X}_p - x^p(y),$$

où

$$f_i(y) = (x^1(y), \ldots, x^p(y)) \in \mathbf{R}$$

(les f_i sont définies dans III.2.3).

III.2.7. LEMME. — *a*) *Pour tout* $z \in \mathrm{Z}_i$, *l'idéal* $\mathrm{I}_z(\mathrm{Z}_i)$ *des germes analytiques nuls sur* Z_i *au voisinage de* z *est engendré par l'image de* I'_1 *(dans* $\mathcal{O}_{p+n,z}$*),*

b) *le morphisme* θ_ν :

$$\mathrm{N}'(\mathrm{Y}_i) \to \frac{\mathrm{N}''(\mathrm{Z}_i)}{\mathrm{I}''^{\nu}_1} \textit{ est fini.}$$

Démonstration. — *a*) Est immédiat ; pour *b*), il suffit de montrer que le morphisme θ_1 : $\mathrm{N}'(\mathrm{Y}_i) \to \dfrac{\mathrm{N}''(\mathrm{Z}_i)}{\mathrm{I}''_1}$ est surjectif ; cela résulte de ce que si

$h(x,y) \in N''(Z_i)$, $h(f(y),y)$ (avec $f = (f_1,\ldots,f_p)) \in N'(Y_i)$ (cf. la démonstration du lemme III.2.3 ; ceci est faux pour l'anneau $N'(Z_i)$, ce qui explique la nécessité de l'hypothèse 2) dans III.2.5).

III.2.8. Lemme. — *Soient* $y \in Y_i$, $z \in Z_i$ *tel que* $\varphi(z) = y$, M *l'idéal maximal de* $N'(Y_i)$ *correspondant au point* y, M'' *l'idéal maximal de* $N''(Z_i)$ *correspondant au point* z *; les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

a) $I^{v}_{X,Z_i,z} \cap \mathcal{O}_{Y,y} \not\subset I^{\mu}_{Y,Y_i,y}$,

b) $\left(\dfrac{I''_1 + I'^{v}_1}{I''_1}\right)_{M''} \cap \left(\dfrac{N'(Y_i)}{I}\right)_{M} \not\subset \left(\dfrac{I'^{\mu} + I}{I}\right)_{M}$.

Démonstration. — Nous allons montrer que les conditions *a)* et *b)* sont équivalentes à la condition *c)* : $\hat{I}^{v}_{X,Z_i,z} \cap \mathcal{O}_{Y,y} \not\subset \hat{I}^{\mu}_{Y,Y_i,y}$. Le morphisme $\Psi : \dfrac{N'(Y_i)}{I} \to \dfrac{N''(Z_i)}{I''_1 + I'^{v}_1}$ est fini ; il en est de même du morphisme Ψ' : $\left(\dfrac{N'(Y_i)}{I}\right)_M \to \left(\dfrac{N''(Z_i)}{I''_1 + I'^{v}_1}\right)_{M''}$, M'' étant le seul idéal maximal de $N''(Z_i)$ au-dessus de M.

Le complété de $\left(\dfrac{N''(Z_i)}{I''_1 + I'^{v}_1}\right)_{M''}$ est isomorphe à $\hat{\mathcal{O}}_{X,z}/(I_{X,Z_i,z})^{v}$ et le morphisme $\hat{\Psi}'$ s'écrit :

$$\hat{\Psi}' : \hat{\mathcal{O}}_{Y,y} \to \hat{\mathcal{O}}_{X,z}/(\hat{I}_{X,Z_i,z})^{v}$$

on a

$$\ker \Psi' = \left(\frac{I''_1 + I'_1}{I''_1}\right) \cap \left(\frac{N'(Y_i)}{I}\right)_M \quad \text{et} \quad \operatorname{Ker} \hat{\Psi}' = (\hat{I}_{X,Z_i,z})^{v} \cap \hat{\mathcal{O}}_{Y,y}.$$

Le morphisme Ψ' étant fini, on a d'autre part

$$\operatorname{Ker} \hat{\Psi}' = \operatorname{Ker} \Psi \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} \hat{\mathcal{O}}_{Y,y}$$

d'où immédiatement l'équivalence de *a)* et *c)*; on voit de même que *b)* est équivalent à *c)*. c.q.f.d.

Montrons maintenant la proposition III.2.6 : grâce au lemme précédent, l'ensemble des $y \in Y_i$ de la proposition s'identifie à l'ensemble des idéaux maximaux M de $N'(Y_i)$ tels que :

$$\frac{\dfrac{N'(Y_i)}{I} \cap \left(\dfrac{I''_1 + I'_1}{I''_1}\right)^{\nu}}{\left[\dfrac{N'(Y_i)}{I} \cap \left(\dfrac{I''_1 + I'_1}{I''_1}\right)\right] \cap \left[\dfrac{I'^{\mu} + I}{I}\right]_M} \neq (0)$$

c'est donc le support d'un module de type fini sur l'anneau nœthérien $N'(Y_i)$, d'où la proposition. c.q.f.d.

Démontrons maintenant le théorème III.2.5. – Fixons un indice i et un entier $\mu \in \mathbf{N}$. D'après II.3.2, le lemme II.3.6 et le fait que Y est normalement plat le long de Y_i en tout point $y \in Y_i$, il existe pour tout $y \in Y_i$ un entier $e(\mu,y)$ tel que :

$$I^{e(\mu,y)}_{X,Z_i,z} \cap \mathcal{O}_{Y,y} \subset I^{\mu}_{Y,y_i,y}$$

(avec $z \in Z_i$ et $\varphi(z) = y$). Mais si $\nu \in \mathbf{N}$ l'ensemble

$$Z_\nu = \{y \in Y_i : I^{\nu}_{X,Z_i,z} \cap \mathcal{O}_{Y,y} \not\subset I^{\mu}_{Y,Y_i,z}\}$$

est un fermé de Zariski du spectre maximal identifié à Y_i de l'anneau nœthérien $N'(Y_i)$ (III.2.6) ; comme $Z_\nu \supset Z_{\nu+1} \supset \cdots$ et $\bigcap_\nu Z_\nu = \varnothing$, il existe un entier $e(\mu)$ tel que $Z_{e(\mu)} = \varnothing$. c.q.f.d.

On peut se demander si l'hypothèse III.2.4 2), *b*) est toujours vérifiée pour un sous-ensemble semi-analytique-algébrique de $\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^n$. Elle est évidemment vérifiée si en tout point $x \in Z$, le germe $\tilde{X}_x$ du plus petit espace analytique contenant X_x est cohérent, en vertu du lemme suivant :

III.2.9. LEMME (analogue au lemme 1.1 de [14]). – *Soit* $\dot{X} \subset \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^n$ *un ensemble semi-analytique algébrique,* $x \in X$. *Alors* $I_{\mathbf{R}^{n+p},X,x}$ *est engendré par des éléments de* N''_x *(*N''_x *désignant la clôture algébrique de* $\mathcal{O}_{n,x}[X_1,\ldots,X_p]$ *dans* $\mathcal{O}_{n+p,x}$*).*

Démonstration. – On peut supposer $I_{\mathbf{R}^{n+p},X,x} \cap N''_x = \mathcal{P}$ premier. N''_x étant hensélien, $\mathcal{P}\mathcal{O}_{n+p,x}$ est aussi un idéal premier. Si $h = \dim N''_x/\mathcal{P}$, il y a des points y de X lisses de dimension h dans tout voisinage de x (car le théorème de préparation est valable dans N''_x).

$I_{\mathbf{R}^{n+p},X,x}$ est alors un idéal contenant $\mathscr{P}$ et de hauteur $\leqslant n+p-h$ (par le théorème de semi-continuité : (cf. [16], p. 39), d'où

$$I_{\mathbf{R}^{n+p},X,x} = \mathscr{P}\mathcal{O}_{n+p,x}. \qquad \text{c.q.f.d.}$$

3. Applications.

Nous allons d'abord démontrer le théorème III.3.2, résultat qui généralise le théorème 1.7 de [14].

Si $X \subset \mathbf{R}^n$ est un sous-ensemble semi-analytique de $\mathbf{R}^n$, on peut définir sur l'anneau $\mathscr{C}^\infty(X)$ des fonctions $\mathscr{C}^\infty$ sur X une topologie naturelle (cf. [14], § 1) : si $K \subset X$ est un compact semi-analytique, et Ω un voisinage de K, on munit $\mathscr{C}^\infty(K)$ de la topologie quotient de $\mathscr{C}^\infty(\Omega)$, et on munit $\mathscr{C}^\infty(X)$ de la topologie la moins fine rendant continus les morphismes de restriction : $\mathscr{C}^\infty(X) \to \mathscr{C}^\infty(K)$ pour K semi-analytique compact dans X. Si $x \in X$, il y a homomorphisme naturel φ_x : $\mathscr{C}^\infty(X) \to \hat{\mathcal{O}}_{X,x}$ qui provient de l'homomorphisme : $\mathscr{C}^\infty(\Omega) \to \hat{\mathcal{O}}_{X,x}$ (où Ω est un ouvert contenant x) donné par la série de Taylor. Si $f \in \mathscr{C}^\infty(X)$, nous noterons $\hat{f}_x$ l'image de f par φ_x.

On a alors la proposition suivante (cf. [14], proposition 1.6 et [17]).

III.3.1. Proposition. — *Soient* $X \subset \mathbf{R}^p$ *et* $Y \subset \mathbf{R}^n$ *des ensembles semi-analytiques,* $f : X \to Y$ *un morphisme analytique, et soit* $\Psi \in \mathscr{C}^\infty(X)$ *appartenant à l'adhérence de l'image de* $f^* : \mathscr{C}^\infty(Y) \to \mathscr{C}^\infty(X)$. *Alors* $\forall y \in Y$ *la condition suivante est satisfaite :* $(\mathscr{C}_y)$ *: il existe* $\varphi_y \in \hat{\mathcal{O}}_{Y,y}$ *telle que* $\forall x \in f^{-1}(y)$, $\hat{\Psi}_x = \varphi_y \circ \hat{f}_x$, $\hat{f}_x$ *désignant le morphisme* $\hat{\mathcal{O}}_{Y,y} \to \hat{\mathcal{O}}_{X,x}$ *déduit de* f.

On a alors le théorème suivant :

III.3.2. Théorème. — *Soient* $X \subset \mathbf{R}^p$, $Y \subset \mathbf{R}^n$ *des ensembles semi-analytiques,* $\varphi : X \to Y$ *un morphisme propre, surjectif et relativement algébrique* (*cf.* III.2.1.). *Alors l'image par* $\varphi^* : \mathscr{C}^\infty(Y) \to \mathscr{C}^\infty(X)$ *de l'algèbre* $\mathscr{C}^\infty(Y)$ *est fermée dans* $\mathscr{C}^\infty(X)$. *Autrement dit, si* $\Psi \in \mathscr{C}^\infty(X)$ *est telle que pour tout* $y \in Y$ *la condition* $\mathscr{C}_y$ *est satisfaite, il existe* $\Phi \in \mathscr{C}^\infty(Y)$ *telle que* $\Psi = \Phi \circ f$.

Démonstration. — Soit X_1 le plus petit sous-ensemble analytique de $\mathbf{R}^p$ contenant X. Le théorème de désingularisation de Hironaka (cf. [7]) montre qu'il existe un morphisme $\tilde{\varphi} : \tilde{X}_1 \to X_1$ propre, surjectif et relativement algébrique, où de plus $\tilde{X}_1$ est lisse. On peut donc pour démontrer III.3.2 remplacer X par $\tilde{\varphi}^{-1}(X)$ et supposer ainsi que le plus petit espace analytique contenant X est lisse.

Si maintenant on remplace X par le graphe de $\varphi : X' \subset \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^n$, on est dans la situation du théorème III.2.5, l'hypothèse III.2) étant vérifiée puisque un espace lisse est cohérent (cf. III.2.9). La démonstration de Tougeron ([14], § 4, démonstration du théorème 1.7) s'applique maintenant mot pour mot au cas envisagé ici, et nous ne la répéterons pas. c.q.f.d.

Voici une autre application de ce qui précède :

III.3.3. DÉFINITION. — *Soient* A *un sous-ensemble de* $\mathbf{R}^n$, f *une fonction sur* $\mathbf{R}^n$, μ *un entier* > 0. *On dit que* f *est* μ*-faiblement plate sur* X *en* 0 *s'il existe un voisinage* V *de* 0 *dans* $\mathbf{R}^n$ *et une constante* C *tels que* $|f(x)| \leqslant C\|x\|^\mu \ \forall x \in V \cap X$ (*cf.* [13], *définition* 1.4).

On a alors le théorème suivant :

III.3.4. THÉORÈME. — *Soit* $Y \subset \mathbf{R}^n$ *un ensemble analytique compact,* $A \subset Y$ *un sous-ensemble semi-analytique; il existe une fonction de* $\mathbf{N}$ *dans* $\mathbf{N}$: $\mu \to e(\mu)$ *vérifiant la propriété suivante : si* f *est une fonction analytique sur* Y, $e(\mu)$ *faiblement plate* (*sur* Y) *en tout point de* A, *elle est* μ*-plate sur* Y *en tout point de* A (*cf. Définition* II.3.1).

Démonstration. — Il suffit d'appliquer le théorème III.2.5 2) au morphisme $\varphi : \tilde{Y} \to Y$, où φ est une réduction des singularités de Y comme dans [8], (en particulier, φ est relativement algébrique, propre et surjectif). En effet, si f est $e(\mu)$ faiblement plate sur Y en $y \in A$, $f \circ \varphi$ est $e(\mu)$ faiblement plate sur Y en tout point de $\varphi^{-1}(y)$; $\tilde{Y}$ étant lisse, on en déduit que $f \circ \varphi$ est $e(\mu)$-plate sur $\varphi^{-1}(A)$ en tout point de $\varphi^{-1}(A)$; on peut alors appliquer III.2.5 en prenant une partition $Y = \cup Y_i$ de Y compatible avec l'ensemble A. c.q.f.d.

Si on applique III.3.4 au cas où A est réduit à un point y, on voit qu'il existe une fonction $\mu \to e_y(\mu)$ telle que toute fonction f analytique sur Y faiblement $e_y(\mu)$-plate sur Y en y, soit μ-plate en y.

III.3.5. PROBLÈME. — *Cette fonction* $\mu \to e_y(\mu)$ *est-elle localement bornée sur* Y ?

C'est l'espoir (déçu) de pouvoir répondre à ce problème qui a incité l'auteur à entreprendre ce travail.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. S. ABHYANKAR, *Reduction of singularities of embedded algebraic surfaces*, Academic press.

[2] E. BIERSTONE et P. D. MILMAN, Composite differentiable functions, preprint, University of Toronto (à paraître *aux Annales of Math.*).

[3] T. BLOOM et J. J. RISLER, Familles de courbes sur les germes d'espaces analytiques, *Bull. Soc. Math. France*, 105 (1977), 261-280.

[4] J. FRISCH, Points de platitude d'un morphisme d'espaces analytiques complexes, *Inventiones Math.*, 4 (1967), 118-138.

[5] A. M. GABRIELOV, The formal relations between analytic functions, *Funct. Anal. and Appl.*, t. 5 (1971), 318-319.

[6] A. M. GABRIELOV, Formal relations between analytic functions, *Math. USSR-Izvetja*, t. 7 (1973), 1056-1088.

[7] G. GLAESER, Fonctions composées différentiables, *Ann. of Math.*, (1963), 193-209.

[8] H. HIRONAKA, Introduction to real-analytic sets and real-analytic maps, cours à l'université de Pise (1973).

[9] S. LOJASIEWICZ, *Ensembles semi-analytiques*, n° A 66765, École Polytechnique, Paris (1965).

[10] J. MERRIEN, Faisceaux analytiques semi-cohérents, *Ann. Inst. Fourier*, 30, 4 (1980), 165-219.

[11] M. NAGATA, *Local Rings*, Interscience publishers.

[12] J. J. RISLER, Sur l'anneau des fonctions de Nash globales, *Ann. de l'E.N.S.*, 8 (1975), 365-378.

[13] J. J. RISLER, Sur la divisibilité des fonctions de classe $\mathscr{C}^r$, *Bull. Soc. Math. France*, t. 105 (1977), 97-112.

[14] J. C. TOUGERON, Fonctions composées différentiables : cas algébrique, *Ann. Inst. Fourier*, 30, 4 (1980), 51-74.

[15] J. C. TOUGERON, Courbes analytiques sur un germe d'espace analytique et applications, *Ann. Inst. Fourier*, 26, 2 (1976), 117-131.

[16] J. C. TOUGERON, Idéaux de fonctions différentiables, Springer, Berlin (1972).

[17] J. C. TOUGERON, An extension of Whitney's spectral theorem, *Publ. Math. Inst. Hautes études Sci.*, n° 40 (1971).

[18] O. ZARISKI, *Modules de branches planes*, École Polytechnique (Palaiseau) (1976).

Manuscrit reçu le 4 mai 1981.

Jean-Jacques RISLER,
Université de Paris VII
U.E.R., de Mathématiques
Tours 45-55, 5e étage
2, place Jussieu
75251 Paris Cedex 05.